

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. $y'' + 4y' + 2y = 0$.

$$k^2 + 4k + 2 = 0,$$

$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-2} = -2 \pm \sqrt{2},$$

$$y_1 = c_1 e^{(-2+\sqrt{2})x}, y_2 = c_2 e^{(-2+\sqrt{2})x}, y(x) = y_1 + y_2 = e^{-2x} (C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}).$$

2. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

$$k^2 + 4k + 4 = 0,$$

$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-4} = -2.$$

$$y_1 = c_1 e^{-2x}, y_2 = c_2 e^{-2x}, y = y_1 + y_2 = e^{-2x} (C_1 + C_2 x).$$

3. $y'' + 4y' + 20y = 0$.

$$k^2 + 4k + 20 = 0,$$

$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-20} = -2 \pm 4i,$$

$$y_1 = c_1 e^{(-2+4i)x}, y_2 = c_2 e^{(-2-4i)x}, y = y_1 + y_2 = e^{-2x} (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x).$$

Пример 5. Найти общие решения следующих уравнений:

а) $y'' - 15y' + 26y = 0$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

► Для каждого случая составляем характеристическое уравнение, находим его корни, фундаментальную систему решений и общее решение:

а) $\lambda^2 - 15\lambda + 26 = 0, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 13$;

$$y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{13x};$$

$$\tilde{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{13x};$$

б) $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -3$;

$$y_1 = e^{-3x}, y_2 = x e^{-3x};$$

$$\tilde{y} = e^{-3x} (C_1 + C_2 x);$$

в) $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0, \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$;

$$y_1 = e^x \cos 3x, y_2 = e^x \sin 3x;$$

$$\tilde{y} = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \blacktriangleleft$$

511. $y'' + y' - 2y = 0$.

512. $y'' + 4y' + 3y = 0$.

513. $y'' - 2y' = 0$.

514. $2y'' - 5y' + 2y = 0$.

515. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

516. $y'' + 2y' + 10y = 0$.

517. $y'' + 4y = 0$.

518. $y''' - 8y = 0$.

519. $y^{\text{IV}} - y = 0.$

520. $y^{\text{IV}} + 4y = 0.$

521. $y^{\text{VI}} + 64y = 0.$

522. $y'' - 2y' + y = 0.$

523. $4y'' + 4y' + y = 0.$

524. $y^{\text{V}} - 6y^{\text{IV}} + 9y''' = 0.$

525. $y^{\text{V}} - 10y''' + 9y' = 0.$

526. $y^{\text{IV}} + 2y'' + y = 0.$

527. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

528. $y''' - y'' - y' + y = 0.$

529. $y^{\text{IV}} - 5y'' + 4y = 0.$

530. $y^{\text{V}} + 8y''' + 16y' = 0.$

531. $y''' - 3y' + 2y = 0.$

532. $y^{\text{IV}} + 4y'' + 3y = 0.$