ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Знайти оригінал $f(t)$ за його заданим зображенням: $F(p)=\dfrac{6}{(p-2)\left(p^2+4p+7\right)}$.

Розв'язання.

Задане зображення запишемо у вигляді:

$$F(p)=\frac{p-1}{(p-2)\left(p^2+4p+7\right)}.$$

Корені многочлена $Q_3(p)=(p-2)\left(p^2+4p+7\right)$ прості і $p_1=2$, $p_2=-2+i\sqrt{3}$, $p_3=-2-i\sqrt{3}$. Знаходимо:

$$Q_3'(p)=3p^2+4p-1,\ Q_3'(2)=19,\ Q_3'\left(-2+i\sqrt{3}\right)=-2\left(3+4\sqrt{3}i\right),\ Q_3'\left(-2-i\sqrt{3}\right)=-2\left(3-4\sqrt{3}i\right).$$

Тоді, згідно з формулою

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}e^{p_k t}$$

будемо мати

$$f(t)=\frac{1}{19}e^{2t}-\frac{-3+i\sqrt{3}}{2\left(3+4\sqrt{3}i\right)}e^{\left(-2+\sqrt{3}i\right)t}-\frac{-3-i\sqrt{3}}{2\left(3-4\sqrt{3}i\right)}e^{\left(-2-\sqrt{3}i\right)t}=$$

$$=\frac{1}{19}e^{2t}-\frac{1+5\sqrt{3}i}{38}e^{\left(-2+\sqrt{3}i\right)t}-\frac{1-5\sqrt{3}i}{38}e^{\left(-2-\sqrt{3}i\right)t}=$$

$$=\frac{1}{19}e^{2t}-\frac{1}{38}e^{-2t}\cos\sqrt{3}t-\frac{i}{38}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t+$$

$$-\frac{5i\sqrt{3}}{38}e^{-2t}\cos\sqrt{3}t+\frac{5\sqrt{3}}{38}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t-\frac{1}{38}e^{-2t}\cos\sqrt{3}t+\frac{i}{38}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t-$$

$$+\frac{5i\sqrt{3}}{38}e^{-2t}\cos\sqrt{3}t+\frac{5\sqrt{3}}{38}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t=$$

$$=\frac{1}{19}e^{2t}-\frac{1}{19}e^{-2t}\cos\sqrt{3}t+\frac{5\sqrt{3}}{19}e^{-2t}\sin\sqrt{3}t=$$

$$=\frac{1}{19}e^{2t}-\frac{1}{19}e^{-2t}\left(\cos\sqrt{3}t-5\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\right).$$

Знайти оригінал $f(t)$ за його заданим зображенням: $F(p)=\dfrac{6}{p^3-64}$.

Розв'язання.

Задане зображення запишемо у вигляді:

$$F(p)=\frac{6}{p^3-64}=\frac{6}{(p-4)\left(p^2+4p+16\right)}.$$

Корені многочлена $Q_3(p)=p^3-64=(p-4)\left(p^2+4p+16\right)$ прості і $p_1=4$, $p_2=-2+2\sqrt{3}i$, $p_3=-2-2\sqrt{3}i$. Знаходимо:

$$Q_3'(p)=3p^2,\ Q_3'(4)=48,\ Q_3'\left(-2+2\sqrt{3}i\right)=-24\left(1+\sqrt{3}i\right),\ Q_3'\left(-2-2\sqrt{3}i\right)=-24\left(1-\sqrt{3}i\right).$$

Тоді, згідно з формулою

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}e^{p_k t}$$

будемо мати

$$f(t)=\frac{6}{48}e^{4t}-\frac{6}{24\left(1+\sqrt{3}i\right)}e^{\left(-2+2\sqrt{3}i\right)t}-\frac{6}{24\left(1-\sqrt{3}i\right)}e^{\left(-2-2\sqrt{3}i\right)t}=$$

$$=\frac{1}{8}e^{4t}-\frac{1-\sqrt{3}i}{16}e^{\left(-2+2\sqrt{3}i\right)t}-\frac{1+\sqrt{3}i}{16}e^{\left(-2-2\sqrt{3}i\right)t}=\frac{1}{8}e^{4t}-\frac{1}{16}e^{-2t}\cos 2\sqrt{3}t-\frac{i}{16}e^{-2t}\sin 2\sqrt{3}t+$$

$$+\frac{i\sqrt{3}}{16}e^{-2t}\cos 2\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{16}e^{-2t}\sin 2\sqrt{3}t-\frac{1}{16}e^{-2t}\cos 2\sqrt{3}t+\frac{i}{16}e^{-2t}\sin 2\sqrt{3}t-$$

$$-\frac{i\sqrt{3}}{16}e^{-2t}\cos 2\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{16}e^{-2t}\sin 2\sqrt{3}t=\frac{1}{8}e^{4t}-\frac{1}{8}e^{-2t}\cos 2\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{8}e^{-2t}\sin 2\sqrt{3}t=$$

$$=\frac{1}{8}e^{4t}-\frac{1}{8}e^{-2t}\left(\cos 2\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin 2\sqrt{3}t\right).$$

Методом операційного числення знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє вказані умови: $x''-4x'+5x=te^{2t}$, $x(0)=-1$, $x'(0)=0$.

Розв'язання.

$$x(t)\div X(p),\qquad x'(t)\div pX(p)-x(0)=pX(p)+1,$$

$$x''(t)\div p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+p,\qquad te^{2t}\div\frac{1}{(p-2)^2},$$

так що операторне рівняння має вигляд

$$p^2X(p)+p-4pX(p)-4+5X(p)=\frac{1}{(p-2)^2},$$

звідки

$$X(p)=\frac{-p^3+8p^2-20p+15}{(p-2)^2\left(p^2-4p+5\right)}.$$

Знаходимо оригінал для $X(p)$.

$$\frac{-p^3+8p^2-20p+15}{\left(p^2-4p+5\right)(p-2)^2}=\frac{Ap+B}{p^2-4p+5}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{(p-2)^2}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C, D:

$$-p^3+8p^2-20p+15=(Ap+B)(p-2)^2+C(p-2)\left(p^2-4p+5\right)+D\left(p^2-4p+5\right).$$

Прирівняв коефіцієнти при однакових степенях p в обох частинах тотожності, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{array}{r|l} p^3 & A+C=-1, \\ p^2 & -4A+B-6C+D=8, \\ p & 4A-4B+13C-4D=-20, \\ p^0 & 4B-10C+5D=15. \end{array}$$

Її розв'язок: $A=0$, $B=5$, $C=0$, $D=-1$. Тоді

$$X(p)=\frac{5}{p^2-4p+5}-\frac{1}{(p-2)^2}=\frac{5}{(p-2)^2+1}-\frac{1}{(p-2)^2}.$$

Отже, шуканий розв'язок буде мати вигляд:

$$x(t)=5e^{2t}\sin t-te^{2t}.$$

Методом операційного числення знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє вказані умови: $x''-4x'+4x=\sin t$**,** $x(0)=0$**,** $x'(0)=0$**.**

Розв'язання.

$$x(t)\div X(p), \qquad x'(t)\div pX(p)-x(0)=pX(p),$$

$$x''(t)\div p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+1, \qquad \sin t\div\frac{1}{p^2+1},$$

так що операторне рівняння має вигляд

$$p^2X(p)+1-4pX(p)+4X(p)=\frac{1}{p^2+1},$$

звідки

$$X(p)=\frac{1}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-4p+4\right)}-\frac{1}{p^2-4p+4}=\frac{1}{\left(p^2+1\right)(p-2)^2}-\frac{1}{(p-2)^2}=\frac{-p^2}{\left(p^2+1\right)(p-2)^2}.$$

Знаходимо оригінал для $X(p)$.

$$\frac{-p^2}{\left(p^2+1\right)(p-2)^2}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{C}{p-2}+\frac{D}{(p-2)^2}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C, D:

$$-p^2=(Ap+B)(p-2)^2+C(p-2)\left(p^2+1\right)+D\left(p^2+1\right).$$

Прирівняв коефіцієнти при однакових степенях p в обох частинах тотожності, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{array}{c|l} p^3 & A+C=0, \\ p^2 & -4A+B-2C+D=-1, \\ p & 4A-4B+C=0, \\ p^0 & 4B-2C+D=0. \end{array}$$

Її розв'язок: $A=\frac{4}{19}$, $B=\frac{1}{19}$, $C=-\frac{4}{19}$, $D=-\frac{12}{19}$. Тоді

$$X(p)=\frac{\frac{4}{19}p+\frac{1}{19}}{p^2+1}-\frac{\frac{4}{19}}{p-2}-\frac{\frac{12}{19}}{(p-2)^2}=\frac{1}{19}\frac{4p+1}{p^2+1}-\frac{4}{19}\frac{1}{p-2}-\frac{12}{19}\frac{1}{(p-2)^2}=$$

$$=\frac{4}{19}\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{19}\frac{1}{p^2+1}-\frac{4}{19}\frac{1}{p-2}-\frac{12}{19}\frac{1}{(p-2)^2}.$$

Отже, шуканий розв'язок буде мати вигляд:

$$x(t)=\frac{4}{19}\cos t+\frac{1}{19}\sin t-\frac{4}{19}e^{2t}-\frac{12}{19}te^{2t}.$$

Методом операційного числення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що задовольняє вказані умови: $\begin{cases} x'-x-2y=t, \\ y'-2x-y=t, \end{cases}$ $x(0)=2$**,** $y(0)=4$**.**

Розв'язання.

Нехай $x(t) \div X(p)$, $y(t) \div Y(p)$. Тоді операторним зображенням вихідної системи буде система

$$\begin{cases} pX(p) - 2 - X(p) - 2Y(p) = \dfrac{1}{p^2}, \\ pY(p) - 4 - 2X(p) - Y(p) = \dfrac{1}{p^2} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} (p-1)X(p) - 2Y(p) = \dfrac{1+2p^2}{p^2}, \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) = \dfrac{1+4p^2}{p^2}. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему відносно $X(p)$ і $Y(p)$, отримаємо:

$$X(p) = \frac{2p^3 + 6p^2 + p + 1}{p^2\left(p^2 - 2p - 3\right)},\ Y(p) = \frac{4p^3 + p + 1}{p^2\left(p^2 - 2p - 3\right)}.$$

Розкладемо знайдені зображення в суму простіших дробів:

$$X(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p-3},$$

$$2p^3 + 6p^2 + p + 1 = Ap(p+1)(p-3) + B(p+1)(p-3) + Cp^2(p-3) + Dp^2(p+1).$$

З останньої тотожності маємо: $1 = -3B$, $B = -\dfrac{1}{3}$ при $p = 0$; $112 = 36D$, $D = \dfrac{28}{9}$ при $p = 3$; $4 = -4C$, $C = -1$ при $p = -1$. Так як коефіцієнт при p^3 $A + C + D = 2$, то $A = -\dfrac{1}{9}$, тому

$$X(p) = -\frac{1}{9}\frac{1}{p} - \frac{1}{3}\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p+1} + \frac{28}{9}\frac{1}{p-3}.$$

З розкладу

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p-3}$$

аналогічно $X(p)$, отримаємо, що $A = -\dfrac{1}{9}$, $B = -\dfrac{1}{3}$, $C = 1$, $D = \dfrac{28}{9}$. Тому

$$Y(p) = -\frac{1}{9}\frac{1}{p} - \frac{1}{3}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1} + \frac{28}{9}\frac{1}{p-3}.$$

З виразів для $X(p)$ і $Y(p)$ знаходимо розв'язок системи:

$$x(t) = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3}t - e^{-t} + \frac{28}{3}e^{3t},$$

$$y(t) = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3}t + e^{-t} + \frac{28}{3}e^{3t}.$$

Методом операційного числення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що задовольняє вказані умови: $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' - 2x - 2y = 0, \end{cases}$ $x(0) = 1$**,** $y(0) = 1$**.**

Розв'язання.

Нехай $x(t) \div X(p)$, $y(t) \div Y(p)$. Тоді операторним зображенням вихідної системи буде система

$$\begin{cases} pX(p) - 1 + Y(p) = 0, \\ pY(p) - 1 - 2X(p) - 2Y(p) = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} pX(p) + Y(p) = 1, \\ -2X(p) + (p-2)Y(p) = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему відносно $X(p)$ і $Y(p)$, отримаємо:

$$X(p) = \frac{p-3}{p^2 - 2p + 2},\ Y(p) = \frac{p+2}{p^2 - 2p + 2}.$$

Розкладемо знайдені зображення в суму простіших дробів:

$$X(p) = \frac{p-1-2}{p^2 - 2p + 2} = \frac{(p-1)-2}{(p-1)^2 + 1} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1} - \frac{2}{(p-1)^2 + 1},$$

$$Y(p) = \frac{p+2}{p^2 - 2p + 2} = \frac{p-1+3}{(p-1)^2 + 1} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1} + \frac{3}{(p-1)^2 + 1}.$$

З виразів для $X(p)$ і $Y(p)$ знаходимо розв'язок системи:

$$x(t) = e^t \cos t - 2e^t \sin t,$$

$$y(t) = e^t \cos t + 3e^t \sin t.$$

Найдем изображение дифференциального выражения

$$x^{IV}(t)-5x'''(t)-4x''(t)+2x'(t)-x(t)+8$$

при условии: $x(0)=5$, $x'(0)=0$, $x''(0)=-1$, $x'''(0)=2$.

Обозначая $x(t)\to X(p)$ по теореме дифференцирования оригинала

$$x'(t)\to pX(p)-5,$$

$$x''(t)\to p^2X(p)-5p,$$

$$x'''(t)\to p^3X(p)-5p^2+1,$$

$$x^{IV}(t)\to p^4X(p)-5p^3+p-2.$$

Отсюда по свойству линейности, получаем

$$\begin{gathered}x^{IV}(t)-5x'''(t)-4x''(t)+2x'(t)-x(t)+8\to\\ \to p^4X(p)-5p^3+p-2-5\left(p^3X(p)-5p^2+1\right)-\\ -4\left(p^2X(p)-5p\right)-2\left(pX(p)-5\right)-X(p)-\frac{8}{p}=\\ =\left(p^4-5p^3-4p^2-2p-1\right)X(p)-5p^3+25p^2+21p-17-\frac{8}{p}.\end{gathered}$$

Найти решение уравнения $\frac{dx}{dt}+x=1$, удовлетворяющее условию $x=0$ при $t=0$.

Решение. Составляем вспомогательное уравнение

$$\overline{X}(p)(p+1)=0+\frac{1}{p}$$

$$\overline{X}(p)=\frac{1}{p(p+1)}.$$

Разлагая стоящую справа дробь на элементарные, получим

$$\overline{X}(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}.$$

Пользуясь таблицей оригиналов:

$$\underline{x(t)=1-e^{-t}}.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=t,$$

$$x_0=x_0'=0 \text{ при } t=0.$$

$$\overline{X}(p)\left(p^2+3p+2\right)=\frac{1}{p^2},$$

$$\overline{X}(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{\left(p^2+3p+2\right)}=\frac{1}{p^2(p+1)(p+2)}.$$

Разлагая эту дробь на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов, получим

$$\overline{X}(p)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{4(p+2)},$$

$$\underline{x(t)=\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}}.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+5x=\sin t,$$

$$x_0=1,\ x_0'=2 \text{ при } t=0.$$

$$\overline{X}(p)\left(p^2+2p+5\right)=p\cdot 1+2+2\cdot 1+L\{\sin t\},$$

$$\overline{X}(p)\left(p^2+2p+5\right)=p+4+\frac{1}{p^2+1},$$

$$\overline{X}(p)=\frac{p+4}{p^2+2p+5}+\frac{1}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+2p+5\right)}.$$

Разлагая эту дробь на элементарные дроби, получим

$$\overline{X}(p)=\frac{\frac{11}{10}p+4}{p^2+2p+5}+\frac{-\frac{1}{10}p+\frac{1}{5}}{p^2+1}$$

или

$$\overline{X}(p)=\frac{11}{10}\cdot\frac{p+1}{p^2+2p+5}+\frac{29}{10\cdot 2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{5}\frac{1}{p^2+1},$$

$$x(t)=\frac{11}{10}e^{-t}\cos 2t+\frac{29}{20}e^{-t}\sin 2t-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t.$$

Окончательно

$$\underline{x(t)=e^{-t}\left(\frac{11}{10}\cos 2t+\frac{29}{20}\sin 2t\right)-\frac{1}{10}\cos t+\frac{1}{5}\sin t}.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin 3x,$$

$$x_0 = 0,\ x'_0 = 0 \text{ при } t = 0.$$

$$\overline{X}(p)\left(p^2 + 4\right) = \frac{3}{p^2 + 9},$$

$$\overline{X}(p) = \frac{3}{\left(p^2 + 9\right)\left(p^2 + 4\right)}.$$

или

$$\overline{X}(p) = \frac{-\frac{3}{5}}{p^2 + 9} + \frac{\frac{3}{5}}{p^2 + 4} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{p^2 + 9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Окончательно

$$\underline{x(t) = \frac{3}{10}\sin 2t - \frac{1}{5}\sin 3t}.$$

Найти решение системы уравнений:

$$3\frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} = 1, \qquad \frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0,$$

$$x = 0,\ y = 0 \text{ при } t = 0.$$

$$\overline{X}(p)(3p + 2) + p\overline{Y}(p) = \frac{1}{p}, \qquad p\overline{X}(p) + (4p + 3)\overline{Y}(p) = 0.$$

Решая систему, находим

$$\overline{X}(p) = \frac{4p + 3}{p(p + 1)(11p + 6)} = -\frac{1}{2p} - \frac{1}{5(p + 1)} - \frac{33}{10(11p + 6)},$$

$$\overline{Y}(p) = -\frac{1}{(11p + 6)(p + 1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p + 1} - \frac{11}{11p + 6}\right).$$

Окончательно

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{3}{10}e^{-\frac{6}{11}t}, \qquad y(t) = \frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}\right).$$

В задачах 6–16 найти изображения функций или по таблице, или непосредственно по формуле(1).

6. $f(t)=\sin^2 t$ ответ: $F(p)=\dfrac{2}{p(p^2+4)}$

7. $f(t)=e^t\cos^2 t$ ответ: $F(p)=\dfrac{p(p^2+2p+3)}{(p-1)(p^2-2p+5)}$

8. $f(t)=4t^2-2t+3$ ответ: $F(p)=\dfrac{8}{p^3}-\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{3}{p}$

9. $f(t)=\dfrac{1}{3}t^3+4\cos 2t$ ответ: $\dfrac{2}{p^4}+\dfrac{4p}{p^2+4}$

10. $f(t)=\dfrac{1}{3}\sin 3t-5$ ответ: $F(p)=\dfrac{1}{p^2+9}-\dfrac{5}{p}$

11. $f(t)=4-5e^{2t}$ ответ: $F(p)=\dfrac{8+p}{2p-p^2}$

12. $f(t)=3t^3e^{-t}+2t^2-1$ ответ: $F(p)=\dfrac{18}{(p+1)^4}+\dfrac{4}{p^3}-\dfrac{1}{p}$

13. $f(t)=2\sin 2t+3sh2t$ ответ: $F(p)=\dfrac{10p^2+8}{p^4-16}$

14. $f(t)=t^2e^t+2te^{-t}+4ch2t$ ответ: $F(p)=\dfrac{2}{(p-1)^3}+\dfrac{2}{(p+1)^2}+\dfrac{4p}{p^2-4}$

15. $f(t)=\cos 2t\cdot\sin 3t$ ответ: $F(p)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2+1}+\dfrac{5}{p^2+25}\right)$

Указание: использовать формулу $\sin 3t\cdot\cos 2t=\dfrac{1}{2}(\sin 5t+\sin t)$

16. $f(t)=e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$ ответ: $F(p)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{(p+4)^2+25}+\dfrac{1}{(p+4)^2+1}\right)$

Указание: использовать равенство $\sin 3t\cdot\cos 2t=\dfrac{1}{2}(\sin 5t+\sin t)$

В следующих задачах найти оригиналы по заданным изображениям.

19. $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)(p^2-4)}$ Ответ: $f(t)=-\dfrac{1}{3}e^t+\dfrac{1}{4}e^{2t}+\dfrac{1}{12}e^{-2t}$.

20. $F(p)=\dfrac{(p+3)}{p(p^2-4p+3)}$ Ответ: $f(t)=1-2e^t+e^{3t}$.

21. $F(p)=\dfrac{1}{p(p^4-5p^2+4)}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\operatorname{ch} t+\dfrac{1}{12}\operatorname{ch} 2t$.

22. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$ Ответ: $f(t)=e^{-2t}\sin t$.

23. $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})$.

24. $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$.

25. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{2}t\sin t$.

26. $F(p)=\dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$ Ответ: $f(t)=1-e^{-t}-te^{-t}$.

27. $F(p)=\dfrac{1}{7-p+p^2}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}e^{\frac{t}{2}}\sin\dfrac{3\sqrt{3}}{2}t$.

28. $F(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t$.

29. $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$ Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{6}e^{2t}-\dfrac{1}{15}e^{-t}-\dfrac{1}{10}\cos 2t-\dfrac{1}{5}\sin 2t$.

Используя различные приемы, найти оригиналы по данным изображениям.

37. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}$. Ответ: $f(t)=\dfrac{1}{27}\left(\dfrac{3}{2}t^2e^t+te^t-e^t+2te^{-2t}+e^{-2t}\right)$.

38. $F(p) = \dfrac{4 - p + p^2}{p^3 - p^2}$. Ответ: $f(t) = 2e^t - 4t - 3$.

39. $F(p) = \dfrac{1}{p^4 - 6p^3 + 11p^2 - 6p}$. Ответ: $f(t) = -\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2}e^t - \dfrac{1}{2}e^{2t} + \dfrac{1}{6}e^{3t}$.

40. $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^3(p^3+1)}$. Ответ: $f(t) = \dfrac{1}{8}(2t^2 - 6t + 3)e^t - \dfrac{1}{24}e^{-t} + \dfrac{2}{3}\sin(\dfrac{t\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{6})$.

41. $F(p) = \dfrac{1}{p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$. Ответ: $f(t) = \dfrac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}(\sin t - t\cos t)$.

42. $F(p) = \dfrac{p^2 + 2p - 1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}$. Ответ: $f(t) = e^{-t}(1 - t^2)$.

43. $F(p) = \dfrac{p}{p^3 + 1}$. Ответ: $f(t) = \dfrac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

44. $F(p) = \dfrac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p}$. Ответ: $f(t) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}e^{-2t}\left(4\sin t - 3\cos t\right)$.

45. $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$. Ответ: $f(t) = \dfrac{1}{9}\left(e^{-2t} - e^t + 3te^t\right)$.

46. $F(p) = \dfrac{p^2 + 2p - 1}{p^3 - 2p^2 + 2p - 1}$. Ответ: $f(t) = 2e^t + e^{\frac{t}{2}}\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

51. $F(p) = \dfrac{6p^3 + 4p + 1}{p^4 + p^2}$. Ответ: $f(t) = 4 + t + 2\cos t - \sin t$

52. $F(p) = \dfrac{5p^3 + 3p^2 + 12p - 12}{p^4 - 16}$. Ответ: $f(t) = ch2t + \cos 2t + \dfrac{3}{2}\sin 2t$.

53. $F(p) = \dfrac{3p^2 - 1}{(p^2+1)^3}$. Ответ: $f(t) = \dfrac{1}{2}t^2\sin t$.

54. $F(p) = \dfrac{3 - 2p^3}{p^4}$. Ответ: $f(t) = \dfrac{1}{2}t^3 - 2t$.

55. $F(p) = \dfrac{4 - p}{(p-2)^3}$. Ответ: $f(t) = \left(t^2 - t\right)e^{2t}$.

56. $F(p) = \dfrac{p + 2}{p^3 - 1}$. Ответ: $f(t) =. e^t + \dfrac{1}{6}e^{-\frac{t}{2}}\left(3\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

57. $F(p) = \dfrac{5p^3 + 5p^2 - 11p + 3}{p^3(p+3)}$. Ответ: $f(t) = 2e^{-3t} + \dfrac{1}{2}\left(t^2 - 8t + 6\right)$.

Решить задачу Коши:

85. $x' + x = e^t$, $x(0) = 0$.
Ответ: $x = sht$

86. $x' - 2x = 0$, $x(0) = 1$.
Ответ: $x = e^{2t}$

87. $x'' + x' - 2x = e^t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
Ответ: $x = \frac{1}{3}te^t - \frac{7}{9}e^t - \frac{2}{9}e^{-2t}$

88. $x'' + x' = t\cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
Ответ: $x = \frac{1}{4}\left(t^2 \sin t + t\cos t - \sin t\right)$

89. $x'' - 2\alpha x' + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
Ответ: $x = \frac{1}{\beta}e^{\alpha t} \sin \beta t$

90. $x''' + 4x = \cos 3t$, $x(0) = x'(0) = 2$.
Ответ: $x = \frac{11}{5}\cos 2t - \frac{1}{5}\cos 3t + \sin 2t$

91. $x''' - 6x'' - 11x - 6x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = 0$

Ответ: $x = -\frac{5}{2}e^t + 4e^{2t} - \frac{3}{2}e^{3t}$

92. $x''' + x' = e^{2t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
Ответ: $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t$

93. $4x''' - 8x'' - x' - 3x = -8e^t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$.
Ответ: $x = e^t$

94. $x^{(4)} + x''' = \cos t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, $x'''(0) = 2$.
Ответ: $x = t^2 - t + 1 - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$

95. $x^{(4)} + 4x = t^2$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$
Ответ: $x = \frac{1}{4}\left(t^2 - sht \cdot \sin t\right)$

96. $x^{(5)} + 2x''' + x' = 2t + \cos t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = x^{(4)}(0) = 0$
Ответ: $x = t^2 - 4 + \left(4 - \frac{3}{8}t\right)\cos t + \left(\frac{3}{8} + t - \frac{1}{8}t^2\right)\sin t$

Найти решение следующих систем дифференциальных уравнений

99. $\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 2$.

Ответ: $x = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$, $y = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$.

100. $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$.

Ответ: $x = \frac{6}{5}e^{5t} - \frac{1}{5}e^{-5t}$, $y = \frac{3}{5}e^{5t} + \frac{2}{5}e^{-5t}$.

101. $\begin{cases} x' + y = 0 \\ y' - 2x - 2y = 0 \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$.

Ответ: $x = e^{t}(\cos t - 2\sin t)$, $y = e^{t}(\cos t + 3\sin t)$

102. $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t} \\ y' - 2x + y = 7e^{2t} \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 3$

Ответ: $x = e^{2t}$, $y = 3e^{2t}$.

103. $\begin{cases} 2x' + y' - 3x = 0 \\ x'' + y' - 2y = e^{2t} \end{cases}$ $x(0) = -1, x'(0) = 1, y(0) = 0$

Ответ: $x = -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{23}}{2}t + \frac{11}{4\sqrt{23}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{23}}{2}t$

$y = -\frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{8}e^{2t} + \frac{5}{8}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{23}}{2}t - \frac{73}{8\sqrt{23}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{23}}{2}t$

104. $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = x + y \\ z' = x + z \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 3$

Ответ: $x = 2 - e^{t}, y = -2 + 4e^{t} - te^{t}, z = -2 + 5e^{t} - te^{t}$.