Интегрирование системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Основными методами решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений являются

1. Сведение системы ЛДУ к одному дифференциальному уравнению высшего порядка с одной неизвестной функцией с дальнейшим решением методом Эйлера.
2. Решение непосредственно системы уравнений методом Эйлера, т.е. методом аналогичным решению дифференциальных уравнений 2-го порядка.

Рассмотрим нормальную систему из $n-$дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x));$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x));$$
$$-------------------$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)).$$

с начальными условиями $x = x_0$: $y_i(x = x_0) = y_{i0}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Для сведения системы уравнений к одному уравнению, например, относительно $y_1(x)$, будем в качестве основного уравнения использовать первое уравнение.

Продифференцируем его один раз по x. Имеем:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_i} f_i(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) =$$
$$= F_2(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)).$$

Дифференцируем еще раз

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=\frac{\partial F_2}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dx}=F_3\left(x,y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)\right).$$

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n\left(x,y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)\right).$$

Выпишем полученную систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ \dfrac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ ------------------\\ \dfrac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}=F_{n-1}(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ \dfrac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n).\end{array}\right\}.$$

Из системы $(n-1)$ уравнений, отмеченных пунктиром, определяются функции $y_2(x), y_3(x),\ldots,y_n(x)$, т.е. $(n-1)$ функций в виде $y_i(x)=\varphi_i\left(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(n-1)}\right),\ i=2,3,\ldots,n$.

Полученные выражения $y_i(x)(i=2,\ldots,n)$ вносятся в последнее дифференциальное уравнение. В итоге получим:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}=\Phi\left(x,y_1,y_1',y_1'',\ldots,y_1^{n-1}\right).$$

Решением полученного уравнения является

$$y_1(x)=\psi_1(x,C_1,C_2,\ldots,C_n);$$

$$y_2(x)=\psi_2(x,C_1,C_2,\ldots,C_n);$$

$$y_n(x)=\psi_n(x,C_1,C_2,\ldots,C_n).$$

Метод сведения дифференциальных уравнений к одному уравнению требует, чтобы выражения $f_i(x, y_1, y_2', \dots, y_n)$, т.е. правые части исходной системы уравнений, имели непрерывные и ограниченные частные производные до $(n-1)$ порядка по всем аргументам в окрестности начальных значений.

Постоянные интегрирования $C_1, C_2, \dots, C_n$ определяются из начальных условий.

Рассмотрим пример. Вследствие необходимости решения характеристического уравнения будем рассматривать лишь систему из двух уравнений, каждое из них уравнение первого порядка.

Итак, имеем систему двух уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 3y_1 - 2y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 - y_2 \end{aligned}\right\}.$$

Дифференцируя второе уравнение, получим:

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{dy_2}{dx}.$$

Из второго уравнения $y_1 = \frac{dy_2}{dx} + y_2$.

Из первого уравнения $\frac{dy_1}{dx} = 3y_1 - 2y_2$, подставляя y_1, получим

$$\frac{dy_1}{dx} = 3\frac{dy_2}{dx} + y_2 - \frac{dy_2}{dx} = 2\frac{dy_2}{dx} + y_2 \text{ или } \frac{d^2 y_2}{dx^2} - 2\frac{dy_2}{dx} - y_2 = 0.$$

Решение выбирается так: $y^2 = e^{kx}$, тогда $k^2 - 2k - 1 = 0$, $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$.

$$y_2(x) = C_1 e^{\left(1+\sqrt{2}\right)x} + C_2 e^{\left(1-\sqrt{2}\right)x} = e^x\left(C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}\right).$$

$$y_1(x)=\frac{dy_2}{dx}+y_2=e^x\left(C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}\right)+e^x\left(\sqrt{2}C_1e^{\sqrt{2}x}-\sqrt{2}C_2e^{-\sqrt{2}x}\right)+$$
$$+e^x\left(C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}\right)=e^x\left[C_1\left(\sqrt{2}+2\right)e^{\sqrt{2}x}+C_2\left(2-\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}x}\right].$$

2. Теперь рассмотрим дифференциальные уравнения в такой форме

$$\frac{dy_1}{dx}=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n;$$

$$\frac{dy_2}{dx}=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n;$$

$$\frac{dy_n}{dx}=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n.$$

Решение приведенной системы ищем методом Эйлера в форме:

$$y_1=\alpha_1e^{kx};\ y_2=\alpha_2e^{kx};\ldots;\ y_n=\alpha_ne^{kx}.$$

Тогда после введения в систему $y_i(x)(i=2,\ldots,n)$ и сокращения на e^{kx}, получим

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1(a_{11}-k)+\alpha_2a_{12}+\alpha_3a_{13}+\ldots+\alpha_na_{1n}=0\\ \alpha_1a_{21}+\alpha_2(a_{22}-k)+\alpha_3a_{23}+\ldots+\alpha_na_{2n}=0\\ -----------------------------\\ \alpha_1a_{n1}+\alpha_2a_{n2}+\alpha_3a_{n3}+\ldots+\alpha_n(a_{nn}-k)=0\end{array}\right\}.$$

Полученную однородную алгебраическую систему уравнений для существования не нулевого решения необходимо, чтобы $\Delta=0$.

Характеристическое уравнение, записанное в форме определителя:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k\end{vmatrix}=0.$$

После раскрытия определителя, получаем характеристическое уравнение $n-$й степени

$$k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n=0.$$

Рассмотрим случай действительных и различных корней, т.е. $k_1 k_2, \ldots, k_n$.

Тогда, подставляя каждый из корней в систему алгебраических уравнений, получим $n-$систем, определяющих связь между коэффициентами α_i. Например, для корня k_1 имеем:

$$\begin{cases} \alpha_1^1(a_{11}-k_1)+\alpha_2^1 a_{12}+\alpha_3^1 a_{13}+\ldots+\alpha_n^1 a_{1n}=0 \\ \alpha_1^1 a_{21}+\alpha_2^1(a_{22}-k_1)+\alpha_3^1 a_{23}+\ldots+\alpha_n^1 a_{2n}=0 \\ ------------------------------ \\ \alpha_1^1 a_{n1}+\alpha_2^1 a_{n2}+\alpha_3^1 a_{n3}+\ldots+\alpha_n^1(a_{nn}-k)=0 \end{cases}$$

Выразим $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_{n-1}^1$ через α_n^1 из $(n-1)$ уравнений. Последнее уравнение является линейной комбинацией первых $(n-1)$ уравнений.

$$y_1^1=\alpha_1^1 e^{k_1 x}, y_2^1=\alpha_2^1 e^{k_1 x}, y_3^1=\alpha_3^1 e^{k_1 x}, \ldots, y_{n-1}^1=\alpha_{n-1}^1 e^{k_1 x}, y_n^1=\alpha_n^1 e^{k_1 x}.$$

Для k_2 аналогично:

$$y_1^2=\alpha_1^2 e^{k_2 x}, y_2^2=\alpha_2^2 e^{k_2 x}, y_3^2=\alpha_3^2 e^{k_2 x}, \ldots, y_{n-1}^2=\alpha_{n-1}^2 e^{k_2 x}, y_n^2=\alpha_n^2 e^{k_2 x}.$$

Для k_n:

$$y_1^n=\alpha_1^n e^{k_n x}, y_2^n=\alpha_2^n e^{k_n x}, y_3^n=\alpha_3^n e^{k_n x}, \ldots, y_{n-1}^n=\alpha_{n-1}^n e^{k_n x}, y_n^n=\alpha_n^n e^{k_n x}.$$

Решение систем уравнений состоит из суммы частных решений для каждого значения корня k, т.е.

$$y_1(x)=C_1 y_1^1+C_2 y_1^2+C_3 y_1^3+\ldots+C_n y_1^n=C_1\alpha_1^1 e^{k_1 x}+C_2\alpha_1^2 e^{k_2 x}+$$
$$+C_3\alpha_1^3 e^{k_3 x}+\ldots+C_n\alpha_1^n e^{k_n x};$$

$$y_2(x)=C_1\alpha_1^1 e^{k_1 x}+C_2\alpha_1^2 e^{k_2 x}+C_3\alpha_1^3 e^{k_3 x}+\ldots+C_n\alpha_1^n e^{k_n x};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n(x)=C_1\alpha_n^1 e^{k_1 x}+C_2\alpha_n^2 e^{k_2 x}+C_3\alpha_n^3 e^{k_3 x}+\ldots+C_n\alpha_n^n e^{k_n x}.$$

Как и следовало ожидать общее решение однородной системы n-уравнений содержит n постоянных интегрирования, так как для каждого корня k_i получаем i-ую систему алгебраических уравнений относительно $\alpha_{1,2,..,n}^i$.

Полученная система $y^{i}_{1,2,..,n}$ частных решений называется функциональной системой.

Пример: Рассмотрим решение того же примера.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= 3y_1 - 2y_2\\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 - y_2\end{aligned}\right\}; \qquad \begin{aligned}y_1(x) &= \alpha_1 e^{kx};\\ y_2(x) &= \alpha_2 e^{kx};\end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned}\alpha_1 k &= 3\alpha_1 - 2\alpha_2\\ \alpha_2 k &= \alpha_1 - \alpha_2\end{aligned}\right\};$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1(k-3) + 2\alpha_2 = 0\\ -\alpha_1 + \alpha_2(k+1) = 0\end{aligned}\right\}; \qquad \begin{vmatrix} k-3 & 2\\ -1 & k+1\end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{aligned}&k^2 - 2k - 1 = 0;\\ &k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Введем k_1 в систему уравнений.

$$\alpha_1^1\left(1+\sqrt{2}-3\right) + 2\alpha_2^1 = 0; \;\; \alpha_1^1 = -2\alpha_2^1 : \left(\sqrt{2}-2\right) = \alpha_2^1\left(2+\sqrt{2}\right);$$

$$-\alpha_1^1 + \alpha_2^1\left(1+\sqrt{2}+1\right) = 0; \;\; \alpha_1^1 = \alpha_2^1\left(2+\sqrt{2}\right);$$

$$y_1^1 = \alpha_2^1\left(2+\sqrt{2}\right)e^{\left(1+\sqrt{2}\right)x}; \quad y_2^1 = \alpha_2^1 e^{\left(1+\sqrt{2}\right)x}.$$

Для корня $k_2 = 1 - \sqrt{2}$, имеем:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1^2\left(1-\sqrt{2}-3\right) + 2\alpha_2^2 = 0\\ -\alpha_1^2 + \alpha_2^2\left(1-\sqrt{2}+1\right) = 0\end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned}-\alpha_1^2\left(2+\sqrt{2}\right) + 2\alpha_2^2 = 0\\ -\alpha_1^2 + \left(2-\sqrt{2}\right)\alpha_2^2 = 0\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\alpha_1^2 = \alpha_2^2\left(2-\sqrt{2}\right)\\ \alpha_1^2 = \alpha_2^2\left(2-\sqrt{2}\right)\end{aligned}\right\}.$$

Частные решения для k_2.

$$y_1^2 = \alpha_2^2\left(2-\sqrt{2}\right)e^{\left(1-\sqrt{2}\right)x}; \quad y_2^2 = \alpha_2^2 e^{\left(1-\sqrt{2}\right)x}.$$

Тогда суммируя решения для различных корней для $\alpha_2^1, \alpha_2^2 = 1$ получим:

$$y_1(x) = C_1 y_1^1 + C_2 y_1^2 = C_1\left(2+\sqrt{2}\right)e^{\left(1+\sqrt{2}\right)x} + C_2 e^{\left(1-\sqrt{2}\right)x}\left(2-\sqrt{2}\right);$$

$$y_2(x) = C_1 y_2^1 + C_2 y_2^2 = C_1 e^{\left(1+\sqrt{2}\right)x} + C_2 e^{\left(1-\sqrt{2}\right)x}.$$