СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. НАЙПРОСТІШІ ТИПИ ТОЧОК СПОКОЮ

Нехай маємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n) \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.1}$$

де $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $\left(i, k = \overline{1,n}\right)$ існують і неперервні, і нехай $\varphi_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ є розв'язком цієї системи, що задовольняє при $t = t_0$ умовам $\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Розв'язок $\varphi_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ системи (1.1) називається *стійким за Ляпуновим* при $t \to +\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна підібрати $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-якого розв'язку $y_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ тієї ж системи (1.1), початкові значення якого задовольняють нерівностям

$$\left| y_i(t_0) - \varphi_i^0 \right| < \delta(\varepsilon) \qquad \left(i = \overline{1,n}\right),$$

для всіх $t \geq t_0$ мають місце нерівності

$$\left| y_i(t) - \varphi_i(t) \right| < \varepsilon \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.2}$$

тобто близькі за початковими значенням розв'язки залишаються близькими для всіх $t \geq t_0$.

Якщо при як завгодно малому $\delta > 0$ хоча б для одного розв'язку $y_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ нерівності (1.2) не виконуються, то розв'язок $\varphi_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ називається *нестійким*.

Якщо розв'язок $\varphi_i(t)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ не тільки стійкий, але, крім того, задовольняє умовам

$$\lim_{t \to \infty} \left| y_i(t) - \varphi_i(t) \right| = 0 \qquad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.3}$$

якщо $\left| y_i(t_0) - \varphi_i^0 \right| < \delta_1$, то розв'язок $\varphi_i(t)$ називається *асимптотично стійким*.

Питання про стійкість розв'язку $\varphi_i(t)$ системи (1.1) може бути зведене до питання про стійкість нульового розв'язку $x_i(t) \equiv 0$ деякої нової системи рівнянь, що отримується із (1.1) лінійною заміною шуканих функцій

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \qquad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.4}$$

де $x_i(t)$ – нові невідомі функції, які дорівнюють відхиленням колишніх невідомих функцій $y_i(t)$ від функцій $\varphi_i(t)$, що визначають досліджуваний розв'язок. Тому надалі будемо вважати, що на стійкість досліджується саме нульовий розв'язок $x_i(t) \equiv 0$ або, що те ж саме, розташована в початку координат точка спокою системи рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{1.5}$$

У застосуванні до точки спокою $x_i(t) \equiv 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$ умова стійкості виглядає так:

Точка спокою $x_i(t) \equiv 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$ *системи (1.5) є стійкою за Ляпуновим, якщо для кожного* $\varepsilon > 0$ *можна підібрати* $\delta(\varepsilon) > 0$ *таке, що з нерівності* $|\, x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$ *випливає* $|\, x_i(t)| < \varepsilon \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$ *при всіх* $t \ge t_0$.

Нехай маємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,\ y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,\ y). \end{cases} \tag{1.6}$$

Точка $(x_0,\ y_0)$ називається *точкою спокою* системи (1.6), якщо $P(x_0,\ y_0) = 0$, $Q(x_0,\ y_0) = 0$.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{1.7}$$

де $a_{ij} \ (i, j = 1{,}2)$ – постійні. Точка (0, 0) є точкою спокою системи (1.7). Дослідимо розташування траєкторій системи (1.7) в околі цієї точки. Шукаємо розв’язок у вигляді

$$x = \alpha_1 e^{kt}, \ y = \alpha_2 e^{kt}. \tag{1.8}$$

Для визначення k одержуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{1.9}$$

Розглянемо можливі випадки.

I. Корені характеристичного рівняння дійсні й різні, тоді

1) $k_1 < 0$, $k_2 < 0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий вузол);

2) $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий вузол);

3) $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Точка спокою нестійка (сідло);

4) $k_1 = 0$, $k_2 > 0$. Точка спокою нестійка;

5) $k_1 = 0$, $k_2 < 0$. Точка спокою стійка, але не асимптотично.

II. Корені характеристичного рівняння комплексні: $k_1 = p + qi$, $k_2 = p - qi$, тоді

1) $p < 0$, $q \ne 0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий фокус);

2) $p > 0$, $q \ne 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий фокус);

3) $p = 0$, $q \ne 0$. Точка спокою стійка (центр). Асимптотичної стійкості немає.

III. Корені кратні: $k_1 = k_2$, тоді

1) $k_1 = k_2 < 0$. Точка спокою асимптотично стійка (стійкий вузол);

2) $k_1 = k_2 > 0$. Точка спокою нестійка (нестійкий вузол);

3) $k_1 = k_2 = 0$. Точка спокою нестійка. Можливий винятковий випадок, коли всі точки площини є стійкими точками спокою.

Для системи лінійних однорідних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n) \tag{1.10}$$

характеристичним рівнянням буде

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{1.11}$$

1) Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння (1.11) системи (1.10) від'ємні, то точка спокою $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ асимптотично стійка.

2) Якщо, дійсна частина хоча б одного кореня характеристичного рівняння (1.11) додатна, $\mathrm{Re}\, k_i > 0$, то точка спокою $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ системи (1.10) нестійка.

3) Якщо характеристичне рівняння (1.11) має прості корені з нульовою дійсною частиною (тобто нульові або чисто уявні корені), то точка спокою $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ системи (1.10) стійка, але не асимптотично.

Для системи двох лінійних рівнянь із постійними дійсними коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \tag{1.12}$$

характеристичне рівняння (1.9) приводиться до виду $k^2 + a_1 k + a_2 = 0$.

1) Якщо $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, то нульовий розв'язок системи (1.12) асимптотично стійкий.

2) Якщо $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, або $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, то нульовий розв'язок стійкий, але не асимптотично.

3) У всіх інших випадках нульовий розв'язок нестійкий; однак при $a_1 = a_2 = 0$ можливий винятковий випадок, коли нульовий розв'язок стійкий, але не асимптотично.