ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ СТЕПЕНЕВИХ ТА УЗАГАЛЬНЕНИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Пример 7. Найти пять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, если $y(1) = 1$

▶ Из данного уравнения находим, что $y'(1) = 1 + 1 = 2$. Дифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 2x + 2yy', \ y''(1) = 6;$$
$$y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'', \ y'''(1) = 22;$$
$$y^{IV} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''', \ y^{IV}(1) = 116$$

и т. д.

Подставляя найденные значения производных в ряд (12.23), получаем

$$y(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{6(x-1)^2}{2} + \frac{22}{6}(x-1)^3 + \frac{116}{24}(x-1)^4 + \ldots =$$
$$= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{11}{3}(x-1)^3 + \frac{29}{6}(x-1)^4 + \ldots \ ◀$$

Пример 8. Найти шесть первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' - (1 + x^2)y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$.

▶ Подставив в уравнение начальные условия, получим

$$y''(0) = 1 \cdot (-2) = -2.$$

Дифференцируя исходное уравнение, последовательно находим:

$$y''' = 2xy + (1 + x^2)y', \ y'''(0) = 2;$$
$$y^{IV} = 2y + 2xy' + 2xy' + (1 + x^2)y'', \ y^{IV}(0) = -6;$$
$$y^{V} = 6y' + 6xy'' + (1 + x^2)y''', \ y^{V}(0) = 14.$$

Подставляя найденные значения производных в ряд Маклорена, получаем

$$y(x) = -2 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{60}x^5 + \ldots \ ◀$$

Пример 9. Использовав ряд (12.24), записать четыре первых ненулевых члена разложения решения задачи Коши $y' = x + y^2 - 1$, $y(1) = 2$.

▶ В ряде (12.24) $x_0 = 1$. Поэтому, положив $x = 1$, с учетом начального условия находим, что $a_0 = 2$. Продифференцируем ряд (12.24) и подставим полученную производную y', а также y в виде ряда (12.24) в данное дифференциальное уравнение. Тогда

$$y' = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots =$$
$$= x - 1 + (a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots)^2.$$

Теперь в правой и левой частях последнего равенства приравняем коэффициенты при одинаковых степенях разности $x - 1$ (т. е. при $(x-1)^0$, $(x-1)^1$ и $(x-1)^2$). Получаем простые уравнения:

$$a_1 = a_0^2, \ 2a_2 = 1 + 2a_0a_1, \ 3a_3 = a_1^2 + 2a_0a_2,$$

из которых, учитывая, что $a_0 = 2$, находим: $a_1 = 4$, $a_2 = 17/2$, $a_3 = 50/3$.

Следовательно, искомое разложение решения имеет вид

$$y = 2 + 4(x-1) + \frac{17}{2}(x-1)^2 + \frac{50}{3}(x-1)^3 + \dots \blacktriangleleft$$

4. Записать пять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

а) $y' = e^y + xy$, $y(0) = 0$;
б) $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$, $y(1) = 1$;
в) $y'' = x^2y - y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
г) $y'' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. Найти четыре первых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' = x^2 - y$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

2. Найти три первые члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x^2y + y^3$, если $y(0) = 1$.