Пример. Пусть известно частное решение $y_1 = x$ уравнения

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0. \tag{1}$$

По формуле Остроградского — Лиувилля получим

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x}; \quad y_1y_2' - y_1'y_2 = C(x^2+1).$$

Так как функция y_1 известна, то мы получили линейное уравнение первого порядка относительно y_2. Проще всего оно решается следующим способом. Разделив обе части уравнения на y_1^2, получим слева производную от дроби y_2/y_1

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{C(x^2+1)}{y_1^2}.$$

Так как $y_1 = x$, то

$$\frac{y_2}{y_1} = \int C\cdot\frac{x^2+1}{x^2}\,\mathrm{d}x + C_2 = C\left(x - \frac{1}{x}\right) + C_2;$$

$$y_2 = C(x^2-1) + C_2x.$$

Это — общее решение уравнения (1).

Пример. Найти частное решение уравнения

$$(1-2x^2)y'' + 2y' + 4y = 0, \tag{2}$$

являющееся алгебраическим многочленом (если такое решение существует).

Сначала найдем степень многочлена. Подставляя $y = x^n + \ldots$ в уравнение (2) и выписывая только члены с самой старшей степенью буквы x, получим: $-2x^2\cdot n(n-1)x^{n-2} + \cdots + 4x^n + \cdots = 0$. Приравнивая нулю коэффициент при старшей степени x, получим: $-2n(n-1)+4=0$; $n^2-n-2=0$. Отсюда $n_1 = 2$; корень $n_2 = -1$ не годен (степень многочлена — целое положительное число). Итак, многочлен может быть только второй степени. Ищем его в виде $y = x^2+ax+b$. Подставляя в уравнение (2), получим $(4a+4)x + 2 + 2a + 4b = 0$. Следовательно, $4a+4=0$, $2+2a+4b=0$. Отсюда $a=-1$, $b=0$. Итак, многочлен $y = x^2 - x$ является частным решением.

681. $(2x+1)y''+4xy'-4y=0$.

682. $x^2(x+1)y''-2y=0$; $y_1=1+\frac{1}{x}$.

683. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$.

684. $xy''+2y'-xy=0$; $y_1=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

685. $y''-2(1+\operatorname{tg}^2 x)y=0$; $y_1=\operatorname{tg} x$.

686. $x(x-1)y''-xy'+y=0$.

687. $(\mathrm{e}^x+1)y''-2y'-\mathrm{e}^x y=0$; $y_1=\mathrm{e}^x-1$.

688. $x^2y''\ln x-xy'+y=0$.

689. $y''-y'\operatorname{tg} x+2y=0$; $y_1=\sin x$.

690. $(x^2-1)y''+(x-3)y'-y=0$.

691. $xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=0$.

692. $y''+4xy'+(4x^2+2)y=0$; $y_1=\mathrm{e}^{ax^2}$.

693. $xy''-(2x+1)y'+2y=0$.

694. $x(2x+1)y''+2(x+1)y'-2y=0$.

695. $x(x+4)y''-(2x+4)y'+2y=0$.

696. $x(x^2+6)y''-4(x^2+3)y'+6xy=0$.

697. $(x^2+1)y''-2y=0$.

698. $2x(x+2)y''+(2-x)y'+y=0$.

699. $xy'''-y''-xy'+y=0$; $y_1=x$, $y_2=\mathrm{e}^x$.