

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

При виконанні індивідуального завдання необхідно:

1) виконувати її в окремому зошиті. На обкладинці зошита вказати прізвище, ім'я та по-батькові студента, номер варіанта та таблицю з номерами завдань і місцем для відмітки викладача;

2) умову кожної задачі записувати повністю з конкретними даними для відповідного варіанта;

3) розв'язання всіх задач і пояснення до них викладати детально, звертаючись до означень, теорем, формул, які використовуються при розв'язуванні даної задачі;

Індивідуальне завдання оцінюється в 20 балів. Якщо робота була оцінена викладачем меншою кількістю балів, то треба якнайшвидше виправити всі недоліки, розв'язати правильно усі задачі й здати на повторне рецензування разом із попередньою роботою.

Номер варіанта відповідає номеру за списком.

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1

1.1. $e^{x+3y} dy = x dx$. (Ответ: $e^{3y} = 3(C - xe^{-x} - e^{-x})$.)

1.2. $y' \sin x = y \ln y$. (Ответ: $\ln y = C \operatorname{tg}(x/2)$.)

1.3. $y' = (2x - 1) \operatorname{ctg} y$. (Ответ: $\ln |\cos y| = x - x^2 + C$.)

1.4. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dy + \sec^2 y \operatorname{tg} x dx = 0$. (Ответ: $C = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} x$.)

1.5. $(1 + e^x) y dy - e^y dx = 0$. (Ответ: $-e^{-y}(y + 1) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C$.)

1.6. $(y^2 + 3) dx - \frac{e^x}{x} y dy = 0$. (Ответ: $\ln(y^2 + 3) = 2(C - xe^{-x} - e^{-x})$.)

1.7. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$. (Ответ: $C = \cos x / \cos y$.)

1.8. $y' = (2y + 1) \operatorname{tg} x$. (Ответ: $\sqrt{2y + 1} = C / \cos x$.)

1.9. $(\sin(x + y) + \sin(x - y)) dx + \frac{dy}{\cos y} = 0$ (Ответ:

1.10. $(1 + e^x) y y' = e^x$. (Ответ: $y^2 = 2 \operatorname{tg} y = C + 2 \cos x$.)
 $y^2 = 2 \ln C(e^x + 1)$.)

1.11. $\sin x \operatorname{tg} y dx - \frac{dy}{\sin x} = 0$. (Ответ: $\ln |\sin y| = C + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x$.)

1.12. $3e^x \sin y dx + (1 - e^x) \cos y dy = 0$. (Ответ: $\sin y = C(e^x - 1)^3$.)

$$1.13. y' = e^{2x} / \ln y. \quad (\text{Ответ: } y(\ln y - 1) = \frac{1}{2} e^{2x} + C.)$$

$$1.14. 3^{x^2+y} dy + x dx = 0. \quad (\text{Ответ: } 3^y = \frac{1}{2} 3^{-x^2} + C \ln 3.)$$

$$1.15. (\cos(x - 2y) + \cos(x + 2y))y' = \sec x. \quad (\text{Ответ: } \sin 2y = \operatorname{tg} x + C.)$$

$$1.16. y' = e^{x^2} x(1 + y^2). \quad (\text{Ответ: } \operatorname{arctg} y = C + \frac{1}{2} e^{x^2}.)$$

$$1.17. \operatorname{ctg} x \cos^2 y dx + \sin^2 x \operatorname{tg} y dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \operatorname{tg}^2 y = \operatorname{ctg}^2 x + 2C.)$$

$$1.18. \sin x \cdot y' = y \cos x + 2 \cos x. \quad (\text{Ответ: } y = C \sin x - 2.)$$

$$1.19. 1 + (1 + y')e^y = 0. \quad (\text{Ответ: } C(e^y - 1) = e^{-x}.)$$

$$1.20. y' \operatorname{ctg} x + y = 2. \quad (\text{Ответ: } y = C \cos x + 2.)$$

2

$$2.1. (xy + x^3 y)y' = 1 + y^2. \quad (\text{Ответ: } Cx = \sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}.)$$

$$2.2. y' / 7^{y-x} = 3. \quad (\text{Ответ: } 7^{-y} = 3 \cdot 7^{-x} + C \ln 7.)$$

$$2.3. y - xy' = 2(1 + x^2 y'). \quad (\text{Ответ: } y = Cx / \sqrt{1 + 2x^2} + 2.)$$

$$2.4. y - xy' = 1 + x^2 y'. \quad (\text{Ответ: } y = Cx / (x + 1) + 1.)$$

$$2.5. (x + 4)dy - xy dx = 0. \quad (\text{Ответ: } y = Ce^x / (x + 4)^4.)$$

$$2.6. y' + y + y^2 = 0. \quad (\text{Ответ: } y / (y + 1) = C - x.)$$

$$2.7. y^2 \ln x dx - (y - 1)x dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{y} + \ln y = C + \frac{1}{2} \ln^2 x.)$$

$$2.8. (x + xy^2)dy + y dx - y^2 dx = 0. \quad (\text{Ответ: } y + \ln \frac{(y-1)^2}{y} = C + \ln x.)$$

$$2.9. y' + 2y - y^2 = 0. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{(y-2)/y} = Ce^x.)$$

$$2.10. (x^2 + x)y dx + (y^2 + 1)dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{y^2}{2} + \ln y = C - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}.)$$

2.11. $(xy^3 + x)dx + (x^2y^2 - y^2)dy = 0$. (Ответ: $\sqrt[3]{y^3 + 1} = C/\sqrt{x^2 - 1}$.)

2.12. $(1 + y^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$. (Ответ: $\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = C + \operatorname{arctg} x$.)

2.13. $y' = 2xy + x$. (Ответ: $\frac{1}{2} \ln |2y + 1| = x^2/2 + C$.)

2.14. $y - xy' = 3(1 + x^2y')$. (Ответ: $y = C\sqrt[3]{x}/\sqrt[3]{x + 3} + 3$.)

2.15. $2xyy' = 1 - x^2$. (Ответ: $y^2 = \ln |x| - \frac{x^2}{2} + C$.)

2.16. $(x^2 - 1)y' - xy = 0$. (Ответ: $y = C\sqrt{x^2 - 1}$.)

2.17. $(y^2x + y^2)dy + xdx = 0$. (Ответ: $y^3 = 3(C - x + \ln |x + 1|)$.)

2.18. $(1 + x^3)y^3dx - (y^2 - 1)x^3dy = 0$. (Ответ: $\ln y + \frac{1}{2y^2} = C + x - \frac{1}{2x^2}$.)

2.19. $xy' - y = y^2$. (Ответ: $y/(y + 1) = Cx$.)

2.20. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$. (Ответ: $\sqrt{y^2 + 1} = \ln Cx$.)

3

3.1. $y - xy' = x \sec \frac{y}{x}$. (Ответ: $\sin \frac{y}{x} = \ln \frac{C}{|x|}$.)

3.2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$. (Ответ: $(y^2 - x^2)^2 Cx^2y^3$.)

3.3. $(x + 2y)dx - xdy = 0$. (Ответ: $y = Cx^2 - x$.)

3.4. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$. (Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{y^2 + x^2}{x^2} = \ln \frac{C}{x}$.)

3.5. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$. (Ответ: $y/(x - y) = Cx$.)

3.6. $y^2 + x^2y' = xy y'$. (Ответ: $e^{y/x} = Cy$.)

3.7. $xy' - y = x \operatorname{tg} (y/x)$. (Ответ: $\sin (y/x) = Cx$.)

3.8. $xy' = y - xe^{y/x}$. (Ответ: $e^{-y/x} = \ln Cx$.)

3.9. $xy' - y = (x + y) \ln ((x + y)/x)$. (Ответ: $\ln |1 + y/x| = Cx$.)

$$3.10. \quad xy' = y \cos \ln(y/x). \quad (\text{Ответ: } \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{y}{x} \right) = \\ = \ln Cx.)$$

$$3.11. \quad (y + \sqrt{xy}) dx = x dy. \quad (\text{Ответ: } y = \frac{x}{4} \ln^2 Cx.)$$

$$3.12. \quad xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y. \quad (\text{Ответ: } \arcsin(y/x) = \ln Cx.)$$

$$3.13. \quad y = x(y' - \sqrt{x} e^y). \quad (\text{Ответ: } -e^{-y/x} = \ln Cx.)$$

$$3.14. \quad y' = y/x - 1. \quad (\text{Ответ: } y = x \ln(C/x).)$$

$$3.15. \quad y'x + x + y = 0. \quad (\text{Ответ: } y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}.)$$

$$3.16. \quad y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = \\ = \ln Cx.)$$

$$3.17. \quad x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx. \quad (\text{Ответ: } y + \sqrt{x^2 + y^2} = \\ = Cx^2.)$$

$$3.18. \quad (4x^2 + 3xy + y^2) dx + (4y^2 + 3xy + x^2) dy = 0. \quad (\text{От-} \\ \text{вет: } \frac{2}{5} \ln \left(\frac{y+x}{x} \right) + \frac{9}{5} \ln \left(\frac{y^2 + 4x^2}{x^2} \right) - \frac{3}{10} \operatorname{arctg} \frac{y}{2x} = \ln \frac{C}{x}.)$$

$$3.19. \quad (x - y) y dx - x^2 dy = 0. \quad (\text{Ответ: } y = x / \ln Cx.)$$

$$3.20. \quad xy + y^2 = (2x^2 + xy) y'. \quad (\text{Ответ: } \frac{y}{x} + 2 \ln \frac{y}{x} = \\ = \ln \frac{C}{x}.)$$

4. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

$$4.1. \quad (x^2 + 1) y' + 4xy = 3, \quad y(0) = 0. \quad (\text{Ответ: } y = (x^3 + \\ + 3x) / (x^2 + 1)^2.)$$

$$4.2. \quad y' + y \operatorname{tg} x = \sec x, \quad y(0) = 0. \quad (\text{Ответ: } y = \sin x.)$$

$$4.3. \quad (1 - x)(y' + y) = e^{-x}, \quad y(0) = 0. \quad (\text{Ответ: } y = \\ = e^{-x} \ln \frac{1}{1-x}.)$$

$$4.4. \quad xy' - 2y = 2x^4, \quad y(1) = 0. \quad (\text{Ответ: } y = x^4 - x^2.)$$

$$4.5. \quad y' = 2x(x^2 + y), \quad y(0) = 0. \quad (\text{Ответ: } y = x^2 + 1 - e^{x^2}.)$$

$$4.6. \quad y' - y = e^x, \quad y(0) = 1. \quad (\text{Ответ: } y = (x + 1)e^x.)$$

- 4.7. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0, y(1) = \frac{1}{2e}$. (Ответ: $y = \frac{e^{-x^2}}{2x}$.)
- 4.8. $\cos y dx = (x + 2 \cos y) \sin y dy, y(0) = \pi/4$.
(Ответ: $x = \left(\sin^2 y - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\cos y}$.)
- 4.9. $x^2 y' + xy + 1 = 0, y(1) = 0$. (Ответ: $y = -(\ln x)/x$.)
- 4.10. $yx' + x = 4y^3 + 3y^2, y(2) = 1$. (Ответ: $x = y^3 + y^2$.)
- 4.11. $(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy, y(0) = 1$. (Ответ: $x = 2 \ln y + 1 - y$.)
- 4.12. $y' = y/(3x - y^2), y(0) = 1$. (Ответ: $x = y^2 - y^3$.)
- 4.13. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1), y(0) = 1$. (Ответ: $x(y - 1)^2 = (y - \ln y - 1)$.)
- 4.14. $x(y' - y) = e^x, y(1) = 0$. (Ответ: $y = e^x \ln x$.)
- 4.15. $y = x(y' - x \cos x), y(\pi/2) = 0$. (Ответ: $y = (\sin x - 1)x$.)
- 4.16. $(xy' - 1) \ln x = 2y, y(e) = 0$. (Ответ: $y = (\ln^5 x - \ln^2 x)/3$.)
- 4.17. $(2e^y - x)y' = 1, y(0) = 0$. (Ответ: $x = e^y - e^{-y}$.)
- 4.18. $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}, y(1) = 0$. (Ответ: $y = (x^2 - 1/x)e^{-x}$.)
- 4.19. $(x + y^2)dy = ydx, y(0) = 1$. (Ответ: $x = y^2 - y$.)
- 4.20. $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1, y(0) = \pi/2$. (Ответ: $x = -\sin y \cos y$.)

5. Найти общее решение дифференциального уравнения.

- 5.1. $y' + y = x\sqrt{y}$. (Ответ: $y = (xe^{x/2} - 2e^{x/2} + C)^2 e^{-x}$.)
- 5.2. $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x} \sec^2 y dy$. (Ответ: $x = (y \operatorname{tg} y + \ln |\cos y| + C)^2 / y^2$.)
- 5.3. $y' + 2y = y^2 e^x$. (Ответ: $y = 1/(Ce^{2x} + e^x)$.)
- 5.4. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$. (Ответ: $y = 1/(\cos x \sqrt[3]{C - \operatorname{tg} x})$.)
- 5.5. $xydy = (y^2 + x)dx$. (Ответ: $y = x\sqrt{2(C - 1/x)}$.)
- 5.6. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$. (Ответ: $y = 1/(x^2 \sqrt{2(e^x + C)})$.)

$$5.7. y'x^3 \sin y = xy' - 2y. \text{ (Ответ: } x = \sqrt{y/(C - \cos y)}.)$$

$$5.8. (2x^2y \ln y - x)y' = y. \text{ (Ответ: } x = 1/(y(C - \ln^2 y)).)$$

$$5.9. 2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}. \text{ (Ответ: } y = \\ = \sqrt{C - \sqrt{x^2 - 1}} \sqrt[4]{x^2 - 1}.)$$

$$5.10. xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y. \text{ (Ответ: } y = \frac{x^4}{4}(C + \ln x)^2.)$$

$$5.11. xy^2y' = x^2 + y^3. \text{ (Ответ: } y = x\sqrt[3]{3(C - 1/x)}.)$$

$$5.12. (x + 1)(y' + y^2) = -y. \text{ (Ответ: } y = 1/((x + 1)(C + \ln |x + 1|)).)$$

$$5.13. y'x + y = -xy^2. \text{ (Ответ: } y = 1/(x(C + \ln x)).)$$

$$5.14. y' - xy = -y^3e^{-x^2}. \text{ (Ответ: } y = e^{x^2/2}/\sqrt{2(C + x)}.)$$

$$5.15. xy' - 2\sqrt{x^3y} = y. \text{ (Ответ: } y = x(x^2/2 + C)^2.)$$

$$5.16. y' + xy = x^3y^3. \text{ (Ответ: } y = \\ = e^{-x^2/2}/\sqrt{x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C}.)$$

$$5.17. y' = \frac{x}{y}e^{2x} + y. \text{ (Ответ: } y = e^x\sqrt{x^2 + C}.)$$

$$5.18. yx' + x = -yx^2. \text{ (Ответ: } x = 1/(y(C + \ln y)).)$$

$$5.19. x(x - 1)y' + y^3 = xy. \text{ (Ответ: } y = \\ = (x - 1)/\sqrt{2(x - \ln x + C)}.)$$

$$5.20. 2x^3yy' + 3x^2y^2 + 1 = 0. \text{ (Ответ: } y = \sqrt{C - x/x^{3/2}}.)$$

6. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции $y = \varphi(x)$ при $x = x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$6.1. y''' = \sin x, x_0 = \pi/2, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0. \\ \text{(Ответ: 1,23.)}$$

$$6.2. y''' = 1/x, x_0 = 2, y(1) = 1/4, y'(1) = y''(1) = 0. \\ \text{(Ответ: 0,38.)}$$

$$6.3. y'' = 1/\cos^2 x, x_0 = \pi/3, y(0) = 1, y'(0) = 3/5. \\ \text{(Ответ: 2,69.)}$$

$$6.4. y''' = 6/x^3, x_0 = 2, y(1) = 0, y'(1) = 5, y''(1) = 1. \\ \text{(Ответ: 6,07.)}$$

6.5. $y'' = 4 \cos 2x$, $x_0 = \pi/4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$. (Ответ: 4,36.)

6.6. $y'' = 1/(1+x^2)$, $x_0 = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. (Ответ: 0,44.)

6.7. $xy''' = 2$, $x_0 = 2$, $y(1) = 1/2$, $y'(1) = y''(1) = 0$. (Ответ: 0,77.)

6.8. $y''' = e^{2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $y(0) = \frac{9}{8}$, $y'(0) = \frac{1}{4}$, $y''(0) = -\frac{1}{2}$. (Ответ: 1,22.)

6.9. $y''' = \cos^2 x$, $x_0 = \pi$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1/8$, $y''(0) = 0$. (Ответ: 3,58.)

6.10. $y'' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $x_0 = 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. (Ответ: 5,57.)

6.11. $y'' = \frac{1}{\sin^2 2x}$, $x_0 = \frac{5}{4}\pi$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. (Ответ: 3,93.)

6.12. $y'' = x + \sin x$, $x_0 = 5$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$. (Ответ: 5,31.)

6.13. $y'' = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$. (Ответ: 0,15.)

6.14. $y'' = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$, $x_0 = \pi/4$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$. (Ответ: -0,39.)

6.15. $y''' = e^{x/2} + 1$, $x_0 = 2$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 2$. (Ответ: 25,08.)

6.16. $y'' = x/e^{2x}$, $x_0 = -1/2$, $y_0(0) = 1/4$, $y'(0) = -1/4$. (Ответ: 0,34.)

6.17. $y'' = \sin^2 3x$, $x_0 = \pi/12$, $y(0) = -\pi^2/16$, $y'(0) = 0$. (Ответ: -0,01.)

6.18. $y''' = x \sin x$, $x_0 = \pi/2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$. (Ответ: 0,14.)

6.19. $y''' \sin^4 x = \sin 2x$, $x_0 = 5\pi/2$, $y(\pi/2) = \pi/2$, $y'(\pi/2) = 1$, $y''(\pi/2) = -1$. (Ответ: 7,85.)

6.20. $y'' = \cos x + e^{-x}$, $x_0 = \pi$, $y(0) = -e^{-\pi}$, $y'(0) = 1$. (Ответ: 1,00.)

7. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

7.1. $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$. (Ответ: $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$.)

7.2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$. (Ответ: $9C_2(y - C_2)^2 = 4(C_1x + 1)^3$, $y = \pm x + C_1$.)

7.3. $x^3y'' + x^2y' = 1$. (Ответ: $y = C_1 \ln x + 1/x + C_2$.)

7.4. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$. (Ответ: $y = C_1 \sin x - x - \frac{1}{2} \sin 2x + C_2$.)

7.5. $y''x \ln x = y'$. (Ответ: $y = C_1x(\ln x - 1) + C_2$.)

7.6. $xy'' - y' = x^2e^x$. (Ответ: $y = e^x(x - 1) + C_1x^2 + C_2$.)

7.7. $y''x \ln x = 2y'$. (Ответ: $y = C_1(x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x) + C_2$.)

7.8. $x^2y'' + xy' = 1$. (Ответ: $y = (\ln^2 x)/2 + C_1 \ln x + C_2$.)

7.9. $y'' = -x/y$. (Ответ: $y = \frac{C_1^2}{2} \arcsin \frac{x}{C_1} + \frac{x}{2} \sqrt{C_1^2 - x^2} + C_2$.)

7.10. $xy'' = y'$. (Ответ: $y = C_1x^2/2 + C_2$.)

7.11. $y'' = y' + x$. (Ответ: $y = -x^2/2 - x + C_1e^x + C_2$.)

7.12. $xy'' = y' + x^2$. (Ответ: $y = x^3/3 + C_1x^2/2 + C_2$.)

7.13. $xy'' = y' \ln(y'/x)$. (Ответ: $y = \frac{x}{C_1} e^{C_1x+1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1x+1} + C_2$.)

7.14. $xy'' + y' = \ln x$. (Ответ: $y = (x + C_1) \ln x - 2x + C_2$.)

7.15. $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$. (Ответ: $y = -C_1 \cos x - x + C_2$.)

7.16. $y'' + 2xy'^2 = 0$. (Ответ: $y = \frac{1}{2C_1} \ln \frac{x - C_1}{x + C_1} + C_2$.)

7.17. $2xy'y'' = y'^2 + 1$. (Ответ: $y = \frac{2}{3C_1} (C_1x - 1)^{3/2} + C_2$.)

7.18. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$. (Ответ: $y = x^4/8 - x^3/6 + C_1x^2/2 - C_1x + C_2$.)

7.19. $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$. (Ответ: $y = -\sin x - C_1 \cos x + C_2x + C_3$.)

7.20. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} x = \sin^3 x$. (Ответ: $y = -\sin^3 x/3 + C_1x/2 - C_1 \sin 2x/4 + C_2$.)

8. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

8.1. $y'' = y'e^y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = -\ln |1 - x|$, $y = 0$.)

8.2. $y'^2 + 2yy'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = (1 \pm 3x/2)^{2/3}$, $y = 1$.)

8.3. $yy'' + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = \sqrt{2x + 1}$, $y = 1$.)

8.4. $y'' + 2yy'^3 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1/3$. (Ответ: $x = y^3/3 - y - 2/3$, $y = 2$.)

8.5. $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 2$. (Ответ: $y = \operatorname{arctg}(2 - 2x)$, $y = \pi/2$.)

8.6. $2yy'' = y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$, $y = 1$.)

8.7. $yy'' - y'^2 = y^4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $x = \pm \ln(1 + \sqrt{2}) \pm \ln \frac{y}{1 + \sqrt{y^2 + 1}}$.)

8.8. $y'' = -1/(2y^3)$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = \sqrt{2}$. (Ответ: $y = \sqrt{x\sqrt{2} + 1/4}$.)

8.9. $y'' = 1 - y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $x = \pm \ln |e^y + \sqrt{e^y - 1}|$.)

8.10. $y''^2 = y'$, $y(0) = 2/3$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = (x + 2)^3/12$, $y = 2/3$.)

8.11. $2yy'' - y'^2 + 1 = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = \left(\frac{x + 2}{2}\right)^2 + 1$.)

8.12. $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = 2 \sin x + 2$.)

8.13. $y'' = 1/y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $x = \sqrt{y^2 + 1}$.)

8.14. $yy'' - 2y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = \frac{1}{1 - 2x}$, $y = 1$.)

8.15. $y'' = y' + y'^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $x = \ln \frac{2e^y - 1}{e^y}$, $y = 0$.)

$$8.16. y'' + \frac{2}{1-y} y'^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (\text{Ответ: } y = 1 - \frac{1}{x+1}, y = 0.)$$

$$8.17. y''(1+y) = 5y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{4} - \frac{1}{4(1+y)^4}, y = 0.)$$

$$8.18. y''(2y+3) - 2y'^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3. \quad (\text{Ответ: } y = \frac{3}{2}(e^x - 1), y = 0.)$$

$$8.19. 4y''^2 = 1 + y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (\text{Ответ: } x = 2 \ln \frac{1}{2} |y + 1 + \sqrt{(y+1)^2 - 4}|.)$$

$$8.20. 2y'^2 = (y-1)y'', \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2. \quad (\text{Ответ: } y = 1 + \frac{1}{1-2x}, y = 2.)$$

9. Проинтегрировать следующие уравнения.

$$9.1. \frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0. \quad (\text{Ответ: } y/x = C.)$$

$$9.2. \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0. \quad (\text{Ответ: } \operatorname{arctg}(x/y) = C.)$$

$$9.3. (2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy. \quad (\text{Ответ: } x^2 + y^2 - xy + x - y = C.)$$

$$9.4. xdx + ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{x^2 + y^2}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C.)$$

$$9.5. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1 \right) dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{x^2 - y^2} - x = C.)$$

$$9.6. \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1 + x^2} dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{e^y - 1}{1 + x^2} = C.)$$

$$9.7. \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.)$$

$$9.8. (1 - e^{x/y}) dx + e^{x/y} (1 - x/y) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } x + ye^{x/y} = C.)$$

$$9.9. x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0. \quad (\text{Ответ: } x^4 + x^2y^2 + y^4 = C.)$$

$$9.10. (3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.)$$

$$9.11. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \sqrt{x^2 + y^2} + \ln |xy| + \frac{x}{y} = C.)$$

$$9.12. \left(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3} \right) dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2} \right) dy = 0.$$

$$(\text{Ответ: } x^3 \operatorname{tg} y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = C.)$$

$$9.13. \left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y} \right) dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy. \quad (\text{Ответ: } x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = C.)$$

$$9.14. \left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{y} = C.)$$

$$9.15. (3x^2 - 2x - y) dx + (2y - x + 3y^2) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C.)$$

$$9.16. \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0. \quad (\text{Ответ: } \frac{y}{x} + \sqrt{x^2 + y^2} = C.)$$

$$9.17. (3x^2y + y^3) dx + (x^3 + 3xy^2) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } xy(x^2 + y^2) = C.)$$

$$9.18. y(x^2 + y^2 + a^2) dy + x(x^2 - y^2 - a^2) dx = 0. \quad (\text{Ответ: } (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = C.)$$

$$9.19. \left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x} \right) dx + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}) dy = 0. \quad (\text{Ответ: } \operatorname{tg} xy - \cos x - \cos y = C.)$$

9.20. $\frac{y + \sin x \cos^2 yx}{\cos^2 yx} dy + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} - \sin y \right) dy = 0.$
 (Ответ: $\operatorname{tg} xy - \cos x - \cos y = C.$)

Найти общее решение дифференциального уравнения.

10

10.1. а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$; в) $y'' + 3y' + 2y = 0.$

10.2. а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 9y = 0$; в) $y'' + 4y' + 4y = 0.$

10.3. а) $y'' - 4y' = 0$; б) $y'' - 4y' + 13y = 0$; в) $y'' - 3y' + 2y = 0.$

10.4. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y'' + 3y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0.$

10.5. а) $y'' - 2y' + 10y = 0$; б) $y'' + y' - 2y = 0$;
 в) $y'' - 2y' = 0.$

10.6. а) $y'' - 4y = 0$; б) $y'' + 2y' + 17y = 0$; в) $y'' - y' - 12y = 0.$

10.7. а) $y'' + y' - 6y = 0$; б) $y'' + 9y' = 0$; в) $y'' - 4y' + 20y = 0.$

10.8. а) $y'' - 49y = 0$; б) $y'' - 4y' + 5y = 0$; в) $y'' + 2y' - 3y = 0.$

10.9. а) $y'' + 7y' = 0$; б) $y'' - 5y' + 4y = 0$; в) $y'' + 16y = 0.$

10.10. а) $y'' - 6y' + 8y = 0$; б) $y'' + 4y' + 5y = 0$;

в) $y'' + 5y' = 0.$

10.11. а) $4y'' - 8y' + 3y = 0$; б) $y'' - 3y' = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0.$

10.12. а) $y'' + 4y' + 20y = 0$; б) $y'' - 3y' - 10y = 0$;
 в) $y'' - 16y = 0.$

10.13. а) $9y'' + 6y' + y = 0$; б) $y'' - 4y' - 21y = 0$;
 в) $y'' + y = 0$;

10.14. а) $2y'' + 3y' + y = 0$; б) $y'' + 4y' + 8y = 0$;
 в) $y'' - 6y' + 9y = 0.$

10.15. а) $y'' - 10y' + 21y = 0$; б) $y'' - 2y' + 2y = 0$;
 в) $y'' + 4y' = 0.$

10.16. а) $y'' + 6y' = 0$; б) $y'' + 10y' + 29y = 0$; в) $y'' - 8y' + 7y = 0.$

10.17. а) $y'' + 25y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $y'' + 2y' + 2y = 0.$

10.18. а) $y'' - 3y' = 0$; б) $y'' - 7y' - 8y = 0$; в) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

10.19. а) $y'' - 3y' - 4y = 0$; б) $y'' + 6y' + 13y = 0$;
в) $y'' + 2y' = 0$.

10.20. а) $y'' + 25y' = 0$; б) $y'' - 10y' + 16y = 0$; в) $y'' - 8y' + 16y = 0$.

11

11.1. $y'' + y' = 2x - 1$. (Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 - 3x$.)

11.2. $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x} \cos 2x$. (Ответ: $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x} \cos 2x$.)

11.3. $y'' - 2y' - 8y = 12 \sin 2x - 36 \cos 2x$. (Ответ: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{4x} + 3 \cos 2x$.)

11.4. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$. (Ответ: $y = C_1e^{6x} + C_2xe^{6x} + 7x^2e^{6x}$.)

11.5. $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$. (Ответ: $y = C_1e^x + Ce^{2x} + (4 - 2x)e^{-x}$.)

11.6. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$. (Ответ: $y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{-x}$.)

11.7. $y'' + y = 2 \cos x - (4x + 4) \sin x$. (Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (x^2 + 2x) \cos x$.)

11.8. $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$. (Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^{3x}$.)

11.9. $y'' - 3y' + 2y = 3 \cos x + 19 \sin x$. (Ответ: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 6 \cos x + \sin x$.)

11.10. $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^x$. (Ответ: $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + (3x - 1)e^x$.)

11.11. $y'' + 5y' = 72e^{2x}$. (Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-5x} + 3e^{2x}$.)

11.12. $y'' - 5y' - 6y = 3 \cos x + 19 \sin x$. (Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{6x} + \cos x - 2 \sin x$.)

11.13. $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$.
(Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{6x} + 3x^4 - x^2$.)

11.14. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$. (Ответ: $y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{1}{5}e^{5x}$.)

11.15. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$. (Ответ: $y = C_1e^{4x} + C_2e^{5x} + 3e^{-2x}$.)

11.16. $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$. (Ответ: $y = C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x - x^3 + 2x + 1$.)

11.17. $y'' + y = -4 \cos x - 2 \sin x$. (Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(\cos x - 2 \sin x)$.)

11.18. $y'' + 2y' - 24y = 6 \cos 3x - 33 \sin 3x$. (Ответ: $y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{4x} + \sin 3x$.)

11.19. $y'' + 6y' + 13y = -75 \sin 2x$. (Ответ: $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 4 \cos 2x - 3 \sin 2x$.)

11.20. $y'' + 5y' = 39 \cos 3x - 105 \sin 3x$. (Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + 4 \cos 3x + 5 \sin 3x$.)

12.1. $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$. (Ответ: $y = e^{4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^{2x}$.)

12.2. $y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x}$. (Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + (x - 1)e^{3x}$.)

12.3. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$. (Ответ: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + 3xe^{4x}$.)

12.4. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$. (Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{2x} + 4x^3 + 3x^2 + 3x$.)

12.5. $y'' - 6y' + 34y = 18 \cos 5x + 60 \sin 5x$. (Ответ: $y = e^{3x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + 2 \cos 5x$.)

12.6. $y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x}$. (Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{2x} + (x^2 + x)e^{2x}$.)

12.7. $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$. (Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 4x^3 - 2x$.)

12.8. $y'' - 4y' = 8 - 16x$. (Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{4x} + 2x^2 - x$.)

12.9. $y'' - 2y' + y = 4e^x$. (Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2x^2 e^x$.)

12.10. $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x)$. (Ответ: $y = e^{4x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \sin 2x$.)

12.11. $y'' - 6y' + 13y = 34e^{-3x} \sin 2x$. (Ответ: $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + 2e^{-3x} \cos 2x$.)

12.12. $y'' + 2y' - 3y = (12x^2 + 6x - 4)e^x$. (Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + (x^3 - x)e^x$.)

12.13. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$. (Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + 3x^2 e^{-2x}$.)

12.14. $y'' + 3y' = 10 - 6x$. (Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-3x} - x^2 + 4x$.)

12.15. $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3$. (Ответ: $y = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x} - 8x^3 + 4x$.)

12.16. $y'' + 4y' + 20y = 4 \cos 4x - 52 \sin 4x$. (Ответ: $y = e^{-2x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + 3 \cos 4x - \sin 4x$.)

12.17. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$. (Ответ: $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7$.)

12.18. $y'' + 2y' + y = (12x - 10)e^{-x}$. (Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + (2x^3 - 5x^2)e^{-x}$.)

12.19. $y'' - 4y = (-24x - 10)e^{2x}$. (Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - (3x^2 + x)e^{2x}$.)

12.20. $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}$. (Ответ: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + 2e^{3x}$.)

13. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

13.1. $y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $y = -2e^x - 4xe^x + 3 \sin 2x$.)

13.2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$. (Ответ: $y = -6e^{3x} + 22xe^{3x} + x^2 - 3x + 5$.)

13.3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$. (Ответ: $y = e^{-x}(\cos x + 3 \sin x) + x^2 + 2x$.)

13.4. $y'' - 6y' + 25y = 9 \sin 4x - 24 \cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$. (Ответ: $y = e^{3x}(2 \cos 4x - 3 \sin 4x) + \sin 4x$.)

13.5. $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$. (Ответ: $y = 3e^{7x} \sin 2x + x^3 + x$.)

13.6. $y'' + 6y = e^x(\cos 4x - 8 \sin 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$. (Ответ: $y = \sin 4x - \cos 4x + e^x \cos 4x$.)

13.7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. (Ответ: $y = e^{2x}(\cos 4x - 1/4 \sin 4x) + xe^{2x}$.)

13.8. $y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x + 24 \sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$. (Ответ: $y = e^{6x} - 2xe^{6x} + \cos 2x$.)

13.9. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$. (Ответ: $y = 4 \cos x + 2 \sin x + x^3 - 4x^2 + x - 2$.)

13.10. $y'' - y = (14 - 16x)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$. (Ответ: $y = e^x - e^{-x} + (4x^2 - 3x)e^{-x}$.)

13.11. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $y = -2e^{-4x} - 6xe^{-4x} + x^2 - 2x + 5$.)

13.12. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$. (Ответ: $y = e^{-5x}(\cos 3x + 2 \sin 3x) - e^{-5x}$.)

13.13. $y'' - 6y' + 25y = (32x - 12) \sin x - 36x \cos 3x$,
 $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$. (Ответ: $y = e^{3x}(4 \cos 4x - 3 \sin 4x) +$
 $+ 2x \sin 3x$.)

13.14. $y'' + 25y = e^x(\cos 5x - 10 \sin 5x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) =$
 $= -4$. (Ответ: $y = 2 \cos 5x - \sin 5x + e^x \cos 5x$.)

13.15. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x} \sin 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.
(Ответ: $y = e^{-x}(2 \cos 2x + 3 \sin 2x) + 2xe^{-x} \cos 2x$.)

13.16. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (Ответ:
 $y = 3e^{5x} - 2xe^{5x} + x^2e^{5x}$.)

13.17. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$.
(Ответ: $y = e^{3x} + e^{-4x} + (2x + 1)e^{4x}$.)

13.18. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
(Ответ: $y = e^x(2 \cos 2x - \sin 2x) + x^2 + 2x - 2$.)

13.19. $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$, $y(0) = 1$,
 $y'(0) = 3$. (Ответ: $y = 4xe^{-4x} + x^3 - x + 1$.)

13.20. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 6$.
(Ответ: $y = e^x \sin 6x + 3xe^x \sin 6x$.)

14. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения.

14.1. $y''' - 7y'' + 6y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 30$.
(Ответ: $y = 5 - 6e^x + e^{6x}$.)

14.2. $y^{IV} - 9y''' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$,
 $y'''(0) = 0$, $y^{IV}(0) = 0$. (Ответ: $y = 1 - x$.)

14.3. $y''' - y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$. (От-
вет: $y = 1 + x - e^x$.)

14.4. $y''' - 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$. (От-
вет: $y = e^{2x} - 1$.)

14.5. $y''' + y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$. (Ответ:
 $y = 1 - \cos x - \sin x$.)

14.6. $y''' - y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 4$. (Ответ:
 $y = -4 + e^{-x} + 3e^x$.)

14.7. $y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) =$
 $= 0$, $y'''(0) = 8$. (Ответ: $y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2e^{-x} - 2e^x$.)

14.8. $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) =$
 $= -14$. (Ответ: $y = e^x - 3xe^x - e^{-3x}$.)

14.9. $y''' + y'' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$. (От-
вет: $y = 1 - e^{-x}$.)

14.10. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$,
 $y''(0) = 0$. (Ответ: $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{5}{8}xe^{2x}$.)

14.11. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.
(Ответ: $1 - 2e^{-x} + e^{-2x}$.)

14.12. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$. (Ответ: $y = -e^{-x}(1 + x)$.)

14.13. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$, $y(0) = -2,5$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$. (Ответ: $y = -\frac{45}{26}e^{2x} - \frac{10}{13}\cos 2x + \frac{15}{13}\sin 2x$.)

14.14. $y''' + 9y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 9$, $y''(0) = -18$. (Ответ: $y = -2 + 2\cos 3x + 3\sin 3x$.)

14.15. $y''' - 13y'' + 12y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 133$. (Ответ: $y = 10 - 11e^x + e^{12x}$.)

14.16. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$, $y'''(0) = 0$. (Ответ: $y = -e^x - \frac{7}{3}e^{-x} + \frac{7}{12}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{-2x}$.)

14.17. $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 8$, $y'''(0) = 24$. (Ответ: $y = -2e^x + e^{-x} + e^{3x}$.)

14.18. $y''' - y'' + y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$. (Ответ: $y = \sin x$.)

14.19. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 4$. (Ответ: $y = 2x^2e^x$.)

14.20. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -6$. (Ответ: $y = -2e^x + \cos 2x + \sin 2x$.)

15. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами: а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка; б) с помощью характеристического уравнения.

15.1. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1e^{5t} + C_2e^t, \\ y = 3C_1e^{5t} - C_2e^t. \end{cases}$)

- 15.2. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^t, \\ y = -2C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{-t}. \end{cases}$)
- 15.3. $\begin{cases} x' = -x + 8y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}, \\ y = \frac{1}{2} C_1 e^{3t} - \frac{1}{4} C_2 e^{-3t}. \end{cases}$)
- 15.4. $\begin{cases} x' = -2x - 3y, \\ y' = -x. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^t, \\ y = \frac{1}{3} C_1 e^{-3t} - C_2 e^t. \end{cases}$)
- 15.5. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -4x + 4y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{5t}, \\ y = C_1 - 4C_2 e^{5t}. \end{cases}$)
- 15.6. $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -3x + 2y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = 3C_1 e^t + C_2 e^{-t}. \end{cases}$)
- 15.7. $\begin{cases} x' = 6x - y, \\ y' = 3x + 2y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{5t}, \\ y = 3C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}. \end{cases}$)
- 15.8. $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -6x - 3y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-t}, \\ y = -2C_1 - 3C_2 e^{-t}. \end{cases}$)
- 15.9. $\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}. \end{cases}$)
- 15.10. $\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ y = -C_1 e^t - \frac{3}{2} C_2 e^{2t}. \end{cases}$)
- 15.11. $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-2t}, \\ y = C_1 e^t + C_2. \end{cases}$)
- 15.12. $\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{8t}, \\ y = -C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{8t}. \end{cases}$)
- 15.13. $\begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$ (Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{7t}, \\ y = 2C_1 e^{2t} + \frac{1}{3} C_2 e^{7t}. \end{cases}$)

$$15.14. \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}, \\ y = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}. \end{cases} \right)$$

$$15.15. \begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 5x + 4y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{7t}, \\ y = -C_1 e^{-t} + \frac{5}{3} C_2 e^{7t}. \end{cases} \right)$$

$$15.16. \begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 3x + 6y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{7t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 + 3C_2 e^{7t}. \end{cases} \right)$$

$$15.17. \begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 4x + 5y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{9t}, \\ y = -C_1 e^t + C_2 e^{9t}. \end{cases} \right)$$

$$15.18. \begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t}. \end{cases} \right)$$

$$15.19. \begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = x + y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{-t} + \frac{1}{2} C_2 e^{3t}. \end{cases} \right)$$

$$15.20. \begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x + 8y. \end{cases} \left(\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{7t}, \\ y = -\frac{1}{2} C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{7t}. \end{cases} \right)$$

16. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных.

$$16.1. y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}. \left(\text{Ответ: } y = \left(-\frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + e_1 \right) e^{-x} + \left(\frac{1}{2} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + e_2 \right) e^x. \right)$$

$$16.2. y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}. \left(\text{Ответ: } y = \left(\frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C_1 \right) \cos 2x + \left(\frac{1}{2} x + C_2 \right) \sin 2x. \right)$$

$$16.3. y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}. \quad (\text{Ответ: } y = (\ln |\cos x| + C_1)e^{2x} \cos x + (x + C_2)e^{2x} \sin x.)$$

$$16.4. y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}. \quad (\text{Ответ: } y = \frac{1}{\cos x} + C_1 + (\ln |\cos x| + C_2)\cos x + (x - \operatorname{tg} x + C_3)\sin x.)$$

$$16.5. y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}. \quad (\text{Ответ: } y = \left(-\frac{1}{3}x + C_1\right)\cos 3x + \left(\frac{1}{9} \ln |\sin 3x| + C_2\right)\sin 3x.)$$

$$16.6. y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}. \quad (\text{Ответ: } y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{x}{4}e^x - \frac{1}{4}e^x - xe^{-x} + xe^{-x} \ln x.)$$

$$16.7. y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}. \quad (\text{Ответ: } y = (\ln |\cos x| + C_1)e^{-x} \cos x + (x + C_2)e^{-x} \sin x.)$$

$$16.8. y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\sin^2 x}. \quad (\text{Ответ: } y = \left(\ln \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right) + C_1\right)e^x \cos x + \left(\frac{1}{\sin x} + C_2\right)e^x \sin x.)$$

$$+ C_1\left)e^x \cos x + \left(\frac{1}{\sin x} + C_2\right)e^x \sin x.)$$

$$16.9. y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \operatorname{ctg} x. \quad (\text{Ответ: } y = C_1e^{-x} \cos x + C_2e^{-x} \sin x + e^{-x} \sin x \cdot \ln |\operatorname{tg} (x/2)|.)$$

$$16.10. y'' - 2y' + 2y = e^x/\sin x. \quad (\text{Ответ: } y = (-x + C_1)e^x \cos x + (\ln |\sin x| + C_2)e^x \sin x.)$$

$$16.11. y'' - 2y' + y = e^x/x^2. \quad (\text{Ответ: } y = (-\ln x + C_1)e^x + (-1/x + C_2)xe^x.)$$

$$16.12. y'' + y = \operatorname{tg} x. \quad (\text{Ответ: } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln |\operatorname{tg} (x/2 + \pi/4)|.)$$

$$16.13. y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x. \quad (\text{Ответ: } y = C_1 \cos 2x +$$

$$+ C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \cdot \ln |\operatorname{tg} x|.)$$

$$16.14. y'' + y = \operatorname{ctg} x. \quad (\text{Ответ: } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \cdot \ln |\operatorname{tg} (x/2)|.)$$

$$16.15. y'' - 2y' + y = e^x/x. \quad (\text{Ответ: } y = (-x + C_1)e^x + (\ln x + C_2)xe^x.)$$

$$16.16. y'' + 2y' + y = e^{-x}/x. \quad (\text{Ответ: } y = (-x + C_1)e^{-x} + (\ln x + C_2)xe^{-x}.)$$

$$16.17. y'' + y = 1/\cos x. \quad (\text{Ответ: } y = (\ln |\cos x| + C_1)\cos x + (x + C_2)\sin x.)$$

16.18. $y'' + y = 1/\sin x$. (Ответ: $y = (-x + C_1) \cos x + (\ln |\sin x| + C_2) \sin x$.)

16.19. $y'' + 4y = 1/\sin 2x$. (Ответ: $y = \left(-\frac{x}{2} + C_1\right) \cos 2x + \left(\frac{1}{4} \ln |\sin 2x| + C_2\right) \sin 2x$.)

16.20. $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$. (Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4} \ln |\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)| \cos 2x$.)

17. Знайти оригінал $f(t)$ за його заданим зображенням:

1. $F(p) = \frac{p}{(p-2)(p^2+2p+4)}$.

2. $F(p) = \frac{7p-10}{p^3+8}$.

3. $F(p) = \frac{4}{p^3-p^2+p}$.

4. $F(p) = \frac{p-1}{(p+2)(p^2-2p+10)}$.

5. $F(p) = \frac{3p-1}{p^3-1}$.

6. $F(p) = \frac{7}{p(p^2-4p+7)}$.

7. $F(p) = \frac{p-3}{(p+1)(p^2-4p+13)}$.

8. $F(p) = \frac{6}{p^3-64}$.

9. $F(p) = \frac{6p}{p^3-1}$.

10. $F(p) = \frac{p-3}{(p+2)(p^2+6p+13)}$.

11. $F(p) = \frac{10}{p(p^2+4p+5)}$.

12. $F(p) = \frac{3p+4}{p(p^2-2p+2)}$.

13. $F(p) = \frac{3p-7}{(p-1)(p^2+2p+5)}$.

14. $F(p) = \frac{4p-9}{p(p^2-2p+3)}$.

15. $F(p) = \frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

16. $F(p) = \frac{p}{(p^2-4)(p^2+1)}$.

17. $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$.

18. $F(p) = \frac{p}{p^3+1}$.

19. $F(p) = \frac{5p+8}{p(p^2+2p+3)}$.

20. $F(p) = \frac{p-1}{(p-2)(p^2+4p+7)}$.

18. Методом операційного числення знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє вказані умови.

1. $x'' - 5x' + 6x = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

2. $x'' + 6x' + 13x = 26t - 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

3. $x'' - 4x = t - 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

4. $x'' - 2x' + x = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

5. $x'' - 9x = e^{-2t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

6. $x'' - 2x' + 5x = 5t^2 - 4t + 2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.

7. $x'' + 3x' - 10x = te^{-2t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

8. $x'' - 4x' + 4x = \sin t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

9. $x'' + x = \cos 3t$, $x(\pi/2) = 4$, $x'(\pi/2) = 1$.

10. $x'' - 4x = 3te^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

11. $x'' - 2x' + 2x = 2t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

12. $2x'' + x' - x = 2e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

13. $x'' - 2x' + x = te^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

14. $x'' - x = \cos 2t$, $x(0) = -1/5$, $x'(0) = 1$.

15. $x'' - 3x' - 4x = 17 \sin t$, $x(0) = 4$, $x'(0) = 0$.

16. $x'' + x = te^t$, $x(0) = 0,5$, $x'(0) = 1$.

17. $x'' - x = 9te^{2t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -5$.

18. $x'' - 6x' + 9x = e^{3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

19. $x'' + 4x = e^{-2t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

20. $x'' - 4x' + 5x = te^{2t}$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

19. Методом операційного числення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що задовольняє вказані умови.

$$1. \begin{cases} x' + x - 3y = 0, \\ y' - x - y = e^t, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 1$$

$$2. \begin{cases} x' + 2y = 0, \\ x - y' = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 0$$

$$3. \begin{cases} y' - x - y = 0, \\ y' - x' = te^t, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0$$

$$4. \begin{cases} x' + 4x - y = 0, \\ y' + 2x + y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 3$$

$$5. \begin{cases} x' + 7x - y = 0, \\ y' + 2x + 5y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 1$$

$$6. \begin{cases} x' + y' = 0, \\ x' - 2y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 1$$

$$7. \begin{cases} x' + 2y + 5 = 0, \\ y' - x + 7y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 1$$

$$8. \begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t, \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 4$$

$$9. \begin{cases} x' - x + y = 0, \\ y' - x - y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 0$$

$$10. \begin{cases} x' - y = 0, \\ 2x' + y' = 4t, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 1$$

$$11. \begin{cases} x' + y = 0, \\ y' - 2x - 2y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 1$$

$$12. \begin{cases} x' + y = 0, \\ 2x' + 3y' = 4t^2, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 1$$

$$13. \begin{cases} y' - x + y = 0, \\ y' - 2x' = e^{2t}, \end{cases} \quad x(0) = -1, y(0) = 2$$

$$14. \begin{cases} x' + 2y = t, \\ x - y' = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0$$

$$15. \begin{cases} x' + 2x + 2y = e^{2t}, \\ y' - 2x + y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3$$

$$16. \begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' - x + y = e^t, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$

$$17. \begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

$$18. \begin{cases} x' + x + 3y = 0, \\ y' - x - y = e^t, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2$$

$$19. \begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3$$

$$20. \begin{cases} x' + y = 0, \\ y' - 2x - 2y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$$