ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДАННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть имеем линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x(t) = f(t). \tag{1}$$

Требуется найти решение этого уравнения $x = x(t)$ при $t \geq 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x'_0,\ ...,\ x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Поставленную задачу мы решаем так: находим общее решение уравнения (1), содержащее n произвольных постоянных, потом постоянные определяем так, чтобы удовлетворялись начальные условия (2).

Здесь мы изложим более простой метод решения этой задачи – метод операционного исчисления. Будем находить L-изображение решения $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего его условиям (2). Это L-изображение обозначим $\overline{X}(p)$, таким образом

$$\overline{X}(p) \to x(t).$$

Предположим, что существуют изображения решения уравнения (1) и его производных до порядка n (после разыскания решения мы можем проверить справедливость этого предположения).

Умножим все члены равенства (1) на e^{-pt}, где $p = a + ib$ и проинтегрируем по t в пределах от 0 до ∞

$$a_0 \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d^n x}{dt^n} dt + a_1 \int_0^\infty e^{-pt} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} dt + ... + a_n \int_0^\infty e^{-pt} x(t) dt = \int_0^\infty ef(t) dt. \tag{3}$$

В левой части равенства стоят L-изображения функции $x(t)$ и ее производных, справа L-изображение функции $f(t)$, которое обозначим через $F(p)$. Следовательно, равенство (3) можно переписать

$$a_0 L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} + a_1 L\left\{\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}\right\} + \ldots + a_n L\{x(t)\} = L\{f(t)\}.$$

Подставляя в это равенство вместо изображений функции и ее производных выражения

$$pF(p) - f(0) \to f'(t),$$

$$p^2 F(p) - pf(0) - f'(0) \to f''(t),$$

$$p^4 F(p) - \left[p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)\right] \to f^{(n)}(t)$$

получаем

$$a_0\left\{p^n \overline{X}(p) - \left(p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + p^{n-3} x_0'' + \ldots + x_0^{(n-1)}\right)\right\} +$$

$$+ a_1\left\{p^{n-1} \overline{X}(p) - \left(p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}\right)\right\} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ a_{n-1}\left\{p\overline{X}(p) - x_0\right\} + a_n \overline{X}(p) = F(p). \tag{4}$$

Уравнение (4) называется вспомогательные уравнением или изображающая уравнения. В этом уравнении неизвестными являются изображение $\overline{X}(p)$, которое из него и определяется. Преобразуем его, оставив в левой части члены, содержащие $\overline{X}(p)$:

$$\overline{X}(p)\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\right) =$$

$$= a_0\left(p^{n-1} x_0 + p^{n-2} x_0' + \ldots + x_0^{(n-1)}\right) +$$

$$+ a_1\left(p^{n-2} x_0 + p^{n-3} x_0' + \ldots + x_0^{(n-2)}\right) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ a_{n-2}\left(p x_0 + x_0'\right) + a_{n-1} x_0 + F(p). \tag{4'}$$

Коэффициент при $\overline{X}(p)$ в левой части (4′) есть многочлен n-й степени от p.

Обозначим его через $\Phi_n(p)$:

$$\Phi_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n. \tag{5}$$

Правая часть уравнения (4′) составляется следующим образом.

Коэффициент a_{n-1} умножается на x_0.

Коэффициент a_{n-2} умножается на $px_0 + x_0'$.

…………………………………………………

Коэффициент a_1 умножается на $p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x_0' + ... + x_0^{(n-2)}$.

Коэффициент a_0 умножается на $p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_0' + ... + x_0^{(n-1)}$.

Все эти произведения складываются. Прибавляется еще изображение правой части дифференциального уравнения $F(p)$, после приведения подобных членов образуют многочлен от p степени $n-1$ с известными коэффициентами. Обозначая его через $\Psi_{n-1}(p)$. Таким образом уравнение (4′) можно переписать так

$$\overline{X}(p)\varphi_n(p) = \Psi_{n-1}(p) + F(p).$$

Из этого уравнения и определяется $\overline{X}(p)$

$$\overline{X}(p) = \frac{\Psi_{n-1}(p)}{\Phi_n(p)} + \frac{F(p)}{\Phi_n(p)}. \tag{6}$$

Такое определенное $\overline{X}(p)$ есть изображение решение $x(t)$ уравнения (1) удовлетворяет начальным условиям (2).

Если теперь мы найдем функцию $x^*(t)$, изображение которой – функция $\overline{X}(p)$, определенная равенством (6), то на основании теоремы единственности Судет следовать, что $x^*(t)$ есть решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), то есть

$$x^*(t) = x(t).$$

Если мы будем находить решение уравнения (1) при нулевых начальных условиях: $x_0 = x_0' = x_i^{n-1} = 0$, то в равенстве (6) будет

$$\Psi_{n-1}(p) = 0$$

и оно примет вид

$$\overline{X}(p) = \frac{F(p)}{\Phi_n(p)}$$

или

$$\boxed{\overline{X}(p)=\frac{F(p)}{a_0 p^n + a_n p^{n-1} + \ldots + a_n}}. \tag{6′}$$

Задача 1. Найти решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}+x=1,$$

удовлетворяющее условию $x=0$ при $t=0$.

Решение. Составляем вспомогательное уравнение

$$\overline{X}(p)(p+1)=0+\frac{1}{p}$$

или

$$\overline{X}(p)=\frac{1}{p(p+1)}.$$

Разлагая стоящую справа дробь на элементарные, получим

$$\overline{X}(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}.$$

Пользуясь таблицей оригиналов:

$$\underline{x(t)=1-e^{-t}}.$$

Задача 2.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=t,$$

$$x_0=x_0'=0 \text{ при } t=0.$$

(4′):

$$\overline{X}(p)\left(p^2+3p+2\right)=\frac{1}{p^2},$$

$$\overline{X}(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{\left(p^2+3p+2\right)}=\frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}.$$

Разлагая эту дробь на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов, получим

$$\overline{X}(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{4(p+2)},$$

$$\underline{x(t)=\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}}.$$

Задача 3.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+5x=\sin t,$$

$$x_0=1,\ x_0'=2 \text{ при } t=0.$$

(4′): $$\overline{X}(p)\left(p^2+2p+5\right)=p\cdot 1+2+2\cdot 1+L\{\sin t\},$$

$$\overline{X}(p)\left(p^2+2p+5\right)=p+4+\frac{1}{p^2+1},$$

$$\overline{X}(p)=\frac{p+4}{p^2+2p+5}+\frac{1}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+2p+5\right)}.$$

Разлагая эту дробь на элементарные дроби, получим

$$\overline{X}(p)=\frac{\frac{11}{10}p+4}{p^2+2p+5}+\frac{-\frac{1}{10}p+\frac{1}{5}}{p^2+1}$$

или

$$\overline{X}(p)=\frac{11}{10}\cdot\frac{p+1}{p^2+2p+5}+\frac{29}{10\cdot 2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{5}\frac{1}{p^2+1},$$

$$x(t)=\frac{11}{10}e^{-t}\cos 2t+\frac{29}{20}e^{-t}\sin 2t-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t.$$

Окончательно

$$\underline{x(t)=e^{-t}\left(\frac{11}{10}\cos 2t+\frac{29}{20}\sin 2t\right)-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t}.$$

Задача 4.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=\sin 3x,$$

$$x_0=0,\ x_0'=0 \text{ при } t=0.$$

(4′): $$\overline{X}(p)\left(p^2+4\right)=\frac{3}{p^2+9},$$

$$\overline{X}(p)=\frac{3}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+4\right)}.$$

или

$$\overline{X}(p)=\frac{-\frac{3}{5}}{p^2+9}+\frac{\frac{3}{5}}{p^2+4}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{p^2+9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{p^2+4}.$$

Окончательно

$$\underline{x(t)=\frac{3}{10}\sin 2t-\frac{1}{5}\sin 3t\,.}$$

Задача 5. Найти решение системы уравнений:

$$3\frac{dx}{dt}+2x+\frac{dy}{dt}=1, \qquad \frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}+3y=0,$$

$$x=0,\ y=0 \text{ при } t=0.$$

$$\overline{X}(p)(3p+2)+p\overline{Y}(p)=\frac{1}{p}, \qquad p\overline{X}(p)+(4p+3)\overline{Y}(p)=0.$$

Решая систему, находим

$$\overline{X}(p)=\frac{4p+3}{p(p+1)(11p+6)}=-\frac{1}{2p}-\frac{1}{5(p+1)}-\frac{33}{10(11p+6)},$$

$$\overline{Y}(p)=-\frac{1}{(11p+6)(p+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{11}{11p+6}\right).$$

Окончательно

$$x(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}e^{-t}-\frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t}, \qquad y(t)=\frac{1}{5}\left(e^{-t}-e^{-\frac{6}{11}t}\right).$$
