## УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА

Решить уравнения, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения были полными производными.

**1)** $yy''' = y'y'' \,|:\, y''y$

• $\dfrac{y'''}{y''} = \dfrac{y'}{y} \quad \Rightarrow \quad (\ln y'')' = (\ln y)' \quad \Rightarrow \quad \ln y'' = \ln y + \ln C_1 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y'' = C_1 y$

$y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = pp'$

$pp' = C_1 y \quad \Rightarrow \quad pdp = C_1 ydy \quad \Rightarrow \quad p^2 = C_1 y^2 + C_2 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{C_1 y^2 + C_2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{\sqrt{C_1} \cdot \sqrt{y^2 + \dfrac{C_2}{C_1}}} = \pm dx \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{C_1}} \ln\left| y + \sqrt{y^2 + \dfrac{C_2}{C_1}} \right| = \pm x + C_3$ •

**2)** $yy'' + y'^2 = 1$

• $(yy')' = (x)' \quad \Rightarrow \quad yy' = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad ydy = (x + C_1)dx \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$ •

**3)** $yy'' = y'(y'+1) \,|:\, (y'+1) : y$

• $\dfrac{y''}{y'+1} = \dfrac{y'}{y} \quad \Rightarrow \quad (\ln|y'+1|)' = (\ln|y|)' \quad \Rightarrow \quad y' + 1 = C_1 y \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{C_1 y - 1} = dx \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{C_1} \ln\left| y - \dfrac{1}{C_1} \right| = x + C_2$ •

**4)** $y'y''' = 2y''^2$

• $\dfrac{y'''}{y''} = 2\dfrac{y''}{y'} \quad \Rightarrow \quad (\ln|y''|)' = (2\ln|y'|)' \quad \Rightarrow \quad y'' = y'^2 \cdot C_1;$

$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'$

$p' = p^2 C_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dp}{p^2} = C_1 dx \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{p} = C_1 x + C_2 \quad \Rightarrow \quad p = -\dfrac{1}{C_1 x + C_2} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y' = -\dfrac{1}{C_1 x + C_2} \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{1}{C_1} \ln|C_1 x + C_2| + C_3$ •

**S 5)** $5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0$

• $5\frac{y'''}{y''} = 3\frac{y^{IV}}{y'''} \quad \Rightarrow \quad 5(\ln|y''|)' = 3(\ln|y'''|)' \quad \Rightarrow \quad (y'')^5 = (y''')^3 \cdot C_1;$

$y'' = p(x)$

$$p^5 = (p')^3 C_1 \quad \Rightarrow \quad p' = C_1^{-\frac{1}{3}} p^{\frac{5}{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p^{\frac{5}{3}}} = C_1^{-\frac{1}{3}} dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(-\frac{3}{2}\right) p^{-\frac{2}{3}} = C_1^{-\frac{1}{3}} x + C_2 \quad \Rightarrow \quad p^{-\frac{2}{3}} = \overline{C_1} x + \overline{C_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y'' = (\overline{C_1} x + \overline{C_2})^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad y' = (\overline{C_1} x + \overline{C_2})^{-\frac{1}{2}} (-\frac{2}{\overline{C_1}}) + C_3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{4}{(\overline{C_1})^2} (\overline{C_1} x + \overline{C_2})^{\frac{1}{2}} + C_3 x + C_4 \bullet$$

Понизить порядок дифференциальных уравнений используя их однородность и решить.

**6)** $xyy'' - xy'^2 = yy'$

• $y = e^{\int z dx} \quad \Rightarrow \quad y' = e^{\int z dx} \cdot z \quad \Rightarrow \quad y'' = (e^{\int Z dx} \cdot z)' = e^{\int Z dx} \cdot z^2 + e^{\int z dx} \cdot z';$

$$x(z^2 + z') - xz^2 = z \quad \Rightarrow \quad xz' = z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln z = \ln x + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad z = C_1 x;$$

$$y = e^{\int C_1 x dx} = e^{\frac{C_1}{2} x^2 + C_2} \bullet$$

**7)** $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$

• $y = e^{\int z dx}$

$$(x^2 + 1)(z^2 - (z^2 + z')) = xz \quad \Rightarrow \quad -(x^2 + 1)z' = xz \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -\frac{x dx}{x^2 + 1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|z| = -\frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 1\right| + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad y = e^{\int C_1 (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} dx} = e^{C_1 \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C_2} \bullet$$

**8)** $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$

• $y = e^{\int z dx}$

$$x(z^2+z')+xz^2=2z \quad \Rightarrow \quad x(z'+2z^2)=2z \quad \Rightarrow \quad \frac{z'+2z^2}{2z}=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z'}{2z}+z=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad z'+2z^2=\frac{2z}{x};$$

$z=uv$

$$u'v+uv'+2u^2v^2=\frac{2uv}{x};$$

$$u'=\frac{2u}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u}=\frac{2dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \underline{u=x^2};$$

$$x^2v'+2x^4v^2=0 \quad \Rightarrow \quad v'+2x^2v^2=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v^2}=-2x^2dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{v}=-\frac{2}{3}x^3-C_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{v=\frac{1}{\frac{2}{3}x^3+C_1}};$$

$$z=\frac{x^2}{\frac{2}{3}x^3+C_1}; \qquad y=e^{\int\frac{x^2dx}{\frac{2}{3}x^3+C_1}}=e^{\frac{1}{2}\ln\left|x^3+C_1\cdot\frac{3}{2}\right|+C_2} \bullet$$

**1)** $yy''=y'^2+15y^2\sqrt{x}$; **3)** $y''^2-y'y'''=\left(\frac{y'}{x}\right)^2 \;|:(y')^2$;

**2)** $x^2yy''=(y-xy')^2$; **4)** $y'^2+2xyy''=0$.

В задачах **463—480** понизить порядок данных уравнений, пользуясь их однородностью, и решить эти уравнения.

**463.** $xyy''-xy'^2=yy'$. **464.** $yy''=y'^2+15y^2\sqrt{x}$.

**465.** $(x^2+1)(y'^2-yy'')=xyy'$.

**466.** $xyy''+xy'^2=2yy'$. **467.** $x^2yy''=(y-xy')^2$.

**468.** $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$.

**469.** $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.

**470.** $x^2yy'' + y'^2 = 0$.

**471.** $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$.

**472.** $xyy'' = y'(y + y')$.

**473.** $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$.

**474.** $x^3y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$.

**475.** $\frac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x}$.

**476.** $y'' = \left(2xy - \frac{5}{x}\right) y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$.

**477.** $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'$.

**478.** $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}$.

**479.** $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1$.

**480.** $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$.

В задачах **481—500**, понизив порядок данных уравнений, свести их к уравнениям первого порядка.

**481.** $y''(3 + yy'^2) = y'^4$. **482.** $y''^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

**483.** $yy' + 2x^2y'' = xy'^2$. **484.** $y'^2 + 2xyy'' = 0$.

**485.** $2xy^2(xy'' + y') + 1 = 0$.

**486.** $x(y'' + y'^2) = y'^2 + y'$.

**487.** $y^2(y'y''' - 2y''^2) = y'^4$.

**488.** $y(2xy'' + y') = xy'^2 + 1$.

**489.** $y'' + 2yy'^2 = \left(2x + \frac{1}{x}\right) y'$.

**490.** $y'y''' = y''^2 + y'^2y''$. **491.** $yy'' = y'^2 + 2xy^2$.

**492.** $y''^4 = y'^5 - yy'^3y''$. **493.** $2yy''' = y'$.

**494.** $y'''y'^2 = 1$. **495.** $y^2y''' = y'^3$.

**496.** $x^2yy'' + 1 = (1 - y)xy'$.

**497.** $yy'y''' + 2y'^2y'' = 3yy''^2$.

**498.** $(y'y''' - 3y''^2)y = y'^5$.

**499.** $y^2(y'y''' - 2y''^2) = yy'^2y'' + 2y'^4$.

**500.** $x^2(y^2y''' - y'^3) = 2y^2y' - 3xyy'^2$.