УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1) $2xy'y'' = y'^2 - 1$

• Уравнение не содержит в явном виде искомую функцию $y(x)$.

$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'$

$2xpp' = p^2 - 1$

$\frac{2pdp}{p^2-1} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|p^2-1| = \ln|x| + \ln|C_1| \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad p^2 - 1 = C_1 x \quad \Rightarrow \quad y'^2 - 1 = C_1 x \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{C_1 x + 1} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\int \sqrt{C_1 x + 1}\,dx = \pm\frac{1}{C_1}\frac{2}{3}(C_1 x + 1)^{\frac{3}{2}} + C_2$ •

2) $y'^2 + 2yy'' = 0$

• Уравнение не содержит в явном виде независимую переменную x.

$y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = p \cdot p'$

$p^2 + 2ypp' = 0$

$\frac{2pdp}{p^2} = -\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|p^2| = \ln\left|\frac{C_1}{y}\right| \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad p^2 = \frac{C_1}{y} \quad \Rightarrow \quad p = \pm\sqrt{\frac{C_1}{y}} \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\frac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{y}} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \sqrt{y}dy = \pm\sqrt{C_1}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{C_1}x + C_2$ •

3) $y''' = y''^2$

• $y'' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y''' = p'$

$p' = p^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p^2} = dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{p} = x + C_1 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad p = -\frac{1}{x + C_1} \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{1}{x + C_1} \quad \Rightarrow$

$y' = -\ln|x + C_1| + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = -\int(\ln|x + C_1| - C_2)dx + C_3 =$

$= \left\| \begin{matrix} u = \ln|x + C_1| \\ dv = dx \end{matrix} \middle| \begin{matrix} du = \frac{1}{x + C_1} \\ v = x \end{matrix} \right\| =$

$= -(x\ln|x + C_1| - \int \frac{x}{x + C_1}dx - C_2 x) + C_3 =$

$= -x\ln|x+C_1| + x - C_1\ln|x+C_1| + C_2x + C_3$ •

4) $x^2y'' = y'^2$

• $y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'$

$x^2p' = p^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p^2} = \frac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{p} = -\frac{1}{x} - C_1 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad p = \frac{x}{1+C_1x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x}{1+C_1x} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y = \int \frac{xdx}{1+C_1x} + C_2 = \frac{1}{C_1}\left(x - \frac{1}{C_1}\ln\left|x + \frac{1}{C_1}\right|\right) + C_2$ •

5) $yy'' + 1 = y'^2$

• $y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = pp'$

$ypp' + 1 = p^2$

$\frac{pdp}{p^2-1} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln|p^2-1| = \ln|C_1y| \quad \Rightarrow \quad p^2 - 1 = C_1^2y^2 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{C_1^2y^2+1} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{C_1^2y^2+1}} = \pm dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_1}\ln\left|y + \sqrt{y^2 + \frac{1}{C_1^2}}\right| = \pm x + C_2$ •

6) $y''^2 = y'^2 + 1$

• $y' = p(y) \ \Rightarrow \quad y'' = pp'$

$(pp')^2 = p^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad (p')^2 = \frac{p^2+1}{p^2} \quad \Rightarrow \quad p' = \pm\sqrt{\frac{p^2+1}{p^2}} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{p^2}{p^2+1}}dp = \pm dy \ \Rightarrow \quad \frac{pdp}{\sqrt{p^2+1}} = \pm dy \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d(p^2+1)}{\sqrt{p^2+1}} = \pm y + C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \sqrt{p^2+1} = \pm y + C_1 \quad \Rightarrow \quad p^2 + 1 = (C_1 \pm y)^2 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad p^2 = (C_1 \pm y)^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \pm\frac{dy}{\sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1}} = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{d(C_1 \pm y)}{\sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1}} = dx \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \ln\left|C_1 \pm y + \sqrt{(C_1 \pm y)^2 - 1}\right| = x + C_2$ •

1) $y^3 y'' = 1$;

2) $y'' = 2yy'$;

3) $y''(e^x + 1) + y' = 0$;

4) $yy'' = y'^2 - y'^3$;

5) $2yy'' = y^2 + y'^2$.

Решить уравнения **421**—**450**.

421. $x^2 y'' = y'^2$.

422. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

423. $y^3 y'' = 1$.

424. $y'^2 + 2yy'' = 0$.

425. $y'' = 2yy'$.

426. $yy'' + 1 = y'^2$.

427. $y''(\mathrm{e}^x + 1) + y' = 0$.

428. $y''' = y''^2$.

429. $yy'' = y'^2 - y'^3$.

430. $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$.

431. $2yy'' = y^2 + y'^2$.

432. $y''^3 + xy'' = 2y'$.

433. $y''^2 + y' = xy''$.

434. $y'' + y'^2 = 2\mathrm{c}^{-y}$.

435. $xy''' = y'' - xy''$.

436. $y''^2 = y'^2 + 1$.

437. $y'' = \mathrm{e}^y$.

438. $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$.

439. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.

440. $y^4 - y^3 y'' = 1$.

441. $y'^2 = (3y - 2y')y''$.

442. $y''(2y' + x) = 1$.

443. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0$.

444. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$.

445. $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$.

446. $(y' + 2y)y'' = y'^2$.

447. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$.

448. $y'''y'^2 = y''^3$.

449. $yy'' + y = y'^2$.

450. $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$.