ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

$$y'' - 5y' + 6y = 4\sin 2x.$$

I. $k^2 - 5k + 6 = 0$,

$$k_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2},\ k_1 = 2,\ k_2 = 3.$$

$$y_{0,0}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

II. $y_{чну} = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{3x}$.

$$\begin{cases} c_1' e^{2x} + c_2' e^{3x} = 0 \\ c_1' 2e^{2x} + c_2' 3e^{3x} = 4\sin 2x \end{cases};$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 4\sin 2x & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = -4e^{-2x}\sin 2x; \qquad C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 4\sin 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = 4e^{-3x}\sin 2x;$$

$$C_1 = -\int 4e^{-2x}\sin 2x dx = e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x);$$

$$C_2 = \int 4e^{-3x}\sin 2x dx = -\frac{4}{13}e^{-3x}(3\sin 2x + 2\cos 2x);$$

$$y_{он} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + e^{2x}e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x) - e^{3x}\frac{4}{13}e^{-3x}(3\sin 2x + 2\cos 2x);$$

$$y_{он} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \sin 2x\left(1 - \frac{12}{13}\right) + \cos 2x\left(1 - \frac{8}{13}\right);$$

$$y_{он} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{13}\sin 2x + \frac{5}{13}\cos 2x.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}. \qquad (1)$$

▶ Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), известно:

$$\tilde{y} = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$$

(см. пример 1). Чтобы получить общее решение уравнения (1), найдем его частное решение y^* методом Лагранжа. Согласно формуле (11.38),

$$y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)e^{2x}$$

Система (11.39) в нашем случае имеет вид

$$\left.\begin{aligned} C_1'e^x + C_2'e^{-x} + \ C_3'e^{2x} &= 0, \\ C_1'e^x - C_2'e^{-x} + 2C_3'e^{2x} &= 0, \\ C_1'e^x + C_2'e^{-x} + 4C_3'e^{2x} &= e/(e^x+1). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ее определитель $W = -6e^{2x} \neq 0$ (см. пример 1). Решая систему (2) по формулам Крамера, находим:

$$C_1' = -\frac{1}{2}\frac{e^x}{e^x+1},\ C_2' = \frac{1}{6}\frac{e^{3x}}{e^x+1},\ C_3' = \frac{1}{3}\frac{1}{e^x+1}. \qquad (3)$$

Интегрируя выражения (3), получаем (см. замечание 1):

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int\frac{e^xdx}{e^x+1} = -\frac{1}{2}\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = -\frac{1}{2}\ln(e^x+1),$$

$$C_2 = \frac{1}{6}\int\frac{e^{3x}dx}{e^x+1} = \frac{1}{6}\int\frac{e^{2x}d(e^x)}{e^x+1} = \frac{1}{6}\int\left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x+1}\right)de^x =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x+1)\right),$$

$$C_3 = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{e^x+1} = \frac{1}{3}\int\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx = \frac{1}{3}\int\left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x - \int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}\right) = \frac{1}{3}(x - \ln(e^x+1)).$$

Записываем частное решение уравнения (1):

$$y^* = -\frac{1}{2}e^x\ln(e^x+1) + \frac{1}{6}e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \ln(e^x+1)\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}e^{2x}(x - \ln(e^x+1)) = \frac{1}{12}e^x - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}xe^{2x} +$$

$$+\left(\frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}\right)\ln(e^x+1).$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + \frac{1}{12}(4xe^{2x} + e^x - 2) +$$

$$+ \frac{1}{6}(e^{-x} - 3e^x - 2e^{2x})\ln(e^x+1). \ ◀$$

Пример 6. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV}-3y''=9x^2. \qquad (1)$$

▶ Составляем характеристическое уравнение, находим его корни, фундаментальную систему решений и общее решение $\tilde{y}$ соответствующего однородного уравнения:

$$\lambda^4-3\lambda^3=0,\ \lambda^2(\lambda^2-3)=0,\ \lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_{3,4}=\pm\sqrt{3};$$

$$y_1=e^{0x}=1,\ y_2=xe^{0x}=x,\ y_3=e^{\sqrt{3}x},\ y_4=e^{-\sqrt{3}x};$$

$$\tilde{y}=C_1+C_2x+C_3e^{\sqrt{3}x}+C_4e^{-\sqrt{3}x}.$$

В уравнении (1) правая часть — специальная, относящаяся к частному случаю (11.54), поэтому $z=0$. Двукратный корень характеристического уравнения $\lambda_1=\lambda_2=0$ совпадает с $z=0$, откуда следует, что $k=2$. Частное решение y^*, согласно формуле (11.55), имеет вид

$$y^*=x^2(Ax^2+Bx+C),$$

так как правая часть уравнения (1) является многочленом второй степени. Подставляя $y^{*''}$ и y^{*IV} в уравнение (1), мы получим тождество (y^* — решение уравнения (1)). Здесь и далее для удобства вычислений будем выписывать выражения для y^*, $y^{*'}$, $y^{*''}$, $y^{*'''}$, y^{*IV}, ... в отдельные строки и слева за вертикальной чертой помещать коэффициенты, стоящие перед ними в уравнении. Умножая эти выражения на коэффициенты, складывая и приводя подобные члены, имеем:

$$\begin{array}{r|l}
0 & y^* = Ax^4+Bx^3+Cx^2,\\
0 & y^{*'} = 4Ax^3+3Bx^2+2Cx,\\
-3 & y^{*''}=12Ax^2+6Bx+2C,\\
0 & y^{*'''}=24Ax+6B,\\
1 & y^{*IV}=24A,\\
\hline
\end{array}$$

$$y^{*IV}-3y^{*''}=-36Ax^2-18Bx-6C+24A\equiv 9x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего тождества, получаем систему алгебраических уравнений для определения A, B, C:

$$\left.\begin{array}{r|l}
x^2 & -36A=9,\\
x^1 & -18B=0,\\
x^0 & -6C+24A=0,
\end{array}\right\}$$

откуда $A=-1/4$, $B=0$, $C=-1$. Следовательно,

$$y^*=x^2\left(-\frac{1}{4}x^2-1\right).$$

Общим решением уравнения (1) является функция

$$y=\tilde{y}+y^*=C_1+C_2x+C_3e^{\sqrt{3}x}+C_4e^{-\sqrt{3}x}-\frac{1}{4}x^4-x^2. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Решить задачу Коши

$$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 3. \qquad (1)$$

▶ Так как характеристическое уравнение $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, то общим решением соответствующего однородного уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$ является функция

$$\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}.$$

Правая часть уравнения (1) — специальная, вида (11.50), где $a = 1$; $b = 0$; $P_1(x) = x - 2$; $z = 1$. Так как z является корнем характеристического уравнения, то $k = 1$ и частное решение уравнения (1 определяется формулой

$$y^* = xe^x(Ax + B).$$

Далее, как и в примере 6, находим:

$$\begin{array}{r|l} 6 & y^* \;\; = e^x(Ax^2 + Bx), \\ -7 & y^{*\prime} = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B), \\ 1 & y^{*\prime\prime} = e^x(Ax^2 + (2A + B)x + B) + e^x(2Ax + 2A + B), \end{array}$$

$$y^{*\prime\prime} - 7y^{*\prime} + 6y^* = e^x((6A - 7A + A)x^2 + (6B - 7B - 14A + 2A + B + {} \\ + 2A)x - 7B + 2A + 2B) \equiv e^x(x-2).$$

Сокращая обе части последнего тождества на $e^x \neq 0$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, имеем:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 0 = 0 \\ x^1 & -10A = 1 \\ x^0 & 2A - 5B = -2, \end{array}$$

откуда $A = -1/10$, $B = 9/25$;

$$y^* = e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

Общим решением уравнения (1) является функция

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

Для того чтобы решить задачу Коши, находим y':

$$y' = C_1 e^x + 6C_2 e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right) + e^x\left(-\frac{1}{5}x + \frac{9}{25}\right).$$

Используя начальные условия, получаем линейную систему уравнений для определения значений произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1, \; y'(0) = C_1 + 6C_2 + 9/25 = 3,$$

откуда находим: $C_1 = 84/125$, $C_2 = 41/125$.

Следовательно, частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, имеет вид

$$y = \frac{84}{125}e^x + \frac{41}{125}e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right). \blacktriangleleft$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = x \sin x + \cos 2x. \qquad (1)$$

▶ Так как характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет мнимые корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, то общее решение однородного уравнения $y'' + y = 0$ определяется функцией

$$\tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Правая часть уравнения (1) представляет собой сумму двух функций специального типа (11.51) и (11.53): $f_1(x) = x \sin x$, $f_2(x) = \cos 2x$. Поэтому, используя структуру (11.55), методом неопределенных коэффициентов находим частное решение y_1^* уравнения

$$y'' + y = x \sin x \qquad (2)$$

и частное решение y_2^* уравнения

$$y'' + y = \cos 2x. \qquad (3)$$

Для уравнения (2) $a = 0$, $b = 1$, $z = i = \lambda_1$, поэтому $k = 1$ и

$$y_1^* = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x).$$

Вычислим неопределенные коэффициенты A, B, C, D по схеме, приведенной в примере 6, и найдем y_1^*. Имеем:

$$\begin{array}{c|l}
1 & y_1^* = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x, \\
0 & y_1^{*\prime} = (2Ax + B)\cos x - (Ax^2 + Bx)\sin x + (2Cx + D)\sin x + (Cx^2 + \\
 & \quad + Dx)\cos x = (Cx^2 + 2Ax + Dx + B)\cos x + (-Ax^2 - Bx + 2Cx + \\
 & \quad + D)\sin x, \\
1 & y_1^{*\prime\prime} = (2Cx + 2A + D)\cos x - (Cx^2 + 2Ax + Dx + B)\sin x + (-2Ax - \\
 & \quad - B + 2C)\sin x + (-Ax^2 - Bx + 2Cx + D)\cos x, \\
\hline
\end{array}$$

$$y_1^{*\prime\prime} + y_1^* = (Ax^2 + Bx + 2Cx + 2A + D - Ax^2 - Bx + 2Cx + D)\cos x + \\ + (Cx^2 + Dx - Cx^2 - 2Ax - Dx - B - 2Ax - B + 2C)\sin x \equiv x \sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях последнего тождества, находим A, B, C, D и y_1^*:

$$\begin{array}{r|l}
x\cos x & 4C = 0, \\
\cos x & 2A + 2D = 0, \\
x \sin x & -4A = 1, \\
\sin x & -2B + 2C = 0,
\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}$$

откуда $A = -1/4$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1/4$.

Следовательно,

$$y_1^* = x\left(-\frac{1}{4} x \cos x + \frac{1}{4} \sin x\right) = \frac{1}{4} x (\sin x - x \cos x).$$

Для уравнения (3) $a = 0$, $b = 2$, $z = 2i$, поэтому $k = 0$ и

$$y_2^* = M \cos 2x + N \sin 2x.$$

Далее находим:

$$
\begin{array}{c|l}
1 & y_2^* = M\cos 2x + N\sin 2x, \\
0 & y_2^{*\prime} = -2M\sin 2x + 2N\cos 2x, \\
1 & y_2^{*\prime\prime} = -4M\cos 2x - 4N\sin 2x, \\
\hline
\end{array}
$$

$$y_2^{*\prime\prime} + y_2^* = -3M\cos 2x - 3N\sin 2x \equiv \cos 2x.$$

Очевидно, что $-3M = 1$, $-3N = 0$, поэтому

$$y_2^* = -\frac{1}{3}\cos 2x.$$

Окончательно получаем, что

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{1}{4}x(\sin x - x\cos x) - \frac{1}{3}\cos 2x$$

и общее решение исходного уравнения (1) определяется функцией

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}x(\sin x - x\cos x) - \frac{1}{3}\cos 2x. \blacktriangleleft$$

Пример 9. Решить задачу Коши

$$y'' - 2y' + 5y = 3e^x + e^x\operatorname{tg} 2x, \; y(0) = 3/4, \; y'(0) = 2. \qquad (1)$$

▶ Сначала найдем общее решение данного уравнения. Соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Общее решение однородного уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$ определяется функцией

$$\tilde{y} = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

Правая часть уравнения (1) представляет собой сумму двух функций. Первая из них $f_1(x) = 3e^x$ относится к специальному типу (11.50), для которого $P_r(x) = 3$, $a = 1$, $b = 0$, $z = 1 \neq \lambda_{1,2}$. Поэтому частное решение y_1^* уравнения $y'' - 2y' + 5y = 3e^x$ имеет вид $y_1^* = Ae^x$, где A определяется из тождества $(A - 2A + 5A)e^x \equiv 3e^x$: $A = \frac{3}{4}$, $y_1^* = \frac{3}{4}e^x$. Вторая функция $f_2(x) = e^x\operatorname{tg} 2x$ не является специальной, и частное решение y_2^* уравнения $y'' - 2y' + 5y = e^x\operatorname{tg} 2x$ необходимо искать методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа). Согласно формуле (11.38), имеем

$$y_2^* = e^x(C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x).$$

В нашем случае система вида (11.39) состоит из двух уравнений ($y_1 = e^x \cos 2x$, $y_2 = e^x \sin 2x$):

$$\left.\begin{array}{l} C_1' e^x \cos 2x + C_2' e^x \sin 2x = 0, \\ C_1' e^x(\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2' e^x(\sin 2x + 2\cos 2x) = e^x \operatorname{tg} 2x. \end{array}\right\}$$

Сократив уравнение этой системы на e^x, получим:

$$\left.\begin{array}{l} C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x = 0, \\ C_1'(\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2'(\sin 2x + 2\cos 2x) = \operatorname{tg} 2x. \end{array}\right\}$$

Определитель (вронскиан) последней системы

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \cos 2x - 2\sin 2x & \sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2.$$

По формулам Крамера находим:

$$C_1' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \operatorname{tg} 2x & \sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin 2x \operatorname{tg} x,$$

$$C_2' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ \cos 2x - 2\sin 2x & \operatorname{tg} 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Теперь проинтегрируем полученные равенства:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos 2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| + \frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x.$$

Следовательно,

$$y_2^* = e^x\left(\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right|\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\sin 2x \cos 2x\right) = \frac{1}{4}e^x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| \cdot \cos 2x.$$

Таким образом, частное решение исходного уравнения (1) имеет вид

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| \cdot \cos 2x =$$

$$= \frac{1}{4}e^x\left(3 + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| \cdot \cos 2x\right),$$

а его общее решение определяется функцией

$$y = \tilde{y} + y^* = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \\ + \frac{1}{4} e^x\left(3 + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| \cdot \cos 2x\right). \qquad (2)$$

Чтобы решить задачу Коши, вычислим значения произвольных постоянных C_1 и C_2 в общем решении (2), используя начальные условия $y(0) = 3/4$, $y'(0) = 2$. Находим y':

$$y' = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^x(-2C_1 \sin 2x + \\ + 2C_2 \cos 2x) + \frac{1}{4} e^x\left(3 + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| \cdot \cos 2x\right) + \\ + \frac{1}{4} e^x\left(-\frac{\cos 2x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} - \\ - 2 \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| \cdot \sin 2x\right).$$

Подставляя значение $x = 0$ в выражения для y и y', с учетом начальных условий получаем:

$$y(0) = 3/4 = C_1 + 3/4,$$
$$y'(0) = 2 = 2C_2 + 3/4 - 1/2,$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 7/4$.

Следовательно, искомое частное решение

$$y = \frac{1}{4} e^x(3 + 7 \sin 2x + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| \cdot \cos 2x). \blacktriangleleft$$

533. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$. **534.** $y'' + y = 4xe^x$.

535. $y'' - y = 2e^x - x^2$. **536.** $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

537. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

538. $y'' + y = 4 \sin x$.

539. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$.

540. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$.

541. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

542. $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x$.

543. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

Найти решения уравнений **582**—**588**, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

582. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$.

583. $y'' + y = 4e^x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

584. $y'' - 2y' = 2e^x$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

585. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

586. $y''' - y' = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.

587. $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 3$.

588. $y^{\mathrm{IV}} + y'' = 2\cos x$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = y'''(0) = 0$.