УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

$$\boxed{y' = P(x)y + Q(x)y^m;\ z = \frac{1}{y^{m-1}}}$$

1) $y' + 4xy = 2e^{-x^2}\sqrt{y}$

• $y(x) = u(x)v(x)$

$u'v + uv' + 4xuv = 2e^{-x^2}\sqrt{uv}$

$u' + 4xu = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -4xdx \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -2x^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{u = e^{-2x^2}}.$

$e^{-2x^2}v' = 2e^{-x^2}\sqrt{e^{-2x^2}v} \quad \Rightarrow \quad v' = 2\sqrt{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{v}} = 2dx \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{v} = 2x + 2C \quad \Rightarrow \quad \underline{v = (x+C)^2}.$

$y = e^{-2x^2}(x+C)^2$ •

2) $y' = yctgx + \frac{y^3}{\sin x}$

• $y = uv$

$u'v + uv' = uvctgx + \frac{(uv)^3}{\sin x}$

$u' - uctgx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = ctgxdx \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = \ln|\sin x| \quad \Rightarrow \quad \underline{u = \sin x};$

$\sin xv' = \frac{\sin^3 xv^3}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad v' = \sin xv^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v^3} = \sin xdx \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}v^{-2} = -\cos x - C \quad \Rightarrow \quad v^{-2} = 2\cos x + 2C \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \underline{v^2 = \frac{1}{2\cos x + 2C}}. \qquad y^2 = \frac{\sin^2 x}{2\cos x + 2C}$ •

3) $y' + 2xy = 2x^3 y^3$

• $y = uv$

$u'v + uv' + 2xuv = 2x^3 u^3 v^3$

$$u' + 2xu = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -2xdx \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -x^2 \Rightarrow \quad \underline{u = e^{-x^2}};$$

$$e^{-x^2} v' = 2x^3 e^{-3x^2} v^3 \quad \Rightarrow \quad v' = 2x^3 e^{-2x^2} v^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v^3} = 2x^3 e^{-2x^2} dx \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2v^2} = \int 2x^3 e^{-2x^2} dx =$$

$$\| \int 2x^3 e^{-2x^2} dx = \left\| \begin{array}{l|l} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = 2xe^{-2x^2} dx & v = -\frac{1}{2} e^{-2x^2} \end{array} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x^2} x^2 + \int xe^{-2x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2x^2} x^2 - \frac{1}{4} e^{-2x^2} + C = -e^{-2x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right) + C \ \|$$

$$-\frac{1}{2v^2} = -\frac{1}{2} e^{-2x^2} (x^2 + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} C \quad \Rightarrow \quad \underline{v^2 = \frac{1}{e^{-2x^2}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) + C}};$$

$$y^2 = e^{-2x^2} \frac{1}{e^{-2x^2}\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) + C} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2} + e^{2x^2} C} \ •$$

4) $y^{n-1}(ay' + y) = x$

• $y = uv$

$$au'v + auv' + uv = \frac{x}{(uv)^{n-1}}$$

$$au' + u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{a} \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -\frac{1}{a} x \quad \Rightarrow \quad \underline{u = e^{-\frac{x}{a}}};$$

$$ae^{-\frac{x}{a}}v' = \frac{x}{v^{n-1}}e^{\frac{x}{a}(n-1)} \quad \Rightarrow \quad av' = \frac{x}{v^{n-1}}e^{\frac{nx}{a}} \quad \Rightarrow \quad v^{n-1}dv = \frac{xe^{\frac{nx}{a}}}{a}dx \ \Rightarrow$$

$$\frac{v^n}{n} = \int \frac{xe^{\frac{nx}{a}}}{a}dx + C$$

$$\| \int \frac{xe^{\frac{nx}{a}}}{a}dx = \left\| \begin{matrix} u = x \\ dv = \frac{e^{\frac{nx}{a}}dx}{a} \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} du = dx \\ v = \frac{e^{\frac{nx}{a}}}{n} \end{matrix} \right\| = \frac{xe^{\frac{nx}{a}}}{n} - \int \frac{e^{\frac{nx}{a}}}{n}dx = x\frac{e^{\frac{nx}{a}}}{n} - \frac{a}{n^2}e^{\frac{nx}{a}} + C =$$

$$= e^{\frac{nx}{a}}\left(\frac{x}{n} - \frac{a}{n^2}\right) + C.$$

$$v^n = ne^{\frac{nx}{a}}\left(\frac{x}{n} - \frac{a}{n^2}\right) + nC$$

$$y^n = ne^{-\frac{nx}{a}}\left(C + n\left(\frac{x}{n} - \frac{a}{n^2}\right)\right) \bullet$$

В некоторых случаях, когда исходное дифференциальное уравнение не является уравнением Бернулли относительно функции $y = y(x)$, его можно пытаться рассматривать как уравнение Бернулли относительно функции $x = x(y)$, подобно тому как это было продемонстрировано для линейных уравнений.

5) $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3 y\right)dy = 0$

$$\bullet \ \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{1}{2}x^3 y - x}{y} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{x}{y}; \qquad x = uv$$

$$u'v + uv' = \frac{1}{2}u^3v^3 - \frac{uv}{y}$$

$$u' + \frac{u}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -\ln|y| \quad \Rightarrow \quad \underline{u = \frac{1}{y}};$$

$$\frac{1}{y}v' = \frac{1}{2y^3}v^3 \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{1}{2y^2}v^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v^3} = \frac{1}{2y^2}dy \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2v^2} = -\frac{1}{2y} - \frac{1}{2C} \quad \Rightarrow \quad \underline{v^2 = \frac{Cy}{1+y}};$$

$$x^2 = \frac{1}{y^2}\frac{Cy}{1+y} = \frac{C}{y(1+y)} \bullet$$

6) $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos y + \sin 2y}$

$\bullet \ \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^2 \cos y + \sin 2y}{2x}; \qquad x = uv$

$$u'v + uv' = \frac{u^2v^2 \cos y + \sin 2y}{2uv} = \frac{uv \cos y}{2} + \frac{\sin 2y}{2uv}$$

$$u' - \frac{u \cos y}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{\cos y}{2}dy \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = \frac{1}{2}\sin y \Rightarrow \quad \underline{u = e^{\frac{1}{2}\sin y}};$$

$$e^{\frac{1}{2}\sin y}v' = \frac{\sin 2y}{2e^{\frac{1}{2}\sin y}v} \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{\sin 2y}{2e^{\sin y}v} \quad \Rightarrow \quad vdv = \frac{\sin 2y e^{-\sin y}}{2}dy;$$

$$\int \frac{\sin 2y e^{-\sin y}}{2}dy = \int \frac{2\sin y \cos y \cdot e^{-\sin y}}{2}dy =$$

$\| \ \sin y = z \ \|$

$$= \int z e^{-z} dz = \left\| \begin{matrix} u = z & du = dz \\ dv = e^{-z}dz & v = -e^{-z} \end{matrix} \right\| = -ze^{-z} + \int e^{-z}dz = -ze^{-z} - e^{-z} + C =$$

$$= -\sin y e^{-\sin y} - e^{-\sin y} + C = -e^{-\sin y}(\sin y + 1) + C;$$

$$\underline{\frac{v^2}{2} = -e^{-\sin y}(\sin y + 1) + C}.$$

$$x^2 = e^{\sin y}(-2e^{-\sin y}(\sin y + 1) + 2C) \bullet$$

1) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$;

3) $xy' + y = y^2 \ln x$;

2) $xdx = (\frac{x^2}{y} - y^3)dy$;

4) $y' - y\,tgx + y^2 \cos x = 0$.

В задачах **167—171**, найдя путем подбора частное решение, привести данные уравнения Риккати к уравнениям Бернулли и решить их.

167. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$.

168. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$.

169. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$.

170. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$.

171. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$.