Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

ЛДОУ n-го порядка имеет вид

$$y^{(n)}(x)+a_1 y^{(n-1)}(x)+a_2 y^{(n-2)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'(x)+a_n y(x)=0.$$

Здесь все коэффициенты a_i-const. Общее решение ЛДУ ищется методом Эйлера, т.е. $y=e^{kx}$. Тогда характеристическое уравнение имеет следующую структуру

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0.$$

В этом случае корнями характеристического уравнения могут быть:

1. Действительные и различные $k_1,k_2,\ldots,k_m$, $m<n$.
2. Действительные и кратные $-k_1=k_2=\ldots=k_m$.
3. Комплексные попарно сопряженные $k_{1,2}=\alpha\neq\beta i$ кратности m, т.е. имеется m-пар $\alpha\neq\beta i$.
4. Комплексные и различные типа $k_1=\alpha_1+\beta_1 i$; $k_2=\alpha_1-\beta_1 i$; $k_3=\alpha_2+\beta_2 i$; $k_4=\alpha_2-\beta_2 i$ и т.д.. $k_{2m-1}=\alpha_m+\beta_m i$, $k_{2m}=\alpha_m-\beta_m i$

Тогда остальные корни $n-m$ могут быть для типа 1 корнями типа 2,3,4 и т.д. Отметим, что для 3, количество корней отличных от 3, есть $n-2m$.

Структуры решений для приведенных видов корней запишутся так:

для типа 1 имеем

$$y_m(x)=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+\ldots+C_me^{k_mx},$$

для типа 2

$$y_m(x)=e^{kx}\left(C_1+C_2+C_3x^2+\ldots+C_mx^{m-1}\right),$$

для типа 3

$$y_{2m}(x)=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x+xC_3\cos\beta x+xC_4\sin\beta x+\ldots+$$
$$+C_{2m-1}x^{m-1}\cos\beta x+C_{2m}x^{m-1}\sin\beta x).$$

для типа 4

$$y_{2m}(x)=e^{\alpha_1 x}(C_1\cos\beta_1 x+C_2\sin\beta_1 x)+e^{\alpha_2 x}(C_3\cos\beta_2 x+C_4\sin\beta_2 x)+\ldots+$$
$$+e^{\alpha_m x}(C_{2m-1}\cos\beta_m x+C_{2m}\sin\beta x).$$

Общее решение неоднородного ЛДУ состоит из общего решения ОЛДУ и частного решения НЛДУ, т.е.

$$y_{ону}=y_{oo}^{(x)}+y_{чну}^{(x)}.$$

Метод нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения

Метод вариации произвольных постоянных.

$y'_ч=C'_1y_1+C'_2y_2+C_1y'_1+C_2y'_2$. Требуем в силу независимости функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ выполнения условия

$$C'_1y_1+C'_2y_2=0\text{, тогда } y'_ч=C'_1y_1+C_2y'_2.$$

Определим $y''_ч=C'_1y'_1+C'_2y'_2+C'_1y'_1+C'_2y'_2+C_1y''_1+C_2y''_2$. Подстановка в НЛДУ приводит к уравнению

$$C'_1y'_1+C'_2y'_2+C_1(y''_1+py'_1+qy_1)+C_2(y''_2+py'_2+qy_2)=f(x).$$

Так как $y''_1+py'_1+qy_1=0$ и $y''_2+py'_2+qy_2=0$, имеем $C'_1y'_1+C'_2y'_2=f(x)$. Тогда система ЛДУ для определения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ запишется так:

1. $\left.\begin{array}{l}C'_1y_1+C'_2y_2=0\\ C'_1y'_1+C'_2y'_2=f(x)\end{array}\right\}$; $C'_1(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & y_2\\ f(x) & y'_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y'_1 & y'_2\end{vmatrix}}=\dfrac{-y_2f(x)}{y_1y'_2-y_2y'_1}$; $C'_2(x)=\dfrac{y_1f(x)}{y_1y'_2-y_2y'_1}$;

$C_1(x)=-\int\dfrac{y_2f(x)}{y_1y'_2-y_2y'_1}dx$; $C_2(x)=\int\dfrac{y_1f(x)}{y_1y'_2-y_2y'_1}dx$.

Суммируя $y_{чн}$ и y_{oo} получим общее решение НЛДУ

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y_1\int\frac{-y_2f(x)}{W(x)}dx+y_2\int\frac{y_1f(x)}{W(x)}dx.$$

Для нахождения частного решения НЛДУ формируются начальные условия, т.е. из множества интегральных кривых выбирается кривая (единственная), проходящая через точку $(x_0; y_0)$ и удовлетворяющая условиям:
При $x = x_0$: $y(x_0) = y_0$

$y'(x_0) = y'_0$, т.е. к точке $(x_0; y_0)$ интегральная кривая должна иметь угол наклона касательной равный $tg\alpha = y'_0$.

Тогда $\left.\begin{matrix} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + y_ч(x_0) = y_0 \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + y'_ч(x_0) = y'_0 \end{matrix}\right\}$

или

$$\overline{C}_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 - y_ч(x_0) & y_2(x_0) \\ y_0 - y'_ч(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}}; \ \overline{C}_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 - y_ч(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_0 - y'_ч(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}}.$$

Частное решение НЛДУ представляется так:

$$y(x) = \overline{C}_1 y_1(x) + \overline{C}_2 y_2(x) + y_1(x)\int \frac{-y_2(x) f(x)}{W(x)} dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} dx.$$

Пример:

$$y'' - 5y' + 6y = 4\sin 2x.$$

I. $k^2 - 5k + 6 = 0$,

$k_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$.

$y_{0,0}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

II. $y_{чну} = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) e^{3x}$.

$$\begin{cases} c'_1 e^{2x} + c'_2 e^{3x} = 0 \\ c'_1 2e^{2x} + c'_2 3e^{3x} = 4\sin 2x \end{cases};$$

$$C'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 4\sin 2x & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = -4e^{-2x}\sin 2x; \quad C'_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 4\sin 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = 4e^{-3x}\sin 2x;$$

$$C_1=-\int 4e^{-2x}\sin 2x dx = e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x);$$

$$C_2=\int 4e^{-3x}\sin 2x dx=-\frac{4}{13}e^{-3x}(3\sin 2x+2\cos 2x);$$

$$y_{он}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+e^{2x}e^{-2x}(\sin 2x+\cos 2x)-e^{3x}\frac{4}{13}e^{-3x}(3\sin 2x+2\cos 2x);$$

$$y_{он}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\sin 2x\left(1-\frac{12}{13}\right)+\cos 2x\left(1-\frac{8}{13}\right);$$

$$y_{он}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\frac{1}{13}\sin 2x+\frac{5}{13}\cos 2x.$$

По виду правой части

Рассмотрим наиболее часто используемые виды для правых частей ЛДУ, структура которых обобщает ряд частных случаев.

II. Пусть уравнение имеет в правой части функцию вида

$y''+py'+qy=0$; $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$; $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени, т.е. $P_n(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_nx^n$.

$y_{чн}$ выбирается в виде правой части, т.е.

$$y_{чн}=Q_n(x)e^{\alpha x}\,Q_n(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_nx^n.$$

Здесь коэффициенты B_i – известные, а A_i – коэффициенты, подлежащие определению. Внесем $y_{чн}$ в ЛДНУ.

$$y'_{чн}=Q'_ne^{\alpha x}+\alpha Q_ne^{\alpha x};\ y''_{чн}=Q''_ne^{\alpha x}+Q'_n\alpha e^{\alpha x}+\alpha Q'_ne^{\alpha x}+\alpha^2Q_ne^{\alpha x};$$

$$y'_{чн}=(Q'_n+\alpha Q_n)e^{\alpha x};\ y''_{чн}=(Q''_n+2\alpha Q'_n+\alpha^2Q_n)e^{\alpha x};$$

$$\left[Q''_n+Q'_n(2\alpha+p)+(\alpha^2+p\alpha+q)\right]e^{\alpha x}=P_n(x)e^{\alpha x}$$ или

$Q''_n+(2\alpha+p)Q'_n+(\alpha^2+p\alpha+q)Q_n=P_n$. Анализ полученного алгебраического уравнения позволяет определить выбор $y_{чн}$.

1. Так, если α в правой части, показатель экспоненты не равен корням k_1, k_2 характеристического уравнения, то $y_{чн}$ выбирается в виде

$$y_{чн}=Q_n(x)e^{\alpha x},$$

где $Q_n(x)$ многочлен той же степени, что и $P_n(x)$.

2. Если α будет равен одному из корней k_1 или k_2, тогда

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0 \text{ и уравнение примет вид } Q_n'' + Q_n'(2\alpha + p) = P_n(x).$$

Выражение слева – есть многочлен $n-1$ степени, а справа – многочлен $n-$ой степени. Для их уравнивания $y_{чн}$ необходимо выбрать в виде $y_{чн} = xQ_n(x)e^{\alpha x}$.

4. Если корни характеристического уравнения кратные, т.е. двукратный $\alpha = k_1 = k_2 = k$, тогда $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ и $2\alpha + p = 0$ и уравнение имеет вид $Q_n'' = P_n(x)$. Для уравнения степеней слева и справа равенства, необходимо $y_{чн}$ выбрать в виде

$$y_{чн} = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

Коэффициенты A_i определяются из алгебраических уравнений, получаемых из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях «x» в левой и правой части уравнений.

Итак: $y_{чн} = e^{\alpha x}\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n\right)$;

$$y_{чн}' = \alpha e^{\alpha x}\left(A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n\right) + e^{\alpha x}\left(A_1 + 2xA_2 + 3x^2A_3 + \ldots + nx^{n-1}A_n\right);$$

$$y_{чн}'' = \alpha^2 e^{\alpha x}\left(A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n\right) + \alpha e^{\alpha x}\left(A_1 + 2xA_2 + 3x^2A_3 + \ldots + nx^{n-1}A_n\right) +$$
$$+ \alpha e^{\alpha x}\left(A_1 + 2xA_2 + 3x^2A_3 + \ldots + nx^{n-1}A_n\right) + e^{\alpha x}\left(2A_2 + 6xA_3 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}A_n\right).$$

Внесем $y_{чн}(x)$, $y_{чн}'(x)$; $y_{чн}''(x)$ в уравнение

$$y''(x) + py'(x) + qy = f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}.$$

Получим:

$$\left[\alpha^2\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n\right) + 2\alpha\left(A_1 + 2xA_2 + 3x^2A_3 + \ldots + nx^{n-1}A_n\right) +\right.$$
$$\left. + \left(2A_2 + 6xA_3 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}A_n\right)\right]e^{\alpha x} + P\left[\alpha\left(A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \ldots + x^nA_n\right) +\right.$$
$$\left. + \left(A_1 + 2xA_2 + 3x^2A_3 + \ldots + nx^{n-1}A_n\right)\right]e^{\alpha x} + q\left[A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \ldots + x^nA_n\right]e^{\alpha x} =$$
$$= \left(B_0 + B_1x + \ldots + B_nx^n\right)e^{\alpha x};$$

1. x^0: $\alpha^2A_0 + 2\alpha A_1 + 2A_2 + p(\alpha A_0 + A_1) + qA_0 = B_0$;

4. $x^1: \alpha^2 A_1 + 4\alpha A_2 + 6A_3 + p(\alpha A_1 + 2A_2) + qA_1 = B_1$;

5. $x^2: \alpha^2 A_2 + 6\alpha A_3 + 12\alpha A_4 + p(\alpha A_2 + 3A_3) + qA_2 = B_2$ и т.д.

Количество уравнений равно «$n+1$», т.к. $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Если $n = 0$. $P_0(x) = B_0$: $\alpha^2 A_0 + p\alpha A_0 + qA_0 = B_0$; $A_0 = \dfrac{B_0}{\alpha^2 + p\alpha + q}$.

$n = 1$. $P_1(x) = B_0 + xB_1$: $\begin{cases} \alpha^2 A_0 + 2\alpha A_1 + pA_1 + qA_0 = B_0 \\ \alpha^2 A_1 + p\alpha A_1 + qA_1 = B_1 \end{cases}$; $A_1 = \dfrac{B_1}{\alpha^2 + p\alpha + q}$;

$$A_0 = \frac{B_0 - A_1(2\alpha + p)}{\alpha^2 + q} = \frac{B_0(\alpha^2 + p\alpha + q) - B_1(2\alpha + p)}{(\alpha^2 + q)(\alpha^2 + p\alpha + q)}.$$

$n = 2$. $P_2(x) = B_0 + xB_1 + x^2 B_2$: $\begin{cases} A_0(\alpha^2 + p\alpha + q) + A_1(2\alpha + p) + 2A_2 = B_0 \\ A_1(\alpha^2 + p\alpha + q) + A_2(4\alpha + p) = B_1 \\ A_2(\alpha^2 + p\alpha + q) = B_2 \end{cases}$ $\rightarrow$

$\rightarrow A_0;\ A_1;\ A_2$.