СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. НАЙПРОСТІШІ ТИПИ ТОЧОК СПОКОЮ

Приклад 1 Доведіть, що кожний розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 0 \tag{1.13}$$

стійкий.

Доведення. Дійсно, розв'язок $x_1(t)$ цього рівняння, що задовольняє початковій умові, має вигляд $x_1(t_0) = x_1^0$ $x_1(t) \equiv x_1^0 = const$.

Розглянемо інший розв'язок $x_2(t)$ рівняння (1.13), що задовольняє початковій умові

$$x_2(t_0) = x_2^0. \tag{1.14}$$

Для цих розв'язків маємо $|x_2(t) - x_1(t)| = \left| x_2^0 - x_1^0 \right|$ для всіх *t*. Отже, для всякого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, наприклад, $\delta = \varepsilon$ таке, що як тільки $\left| x_2^0 - x_1^0 \right| < \delta$, то для розв'язків $x_2(t)$ і $x_1(t)$ буде виконуватися нерівність

$$|x_2(t) - x_1(t)| = \left| x_2^0 - x_1^0 \right| < \varepsilon \text{ при всіх } t \geq t_0.$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (1.13) є стійким. Однак асимптотичної стійкості немає:

$$\lim_{t \to \infty} |x_2(t) - x_1(t)| = \lim_{t \to \infty} \left| x_2^0 - x_1^0 \right| \neq 0.$$

Приклад 2 Доведіть, що кожний розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{1.15}$$

є асимптотично стійким.

Доведення. Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$x(t) = Ce^{-t}. \tag{1.16}$$

Розв'язки $x_2(t)$, $x_1(t)$ рівняння (1.15), що задовольняють початковим умовам $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$, будуть

$$x_1(t) = x_1^0 e^{-(t-t_0)}, \; x_2(t) = x_2^0 e^{-(t-t_0)}.$$

Отже, для всякого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, наприклад, $\delta = \varepsilon$ таке, що як тільки $\left| x_2^0 - x_1^0 \right| < \delta$, тоді $|x_2(t) - x_1(t)| = \left| x_2^0 - x_1^0 \right| e^{-(t-t_0)} \leq \left| x_2^0 - x_1^0 \right| < \delta = \varepsilon$ і

$$\lim_{t \to \infty} |x_2(t) - x_1(t)| = \lim_{t \to \infty} \left| x_2^0 - x_1^0 \right| e^{-(t-t_0)} = 0,$$

що означає асимптотичну стійкість будь-якого розв'язку рівняння (1.15).

Приклад 3 Дослідити на стійкість розв'язки $x(t) \equiv -1$ і $x(t) \equiv 1$ рівняння

$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2(t)$.

Розв'язання.

$$\frac{dx}{1 - x^2(t)} = dt,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = t + c,$$

$$\frac{1+x}{1-x} = Ae^{2t},$$

$$x(t) = \frac{Ae^{2t} - 1}{Ae^{2t} + 1},$$

$$x_0(t) = \frac{Ae^{2t_0} - 1}{Ae^{2t_0} + 1}, \text{ звідки } A = \frac{x_0 + 1}{e^{2t_0}(1 - x_0)}.$$

Таким чином, маємо розв'язок

$$x(t) = \frac{(1 + x_0)e^{2(t-t_0)} - (1 - x_0)}{(1 + x_0)e^{2(t-t_0)} + (1 - x_0)}.$$

Розв'язок рівняння $x(t) \equiv -1$ нестійкий, тому що

$$\lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) = 1, \; |x_2(t) - x_1(t)| = 2 = \varepsilon.$$

Розв'язок $x(t) \equiv 1$ цього рівняння згідно з визначенням асимптотично стійкий:

$$|1 - \bar{x}_0| < \delta,$$

$$|\bar{x}(t) - 1| = \left|\frac{-1 + \bar{x}_0 - 1 + \bar{x}_0}{(1 + \bar{x}_0)e^{2(t-t_0)} + (1 - \bar{x}_0)}\right| = \left|\frac{2(1 - \bar{x}_0)}{(1 + \bar{x}_0)e^{2(t-t_0)} + (1 - \bar{x}_0)}\right| \le$$

$$\le \{1 - \delta < \bar{x}_0 < 1 + \delta\} \le \frac{|2(1 - \bar{x}_0)|}{\left|(1 + \bar{x}_0)e^{2(t-t_0)}\right| - |(1 - \bar{x}_0)|} < \frac{2\delta}{1 - \delta} < \varepsilon.$$

Оберемо $\delta < 1$: $\quad \delta < \frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}, \quad \delta = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{\varepsilon}{2 + \varepsilon}; 1\right\}$ і $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t) - \bar{x}(t)| = 0$.

Приклад 4 Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -5y - 6x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Розв'язання.

$$\ddot{x} = \dot{y},$$

$$\ddot{x} = -5\dot{x} - 6x,$$

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0,$$

$$\lambda_1 = -3, \qquad \lambda_2 = -2,$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t}, \\ y(t) = \dfrac{dx}{dt} = -3c_1 e^{-3t} - 2c_2 e^{-2t}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 0, \\ y(0) = -3c_1 - 2c_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Нехай

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_0, \\ -3c_1 - 2c_2 = y_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -2x_0 - y_0, \\ c_2 = 3x_0 + y_0. \end{cases}$$

Таким чином, маємо розв'язок

$$\begin{cases} x(t) = -(2x_0 + y_0)e^{-3t} + (3x_0 + y_0)e^{-2t}, \\ y(t) = 3(2x_0 + y_0)e^{-3t} - 2(3x_0 + y_0)e^{-2t}. \end{cases}$$

Нехай $|\,\overline{x}_0 - x_0\,| = |\,\overline{x}_0 - 0\,| < \delta$ і $|\,\overline{y}_0 - y_0\,| = |\,\overline{y}_0 - 0\,| < \delta$.

Розглянемо

$$|\,\overline{x}(t) - x(t)\,| = |\,\overline{x}(t) - 0\,| \le |\,2\overline{x}_0 + \overline{y}_0\,| + |\,3\overline{x}_0 + \overline{y}_0\,| \le 5|\,\overline{x}_0\,| + 2|\,\overline{y}_0\,| \le 7\delta < \varepsilon,$$

$$|\,\overline{y}(t) - y(t)\,| = |\,\overline{y}(t) - 0\,| \le |\,6\overline{x}_0 + 3\overline{y}_0\,| + |\,6\overline{x}_0 + 2\overline{y}_0\,| \le 12|\,\overline{x}_0\,| + 5|\,\overline{y}_0\,| \le 17\delta < \varepsilon;$$

$$\begin{cases} \delta < \dfrac{\varepsilon}{7}, \\ \delta < \dfrac{\varepsilon}{17} \end{cases} \Rightarrow \ \delta < \frac{\varepsilon}{17}, \text{ наприклад } \delta = \frac{\varepsilon}{34}.$$

Асимптотична стійкість:

$$\lim_{t \to \infty} |\,\overline{x}(t) - x(t)\,| = 0,$$

$$\lim_{t \to \infty} |\,\overline{y}(t) - y(t)\,| = 0.$$

Отже, маємо асимптотичну стійкість.

Приклад 5 Встановити характер точки спокою (0, 0) системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Розв'язання. У цьому випадку $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 0$. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \text{ або } k^2 + 1 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $k_{1,2} = \pm i$ – чисто уявні. Точка спокою стійка (центр).

Приклад 6 Визначити значення параметра α, при якому буде стійким нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\alpha - 1)x - \alpha y. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння для даної системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ \alpha - 1 & -\alpha - k \end{vmatrix} = 0$$

або $k^2 + \alpha k + 1 - \alpha = 0$. Тут $a_1 = \alpha$, $a_2 = 1 - \alpha$.

Асимптотична стійкість нульового розв'язку буде мати місце при $\alpha > 0$, $1 - \alpha > 0$, тобто при $0 < \alpha < 1$.

Стійкість, але не асимптотична, буде у двох випадках:

а) $\alpha > 0$, $1 - \alpha = 0$, тобто при $\alpha = 1$;

б) $\alpha = 0$, $1 - \alpha > 0$, тобто при $\alpha = 0$.

При всіх інших значеннях α нульовий розв'язок нестійкий.

Приклад 7 В площині параметрів α і β знайти області, в яких нульовий розв'язок системи рівнянь стійкий:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + (\beta - 2\alpha\beta - 1)y, \\ \dot{y} = x - \beta y. \end{cases}$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} \alpha - k & \beta - 2\alpha\beta - 1 \\ 1 & -\beta - k \end{vmatrix} = 0$$

або $k^2 + (\beta - \alpha)k + 1 + \alpha\beta - \beta = 0$. Тут $a_1 = \beta - \alpha$, $a_2 = 1 + \alpha\beta - \beta$. a_1 і a_2 є неперервними функціями від α і β, тому знаки a_1 й a_2 будуть змінюватися там, де $a_1 = a_2 = 0$, тобто на прямій $\beta - \alpha = 0$ і на гіперболі $1 + \alpha\beta - \beta = 0$. Ці лінії розбивають площину параметрів α, β на чотири області I, II, III, IV (рис. 1.1), у кожній з яких знаки a_1 й a_2 постійні. Візьмемо по одній довільній точці в кожній області й визначимо в цих точках знаки коефіцієнтів a_1 і a_2.

Область I: у точці (–1; 1) маємо $a_1 = 2 > 0$, $a_2 = -1 < 0$. Нульовий розв'язок системи в цій області нестійкий.

Область II: у точці (0; 0,5), маємо $a_1 = 0{,}5 > 0$, $a_2 = 0{,}5 > 0$. Нульовий розв'язок системи в області II асимптотично стійкий.

Область III: у точці (1,0) маємо $a_1 = -1 < 0$, $a_2 = 1 > 0$. Нульовий розв'язок в області III нестійкий.

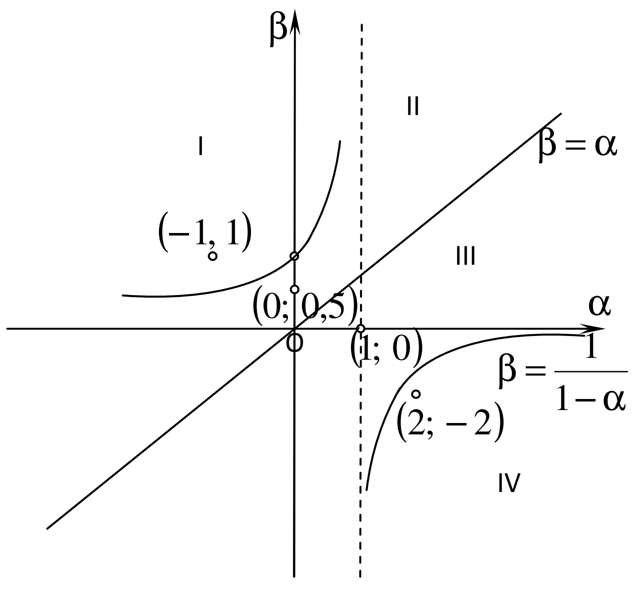

Рисунок 1.1

Область IV: у точці (2; –2) маємо $a_1 = -4 < 0$, $a_2 = -1 < 0$. Нульовий розв'язок у цій області нестійкий.

Досліджуємо на стійкість нульовий розв'язок на границях розглянутих вище областей.

1) $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha < 1$ (границя між областями I і II). На цій границі $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, так що нульовий розв'язок на ній стійкий, але не асимптотично;

2) $\beta = \alpha$ (границя між областями II і III). На цій границі $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, так що нульовий розв'язок на ній стійкий, але не асимптотично.

3) $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha > 1$ (границя між областями III і IV). На цій границі $a_1 < 0$, $a_2 = 0$, так що нульовий розв'язок на ній стійкий.

Отже, нульовий розв'язок асимптотично стійкий в області II і стійкий, але не асимптотично, на границі області II.

Користуючись визначенням, дослідити на стійкість розв'язки наступних рівнянь і систем:

№ 1.1. $\dfrac{dx}{dt} + x = 0$, $x(0) = 1$.

№ 1.2. $\dfrac{dx}{dt} = -t(x-1)$, $x(0) = 1$.

№ 1.3. $\dfrac{dx}{dt} - 2x = t$, $x\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

№ 1.4. $\dfrac{dx}{dt} = 2xt$, $x(0) = 0$.

№ 1.5. $\dfrac{dx}{dt} = \cos t$, $x(0) = 1$.

№ 1.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3y - 2x, \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 0$.

№ 1.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + 3x, \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 0$.

Встановити характер точки спокою (0; 0) у наступних системах:

№ 1.8. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

№ 1.9. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x, \\ \dot{y} = -9x + y. \end{cases}$

№ 1.10. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

№ 1.11. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2y - 3x. \end{cases}$

№ 1.12. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

№ 1.13. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$

№ 1.14. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$

№ 1.15. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x + y. \end{cases}$

№ 1.16. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2z. \end{cases}$

№ 1.17. $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z. \end{cases}$

Визначити значення параметра α, при яких нульові розв'язки наступних систем стійкі:

№ 1.18. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 5\alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$

№ 1.19. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = \alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$

№ 1.20. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha^2 x - 3y, \\ \dot{y} = \alpha x + 4y. \end{cases}$

№ 1.21. $\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

№ 1.22. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y, \\ \dot{y} = \alpha y - z, \\ \dot{z} = \alpha z - x. \end{cases}$

Для наступних систем у площині параметрів α і β знайти області, у яких нульовий розв'язок стійкий:

№ 1.23. $\begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y, \\ \dot{y} = \beta x - y. \end{cases}$

№ 1.24. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = x + \alpha y. \end{cases}$

№ 1.25. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = -\beta x + (\alpha - 2)y. \end{cases}$

№ 1.26. $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - \beta^2 y, \\ \dot{y} = (\alpha^2 - 1)x + (\beta^2 + 1)y. \end{cases}$

№ 1.27. $\begin{cases} \dot{x} = (\alpha^2 - \beta)x + (1 + \beta)y, \\ \dot{y} = -\beta^2 x + \beta^2 y. \end{cases}$

№ 1.28. $\begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - (\beta + 1)y, \\ \dot{y} = (4\alpha + \beta + 1)x - 4y. \end{cases}$