Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Ю. М. Дюкарев, О. Г. Літвінова

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНІ Й ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Харків – 2010

УДК 517.9:681.3.057(075.8)
ББК 22.161.6+32.973-018.2я7
Д95

Рецензенти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Харківського національного університету радіоелектроніки,
Дорошенко В. О.;

доктор фізико-математичних наук, професор
Харківського інституту управління,
Золотарьов В. О.;

доктор фізико-математичних наук, професор
Сумського національного аграрного університету,
Малютін К. Г.

Д95 **Дюкарев Ю. М., Літвінова О. Г. Диференціальні й інтегральні рівняння та варіаційне числення.-** Навчальний посібник. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2010. – 138 с.

У навчальному посібнику приведено матеріал з курсу «Диференціальні й інтегральні рівняння та варіаційне числення», що вивчають студенти фізичного та радіофізичного факультетів Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Для кожної теми в посібнику формулюються необхідні для розв'язання задач теоретичні відомості та дані розв'язки типових задач. Далі приведено умови задач для аудиторної та домашньої роботи. У посібнику є відповіді для всіх аудиторних і домашніх задач . Крім традиційних методів дослідження диференціальних рівнянь розглянуто також основні прийоми знаходження аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь та побудови їх графіків за допомогою пакета Maple.

Зміст

1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Теорія

1. Диференціальним рівнянням *з відокремлюваними змінними* називається рівняння

$$\boxed{\dot{x} = \varphi(t) \cdot \psi(x)}, \tag{1.1}$$

де функції визначені та неперервні на інтервалах (a,b) та (c,d) відповідно ($-\infty \le a < b \le +\infty, -\infty \le c < d \le +\infty$), а символ $\dot{x}$ позначає похідну функції x по t.

Позначимо через

$$\Omega = \{(t,x) : t \in (a,b), x \in (c,d)\}.$$

Функція, що визначена, неперервна та диференційована при всіх $t \in (\alpha,\beta) \subseteq (a,b)$, називається *розв'язком* рівняння (1.1), якщо

- точка $(t, x(t)) \in \Omega$ при всіх $t \in (\alpha,\beta)$;
- $\dot{x}(t) = \varphi(t) \cdot \psi(x(t))$ при всіх $t \in (\alpha,\beta)$.

Нехай функція $\psi(x)$ задовольняє умову

$$\psi(x) \neq 0 \text{ при всіх } x \in (c,d). \tag{1.2}$$

Тоді для будь-якої точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ в достатньо малому околі точки t_0 існує єдиний розв'язок $x(t)$ рівняння (1.1) такий, що $x(t_0) = x_0$.

Для знаходження множини всіх розв'язків запишемо рівняння (1.1) у вигляді $\dfrac{dx}{dt} = \varphi(t) \cdot \psi(x)$. Звідси $\dfrac{dx}{\psi(x)} = \varphi(t)dt$. Отже

$$\boxed{\int \frac{dx}{\psi(x)} = \int \varphi(t)dt}.$$

Таким чином, множина всіх розв'язків рівняння (1.1) задається формулою

$$\Psi(x)=\Phi(t)+C, \quad C\in\mathbb{R}, \tag{1.3}$$

де $\Psi(x)$ та $\Phi(t)$ визначають деякі первинні для функцій $\dfrac{1}{\psi(x)}$ та $\varphi(t)$ відповідно. Формула (1.3) задає у неявному вигляді всі розв'язки рівняння (1.1), які ми позначимо через $x=x(t,C)$. Це означає, що для довільної точки $(t_0,x_0)\in\Omega$ існує єдина стала $\tilde{C}\in\mathbb{R}$, така, що в деякому околі точки t_0 функція $x=x(t,\tilde{C})$ задає єдиний розв'язок рівняння (1.1), графік якого проходить через (t_0,x_0).

Приклад 1.1. *Розв'язати рівняння* $\dot{x}=t^2e^{-x}$.

Це рівняння з відокремлюваними змінними вигляду (1.1), для якого *виконана* умова (1.2). Запишемо рівняння у вигляді $\dfrac{dx}{dt}=t^2e^{-x}$. Або, що те ж саме, у вигляді $e^x dx=t^2dt$. Звідси $\int e^x dx=\int t^2dt$. Інтегруючи, здобудемо множину всіх розв'язків $e^x=\dfrac{t^3}{3}+C, \quad C\in\mathbb{R}$.

Нехай функція $\psi(x)$ *не задовольняє* умові (1.2). Тоді рівняння (1.1) розв'язується у два кроки.

Крок 1. Через $x_1,\ldots,x_n,\ldots$ позначимо множину розв'язків рівняння $\psi(x)=0$, які належать інтервалу (c,d). Легко бачити, що функції

$$x(t)\equiv x_1,\ldots,x(t)\equiv x_n,\ldots \tag{1.4}$$

задають розв'язки рівняння (1.1).

Крок 2. Нехай $x\in(c,d)\setminus\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$. Тепер $\psi(x)\neq 0$, і рівняння (1.1) можна записати у вигляді $\dfrac{dx}{\psi(x)}=\varphi(t)dt$. Усі розв'язки останнього рівняння задаються формулою

$$\Psi(x)=\Phi(t)+C, \quad C\in\mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Тут $\Psi(x)$ і $\Phi(t)$ позначають деякі первинні для функцій $1/\psi(x)$ та $\varphi(t)$ відповідно. Множина всіх розв'язків рівняння (1.1) є об'єднанням розв'язків, що визначається формулами (1.4) та (1.5):

$$\left[\begin{array}{l} x(t) \equiv x_1, \ldots, x(t) \equiv x_n, \ldots \\ \Psi(x) = \Phi(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{array}\right. \tag{1.6}$$

Приклад 1.2. *Розв'язати рівняння* $\dot{x} = e^t \cdot \cos^2 x$.

Це рівняння з відокремлюваними змінними вигляду (1.1), для якого *не виконана* умова (1.2). Роз'вязок рівняння шукаємо в два кроки.

Крок 1. Розглянемо *тригонометричне* рівняння $\cos^2 x = 0$. Його розв'язки мають вигляд $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Отже, наше *диференціальне* рівняння має нескінченно багато розв'язків вигляду

$$x(t) \equiv \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.7}$$

Крок 2. Розділяючи змінні, отримаємо $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int e^t dt$. Звідси

$$\operatorname{tg} x = e^t + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Формули (1.7) та (1.8) задають всі розв'язки нашого рівняння.

2. В багатьох задачах із множини всіх розв'язків (1.6) рівняння (1.1) треба виділити той, графік якого проходить через фіксовану точку $(t_0, x_0) \in \Omega$. У таких випадках виникає необхідність у розв'язку **задачі Коші:**

$$\begin{cases} \dot{x} = \varphi(t) \cdot \psi(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

Тобто потрібно знайти такий розв'язок $x(t)$ заданого диференціального рівняння, що визначений в околі точки t_0, а в самій точці t_0 приймає значення x_0 (задовольняє початковій умові задачі Коші).

Приклад 1.3. *Розв'язати задачу Коші:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{e^t}{(1+e^t) \cdot x} \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

Спочатку розв'яжемо диференціальне рівняння $\dot{x} = \frac{e^t}{(1+e^t) \cdot x}$. Це рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язки якого задаються формулою

$\ln(1+e^t)=\frac{x^2}{2}+C$. Підставляючи в цю формулу початкові умови, здобудемо $\ln(1+e^0)=\frac{1^2}{2}+C$. Таким чином, $C=\ln 2-\frac{1}{2}$. Отже, розв'язок задачі Коші задається формулою $\ln(1+e^t)=\frac{x^2}{2}+\ln 2-\frac{1}{2}$. Або, знову з урахуванням початкової умови,

$$x=\sqrt{1+2\ln\frac{1+e^t}{2}}.$$

3. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\boxed{\dot{x}=f(a_1t+b_1x+c_1),\quad a_1,b_1,c_1\in\mathbb{R}}. \tag{1.9}$$

Якщо $a_1b_1=0$, то рівняння (1.9) є рівнянням з відокремлюваними змінними. Якщо ж $a_1b_1\neq 0$, то заміною змінної рівняння (1.9) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно, нехай $z=a_1t+b_1x+c_1$. Тоді $\dot{z}=a_1+b_1\dot{x}$. Підставляючи в (1.9), здобудемо $\dot{z}=a_1+b_1\cdot f(z)$. А це є рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 1.4. *Розв'язати рівняння* $\dot{x}=\cos(x-t)$.

Це рівняння вигляду (1.9). Введемо нову змінну $z=x-t$. Отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними $\dot{z}=\cos z-1$. Його розв'язки мають вигляд:

$$\left[\begin{array}{l} z=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ \operatorname{ctg}\dfrac{z}{2}=t+C,\quad C\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Після того, як ми підставимо в останні формули $x-t$ замість z, отримаємо всі розв'язки нашого рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} x=t+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}, \\ \operatorname{ctg}\dfrac{x-t}{2}=t+C,\quad C\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Вправи

Аудиторні	Домашні
Розв’язати рівняння:	Розв’язати рівняння:
№ 1.1. $\dot{x} = (x^2+1)\cos t.$	**№ 1.8.** $x\dot{x} + t = 1.$
№ 1.2. $t\dot{x} + x = x^2.$	**№ 1.9.** $(1-t^2)dx + txdt = 0.$
№ 1.3. $tx\,dt + (t+1)\,dx = 0.$	**№ 1.10.** $2t^2x\dot{x} + x^2 = 2.$
№ 1.4. $\dot{x}\,\mathrm{ctg}\,t + x = 2;\ x(\pi/3) = 0.5.$	**№ 1.11.** $\dot{x} = 10^{t+x}.$
№ 1.5. $\dot{x} = \sqrt[3]{2t-x} + 2.$	**№ 1.12.** $\dot{x} - x = 2t - 3.$
№ 1.6. $\dot{x} = \sqrt{4t+2x-1}.$	**№ 1.13.** $(t+2x)\,\dot{x} = 1.$
№ 1.7. $(t^2-1)\dot{x} + 2tx^2 = 0,\ x(0) = 1.$	**№ 1.14.** $\dot{x} = 3\sqrt[3]{x^2},\quad x(2) = 0.$

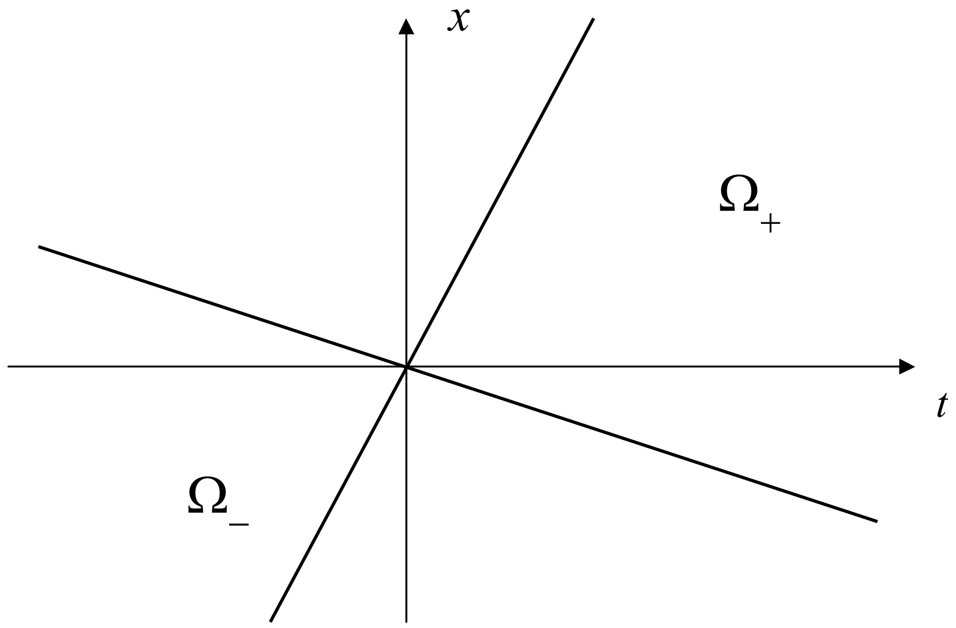
2. Однорідні рівняння

Теорія

1. *Однорідним* диференціальним рівнянням називається рівняння

$$\boxed{\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)}, \tag{2.1}$$

де функція f визначена та неперервна на інтервалі (a,b). Права частина рівняння (2.1) визначена на множині $\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 : a < \frac{x}{t} < b\right\}$. Множина таких точок є об’єднанням двох неперетинних з*в’язних* областей Ω_+ та Ω_-, які обмежені прямими $x = at$ та $x = bt$. Таким чином, (2.1) задає фактично два диференціальні рівняння, одне з яких визначене в області Ω_+, а друге – в області Ω_-.



Для визначеності ми розглядатимемо рівняння (2.1) в області Ω_+. В області Ω_- воно досліджується аналогічним чином.

Зробимо в рівнянні (2.1) заміну змінних $z = \frac{x}{t}$. Тоді $x = zt$ та $\dot{x} = z + t\dot{z}$. Рівняння (2.1) набуває вигляду

$$\dot{z} = \frac{f(z) - z}{t}, \tag{2.2}$$

а це рівняння з відокремлюваними змінними. Підкреслимо, що права частина рівняння (2.2) визначена на множині $\{(t,z) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0,+\infty),\ z \in (a,b)\}$.

Приклад 2.1. *Розв'язати рівняння* $\dot{x} = \left(\frac{x}{t}\right)^2 + \frac{x}{t} - 1.$

Це однорідне рівняння вигляду (2.1). Зробимо в ньому заміну змінних $z = \frac{x}{t}$. Тоді $x = zt$ та $\dot{x} = z + t\dot{z}$. Наше рівняння набуває вигляду $t\dot{z} = z^2 - 1$. Розв'язуючи його як рівняння з відокремлюваними змінними, отримаємо

$$\left[\begin{array}{l} z(t) \equiv -1, \\ \dfrac{z-1}{z+1} = Ct^2,\ C \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Підставимо в останню рівність $\frac{x}{t}$ замість z. Після перетворень здобудемо формули, які задають всі розв'язки нашого рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} x=-t, \\ \dfrac{x-t}{x+t}=Ct^2,\ C\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

2. Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$\boxed{\dot{x}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+c_1}{a_2t+b_2x+c_2}\right),\quad a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2\in\mathbb{R}}. \tag{2.3}$$

Якщо визначник $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$=0, то рядки цього визначника пропорційні, і рівняння (2.3) має вигляд (1.9). Тому заміною $z=a_1t+b_1x$ рівняння (2.3) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо ж визначник $\Delta\neq 0$, то розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1t+b_1x+c_1=0 \\ a_2t+b_2x+c_2=0 \end{cases}.$$

Єдиний розв'язок цієї системи позначимо (t_0,x_0). Заміною змінних $\tau=t-t_0,\quad y=x-x_0$ рівняння зводиться до однорідного.

Приклад 2.2. *Розв'язати рівняння* $\dot{x}=2\left(\dfrac{x+1}{t+x-2}\right)^2$.

Це рівняння вигляду (2.3), причому визначник $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0.$ Розглянемо систему

$$\begin{cases} x+1=0 \\ t+x-2=0 \end{cases}.$$

Її єдиним розв'язком є $x=-1$ та $t=3$. Заміною змінних $\tau=t-3$ та $y=x+1$ рівняння перетворюється на однорідне:

$$\frac{dy}{d\tau}=2\frac{y^2}{(\tau+y)^2}=2\frac{\left(\frac{y}{\tau}\right)^2}{\left(1+\frac{y}{\tau}\right)^2}.$$

Зробимо в цьому однорідному рівнянні заміну $z = \dfrac{y}{\tau}$. Отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\tau \frac{dz}{d\tau} + \frac{z + z^3}{(1+z)^2} = 0.$$

Його розв'язки мають вигляд $z \cdot \tau = C \cdot \exp(-2\operatorname{arctg} z)$. Підставимо в цю формулу $\dfrac{y}{\tau}$ замість z. Отримаємо $y = C \cdot \exp\left(-2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{\tau}\right)\right)$. Звідси, повертаючись до змінних x та t, знаходимо розв'язок нашого рівняння:

$$(x+1) \cdot \exp\left(2\operatorname{arctg}\frac{x+1}{t-3}\right) = C, \; C \in \mathbb{R}.$$

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Розв'язати рівняння:	Розв'язати рівняння:
№ 2.1. $(t-x)\,dt + (t+x)\,dx = 0.$	**№ 2.6.** $(x^2 - 2tx)\,dt + t^2\,dx = 0.$
№ 2.2. $t\dot{x} - x = t \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{t}.$	**№ 2.7.** $(t^2 + x^2)\,\dot{x} = 2tx.$
№ 2.3. $t\dot{x} = \sqrt{t^2 - x^2} + x.$	**№ 2.8.** $t\dot{x} = x \cdot \cos\ln\dfrac{x}{t}.$
№2.4. $(2t + x + 1)\,dt - (4t + 2x - 3)\,dx = 0.$	**№ 2.9.** $(\dot{x}+1)\ln\left(\dfrac{x+t}{t+3}\right) = \dfrac{x+t}{t+3}.$
№ 2.5. $(t+4x)\,\dot{x} = 2t + 3x - 5.$	**№ 2.10.** $\dot{x} = \dfrac{x+2}{t+1} + \operatorname{tg}\dfrac{x-2t}{t+1}.$

3. Лінійні рівняння першого порядку

Теорія

1. *Неоднорідним лінійним* диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння

$$\boxed{a_0(t)\dot{x} + a_1(t)x = f(t)}, \tag{3.1}$$

де функції $a_0(t),\ a_1(t),\ f(t)$ неперервні на деякому інтервалі (α,β), причому $a_0(t) \neq 0,\ \forall t \in (\alpha,\beta)$ та $f(t) \not\equiv 0$. Разом з неоднорідним рівнянням (3.1) розглядатимемо і відповідне йому *однорідне лінійне* диференціальне рівняння

$$\boxed{a_0(t)\dot{x} + a_1(t)x = 0}\,. \tag{3.2}$$

Можна довести, що всі розв'язки рівняння (3.1) (відповідно (3.2)) визначені на інтервалі (α,β). Більш того, для будь-якого $t_0 \in (\alpha,\beta)$ та будь-якого $x_0 \in \mathbb{R}$ існує єдиний розв'язок $x(t)$ рівняння (3.1) (відповідно (3.2)) такий, що $x(t_0) = x_0$. Наступні три теореми задають структуру множини розв'язків рівнянь (3.1) та (3.2).

Теорема 3.1. *Нехай функція $x_0(t) \not\equiv 0$ є розв'язком однорідного рівняння (3.2). Тоді формула*

$$x(t) = C \cdot x_0(t), \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

задає всі розв'язки однорідного рівняння (3.2).

Теорема 3.2. (метод варіації довільних сталих). *У неоднорідного рівняння (3.1) існує розв'язок вигляду*

$$\tilde{x}(t) = C(t) \cdot x_0(t)\,.$$

Тут $C(t)$ неперервна та диференційована функція, яка може бути знайдена за допомогою інтегрування.

Теорема 3.3. *Нехай функція $x_0(t) \not\equiv 0$ є розв'язком однорідного рівняння (3.2), а функція $\tilde{x}(t)$ є розв'язком неоднорідного рівняння (3.1). Тоді формула*

$$x(t) = C \cdot x_0(t) + \tilde{x}(t), \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

задає всі розв'язки неоднорідного рівняння (3.1).

Приклад 3.1. *Розв'язати рівняння $\dot{x} - x = t$.*

Крок 1. Розглянемо однорідне рівняння $\dot{x} - x = 0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними, всі розв'язки якого мають вигляд

$$x(t) = C \cdot e^t\,,\ \forall \tilde{N} \in \mathbb{R}\,. \tag{3.3}$$

Крок 2. З теореми 3.2 випливає, що у неоднорідного рівняння існує розв'язок у вигляді $\tilde{x}(t) = C(t)e^t$. Звідси $\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{C}(t)e^t + C(t)e^t$. Підставимо отримані вирази для $\tilde{x}(t)$ та $\dot{\tilde{x}}(t)$ у вихідне рівняння. Отримаємо $\dot{C}(t)e^t + C(t)e^t - C(t)e^t = t$. Звідси $\dot{C}(t) = t\,e^{-t}$ та $C(t) = -(t+1)e^{-t}$.

Таким чином,

$$\tilde{x}(t) = -(t+1). \tag{3.4}$$

Крок 3. З формул (3.3), (3.4) та теореми 3.3 випливає, що всі розв'язки нашого рівняння задаються формулою

$$x(t) = C \cdot e^t - (t+1), \quad \forall \tilde{N} \in \mathbb{R}.$$

2. *Рівнянням Бернуллі* називається

$$\boxed{a_0(t)\dot{x} + a_1(t)x = f(t) \cdot x^{\mu}}\ , \tag{3.5}$$

де функції $a_0(t), a_1(t), f(t)$ неперервні на деякому інтервалі (α, β), причому $a_0(t) \neq 0, \forall t \in (\alpha, \beta)$, $f(t) \not\equiv 0$, а $\mu \in \mathbb{R}$ – довільне число. При $\mu = 0$ або $\mu = 1$ рівняння (3.5) є лінійним. Тому розглянемо випадок, коли $\mu \neq 0$ та $\mu \neq 1$. Зауважимо, що при $\mu > 0$ рівняння (3.5) має розв'язок $x(t) \equiv 0$. Помножимо обидві частини рівняння (3.5) на $x^{-\mu}$. Отримаємо

$$a_0(t)\dot{x}x^{-\mu} + a_1(t)x^{1-\mu} = f(t). \tag{3.6}$$

Зробимо заміну $z(t) = \left(x(t)\right)^{1-\mu}$. Тоді рівняння (3.6) зводиться до лінійного рівняння

$$\frac{a_0(t)}{1-\mu}\dot{z}(t) + a_1(t)z(t) = f(t).$$

Приклад 3.2. *Розв'язати рівняння Бернуллі* $t\dot{x} - 4x = t^2 \cdot \sqrt{x}, \quad t > 0$.

Це рівняння має розв'язок $x(t) \equiv 0$. Поділимо наше рівняння на $\sqrt{x}$. Отримаємо $t\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x} = t^2$. Зробимо в цьому рівнянні заміну змінних $z = \sqrt{x}$.

Рівняння звелось до лінійного рівняння $2t\cdot\dot z-4z=t^2$. Його розв'язок має вигляд: $z=t^2\cdot\left|C+\dfrac{\ln t}{2}\right|$. Отже $\sqrt{x}=t^2\cdot\left|C+\dfrac{\ln t}{2}\right|$.

Таким чином,

$$\left[\begin{array}{l} x=t^4\cdot\left(C+\dfrac{\ln t}{2}\right)^2,\ C\in\mathbb{R},\\ x\equiv 0. \end{array}\right.$$

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Розв'язати рівняння: **№ 3.1.** $t\dot x-2x=2t^4$. **№ 3.2.** $(tx+e^t)\,dt-t\,dx=0$. **№ 3.3.** $(t\dot x-1)\ln t=2x$. **№ 3.4.** $(t+x^2)\,dx=x\,dt$. **№ 3.5.** $tx^2\dot x=t^2+x^3$. **№ 3.6.** $txdx=(x^2+t)dt$.	Розв'язати рівняння: **№ 3.7.** $t^2\dot x+tx+1=0$. **№ 3.8.** $x=t(\dot x-t\cos t)$. **№ 3.9.** $t\dot x+(t+1)x=3t^2e^{-t}$. **№ 3.10.** $(\sin^2 x+t\operatorname{ctg} x)\dot x=1$. **№ 3.11.** $(1-2tx)\dot x=x(x-1)$. **№ 3.12.** $t\dot x+2x+t^5x^3e^t=0$.

4. Рівняння у повних диференціалах. Рівняння, не розв'язані відносно похідної

Теорія

1. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\boxed{M(t,x)\cdot dt+N(t,x)\cdot dx=0}, \tag{4.1}$$

де функції $M(t,x)$ та $N(t,x)$ неперервні та диференційовані в однозв'язної області $\Omega\subset\mathbb{R}^2$.

Рівняння (4.1) називається *рівнянням в повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U(t,x)$, тобто

$$dU(t,x)=\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}dt+\frac{\partial U(t,x)}{\partial x}dx=M(t,x)dt+N(t,x)dx.$$

Для того, щоб рівняння (4.1) було рівнянням в повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial N(t,x)}{\partial t}.$$

Якщо ліва частина (4.1) є повним диференціалом функції $U(t,x)$, то всі розв'язки рівняння (4.1) задаються формулою

$$U(t,x)=C,\quad C\in\mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Якщо рівняння (4.1) є рівнянням в повних диференціалах, то для знаходження функції $U(t,x)$ скористаємося рівностями:

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}=M(t,x),\qquad \frac{\partial U(t,x)}{\partial x}=N(t,x). \tag{4.3}$$

Інтегруючи першу рівність по t, визначимо $U(t,x)$ з точністю до довільної функції $\varphi(x)$:

$$U(t,x)=\int M(t,x)dt=\Phi(t,x)+\varphi(x). \tag{4.4}$$

Диференціюємо (4.4) по x, та, враховуючи другу рівність (4.3), здобудемо диференціальне рівняння для визначення функції $\varphi(x)$:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=N(t,x)-\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x}.$$

Приклад 4.1. *Розв'язати рівняння* $(2tx+3x^2)dt+(t^2+6tx-3x^2)dx=0.$

Маємо $M(t,x)=2tx+3x^2,\quad N(t,x)=t^2+6tx-3x^2.$ Тому

$$\frac{\partial M(t,x)}{\partial x}=2t+6x,\quad \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}=2t+6x.$$

Таким чином, $\frac{\partial M(t,x)}{\partial x} \equiv \frac{\partial N(t,x)}{\partial t}$. Тобто наше рівняння є рівнянням в повних диференціалах. Для знаходження функції $U(t,x)$ скористуємося (4.3):

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = 2tx + 3x^2, \qquad \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} = t^2 + 6tx - 3x^2. \tag{4.5}$$

Інтегруючи першу з цих рівностей по t, отримаємо:

$$U(t,x) = t^2 x + 3x^2 t + \varphi(x).$$

Підставимо вираз для $U(t,x)$ у другу рівність (4.5). Отримаємо:

$$t^2 + 6tx + \frac{d\varphi(x)}{dx} = t^2 + 6tx - 3x^2.$$

Звідси $\frac{d\varphi(x)}{dx} = -3x^2$. Функція $\varphi(x)$ є однією з первинних для функції $-3x^2$, наприклад $\varphi(x) = -x^3$. Тоді $U(t,x) = t^2 x + 3x^2 t - x^3$. Всі розв'язки нашого рівняння задаються формулою

$$t^2 x + 3x^2 t - x^3 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідною, мають вигляд:

$$\boxed{F(t,x,\dot{x}) = 0}.$$

Одним з методів розв'язання таких рівнянь є розв'язання відносно $\dot{x}$. Набуті в результаті одне або декілька рівнянь розв'язуються одним з розглянутих раніше методів.

Приклад 4.2. *Розв'язати рівняння* $\dot{x}^3 - 2t\dot{x}^2 + \dot{x} = 2t$.

Маємо $\dot{x}^3 - 2t\dot{x}^2 + \dot{x} - 2t = (\dot{x} - 2t)\cdot(\dot{x}^2 + 1)$. Тому вихідне рівняння еквівалентне рівнянню $\dot{x} - 2t = 0$. Розв'язки останнього рівняння мають вигляд

$$x = t^2 + C, C \in \mathbb{R}.$$

Приклад 4.3. *Розв'язати рівняння* $\dot{x}^2 + (\sin t - 2tx)\dot{x} - 2tx\sin t = 0$.

З рівності $\dot{x}^2+(\sin t-2tx)\dot{x}-2tx\sin t=(\dot{x}+\sin t)\cdot(\dot{x}-2tx)$ випливає, що вихідне рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь

$$\dot{x}=-\sin t \quad \text{та} \quad \dot{x}=2tx.$$

Розв'язавши ці рівняння, отримаємо

$$x=\cos t+C \quad \text{та} \quad x=C\exp(t^2).$$

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Розв'язати рівняння:	Розв'язати рівняння:
№ 4.1. $e^{-x}dt-(2x+te^{-x})\,dx=0.$	**№ 4.6.** $2tx\,dt+(t^2-x^2)\,dx=0.$
№ 4.2. $\dfrac{3t^2+x^2}{x^2}dt-\dfrac{2t^3+5x}{x^3}\,dx=0.$	**№ 4.7.** $(2-9tx^2)t\,dt+(4x^2-6t^3)x\,dx=0.$
№ 4.3. $\left(\dfrac{t}{\sin x}+2\right)dt+\dfrac{(t^2+1)\cos x}{\cos 2x-1}dx=0.$	**№ 4.8.** $(1+x^2\sin 2t)\,dt-(2x\cos^2 t)\,dx=0.$
№ 4.4. $\dot{x}^2-x^2=0.$	**№ 4.9.** $\dot{x}^2-4x^3=0.$
№ 4.5. $x^2(\dot{x}^2+1)=1.$	**№ 4.10.** $\dot{x}^2-2t\,\dot{x}=8t^2.$

5. Метод введення параметра для рівнянь, не розв'язаних відносно похідної. Рівняння Клеро і Лагранжа

Теорія

Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної, мають вигляд $F(t,x,\dot{x})=0$. Як ми вже зазначали, одним із методів розв'язання таких рівнянь є розв'язок відносно $\dot{x}$, тобто призведення рівняння до вигляду $\dot{x}=f(t,x)$. У деяких випадках рівняння $F(t,x,\dot{x})=0$ не вдається розв'язати відносно похідної, але вдається розв'язати відносно x або відносно t. Тоді ми здобудемо рівняння вигляду:

$$x = f(t, \dot{x}), \quad t = g(x, \dot{x}).$$

Розглянемо деякі рівняння цього типу, які розв'язуються *методом введення параметра*.

1. Розглянемо диференціальне рівняння:

$$\boxed{t = f(\dot{x})}, \tag{5.1}$$

де функція f визначена і неперервна та диференційована на інтервалі (a,b). Рівняння (5.1) не розв'язане відносно похідної. Розв'яжемо його *методом введення параметра*. Нехай $\frac{dx}{dt} = p$. Звідси і з (5.1) маємо

$$t = f(p). \tag{5.2}$$

Диференціюємо обидві частини (5.2). Отримаємо $dt = \frac{df(p)}{dp}dp$. Звідси та з рівності $dt = \frac{dx}{p}$ випливає, що $dx = \left(\frac{df(p)}{dp}p\right)dp$. Інтегруючи, отримаємо

$$x = \int \frac{df(p)}{dp} pdp + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Формули (5.2) та (5.3) задають розв'язок рівняння (5.1) в *параметричній* формі.

Приклад 5.1. *Розв'язати рівняння* $t = \exp(\dot{x}) + \dot{x}$.

Нехай $\frac{dx}{dt} = p$. Тоді $t = e^p + p$. Звідси $dt = \left(e^p + 1\right)dp$. Отже, $dx = \left(e^p + 1\right)pdp$. Інтегруючи, отримаємо $x = (p-1)e^p + \frac{p^2}{2} + C$. Таким чином, всі розв'язки нашого рівняння задаються в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} t = e^p + p \\ x = (p-1)e^p + \dfrac{p^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Розглянемо диференціальне рівняння

$$\boxed{x = f(\dot{x})}, \tag{5.4}$$

де функція f визначена і неперервна та диференційована на інтервалі (a,b). Розв'яжемо рівняння (5.4) *методом введення параметра*. Нехай $\frac{dx}{dt} = p$. Звідси та з (5.4) маємо

$$x = f(p). \tag{5.5}$$

Диференціюємо обидві частини (5.5). Отримаємо $dx = \frac{df(p)}{dp} dp$. Звідси та з рівності $dx = pdt$ випливає, що

$$pdt = \left(\frac{df(p)}{dp}\right) dp. \tag{5.6}$$

Далі слід розглянути два випадки.

А) Нехай $p = 0$. Якщо $0 \in (a,b)$, то з (5.5) знаходимо розв'язок рівняння (5.4):

$$x \equiv f(0). \tag{5.7}$$

Якщо ж $0 \notin (a,b)$, то у нашого рівняння не існує розв'язків у вигляді (5.7).

Б) Нехай $p \neq 0$. Тоді з (5.6) маємо $dt = \frac{df(p)}{dp} \cdot \frac{1}{p} dp$. Інтегруючи, отримаємо $t = \int \frac{df(p)}{dp} \cdot \frac{1}{p} dp + C$. Таким чином, усі розв'язки нашого рівняння мають вигляд:

$$\left[\begin{array}{l} x \equiv f(0), \quad \text{если } 0 \in (a,b), \\ \begin{cases} t = \int \frac{df(p)}{dp} \cdot \frac{1}{p} dp + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ x = f(p). \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад 5.2. *Розв'язати рівняння* $x = \dot{x}^4 + 1$.

Нехай $\frac{dx}{dt} = p$. Тоді $x = p^4 + 1$ та $dx = 4p^3 dp$. Звідси $pdt = 4p^3 dp$. Якщо

$p=0$, то функція $x\equiv 1$ є розв'язком рівняння. Якщо ж $p\neq 0$, то $dt=4p^2dp$.

Після інтегрування здобудемо $t=\dfrac{4p^2}{3}+C$. Таким чином, всі розв'язки нашого рівняння мають вигляд:

$$\left[\begin{array}{l} x\equiv 1, \\ \begin{cases} t=\dfrac{4p^2}{3}+C, \quad C\in\mathbb{R}, \\ x=p^4+1. \end{cases} \end{array}\right.$$

3. *Рівнянням Клеро* називається рівняння

$$\boxed{x=t\dot{x}+\psi(\dot{x})}, \tag{5.8}$$

де функція ψ неперервна та диференційована на інтервалі (a,b). Розв'яжемо це рівняння *методом введення параметра*. Нехай $\dot{x}=p$. Тоді

$$x=tp+\psi(p). \tag{5.9}$$

Диференціюємо (5.9). Отримаємо:

$$dx=tdp+pdt+\frac{d\psi(p)}{dp}dp.$$

Звідси та з рівності $dx=pdt$ маємо:

$$\left(t+\frac{d\psi(p)}{dp}\right)dp=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+\dfrac{d\psi(p)}{dp}=0, \\ dp=0. \end{array}\right..$$

Слід розглянути два випадки.

А) Якщо $t+\dfrac{d\psi(p)}{dp}=0$. Звідси та з (5.9) отримаємо *особливий розв'язок* у параметричній формі:

$$\begin{cases} t=-\dfrac{d\psi(p)}{dp} \\ x=-p\dfrac{d\psi(p)}{dp}+\psi(p) \end{cases}. \tag{5.10}$$

Б) Якщо $dp = 0$. Тоді $p = C$. Звідси та з (5.9) отримаємо нескінченну множину розв'язків нашого рівняння:

$$x = tC + \psi(C), \quad C \in \mathbb{R}. \tag{5.11}$$

Формули (5.10) та (5.11) задають усі розв'язки рівняння Клеро (5.8). У кожній точці кривої (5.10) її дотинається одна з прямих (5.11). Отже, всі точки кривої (5.10) не є точками єдності розв'язку задачі Коші для вихідного рівняння. Тому розв'язок (5.10) називається *особливим*.

Приклад 5.3. *Розв'язати рівняння* $x = t\dot{x} + \sqrt{1 + \dot{x}^2}$.

Це рівняння Клеро. Введемо параметр $\dot{x} = p$. Тоді $x = tp + \sqrt{1 + p^2}$. Диференціюючи, здобудемо

$$dx = tdp + pdt + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} dp.$$

Звідси та з рівності $dx = pdt$ маємо:

$$\left(t + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \right) dp = 0.$$

Нехай $t + \dfrac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = 0$. Тоді отримаємо особливий розв'язок рівняня у параметричній формі:

$$\begin{cases} t = -\dfrac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \\ x = -\dfrac{p^2}{\sqrt{1 + p^2}} + \sqrt{1 + p^2}. \end{cases} \tag{5.12}$$

Нехай тепер $dp = 0$. Тоді $p = C$. Звідси отримаємо нескінченно багато розв'язків вигляду

$$x = tC + \sqrt{1 + C^2}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{5.13}$$

Формули (5.12) та (5.13) задають усі розв'язки вихідного рівняння.

4. *Рівнянням Лагранжа* називається рівняння

$$\boxed{x = t\varphi(\dot{x}) + \psi(\dot{x})}, \tag{5.14}$$

де функції φ та ψ неперервні та диференційовані на інтервалі (a,b). Якщо $\varphi(\dot{x}) \equiv \dot{x}$, то рівняння (5.14) перетворюється на вже розглянуте рівняння Клеро. Тому ми вважатимемо, що $\varphi(\dot{x}) \not\equiv \dot{x}$.

Розв'яжемо рівняння Лагранжа *методом введення параметра*. Нехай $\dot{x} = p$. Звідси та з (5.14) маємо

$$x = t\varphi(p) + \psi(p). \tag{5.15}$$

Диференціюючи (5.15), отримаємо

$$dx = t\frac{d\varphi(p)}{dp}dp + \varphi(p)dt + \frac{d\psi(p)}{dp}dp.$$

Оскільки $dx = pdt$, то

$$\left(p - \varphi(p)\right)dt = \left(t\frac{d\varphi(p)}{dp} + \frac{d\psi(p)}{dp}\right)dp. \tag{5.16}$$

Рівняння (5.16) розв'яжемо в два кроки.

Крок 1. Через $p_1,\ldots,p_n,\ldots \in (a,b)$ позначимо розв'язки рівняння $p - \varphi(p) = 0$. Тоді функції $p(t) \equiv p_1,\ldots,p(t) \equiv p_n,\ldots$ задовольняють рівнянню (5.16). Звідси та з (5.15) випливає, що функції

$$x = t\varphi(p_1) + \psi(p_1),\ldots,x = t\varphi(p_n) + \psi(p_n),\ldots$$

є розв'язками рівняння Лагранжа (5.14). Або, оскільки $p_i - \varphi(p_i) = 0$,

$$x = tp_1 + \psi(p_1),\ldots,x = tp_n + \psi(p_n),\ldots \tag{5.17}$$

Крок 2. Нехай тепер $p \in (a,b) \setminus \{p_1,\ldots,p_n,\ldots\}$. Тоді $p - \varphi(p) \neq 0$ і рівняння (5.16) можна записати у вигляді

$$\frac{dt}{dp} - \frac{d\varphi(p)}{dp}\cdot\frac{1}{p-\varphi(p)}t = \frac{d\psi(p)}{dp}\cdot\frac{1}{p-\varphi(p)}. \tag{5.18}$$

Рівняння (5.18) є лінійним для функції $t(p)$. Нехай $\tilde{t}(p)$– деякий розв'язок рівняння (5.18), а $t_0(p)$– нетривіальний розв'язок однорідного рівняння, відповідного неоднорідному рівнянню (5.18). Тоді всі розв'язки рівняння (5.18) задаються формулою $t(p) = Ct_0(p) + \tilde{t}(p), C \in \mathbb{R}$. Звідси та з (5.15) отримаємо в параметричному вигляді нескінченну множину розв'язків рівняння Лагранжа (5.14):

$$\begin{cases} t(p) = Ct_0(p) + \tilde{t}(p) \\ x(p) = \left(Ct_0(p) + \tilde{t}(p)\right)\varphi(p) + \psi(p), \quad C \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.19}$$

Формули (5.17) та (5.19) задають усі розв'язки рівняння Лагранжа (5.14). Відзначимо, що деякі з розв'язків, що задаються формулою (5.17), можуть бути особливими.

Приклад 5.4. *Розв'язати рівняння* $x = t\dot{x}^2 + \dfrac{3\dot{x}^2 - 2\dot{x}^3}{6}$.

Це рівняння Лагранжа. Нехай $\dot{x} = p$. Тоді

$$x = tp^2 + \frac{3p^2 - 2p^3}{6}. \tag{5.20}$$

Диференціюючи (5.20), отримаємо $dx = 2tpdp + p^2dt + (p - p^2)dp$. Звідси та з рівності $dx = pdt$ маємо

$$\left(p - p^2\right)dt = \left(2tp + p - p^2\right)dp. \tag{5.21}$$

Рівняння (5.21) розв'яжемо в два кроки.

Крок 1. Рівняння $p - p^2 = 0$ має два розв'язки $p_1 = 0$ та $p_2 = 1$. Тоді функції $p(t) \equiv 0,\ p(t) \equiv 1$ задовольняють рівнянню (5.21). Звідси та з (5.20) випливає, що функції

$$x \equiv 0 \text{ та } x = t + \frac{1}{6} \tag{5.22}$$

є розв'язками нашого рівняння.

Крок 2. Нехай тепер $p - p^2 \neq 0$. Рівняння (5.21) запишемо у вигляді

$$\frac{dt}{dp}-\frac{2}{1-p}\cdot t=1. \qquad (5.23)$$

Рівняння (5.23) є лінійним для функції $t(p)$. Його розв'язки задаються формулою

$$t(p)=\frac{C}{(p-1)^2}+\frac{p-1}{3}, C\in\mathbb{R}.$$

Звідси та з (5.20) здобудемо в параметричному вигляді нескінченну множину розв'язків:

$$\begin{cases} t(p)=\dfrac{C}{(p-1)^2}+\dfrac{p-1}{3} \\ x(p)=\left(\dfrac{C}{(p-1)^2}+\dfrac{p-1}{3}\right)p^2+\dfrac{3p^2-2p^3}{6}, \quad C\in\mathbb{R}. \end{cases} \qquad (5.24)$$

Формули (5.22) та (5.24) задають усі розв'язки вихідного рівняння.

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Розв'язати рівняння:	Розв'язати рівняння:
№ 5.1. $t=\dot{x}^3+\dot{x}.$	**№ 5.8.** $t(\dot{x}^2-1)=2\dot{x}.$
№ 5.2. $x=(\dot{x}-1)e^{\dot{x}}.$	**№ 5.9.** $x=\dot{x}^2+2\dot{x}^3.$
№ 5.3. $x=t\dot{x}-\dot{x}^2.$	**№ 5.10.** $\dot{x}^3=3(t\dot{x}-x).$
№ 5.4. $2\dot{x}^2(x-t\dot{x})=1.$	**№ 5.11.** $t\dot{x}-x=\ln\dot{x}.$
№ 5.5. $2t\dot{x}-x=\ln\dot{x}.$	**№ 5.12.** $x=t\dot{x}-(2+\dot{x}).$
№ 5.6. $x+t\dot{x}=4\sqrt{\dot{x}}.$	**№ 5.13.** $x=2t\dot{x}-4\dot{x}^3.$
№ 5.7. $x=t\dot{x}-t^2\dot{x}^3.$	**№ 5.14.** $x=2t\dot{x}+x^2\dot{x}^3.$

6. Різні рівняння першого порядку

Вправи

Аудиторні	Домашні
Розв'язати рівняння: **№ 6.1.** $\left(t - x\cos\frac{x}{t}\right)dt + \left(t\cos\frac{x}{t}\right)dx = 0.$ **№ 6.2.** $\dot{x}^2 + 2(t-1)\dot{x} - 2x = 0.$ **№ 6.3.** $(2tx^2 - x)dt + t\,dx = 0.$ **№ 6.4.** $(\sin t + x)dx + (x\cos t - t^2)dt = 0.$ **№ 6.5.** $2(t - x^2)dx = x\,dt.$ **№ 6.6.** $x = \dot{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}.$ **№ 6.7.** $(2t + 3x - 1)dt + (4t + 6x - 5)dx = 0.$ **№ 6.8.** $t\dot{x}^2 = x - \dot{x}.$	Розв'язати рівняння: **№ 6.9.** $t\dot{x} + x = \ln\dot{x}.$ **№ 6.10.** $t\dot{x} + t^2 + tx - x = 0.$ **№ 6.11.** $\dot{x}^3 - \dot{x}e^{2t} = 0.$ **№ 6.12.** $x(x - t\dot{x}) = \sqrt{t^4 + x^4}.$ **№ 6.13.** $(2t + x + 5)\dot{x} = 3t + 6.$ **№ 6.14.** $2\dot{x} = t + \ln\dot{x}.$ **№ 6.15.** $t\dot{x} = 2\sqrt{x}\cos t - 2x.$ **№ 6.16.** $(\cos t - t\sin t)x\,dt + (t\cos t - 2x)dx = 0.$

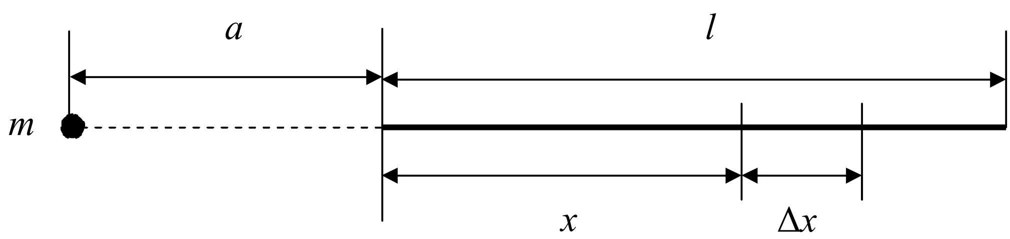
7. Застосування диференційних рівнянь в прикладних і геометричних задачах

Теорія

При складанні диференціального рівняння для визначення невідомої функції $x(t)$ слід знайти співвідношення між приростом Δx функції та приростом Δt її аргументу, тобто знайти Δx у вигляді функції від $x, t, \Delta t$. При цьому нерідко доводиться робити різні спрощуючи припущення відносно характеру досліджуваного процесу. Такі спрощення та ідеалізації приводять до того, що з'являється лише наближена рівність між приростом Δx функції та приростом Δt її аргументу. Але при прямуванні Δx та Δt до нуля наближена рівність повинна перетворюватися на точну. Замінюючи Δx та Δt відповідно на dx та dt, а наближену рівність на точну, ми отримаємо диференціальне рівняння, яке є математичною моделлю нашої задачі. Часто при складанні диференціальних рівнянь слід використовувати фізичні, хімічні та інші закони, які є загальноприйнятими у відповідній науці. Розглянемо приклади.

Приклад 7.1. *Нехай даний тонкий однорідний стержень масою* M *і довжиною* l. *Матеріальна точка масою* m *знаходиться на осі стержня на відстані* a *від його лівого кінця. Знайти силу тяжіння стержня і матеріальної точки.*

За законом Ньютона сила F тяжіння між матеріальними точками з масами m_1 та m_2, розташованими на відстані r одна від одної, обчислюється за формулою $F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$. Позначимо через $F(x)$ силу, з якою частина стержня з початком в лівому кінці і довжиною x притягає матеріальну точку m. Із закону Ньютона та рисунка



випливає, що приріст $\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x)$, який є силою тяжіння заданої точки та частини стержня Δx, виражається наближеною формулою

$$\Delta F \approx k\frac{m(M/l)}{(a+x)^2}\Delta x . \qquad (7.1)$$

Формула (7.1) була б точною, якби вся маса $(M/l)\Delta x$ частини стержня Δx була зосереджена в точці x. Звідси випливає, що зі зменшенням Δx формула (7.1) стає усе більш точною. Тому диференціальне рівняння нашої задачі має вигляд

$$dF = k\frac{m(M/l)}{(a+x)^2}dx\ .$$

Інтегруючи його, отримаємо

$$F(x) = -k\frac{m(M/l)}{(a+x)} + C.$$

З початкової умови $F(0)=0$ випливає, що

$$C = k\frac{m(M/l)}{a}.$$

Тому

$$F(x) = -k\frac{m(M/l)}{(a+x)} + k\frac{m(M/l)}{a}.$$

При $x=l$ здобудемо, що тяжіння маси m всім стержнем виражається формулою

$$F(l) = k\frac{mM}{a(a+l)}.$$

Приклад 7.2. *У банку, яка перед початком експерименту містила L л води, починає безперервно поступати із швидкістю l л в хвилину розчин, в кожному літрі якого міститься m кг солі. Розчин, що поступає в банку, миттєво перемішується з вмістом банки, і суміш витікає з тією ж швидкістю. Скільки солі буде в банці через t хвилин після початку експерименту?*

Нехай через t хвилин після початку експерименту в банці міститься $x(t)$ *кг* солі. Знайдемо, на скільки зміниться кількість солі за проміжок від моменту t до моменту $t+\Delta t$. В одну хвилину поступає l *л* розчину, а за Δt хвилин – $l\Delta t$ літрів; у цих $l\Delta t$ літрах міститься $ml\Delta t$ *кг* солі. З іншого боку, за час Δt з банки витікає $l\Delta t$ літрів розчину. В момент t у всій банці міститься $x(t)$ *кг* солі, отже, в $l\Delta t$ літрах витікаючого розчину містилося б $x(t)(l/L)\Delta t$ *кг* солі, якби за час Δt вміст солі в банці не мінявся. Звідси випливає, що приріст

$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$ кількості солі в банці виражається наступною наближеною формулою

$$\Delta x \approx (m - x/L) l \Delta t. \tag{7.2}$$

При $\Delta x, \Delta t \to 0$ наближена рівність (7.2) перетворюється на точну. Тому диференціальне рівняння нашої задачі має вигляд $dx = (m - x/L) l dt$. Або

$$\dot{x} = -(l/L)x + ml.$$

Розв’язуючи це лінійне неоднорідне рівняння, отримаємо $x(t) = Ce^{-(l/L)t} + mL$. З початкової умови $x(0) = 0$ випливає, що $C = -mL$. Таким чином,

$$x(t) = mL\left(1 - e^{-(l/L)t}\right).$$

Приклад 7.3. *Знайти криву, що проходить через точку (1,1), в якої відрізок, що відсікається дотичною на осі ординат, дорівнює абсцисі точки дотику.*

Нехай шукана крива є графіком функції $y = y(x)$ і точка з координатами (x_0, y_0) лежить на нашій кривій, тобто $y(x_0) = y_0$. Рівняння дотичної в цій точці має вигляд $y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x_0)(x - x_0)$. Точка перетину цієї дотичної з віссю ординат $y = y_0 - x_0 \frac{dy}{dx}(x_0)$. За умовою задачі маємо $x_0 = y_0 - x_0 \frac{dy}{dx}(x_0)$. Це лінійне диференціальне рівняння, яке можна записати у вигляді

$$x = y - x\frac{dy}{dx}. \tag{7.3}$$

Точка $x = 0$ є особливою для нашого диференціального рівняння (у цій точці коефіцієнт при похідній перетворюється на нуль). Тому диференціальне рівняння (7.3) слід окремо розглядати в лівій напівплощині $\{(x, y) : x < 0\}$ і в правій напівплощині $\{(x, y) : x > 0\}$. З умови задачі випливає, що досить розглянути рівняння (7.3) в правій напівплощині. У правій напівплощині рівняння (7.3) можна записати у вигляді $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$. Загальний розв’язок цього лінійного рівняння має вигляд $y = x\ln\frac{C}{x}$. З початкової умови $y(1)=1$ знайдемо, що $C=e$. Звідси випливає, що шукана крива є графіком функції

$$y = x\ln\frac{e}{x} = x - x\ln x.$$

Приклад 7.4. *Парашутист стрибнув з висоти 1,5 км, а розкрив парашут на висоті 0,5 км. Скільки часу він падав до розкриття парашута? Відомо, що гранична швидкість падіння людини в повітрі нормальній щільності складає 50 м/сек. Зміною щільності з висотою нехтувати. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості.*

Диференціальне рівняння руху в даному випадку має вигляд

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kmv^2. \tag{7.4}$$

Тут m– маса парашутиста, v– швидкість падіння парашутиста, mg – сила тяжіння, kmv^2 – сила опору повітря. Ясно, що (7.4) можна записати у вигляді

$$\frac{dv}{dt} = g - kv^2.$$

З цього рівняння випливає, що гранична швидкість падіння визначається з рівняння $g - kv_0^2 = 0$. Звідси випливає, що $k = g/v_0^2$. Диференціальне рівняння руху приймає вигляд $\frac{dv}{dt} = (g/v_0^2)(v_0^2 - v^2)$. Розділимо змінні та виконаємо інтегрування. Отримаємо $\frac{v_0}{2}\ln\frac{v_0+v}{v_0-v} = gt + C$. З початкової умови $v(0)=0$ випливає, що $C=0$. Отже $\frac{v_0}{2}\ln\frac{v_0+v}{v_0-v} = gt$. Звідси випливає, що

$$v(t) = v_0\frac{e^{gt/v_0} - e^{-gt/v_0}}{e^{gt/v_0} + e^{-gt/v_0}} = v_0\,\mathrm{th}(gt/v_0).$$

Це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{dS(t)}{dt} = v_0\,\mathrm{th}(gt/v_0).$$

Тут $S(t)$– путь, що пройдено за час t. Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо

$$S(t)=\frac{v_0^2}{g}\ln\operatorname{ch}\frac{gt}{v_0}+C.$$

З початкової умови $S(0)=0$ випливає, що $C=0$. Отже

$$S(t)=\frac{v_0^2}{g}\ln\operatorname{ch}\frac{gt}{v_0}.$$

З умови задачі випливає, що момент t розкриття парашута визначається з рівняння

$$1000=\frac{2500}{10}\ln\operatorname{ch}\frac{10t}{50}.$$

Звідси $e^4=\operatorname{ch}\frac{t}{5}$. Розв’язуючи рівняння, отримаємо $t\approx 23.5$ *сек*.

Вправи.

Аудиторні

№7.1. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина постійна, яка дорівнює a^2.

№7.2. Банка об'ємом в 20 *л* містить повітря (80% азоту та 20% кисню). У банку втікає 0,1 *л* азоту в секунду, який безперервно перемішується, і витікає така ж кількість суміші. Через скільки часу в банці буде 99% азоту?

№7.3. Футбольний м'яч вагою 0,4 *кГ* кинутий вгору зі швидкістю 20 *м/сек*. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості та дорівнює 0,48 *Г* при швидкості 1 *м/сек*. Обчислити час підйому м'яча та найбільшу висоту підйому. Як зміняться ці результати, якщо нехтувати опором повітря?

№7.4. За 30 днів розпалося 50% первинної кількості радіоактивної речовини. Через скільки часу залишиться 1% від первинної кількості? (Використовувати закон радіоактивного розпаду: кількість радіоактивної речовини, що розпадається за одиницю часу, пропорційна кількості речовини, що є в даний момент.)

№7.5. Тіло охолодилося за 10 *хв* д 100° до 60°. Температура навколишнього повітря підтримується рівною 20°. Коли тіло остигне до 25°? (Прийняти, що швидкість охолодження (або нагрівання) тіла пропорційна різниці температур тіла і довкілля.)

Домашні

№7.6. Знайти криві, для яких сума катетів трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина постійна, яка дорівнює $2a$.

№7.7. У баку знаходиться 100 *л* розчину, що містить 10 *кг* солі. У бак безперервно подається вода (зі швидкістю 5 *л* в хвилину), яка перемішується з наявним розчином. Суміш витікає з тією ж швидкістю. Скільки солі в баку залишиться через годину?

№7.8. Футбольний м'яч вагою 0,4 *кГ* падає з висоти 16,3 *м* без початкової швидкості. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості та дорівнює 0,48 *Г* при швидкості 1 *м/сек.* Обчислити час падіння м'яча та знайти швидкість в кінці падіння.

№7.9. Згідно з експериментами за рік із кожного грама радію розпадається 0,44 міліграм. Через скільки років розпадеться половина наявної кількості радію?

№7.10. У банку, що містить 1 *кг* води при температурі 20°, опущений алюмінієвий предмет з масою 0,5 *кг*, питомою теплоємністю 0,2 і температурою 75°. Через хвилину вода нагрілася на 2°. Коли температура води та предмету відрізнятиметься одна від одної на 1°? Втратами тепла на нагрівання банки та іншими втратами нехтувати.

8. Однорідні та неоднорідні лінійні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами. Неоднорідні рівняння зі спеціальною правою частиною

Теорія

1. *Неоднорідним лінійним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння*

$$\boxed{a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_nx = f(t)}, \tag{8.1}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_0 \neq 0$ і неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \not\equiv 0$.

Разом із неоднорідним рівнянням (8.1) розглядатимемо і *відповідне однорідне рівняння*

$$\boxed{a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0}. \tag{8.2}$$

Можна довести, що всі розв'язки рівнянь (8.1) та (8.2) визначені для всіх $t \in \mathbb{R}$. Розв'язки $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ рівняння (8.2) називаються *фундаментальною системою розв'язків (ФСР)*, якщо вони лінійно незалежні, тобто

$$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \ldots + C_n x_n(t) \equiv 0,\ C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0.$$

Теорема 8.1. *Нехай функції* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ утворюють ФСР однорідного рівняння (8.2). Тоді формула

$$\boxed{x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \ldots + C_n x_n(t), \quad \forall C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}} \tag{8.3}$$

задає усі розв'язки (загальний розв'язок) однорідного рівняння (8.2).

Теорема 8.2. *Нехай функції $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ утворюють ФСР однорідного рівняння (8.2), а функція $\tilde{x}(t)$ є частинним розв'язком рівняння (8.1). Тоді формула*

$$\boxed{x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \ldots + C_n x_n(t) + \tilde{x}(t), \quad \forall C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}} \tag{8.4}$$

задає усі розв'язки (загальний розв'язок) неоднорідного рівняння (8.1).

Диференціальному рівнянню (8.2) відповідає *характеристичне рівняння*

$$\boxed{a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0}. \tag{8.5}$$

ФСР рівняння (8.2) будується за розв'язками характеристичного рівняння (8.5). При цьому слід розрізняти випадок дійсного та випадок комплексного розв'язків характеристичного рівняння.

2. Нехай *всі* розв'язки характеристичного рівняння (8.5) є дійсними числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ кратності $m_1, m_2, \ldots, m_p$ $(m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n)$. Тоді ФСР рівняння (8.2) утворюють функції

$$\left\{\begin{matrix} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots & ,t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t}, & \ldots & ,t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{\lambda_p t}, & te^{\lambda_p t}, & \ldots & ,t^{m_p-1}e^{\lambda_p t} \end{matrix}\right\}. \tag{8.6}$$

Приклад 8.1. *Розв'язати рівняння* $\ddot{x} + 2\dot{x} - 8x = 0.$

Це лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$. Його розв'язки $\lambda_1 = 2$ та $\lambda_2 = -4$. ФСР має вигляд $\left\{\begin{matrix} e^{2t} \\ e^{-4t} \end{matrix}\right\}$. Усі розв'язки рівняння задає формула

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-4t}, \ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 8.2. *Розв'язати рівняння* $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0.$

Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Розв'язками цього рівняння є $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. ФСР має вигляд $\{e^{-2t}, te^{-2t}\}$. Усі розв'язки рівняння задає формула

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}, \ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 8.3. *Розв'язати рівняння* $\dddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} = 0.$

Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$. Його розв'язками є $\lambda_1 = 0$ та $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. ФСР має вигляд $\left\{\begin{matrix} 1 \\ e^t, te^t \end{matrix}\right\}$. Усі розв'язки рівняння задає формула

$$x = C_1 + C_2 e^t + C_3 t e^t, \ \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

3. Нехай *все різні* розв'язки характеристичного рівняння (8.5) є, взагалі кажучи, комплексними числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ кратності $m_1, m_2, \ldots, m_p$

$(m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n)$. Тоді *комплекснозначну фундаментальну систему розв'язків* (КФСР) рівняння (8.2) утворюють функції

$$\left\{ \begin{matrix} e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots & ,t^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t}, & te^{\lambda_2 t}, & \ldots & ,t^{m_2 - 1} e^{\lambda_2 t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{\lambda_p t}, & te^{\lambda_p t}, & \ldots & ,t^{m_p - 1} e^{\lambda_p t} \end{matrix} \right\}. \tag{8.7}$$

При комплексних $\lambda = \alpha + \omega\, i,\ \ \alpha, \omega \in \mathbb{R}$ експонента $e^{\lambda t}$ визначається ***формулою Ейлера:***

$$\boxed{e^{\lambda t} = e^{(\alpha + \omega\, i)t} = (e^{\alpha t} \cos \omega t) + (e^{\alpha t} \sin \omega t) \cdot i}. \tag{8.8}$$

Звідси випливає, що дійсна та уявна частини комплексної експоненти задаються формулами

$$\boxed{\operatorname{Re} e^{(\alpha + \omega\, i)t} = e^{\alpha t} \cos \omega t, \quad \operatorname{Im} e^{(\alpha + \omega\, i)t} = e^{\alpha t} \sin \omega t}. \tag{8.9}$$

Дійсну ФСР ми побудуємо за допомогою наступної процедури. Нехай комплексне число $\lambda_1 = \alpha_1 + \omega_1 i$ є розв'язком характеристичного рівняння (8.5) кратності m_1. Тоді, через дійсність коефіцієнтів характеристичного рівняння, комплексно-спряжене число $\overline{\lambda_1} = \alpha_1 - \omega_1 i$ також є розв'язком характеристичного рівняння (8.5) кратності m_1. Тому до КФСР (8.7) входять два рядки наступного вигляду:

$$\left\{ \begin{matrix} e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\overline{\lambda}_1 t}, \ldots, t^{m_1 - 1} e^{\overline{\lambda}_1 t} \end{matrix} \right\}. \tag{8.10}$$

За формулою Ейлера (8.10) можна записати у вигляді

$$\left\{ \begin{matrix} (e^{\alpha_1 t} \cos \omega_1 t) + (e^{\alpha_1 t} \sin \omega_1 t) \cdot i, \ldots, (t^{m_1 - 1} e^{\alpha_1 t} \cos \omega_1 t) + (t^{m_1 - 1} e^{\alpha_1 t} \sin \omega_1 t) \cdot i \\ (e^{\alpha_1 t} \cos \omega_1 t) - (e^{\alpha_1 t} \sin \omega_1 t) \cdot i, \ldots, (t^{m_1 - 1} e^{\alpha_1 t} \cos \omega_1 t) - (t^{m_1 - 1} e^{\alpha_1 t} \sin \omega_1 t) \cdot i \end{matrix} \right\}.$$

Відокремимо дійсні та уявні частини в першому рядку та відкинемо функції у другому рядку. Отримаємо дійсні розв'язки рівняння (8.2):

$$\begin{Bmatrix} e^{\alpha_1 t}\cos\omega_1 t, \ldots, t^{m_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\omega_1 t \\ e^{\alpha_1 t}\sin\omega_1 t, \ldots, t^{m_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\omega_1 t \end{Bmatrix}. \tag{8.11}$$

Застосовуючи описану процедуру до кожної пари комплексно-спряжених розв'язків характеристичного рівняння, ми перейдемо від КФСР (8.7) до дійсної ФСР.

Приклад 8.4. *Розв'язати рівняння* $\ddot{x}+6\dot{x}+13x=0.$

Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^2+6\lambda+13=0.$ Розв'язки цього рівняння $\lambda_1=-3+2i$ та $\lambda_2=-3-2i$. КФСР має вигляд:

$$\begin{Bmatrix} e^{(-3+2i)t} \\ e^{(-3-2i)t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^{-3t}\cos 2t + ie^{-3t}\sin 2t \\ e^{-3t}\cos 2t - ie^{-3t}\sin 2t \end{Bmatrix}.$$

Звідси випливає, що дійсна ФСР має вигляд $\begin{Bmatrix} e^{-3t}\cos 2t \\ e^{-3t}\sin 2t \end{Bmatrix}.$ Усі розв'язки рівняння задає формула

$$x = C_1e^{-3t}\cos 2t + C_2e^{-3t}\sin 2t,\ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 8.5. *Розв'язати рівняння* $\ddddot{x}-\dddot{x}+\dot{x}-x=0.$

Запишемо характеристичне рівняння $\lambda^4-\lambda^3+\lambda-1=0.$ Його розв'язки: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \lambda_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. КФСР має вигляд:

$$\begin{Bmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \\ e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t} \\ e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \\ e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + i\,e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - i\,e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{Bmatrix}.$$

Звідси випливає, що дійсна ФСР має вигляд:

$$\left\{\begin{matrix} e^t \\ e^{-t} \\ e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{matrix}\right\}.$$

Всі розв'язки рівняння задає формула

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{\frac{t}{2}}\cos\tfrac{\sqrt{3}}{2}t + C_4e^{\frac{t}{2}}\sin\tfrac{\sqrt{3}}{2}t, \quad \forall C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

4. Неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами та *спеціальною правою частиною* називається рівняння

$$\boxed{a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_nx = P_m(t)\cdot e^{\sigma t}}, \tag{8.12}$$

де $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, $P_m(t)$ – многочлен степеня m та $\sigma \in \mathbb{C}$ – числовий параметр, який називається *контрольним числом правої частини рівняння* (8.12).

Нехай контрольне число σ є розв'язком характеристичного рівняння $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ кратності $r \geq 0$ (якщо σ не є розв'язком характеристичного рівняння, то вважаємо $r = 0$).

Теорема 8.3. *Рівняння (8.12) має частинний розв'язок вигляду*

$$\boxed{\tilde{x} = t^r \cdot Q_m(t)\cdot e^{\sigma t}},$$

де $Q_m(t)$ – многочлен того ж степеня, що і многочлен $P_m(t)$. Коефіцієнти многочлена $Q_m(t)$ можуть бути знайдені методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 8.6. *Розв'язати рівняння* $\dddot{x} - \ddot{x} = 2te^t$.

Крок 1. Розв'яжемо однорідне рівняння $\dddot{x} - \ddot{x} = 0$. Характеристичне рівняння має вигляд $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$. Його розв'язки $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$. ФСР має вигляд $\left\{\begin{matrix} 1, t \\ e^t \end{matrix}\right\}$. За теоремою 8.1 усі розв'язки однорідного рівняння мають вигляд $x = C_1 + C_2t + C_3e^t, \quad \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Крок 2. Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Права частина нашого рівняння є спеціальною з $P_m(t) = 2t$ та $\sigma = 1$. Контрольне число $\sigma = 1$ є розв'язком характеристичного рівняння кратності 1. Тому $r = 1$, і за теоремою 8.3 у неоднорідного рівняння існує розв'язок у вигляді $\tilde{x} = t(\underbrace{at+b}_{Q_m(t)})e^t$. Підставимо цю функцію у неоднорідне рівняння. Отримаємо

$$[at^2 + (6a+b)t + 6a + 3b]e^t - [at^2 + (4a+b)t + 2a + 2b]e^t \equiv 2te^t .$$

Після скорочення на e^t та зведення подібних здобудемо

$$(2a-2)t + (4a+b)\cdot 1 \equiv 0 .$$

Звідси

$$\begin{cases} 2a - 2 = 0 \\ 4a + b = 0 \end{cases} .$$

Таким чином, $a = 1,\ b = -4$ і функція $\tilde{x} = t(t-4)e^t$ є розв'язком неоднорідного рівняння.

Крок 3. За теоремою 8.2 усі розв'язки неоднорідного рівняння задає формула

$$x = C_1 + C_2 t + C_3 e^t + t(t-4)e^t, \quad \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} .$$

5. Для знаходження частинних розв'язків неоднорідних рівнянь часто застосовується наступна теорема.

Теорема 8.4. *Нехай дано неоднорідне рівняння*

$$\boxed{a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_k(t)} \qquad (8.13)$$

та функції $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \ldots, \tilde{x}_k$ *задовольняють рівнянням*

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f_j(t),\ 1 \le j \le k .$$

Тоді функція $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{x}_k$ *є розв'язком рівняння (8.13).*

Приклад 8.7. *Розв'язати рівняння* $\ddot{x} - 3\dot{x} = e^{3t} - 18$.

Усі розв'язки однорідного рівняння $\ddot{x}(t)-3\dot{x}(t)=0$ задає формула

$$x(t)=C_1+C_2e^{3t},\quad \forall C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Розглянемо два неоднорідні рівняння $\ddot{x}-3\dot{x}=e^{3t}$ та $\ddot{x}-3\dot{x}=-18$. Розв'язком першого рівняння є функція $\tilde{x}_1=\frac{t}{3}e^{3t}$, а розв'язком другого – функція $\tilde{x}_2=6t$. За теоремою 8.4 функція $\tilde{x}=\frac{t}{3}e^{3t}+6t$ є розв'язком вихідного неоднорідного рівняння. Звідси

$$x(t)=C_1+C_2e^{3t}+\frac{t}{3}e^{3t}+6t,\quad \forall C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Розв'язати рівняння:	Розв'язати рівняння:
№ 8.1. $\ddot{x}+\dot{x}-2x=0.$	**№ 8.9.** $\ddot{x}-2\dot{x}=0.$
№ 8.2. $\ddot{x}-4\dot{x}+5x=0.$	**№ 8.10.** $\ddot{x}+4x=0.$
№ 8.3. $4\ddot{x}+4\dot{x}+x=0.$	**№ 8.11.** $x^{(VI)}+64x=0.$
№ 8.4. $x^{(IV)}+4x=0.$	**№ 8.12.** $\dddot{x}-3\ddot{x}+3\dot{x}-x=0.$
№ 8.5. $x^{(IV)}+2\ddot{x}+x=0.$	**№ 8.13.** $\dddot{x}-3\dot{x}+2x=0.$
№ 8.6. $x^{(V)}+8\dddot{x}+16\dot{x}=0.$	**№ 8.14.** $\ddot{x}-2\dot{x}-3x=e^{4t}.$
№ 8.7. $\ddot{x}+x=4te^{t}.$	**№ 8.15.** $\ddot{x}+\dot{x}-2x=3te^{t}.$
№ 8.8. $\ddot{x}-x=2e^{t}-t^{2}.$	**№ 8.16.** $\ddot{x}-2\dot{x}+x=6te^{t}.$

9. Метод комплексифікації для розв'язання неоднорідних лінійних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

1. Розглянемо *неоднорідне лінійне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:*

$$\boxed{a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=P_m(t)\cdot e^{\alpha t}\cos\omega t}\ ,\qquad (9.1)$$

де $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R},\ a_0\neq 0$, $P_m(t)$ – многочлен степеня m, $\alpha,\omega\in\mathbb{R}$ – параметри.

Разом із рівнянням (9.1) ми розглядатимемо і рівняння

$$\boxed{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = P_m(t) \cdot e^{\alpha t} \sin \omega t} \,. \tag{9.2}$$

Помножимо обидві частини (9.2) на i та складемо рівняння (9.1) та (9.2). Отримаємо

$$a_0 (x^{(n)} + i y^{(n)}) + a_1 (x^{(n-1)} + i y^{(n-1)}) + \ldots + a_n (x + i y) =$$

$$= P_m(t) \cdot \left(e^{\alpha t} \cos \omega t + i \cdot e^{\alpha t} \sin \omega t \right).$$

Введемо позначення $z = x + iy,\ \sigma = \alpha + i\omega$ та скористуємось формулою Ейлера (8.8). Отримаємо

$$\boxed{a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z = P_m(t) \cdot e^{\sigma t}} \,. \tag{9.3}$$

Перехід від одного з рівнянь (9.1), (9.2) до рівняння (9.3) називається *комплексифікацією*. Частинний розв'язок $\tilde{z}$ рівняння (9.3) можна знайти за допомогою теореми 8.3. Тоді дійсна та уявна частини функції $\tilde{z}$

$$\boxed{\tilde{x} = \operatorname{Re} \tilde{z}, \quad \tilde{y} = \operatorname{Im} \tilde{z}} \tag{9.4}$$

є частинними розв'язками рівнянь (9.1) та (9.2) відповідно.

Таким чином, для знаходження частинних дійсних розв'язків $\tilde{x},\ \tilde{y}$ рівнянь (9.1) та (9.2) досить знайти частинний комплексний розв'язок $\tilde{z}$ рівняння (9.3) та скористатися формулами (9.4).

Приклад 9.1. *Знайти частинний розв'язок рівняння*

$$\ddot{x} + 4\dot{x} = \cos t \,. \tag{9.5}$$

Розглянемо рівняння

$$\ddot{y} + 4\dot{y} = \sin t \,. \tag{9.6}$$

Помножимо (9.6) на i та складемо з (9.5). Здобудемо комплексифіковане рівняння для функції $z = x + iy$

$$\ddot{z} + 4\dot{z} = e^{it} \,. \tag{9.7}$$

Контрольне число $\sigma = i$ не є коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + 4\lambda = 0$. За теоремою 8.3 у рівняння (9.7) існує частинний розв'язок вигляду

$\tilde{z} = Ae^{it}, A \in \mathbb{C}$. Підставляючи цей розв’язок у (9.7) та скорочуючи на ненульовий множник e^{it}, отримаємо $A(-1+4i)=1$. Звідси $A = -\frac{1}{17} - \frac{4}{17}i$. Отже,

$$\tilde{z} = \left(-\tfrac{1}{17} - \tfrac{4}{17}i\right) \cdot e^{it}.$$

Далі

$$\tilde{z} = \left(-\tfrac{1}{17} - \tfrac{4}{17}i\right) \cdot (\cos t + i \sin t) = \left(-\frac{\cos t}{17} + \frac{4\sin t}{17}\right) + \left(-\frac{4\cos t}{17} - \frac{\sin t}{17}\right) i.$$

Частинним розв’язком рівняння (9.5) є функція

$$\tilde{x} = \mathrm{Re}\, \tilde{z} = -\frac{\cos t}{17} + \frac{4\sin t}{17}.$$

Приклад 9.2. *Знайти частинний розв’язок рівняння*

$$\ddot{x} - 9x = e^{3t} \cos t. \tag{9.8}$$

Рівняння для функції $z(t) = x(t) + iy(t)$ має вигляд

$$\ddot{z} - 9z = e^{(3+i)t}. \tag{9.9}$$

Контрольне число $\sigma = 3 + i$ не є коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 - 9 = 0$. За теоремою 8.3 у рівняння (9.8) існує частинний розв’язок вигляду $\tilde{z} = Ae^{(3+i)t}$, $A \in \mathbb{C}$. Підставляючи цей розв’язок у (9.9) та скорочуючи на ненульовий множник $e^{(3+i)t}$, отримаємо $A = -\frac{1}{37} - \frac{6}{37}i$. Отже

$$\tilde{z} = \left(-\tfrac{1}{37} - \tfrac{6}{37}i\right) \cdot e^{(3+i)t}.$$

З цього випливає, що частинним розв’язком рівняння (9.8) є функція

$$\tilde{x} = \mathrm{Re}\, \tilde{z} = e^{3t}\left(-\frac{\cos t}{37} + \frac{6\sin t}{37}\right).$$

Приклад 9.3. *Знайти частинний розв’язок рівняння*

$$\ddot{x} + x = \cos t. \tag{9.10}$$

Рівняння для функції $z = x + iy$ має вигляд

$$\ddot{z} + z = e^{it}. \tag{9.11}$$

Контрольне число $\sigma = i$ є коренем характеристичного рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$ кратності $r = 1$. За теоремою 8.3 у рівняння (9.10) існує частинний розв’язок у вигляді $\tilde{z} = tAe^{it}$, $A \in \mathbb{C}$. Підставляючи цей розв'язок у (9.11) та скорочуючи на ненульовий множник e^{it}, отримаємо $A = -\frac{1}{2}i$. Отже $\tilde{z} = -\frac{t}{2}i \cdot e^{it}$. З цього випливає, що частинним розв'язком рівняння (9.10) є функція

$$\tilde{x} = \operatorname{Re}\tilde{z} = \tfrac{t}{2}\sin t.$$

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Розв'язати рівняння:	Розв'язати рівняння:
№ 9.1. $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \cos t.$	**№ 9.6.** $\ddot{x} - 4\dot{x} + 8x = e^{2t} + \sin 2t.$
№ 9.2. $\dddot{y} + y = 4\sin t.$	**№ 9.7.** $\ddot{x} + x = t\sin t.$
№ 9.3. $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^{-t}\cos^2 t.$	**№ 9.8.** $\ddot{x} - 8\dot{x} + 20x = 5te^{4t}\sin 2t.$
№ 9.4. $\ddot{x} + 4x = \operatorname{sh} t \cdot \sin 2t.$	**№ 9.9.** $\dddot{x} - \ddot{x} - \dot{x} + x = 3e^{t} + 5t\cos t.$
Розв'язати задачу Коші:	Розв'язати задачу Коші:
№ 9.5. $x^{(IV)} + \ddot{x} = 2\cos t;$	**№ 9.10.** $\dddot{x} - \dot{x} = 0;\ x(0) = 3,$
$x(0) = -2,\ \dot{x}(0) = 1,\ \ddot{x}(0) = \dddot{x}(0) = 0.$	$\dot{x}(0) = -1,\ \ddot{x}(0) = 1.$

10. Метод варіації сталих. Рівняння Ейлера

Теорія

1. Розглянемо неоднорідне лінійне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\boxed{a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_nx = f(t),\ t \in (t_0, t_1)}, \qquad (10.1)$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_0 \neq 0$ та неперервна функція $f : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}, f \not\equiv 0$.

У загальному випадку для знаходження частинного розв'язку рівняння (10.1) застосовується метод *варіації сталих*.

Теорема 10.1. *Нехай функції* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ утворюють ФСР однорідного рівняння $a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0$. *Тоді:*

1. *Система лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t)x_1(t) + \dot{C}_2(t)x_2(t) + \ldots + \dot{C}_n(t)x_n(t) = 0 \\ \dot{C}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{C}_2(t)\dot{x}_2(t) + \ldots + \dot{C}_n(t)\dot{x}_n(t) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{C}_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dot{C}_2(t)x_2^{(n-1)}(t) + \ldots + \dot{C}_n(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases} \tag{10.2}$$

   має єдиний розв'язок відносно неперервних на інтервалі (t_0, t_1) *функцій* $\dot{C}_1(t), \dot{C}_2(t), \ldots, \dot{C}_n(t)$.

2. *Нехай функції* $C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)$ *позначають деякі первинні для функцій* $\dot{C}_1(t), \dot{C}_2(t), \ldots, \dot{C}_n(t)$. *Тоді функція*

$$\boxed{\tilde{x} = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t) + \ldots + C_n(t)x_n(t)} \tag{10.3}$$

   є частинним розв'язком рівняння (10.1).

3. *Всі розв'язки рівняння (10.1) задає формула*

$$\boxed{x = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \ldots + C_nx_n(t) + \tilde{x}(t), t \in (t_0, t_1),\ \forall C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}}.$$

Приклад 10.1. *Розв'язати рівняння* $\ddot{x} + \dot{x} = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$ $\quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Легко бачити, що ФСР однорідного рівняння $\dddot{x} + \dot{x} = 0$ утворюють функції $\{1, \cos t, \sin t\}$. Запишемо систему (10.2) для нашого випадку:

$$\begin{cases} \tilde{N}_1(t) \cdot 1 + \tilde{N}_2(t) \cdot \cos t + \tilde{N}_3(t)\sin t = 0 \\ \tilde{N}_1(t) \cdot 0 - \tilde{N}_2(t) \cdot \sin t + \tilde{N}_3(t)\cos t = 0 \\ \tilde{N}_1(t) \cdot 0 - \tilde{N}_2(t) \cdot \cos t - \tilde{N}_3(t)\sin t = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \end{cases}.$$

Розв'язками цієї системи є

$$\dot{C}_1(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t}, \quad \dot{C}_2(t) = -\operatorname{tg} t, \quad \dot{C}_3(t) = 1 - \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Звідси

$$C_1(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad C_2(t) = \ln|\cos t|, \quad C_3(t) = t - \operatorname{tg} t.$$

За формулою (10.3) частинний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$\tilde{x}(t) = \left(\frac{1}{\cos t}\right)\cdot 1 + \left(\ln\left|\cos t\right|\right)\cdot\cos t + \left(t - \operatorname{tg} t\right)\cdot \sin t\,.$$

Всі розв'язки рівняння задаються формулою

$$x(t) = C_1\cdot 1 + C_2\cdot\cos t + C_3\cdot\sin t$$
$$+\left(\frac{1}{\cos t}\right)\cdot 1 + \left(\ln\left|\cos t\right|\right)\cdot\cos t + \left(t - \operatorname{tg} t\right)\cdot\sin t,\ \ \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2. *Рівнянням Ейлера* називають рівняння

$$\boxed{a_0 t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_n t^0 x = f(t)}\,, \tag{10.4}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_0 \neq 0$ і неперервна функція $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Точка $t=0$ є особливою для рівняння Ейлера (у цій точці коефіцієнти при похідних дорівнюють нулю). Тому рівняння Ейлера слід розглядати окремо при $t\in(-\infty,0)$ та при $t\in(0,+\infty)$. Для визначеності ми розглянемо випадок $t\in(0,+\infty)$.

Введемо нову незалежну змінну τ за допомогою формул

$$t = e^{\tau},\quad \tau = \ln t\,. \tag{10.5}$$

Маємо $x = x(e^{\tau}),\ \tau = \ln t$

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{1}{t} = e^{-\tau}\cdot\frac{dx}{d\tau},$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau}\left(e^{-\tau}\frac{dx}{d\tau}\right)\cdot\frac{1}{t} = e^{-\tau}\cdot\left(-e^{-\tau}\frac{dx}{d\tau} + e^{-\tau}\frac{d^2x}{d\tau^2}\right) = e^{-2\tau}\cdot\left(\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau}\right),$$

$$\dddot{x} = \frac{d\ddot{x}}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau}\left(e^{-2\tau}\cdot\left(\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau}\right)\right)\cdot\frac{1}{t} =$$
$$= e^{-\tau}\cdot\left(-2e^{-2\tau}\cdot\left(\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau}\right) + e^{-2\tau}\left(\frac{d^3x}{d\tau^3} - \frac{d^2x}{d\tau^2}\right)\right) = e^{-3\tau}\cdot\left(\frac{d^3x}{d\tau^3} - 3\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\frac{dx}{d\tau}\right),$$

. . . .

Підставляючи набуті вирази для похідних у рівняння (10.4), отримаємо рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 10.2. *Розв'язати рівняння* $t^2\ddot{x}+3t\dot{x}+x=0,\ t>0$.

Це рівняння Ейлера. Зробимо в ньому заміну (10.5). Отримаємо рівняння зі сталими коефіцієнтами $\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2}+2\frac{dx(\tau)}{d\tau}+x(\tau)=0$. Розв'язки цього рівняння мають вигляд $x(\tau)=C_1e^{-\tau}+C_2\tau e^{-\tau}$. Повертаючись до змінної t, отримаємо

$$x(t)=\frac{C_1}{t}+\frac{C_2\ln t}{t},\ \forall C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Зауваження 10.1. Можна розглянути і більш загальне рівняння Ейлера

$$\boxed{a_0(\alpha t+\beta)^n x^{(n)}+a_1(\alpha t+\beta)^{n-1}x^{(n-1)}+\ldots+a_n(\alpha t+\beta)^0 x=f(t)}.$$

На піввісі $\alpha t+\beta>0$ це рівняння зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною $\alpha t+\beta=e^{\tau},\quad \tau=\ln(\alpha t+\beta)$.

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Розв'язати рівняння:	Розв'язати рівняння:
№ 10.1. $\ddot{x}-2\dot{x}+x=\frac{e^t}{t}.$	**№ 10.7.** $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=\frac{1}{e^t+1}.$
№ 10.2. $\ddot{x}+x=\frac{1}{\sin t}.$	**№ 10.8.** $\ddot{x}+4x=2\,\mathrm{tg}\,t.$
№ 10.3. $\ddot{x}+2\dot{x}+x=3e^{-t}\sqrt{t+1}.$	**№ 10.9.** $\ddot{x}+x=2\sec^3 t.$
№ 10.4. $t^2\ddot{x}-4t\dot{x}+6x=0.$	**№ 10.10.** $t^3\ddot{x}+t\dot{x}-x=0.$
№ 10.5. $t^2\ddot{x}-t\dot{x}+x=8t^3.$	**№ 10.11.** $t^3\ddot{x}-2tx=6\ln t.$
№ 10.6. $(t-2)^2\ddot{x}-3(t-2)\dot{x}+4x=t.$	**№ 10.12.** $(2t+3)^3\ddot{x}+3(2t+3)\dot{x}-6x=0.$

11. Крайова задача та функція Гріна

Теорія

1. Опис усіх розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку задає формула, в яку входять дві довільні сталі. Для визначення єдиного розв'язку потрібно, щоб у деякій фіксованій точці розв'язок диференціального рівняння і його похідна приймали задані значення (задача Коші). Проте в багатьох фізичних задачах додаткова інформація задається у дещо іншому вигляді, тобто, диференціальне рівняння розглядається на деякому інтервалі, й потрібно, щоб на краях цього інтервалу розв'язок (або його похідна) приймали задані значення. Задачі такого типу називаються крайовими. Розглянемо прості приклади крайових задач.

Приклад 11.1. *Розв'язати крайову задачу:*

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ x(0) = 0, \quad x(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$$

Розв'язки диференціального рівняння мають вигляд $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Підберемо C_1 та C_2 так, щоб виконувалися крайові умови. Маємо

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \\ C_1 \cos \frac{\pi}{2} + C_2 \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}.$$

З цього випливає, що $C_1 = 0$ та $C_2 = 1$. Отже, єдиним розв'язком нашої крайової задачі є функція $x(t) = \sin t$.

Приклад 11.2. *Розв'язати крайову задачу:*

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0, \quad t \in [0,1], \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(1) = 2e. \end{cases}$$

Розв'язки диференціального рівняння мають вигляд $x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$. Тоді $\dot{x}(t) = C_1 e^t + C_2 (t+1) e^t$. Підберемо C_1 та C_2 так, щоб виконувалися крайові умови. Маємо

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 0 e^0 = 0 \\ C_1 e^1 + C_2 (1+1) e^1 = 2e \end{cases}.$$

Звідси випливає, що $C_1 = 0$ та $C_2 = 1$. Отже, єдиним розв'язком нашої крайової задачі є функція $x = te^t$.

Приклад 11.3. *Розв'язати крайову задачу:*

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0, & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ x(0) = 1, & \dot{x}(\frac{\pi}{2}) = -1. \end{cases}$$

Розв'язки диференціального рівняння мають вигляд $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Підберемо C_1 та C_2 так, щоб виконувалися крайові умови. Маємо:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1 \\ -C_1 \sin \frac{\pi}{2} + C_2 \cos \frac{\pi}{2} = -1 \end{cases}.$$

З цього випливає, що $C_1 = 1$, а C_2– довільна стала. Отже, дана крайова задача має нескінченно багато розв'язків вигляду $x = \cos t + C_2 \sin t,\ \forall C_2 \in \mathbb{R}$.

Приклад 11.4. *Розв'язати крайову задачу:*

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0, & t \in [0, 2\pi], \\ x(0) = 1, & x(2\pi) = 0. \end{cases}$$

Розв'язки диференціального рівняння мають вигляд $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Підберемо C_1 та C_2 так, щоб виконувалися крайові умови. Маємо:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1 \\ C_1 \cos 2\pi + C_2 \sin 2\pi = 0 \end{cases}.$$

З першого рівняння випливає, що $C_1 = 1$, а з другого, – що $C_1 = 0$. Отже, дана крайова задача не має розв'язків.

2. *Крайовою задачею для рівняння другого порядку з* ***однорідними відокремленими*** *крайовими умовами* називається задача

$$\begin{cases} a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = f(t), \quad t \in [t_0, t_1] & (11.1) \\ \alpha_0 x(t_0) + \beta_0 \dot{x}(t_0) = 0 & (11.2) \\ \gamma_1 x(t_1) + \delta_1 \dot{x}(t_1) = 0. & (11.3) \end{cases}$$

Тут $[t_0, t_1]$ – скінчений відрізок в $\mathbb{R}$; функції $a_0(t),\ a_1(t),\ a_2(t),\ f(t)$,– неперервні на відрізку $[t_0, t_1]$ та $f(t) \not\equiv 0,\ a_0(t) \neq 0,\ \forall t \in [t_0, t_1]$; $\alpha_0, \beta_0, \gamma_1, \delta_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_0{}^2 + \beta_0{}^2 \neq 0,\ \ \gamma_1{}^2 + \delta_1{}^2 \neq 0$.

Разом із неоднорідним рівнянням (11.1) розглядатимемо і відповідне однорідне рівняння

$$a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0. \qquad (11.4)$$

У рівняння (11.4) існують розв'язки $x_1(t) \not\equiv 0$ та $x_2(t) \not\equiv 0$ такі, що $x_1(t)$ задовольняє умові (10.2), а $x_2(t)$ – умові (11.3). Припустимо, що *визначник Вронського* розв'язків $x_1(t)$ та $x_2(t)$ задовольняє умові

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Функцією Гріна крайової задачі (11.1) – (11.3) називається визначена та неперервна в квадраті $\Omega = \{(t,s) : t_0 \le t, s \le t_1\}$ функція

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{x_1(t)x_2(s)}{a_0(s)W(s)}, & t_0 \le t \le s \le t_1, \\ \dfrac{x_1(s)x_2(t)}{a_0(s)W(s)}, & t_0 \le s \le t \le t_1. \end{cases} \qquad (11.5)$$

Теорема 11.1. *При сформульованих припущеннях у крайовій задачі (11.1) – (11.3) існує єдиний розв'язок, який задається формулою*

$$\boxed{x(t) = \int_{t_0}^{t_1} G(t,s) f(s) ds}. \qquad (11.6)$$

Приклад 11.5. *Побудувати функцію Гріна та розв'язати крайову задачу:*

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{x} = f(t), & t \in [0,1] \\ x(0) = 0, & \dot{x}(1) = 0. \end{cases}$$

Крок 1. Розглянемо однорідне рівняння $\ddot{x} - \dot{x} = 0$. Його розв'язки задаються формулою

$$x(t) = \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 e^t.$$

Крок 2. Розглянемо розв'язки однорідного рівняння

$$x_1(t) = 1 - e^t \ (\tilde{N}_1 = 1, \tilde{N}_2 = -1), \qquad x_2(t) \equiv 1 \ (\tilde{N}_1 = 1, \tilde{N}_2 = 0).$$

Вони задовольняють умовам $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(1) = 0$.

Визначник Вронського цих розв'язків

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-e^t & 1 \\ -e^t & 0 \end{vmatrix}=e^t\neq 0.$$

Крок 3. Запишемо функцію Гріна:

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{x_1(t)x_2(s)}{a_0(s)W(s)}, & 0\le t\le s\le 1 \\ \dfrac{x_1(s)x_2(t)}{a_0(s)W(s)}, & 0\le s\le t\le 1 \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{(1-e^t)\cdot 1}{1\cdot e^s}, & 0\le t\le s\le 1 \\ \dfrac{(1-e^s)\cdot 1}{1\cdot e^s}, & 0\le s\le t\le 1 \end{cases}.$$

Крок 4. Єдиний розв'язок даної крайової задачі задається формулою

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s)ds.$$

Приклад 11.6. *Побудувати функцію Гріна та розв'язати крайову задачу:*

$$\begin{cases} \ddot{x}-x=f(t) \\ x(0)=0, \quad x(2)+\dot{x}(2)=0. \end{cases}$$

Крок 1. Розглянемо однорідне рівняння $\ddot{x}-x=0$. Його розв'язки задаються формулою

$$x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}.$$

Крок 2. Розглянемо розв'язки однорідного рівняння

$$x_1(t)=e^t-e^{-t}\ (C_1=1, C_2=-1), \qquad x_2(t)=e^{-t}\ (C_1=0, C_2=1).$$

Вони задовольняють умовам $x_1(0)=0,\ x_2(2)+\dot{x}_2(2)=0$.

Визначник Вронського цих розв'язків

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^t-e^{-t} & e^{-t} \\ e^t+e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Крок 3. Запишемо функцію Гріна:

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{x_1(t)x_2(s)}{a_0(s)W(s)}, & 0\le t\le s\le 2 \\ \dfrac{x_1(s)x_2(t)}{a_0(s)W(s)}, & 0\le s\le t\le 2 \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{(e^t-e^{-t})\cdot e^{-s}}{1\cdot(-2)}, & 0\le t\le s\le 2 \\ \dfrac{(e^s-e^{-s})\cdot e^{-t}}{1\cdot(-2)}, & 0\le s\le t\le 2 \end{cases}.$$

Крок 4. Єдиний розв'язок даної крайової задачі задається формулою

$$x(t) = \int_0^2 G(t,s) f(s) ds.$$

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Знайти розв'язки рівнянь, що задовольняють крайовим умовам: **№ 11.1.** $\ddot{x} - x = 2t;$ $x(0) = 0,\ x(1) = -1.$ **№ 11.2.** $\ddot{x} + x = 1;$ $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0.$ **№ 11.3.** $\ddot{x} + x = 2t - \pi;$ $x(0) = 0,\ x(\pi) = 0.$ Розв'язати крайові задачі за допомогою функції Гріна: **№ 11.4.** $\ddot{x} = f(t);$ $x(0) = 0,\ x(1) = 0.$ **№ 11.5.** $\ddot{x} - x = f(t);$ $\dot{x}(0) = 0,\ \dot{x}(2) + x(2) = 0.$ **№ 11.6.** $t^2\ddot{x} + 2t\dot{x} = f(t);$ $x(1) = 0,\ \dot{x}(3) = 0.$	Знайти розв'язки рівнянь, що задовольняють крайовим умовам: **№ 11.7.** $\ddot{x} + x = 1;$ $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 0.$ Розв'язати крайові задачі за допомогою функції Гріна: **№ 11.8.** $\ddot{x} + x = f(t);$ $\dot{x}(0) = 0,\ \ x(\pi) = 0.$ **№ 11.9.** $\ddot{x} + \dot{x} = f(t);$ $x(0) = 0,\ \ \dot{x}(1) = 0.$ **№ 11.10.** $t\ddot{x} - \dot{x} = f(t);$ $\dot{x}(1) = 0,\ x(2) = 0.$ **№ 11.11.** $t^2\ddot{x} - 2x = f(t);$ $x(1) = 0,\ x(2) + 2\dot{x}(2) = 0.$

12. Властивості функції Гріна

Теорія

Крайовою задачею з ***однорідними невідокремленими*** *крайовими умовами* називається задача

$$\begin{cases} a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = f(t), & (12.1) \\ \alpha_0 x(t_0) + \beta_0\dot{x}(t_0) + \gamma_0 x(t_1) + \delta_0\dot{x}(t_1) = 0, & (12.2) \\ \alpha_1 x(t_0) + \beta_1\dot{x}(t_0) + \gamma_1 x(t_1) + \delta_1\dot{x}(t_1) = 0. & (12.3) \end{cases}$$

Тут $[t_0,t_1]$ – скінчений відрізок в $\mathbb{R}$; функції $a_0(t), a_1(t), a_2(t), f(t)$, – неперервні на відрізку $[t_0,t_1]$ та $f(t) \not\equiv 0,\ a_0(t) \neq 0\ \ \forall t \in [t_0,t_1];\ \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j \in \mathbb{R}$ та

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Разом із неоднорідним рівнянням (12.1) розглядатимемо і відповідне однорідне рівняння

$$a_0(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0. \qquad (12.4)$$

Крайова задача (12.1) – (12.3) є узагальненням крайової задачі (11.1) – (11.3).

Припустимо, що для задачі (12.1) – (12.3) існує функція двох змінних $G(t,s)$ із ***властивостями***:

1. При фіксованому $s \in (t_0,t_1)$ на інтервалі $t \in (t_0,s)$ функція $G(t,s)$ є деяким залежним від s розв’язком однорідного рівняння (12.4), а на інтервалі $t \in (s,t_1)$ функція $G(t,s)$ є деяким іншим залежним від s розв’язком однорідного рівняння (12.4).

2. При $t = t_0$ функція $G(t,s)$ задовольняє крайовій умові (12.2), а при $t = t_1$ функція $G(t,s)$ задовольняє крайовій умові (12.3).

3. При $t = s$ функція $G(t,s)$ неперервна $\lim\limits_{t\to s+0} G(t,s) - \lim\limits_{t\to s-0} G(t,s) = 0$.

4. При $t = s$ похідна функції $G(t,s)$ має стрибок

$$\lim_{t\to s+0}\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) - \lim_{t\to s-0}\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \frac{1}{a_0(s)}.$$

Функція $G(t,s)$ називається ***функцією Гріна*** крайової задачі (12.1) – (12.3).

Теорема 12.1. *Якщо у крайової задачі (12.1) – (12.3) існує функція Гріна, то єдиний розв'язок задається формулою*

$$\boxed{x(t)=\int_{t_0}^{t_1} G(t,s) f(s)ds} \;. \tag{12.5}$$

Приклад 12.1. *Побудувати функцію Гріна за її властивостями і розв'язати крайову задачу:*

$$\begin{cases} \ddot{x}+x=f(t), \quad t\in[0,\pi] \\ x(0)=x(\pi), \quad \dot{x}(0)=\dot{x}(\pi). \end{cases}$$

Крок 1. Усі розв'язки однорідного рівняння $\ddot{x}+x=0$ задає формула $x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$. За властивістю ***1*** функція Гріна має вигляд

$$G(t,s)=\begin{cases} \tilde{n}_1(s)\cos t+c_2(s)\sin t, \quad 0\le t\le s\le\pi; \\ \tilde{n}_1(s)\cos t+\tilde{c}_2(s)\sin t, \quad 0\le s\le t\le\pi. \end{cases}$$

Тут $c_1(s)$, $c_2(s)$, $\tilde{c}_1(s)$, $\tilde{c}_2(s)$ – довільні функції від s (сталі відносно t).

Крок 2. За властивістю ***2*** функції Гріна маємо:

$$c_1(s)\cos 0+c_2(s)\sin 0=\tilde{c}_1(s)\cos\pi+\tilde{c}_2(s)\sin\pi,$$
$$-c_1(s)\sin 0+c_2(s)\cos 0=-\tilde{c}_1(s)\sin\pi+\tilde{c}_2(s)\cos\pi.$$

Звідси

$$c_1(s)=-\tilde{c}_1(s), \quad c_2(s)=-\tilde{c}_2(s).$$

Таким чином, функція Гріна має вигляд

$$G(t,s)=\begin{cases} \tilde{n}_1(s)\cos t+c_2(s)\sin t, \quad 0\le t\le s\le\pi; \\ -\tilde{n}_1(s)\cos t-c_2(s)\sin t, \quad 0\le s\le t\le\pi. \end{cases}$$

Крок 3. За властивостями ***3, 4*** функції Гріна маємо:

$$\begin{cases} -\tilde{n}_1(s)\cos s-c_2(s)\sin s-\tilde{n}_1(s)\cos s-c_2(s)\sin s=0, \\ \tilde{n}_1(s)\sin s-c_2(s)\cos s+\tilde{n}_1(s)\sin s-c_2(s)\cos s=1. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} \tilde{n}_1(s)\cos s+c_2(s)\sin s=0, \\ \tilde{n}_1(s)\sin s-c_2(s)\cos s=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Після розв’язання системи рівнянь отримаємо $c_1(s)=\frac{1}{2}\sin s, c_2(s)=-\frac{1}{2}\cos s$.

Отже

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin s\cos t-\frac{1}{2}\cos s\sin t, & 0\le t\le s\le\pi\\ -\frac{1}{2}\sin s\cos t+\frac{1}{2}\cos s\sin t, & 0\le s\le t\le\pi.\end{cases}$$

Звідси

$$G(t,s)=\frac{1}{2}\sin|s-t|,\quad 0\le t,s\le\pi.$$

Крок 4. У даної крайової задачі існує функція Гріна. Отже, у неї існує єдиний розв’язок, який задається формулою

$$x(t)=\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin|s-t|\,f(s)ds.$$

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Побудувати функцію Гріна за її властивостями та розв’язати крайову задачу:	Побудувати функцію Гріна за її властивостями та розв’язати крайову задачу:
№ 12.1. $\ddot{x}=f(t)$; $x(0)=0,\ x(1)=0.$	**№ 12.5.** $\ddot{x}+x=f(t)$; $\dot{x}(0)=0,\ x(\pi)=0.$
№ 12.2. $\ddot{x}-x=f(t)$; $\dot{x}(0)=0,\ \dot{x}(2)+x(2)=0.$	**№ 12.6.** $\ddot{x}+\dot{x}=f(t)$; $x(0)=0,\ \dot{x}(1)=0.$
№ 12.3. $\ddot{x}-x=f(t)$; $x(0)=x(1),\ \dot{x}(0)=\dot{x}(1).$	**№ 12.7.** $t\ddot{x}-\dot{x}=f(t)$; $\dot{x}(1)=0,\ x(2)=0.$
№ 12.4. $t^2\ddot{x}+2t\dot{x}=f(t)$; $x(1)=0,\ \dot{x}(3)=0.$	**№ 12.8.** $t^2\ddot{x}-2x=f(t)$; $x(1)=0,\ x(2)+2\dot{x}(2)=0.$

13. Однорідні системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Теорія

1. *Однорідною системою лінійних диференціальних рівнянь (СЛДР) n-го порядку зі сталими коефіцієнтами* називається система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}, \qquad (13.1)$$

де $a_{jk} \in \mathbb{R},\ 1 \le j,k \le n$. Можна довести, що всі розв'язки СЛДР (13.1) визначені для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Для запису СЛДР (13.1) зручно користуватися векторними та матричними позначеннями. Введемо наступні об'єкти:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

За допомогою цих позначень СЛДР (13.1) записується у вигляді

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \qquad (13.2)$$

Розв'язки $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ СЛДР (13.2) називаються *фундаментальною системою розв'язків (ФСР)*, якщо вони лінійно незалежні, тобто

$$C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t) + \ldots + C_n\mathbf{x}_n(t) \equiv \mathbf{0},\ \ C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0.$$

Теорема 13.1. *Нехай вектор-функції $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ утворюють ФСР однорідного рівняння (13.2). Тоді формула*

$$\boxed{\mathbf{x} = C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t) + \ldots + C_n\mathbf{x}_n(t), \quad \forall C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}} \qquad (13.3)$$

задає усі розв'язки рівняння (13.2).

ФСР рівняння (13.2) будується за власними числами та власними векторами матриці $\mathbf{A}$. При цьому розрізнятимемо випадок дійсних і випадок комплексних власних чисел матриці $\mathbf{A}$. Крім того, слід розрізняти випадки, коли кількість лінійно незалежних власних векторів матриці $\mathbf{A}$ дорівнює n і коли вона менше n.

2. Нехай матриця $\mathbf{A}$ СЛДР (13.2) така, що всі її власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ дійсні та відповідні їм власні вектори $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n$ дійсні та лінійно незалежні. Тоді ФСР рівняння (13.2) утворюють вектор-функції $e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_1,\ e^{\lambda_2 t}\mathbf{h}_2, \ldots, e^{\lambda_n t}\mathbf{h}_n$.

Приклад 13.1. *Розв'язати систему:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 + 5x_2 \\ \dot{x}_3 = -2x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}.$$

Запишемо цю систему у векторно-матричному вигляді

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 5 & -3 \\ -6 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}. \tag{13.4}$$

Крок 1. Знайдемо характеристичний многочлен матриці $\mathbf{A}$:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} -5-\lambda & 5 & -3 \\ -6 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2.$$

Крок 2. Знайдемо власні числа матриці $\mathbf{A}$ (розв'язки характеристичного многочлена):

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Розв'язки цього рівняння:

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2.$$

Крок 3. Знайдемо власний вектор $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ матриці $\mathbf{A}$, відповідний власному значенню $\lambda_1 = -1$. Координати вектора $\mathbf{h}_1$ є нетривіальним розв'язком системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} -5+1 & 5 & -3 \\ -6 & 5+1 & 0 \\ -2 & 1 & 2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким розв'язком є, наприклад,

$$\xi_1 = 3,\ \xi_2 = 3,\ \xi_3 = 1.$$

Крок 4. Знайдемо власний вектор $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix}$ матриці $\mathbf{A}$, відповідний власному значенню $\lambda_2 = 1$. Координати вектора $\mathbf{h}_2$ є нетривіальним розв'язком системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} -5-1 & 5 & -3 \\ -6 & 5-1 & 0 \\ -2 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким розв'язком є, наприклад,

$$\varsigma_1 = 2,\ \varsigma_2 = 3,\ \varsigma_3 = 1.$$

Крок 5. Знайдемо власний вектор $\mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ матриці $\mathbf{A}$, відповідний власному значенню $\lambda_3 = 2$. Координати вектора $\mathbf{h}_3$ є нетривіальним розв'язком системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} -5-2 & 5 & -3 \\ -6 & 5-2 & 0 \\ -2 & 1 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким розв'язком є, наприклад,

$$\eta_1 = 1,\ \eta_2 = 2,\ \eta_3 = 1.$$

Крок 6. ФСР для СЛДР (13.4) має вигляд:

$$\left\{ e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_1,\ e^{\lambda_2 t}\mathbf{h}_2,\ e^{\lambda_3 t}\mathbf{h}_3 \right\} = \left\{ e^{-t}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix},\ e^{t}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\ e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Крок 7. Всі розв'язки СЛДР (13.4) задає формула

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Або, повертаючись до скалярних позначень, здобудемо

$$\begin{cases} x_1 = 3C_1e^{-t} + 2C_2e^{t} + \ C_3e^{2t} \\ x_2 = 3C_1e^{-t} + 3C_2e^{t} + 2C_3e^{2t} \\ x_3 = \ C_1e^{-t} + \ C_2e^{t} + \ C_3e^{2t} \end{cases}, \quad \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

3. Нехай матриця $\mathbf{A}$ СЛДР (13.2) така, що її власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, взагалі кажучи, комплексні, та відповідні їм власні вектори $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n$ лінійно незалежні. Тоді комплекснозначну фундаментальну систему розв'язків (КФСР) рівняння (13.2) утворюють вектор-функції

$$e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_1,\ e^{\lambda_2 t}\mathbf{h}_2, \ldots, e^{\lambda_n t}\mathbf{h}_n \tag{13.5}$$

Користуючись КФСР, можна побудувати дійсну ФСР за допомогою наступної операції. Нехай комплексне число $\lambda_1 = \alpha_1 + \omega_1 i$ є власним числом матриці $\mathbf{A}$, а $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_{m_1}$ – усі комплексні лінійно незалежні власні вектори, відповідні власному значенню λ_1. З дійсності матриці $\mathbf{A}$ випливає, що комплексне число $\overline{\lambda_1} = \alpha_1 - \omega_1 i$ також є власним числом матриці $\mathbf{A}$, а вектори $\overline{\mathbf{h}}_1, \overline{\mathbf{h}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{h}}_{m_1}$ є власними векторами матриці $\mathbf{A}$. Тут $\overline{\mathbf{h}}$ позначає вектор, який одержано з вектора $\mathbf{h}$ за допомогою комплексного спряжіння його координат. Ми завжди будемо вибирати власні вектори так, щоб комплексно-спряженим власним числам відповідали комплексно-спряжені власні вектори. Тому в КФСР (13.5) входять $2m_1$ комплексних вектор–функцій

$$\left\{\begin{matrix} e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_1,\ e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_2, \dots, e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_{m_1} \\ e^{\bar{\lambda}_1 t}\overline{\mathbf{h}}_1,\ e^{\bar{\lambda}_1 t}\overline{\mathbf{h}}_2, \dots, e^{\bar{\lambda}_1 t}\overline{\mathbf{h}}_{m_1} \end{matrix}\right\}. \qquad (13.6)$$

Відокремимо дійсні та уявні частини вектор-функцій в першому рядку, відкинемо вектор-функції другого рядка та здобудемо $2m_1$ дійсних розв'язків рівняння (13.4):

$$\left\{\begin{matrix} \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_1\right), & \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_2\right), \dots, & \operatorname{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_{m_1}\right) \\ \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_1\right), & \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_2\right), \dots, & \operatorname{Im}\left(e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_{m_1}\right) \end{matrix}\right\}. \qquad (13.7)$$

Застосовуючи описану операцію до кожної пари комплексно-спряжених власних чисел, ми перейдемо від КФСР (13.5) до дійсної ФСР.

Приклад 13.2. *Розв'язати систему:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 = 3x_1 + x_3 \end{cases}.$$

Запишемо цю систему у векторно-матричному вигляді:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}}. \qquad (13.8)$$

Крок 1. Знайдемо характеристичний многочлен матриці $\mathbf{A}$:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda + 5.$$

Крок 2. Знайдемо власні числа матриці $\mathbf{A}$ (розв'язки характеристичного многочлена): $\qquad p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 7\lambda + 5 = 0.$

Розв’язки цього рівняння:

$$\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 1 + 2i,\ \ \lambda_3 = 1 - 2i.$$

Крок 3. Знайдемо власний вектор $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ матриці $\mathbf{A}$, відповідний власному значенню $\lambda_1 = 1$. Координати вектора $\mathbf{h}_1$ є нетривіальним розв’язком системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -1 & -1 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 3 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким розв’язком є, наприклад,

$$\xi_1 = 0,\ \ \xi_2 = -1,\ \ \xi_3 = 1\,.$$

Крок 4. Знайдемо власний вектор $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix}$ матриці $\mathbf{A}$, відповідний власному значенню $\lambda_2 = 1 + 2i.$ Координати вектора $\mathbf{h}_2$ є нетривіальним розв’язком системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1-1-2i & -1 & -1 \\ 1 & 1-1-2i & 0 \\ 3 & 0 & 1-1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким розв’язком є, наприклад,

$$\varsigma_1 = 2i,\ \ \varsigma_2 = 1,\ \ \varsigma_3 = 3\,.$$

Крок 5. Знайдемо власний вектор $\mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ матриці $\mathbf{A}$, відповідний власному значенню $\lambda_3 = 1 - 2i.$ Координати вектора $\mathbf{h}_3$ є нетривіальним розв’язком системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1-1+2i & -1 & -1 \\ 1 & 1-1+2i & 0 \\ 3 & 0 & 1-1+2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким розв'язком є, наприклад,

$$\eta_1 = -2i,\ \eta_2 = 1,\ \eta_3 = 3.$$

Відзначимо, що власний вектор $\mathbf{h}_3$ ми обрали таким, що $\mathbf{h}_3 = \overline{\mathbf{h}}_2$.

Крок 6. КФСР для СЛДУ (13.8) має вигляд

$$\left\{e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_1,\ e^{\lambda_2 t}\mathbf{h}_2, e^{\lambda_3 t}\mathbf{h}_3\right\} = \left\{e^t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \ e^{(1-2i)t}\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{e^t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ e^t(\cos 2t + i\sin 2t)\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \ e^t(\cos 2t - i\sin 2t)\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\right\}$$

$$= \left\{e^t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ e^t\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} + ie^t\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix},\ \ e^t\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} - ie^t\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix}\right\}.$$

З цього випливає, що дійсна ФСР СЛДУ (13.8) має вигляд

$$\left\{e^t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ e^t\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix},\ \ e^t\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix}\right\}.$$

Крок 7. Усі розв'язки СЛДУ (13.8) задає формула

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 e^t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ \cos 2t \\ 3\cos 2t \end{pmatrix} + C_3 e^t\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix},\quad \forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Вправ.

Аудиторні	**Домашні**
Розв'язати системи:	Розв'язати системи:
№ 13.1. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_1 + 4x_3 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - 3x_2 - 3x_3\end{cases}.$	**№ 13.5.** $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 + 8x_2 + 12x_3 \\ \dot{x}_3 = 4x_1 - 5x_2 - 7x_3\end{cases}.$
№ 13.2. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 \\ \dot{x}_3 = -2x_1 + 2x_2 - 5x_3\end{cases}.$	**№ 13.6.** $\begin{cases}\dot{x}_1 = -7x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \dot{x}_2 = -12x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ \dot{x}_3 = -6x_1 + 2x_2 + 3x_3\end{cases}.$
№ 13.3. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -2x_1 + 5x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 4x_2\end{cases}.$	**№ 13.7.** $\begin{cases}\dot{x}_1 = -5x_1 - 10x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 7x_2\end{cases}.$
№ 13.4. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 3x_2 - 2x_3\end{cases}.$	**№ 13.8.** $\begin{cases}\dot{x}_1 = 6x_1 - 4x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = 10x_1 - 6x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = -5x_1 + 3x_2 - x_3\end{cases}.$

14. Випадок системи лінійних диференціальних рівнянь із матрицею, що має приєднані вектори

Теорія

Розглянемо однорідну СЛДР

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \qquad (14.1)$$

Тут $\mathbf{A}$ – дійсна $n \times n$ матриця.

Послідовність ненульових n-мірних векторів $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ називається серією матриці $\mathbf{A}$ з власним значенням λ_1**,** якщо

$$\mathbf{A}\mathbf{h}_1 = \lambda_1 \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{h}_2 = \lambda_1 \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1, \ldots, \quad \mathbf{A}\mathbf{h}_m = \lambda_1 \mathbf{h}_m + \mathbf{h}_{m-1}. \qquad (14.2)$$

Серію такого типу ми позначатимемо так:

$$\lambda_1 : \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m.$$

Зрозуміло, що в цій серії λ_1 є власним числом матриці $\mathbf{A}$, вектор $\mathbf{h}_1$ є відповідним λ_1 власним вектором матриці $\mathbf{A}$. Вектори $\mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_m$ називаються *приєднаними до власного вектора* $\mathbf{h}_1$**.**

Якщо $\lambda_1 : \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2,\ldots,\mathbf{h}_m$ є серією дійсної матриці $\mathbf{A}$, то і $\overline{\lambda_1} : \overline{\mathbf{h}}_1, \overline{\mathbf{h}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{h}}_m$ є серією матриці $\mathbf{A}$. Ці дві серії називаються *комплексно-спряженими.*

Теорема 14.1. *Існує n лінійно незалежних векторів, що складаються з однієї або декількох серій відносно дійсної $n\times n$ матриці $\mathbf{A}$. При цьому серії із дійсними власними числами є дійсними, а серії із комплексно-спряженими власними числами є комплексно-спряженими.*

Нехай серії матриці $\mathbf{A}$ системи (14.1) мають вигляд:

$$\begin{cases} \lambda_1 : \mathbf{h}_1^1, \mathbf{h}_2^1,\ldots,\mathbf{h}_{m_1}^1 \\ \lambda_2 : \mathbf{h}_1^2, \mathbf{h}_2^2,\ldots,\mathbf{h}_{m_2}^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_k : \mathbf{h}_1^k, \mathbf{h}_2^k,\ldots,\mathbf{h}_{m_k}^k \end{cases}.$$

Тоді функції

$$\left\{\begin{matrix} e^{\lambda_1 t}\cdot\mathbf{h}_1^1, & e^{\lambda_1 t}\cdot(t\mathbf{h}_1^1+\mathbf{h}_2^1),\ldots, & e^{\lambda_1 t}\cdot\left(\frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}\mathbf{h}_1^1+\frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}\mathbf{h}_2^1+\ldots+\mathbf{h}_{m_1}^1\right) \\ e^{\lambda_2 t}\cdot\mathbf{h}_1^2, & e^{\lambda_2 t}\cdot(t\mathbf{h}_1^2+\mathbf{h}_2^2),\ldots, & e^{\lambda_2 t}\cdot\left(\frac{t^{m_2-1}}{(m_2-1)!}\mathbf{h}_1^2+\frac{t^{m_2-2}}{(m_2-2)!}\mathbf{h}_2^2+\ldots+\mathbf{h}_{m_2}^2\right) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\lambda_k t}\cdot\mathbf{h}_1^k, & e^{\lambda_k t}\cdot(t\mathbf{h}_1^k+\mathbf{h}_2^k),\ldots, & e^{\lambda_k t}\cdot\left(\frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!}\mathbf{h}_1^k+\frac{t^{m_k-2}}{(m_k-2)!}\mathbf{h}_2^k+\ldots+\mathbf{h}_{m_k}^k\right) \end{matrix}\right\} \qquad (14.3)$$

утворюють, взагалі кажучи, комплексну ФСР для СЛДУ (14.1). Дійсна ФСР отримується за аналогією із переходом від (13.6) до (13.7).

Приклад 14.1. *Розв'язати систему*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 17 \\ 1 & -2 & -6 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \qquad (14.4)$$

Крок 1. Знайдемо характеристичний многочлен матриці $\mathbf{A}$:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 8 & 17 \\ 1 & -2-\lambda & -6 \\ -1 & 3 & 7-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1.$$

Крок 2. Знайдемо розв'язки характеристичного рівняння

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0.$$

Розв'язки цього рівняння (власні числа матриці $\mathbf{A}$) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Крок 3. Знайдемо власний вектор $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ матриці $\mathbf{A}$, відповідний власному значенню $\lambda_1 = 1$. Координати вектора $\mathbf{h}_1$ є нетривіальним розв'язком системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} -2-1 & 8 & 17 \\ 1 & -2-1 & -6 \\ -1 & 3 & 7-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що підпростір розв'язків цієї системи є одновимірним. Розв'язком системи є, наприклад, $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = -1$, $\xi_3 = 1$. Таким чином, у матриці $\mathbf{A}$ є тільки одне власне значення $\lambda_1 = 1$, і йому відповідає одновимірний підпростір власних векторів, натягнутий на вектор $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. За теоремою 14.1 для власного вектора $\mathbf{h}_1$ існують два приєднані вектори $\mathbf{h}_2$ та $\mathbf{h}_3$. Знайдемо їх.

Крок 4. Приєднаний вектор $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix}$ задовольняє рівнянню $\mathbf{A}\mathbf{h}_2 = \lambda_1\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1$. У координатному вигляді це рівняння записується так:

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 17 \\ 1 & -2 & -6 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси, через очевидну рівність $\begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix}$, маємо

$$\begin{pmatrix} -2-1 & 8 & 17 \\ 1 & -2-1 & -6 \\ -1 & 3 & 7-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язком цієї системи є, наприклад, $\varsigma_1 = 2,\ \varsigma_2 = -1,\ \varsigma_3 = 1$. Таким чином, $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Крок 5. Приєднаний вектор $\mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ задовольняє рівнянню $\mathbf{A}\mathbf{h}_3 = \lambda_1 \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_2$. У координатному вигляді це рівняння записується так:

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 17 \\ 1 & -2 & -6 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 17 \\ 1 & -3 & -6 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язком цієї системи є, наприклад, $\eta_1 = -1,\ \eta_2 = 2,\ \eta_3 = -1$. Таким чином, $\mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Крок 6. ФСР для СЛДР (14.4) має вигляд:

$$\left\{ e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_1,\ e^{\lambda_1 t}(t\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2),\ e^{\lambda_1 t}\left(\tfrac{t^2}{2}\mathbf{h}_1 + t\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3\right) \right\} =$$

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\; e^t \left[t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right],\; e^t \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \right\}.$$

Крок 7. Всі розв'язки СЛДР задає формула

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left[t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^t \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right],$$

$$\forall C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 14.2. *Розв'язати систему:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{14.5}$$

Крок 1. Знайдемо характеристичний многочлен матриці $\mathbf{A}$:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -3 & 5-\lambda & 1 \\ -3 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27.$$

Крок 2. Знайдемо розв'язки характеристичного многочлена

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 = 0.$$

Розв'язки цього рівняння (власні числа матриці $\mathbf{A}$) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Крок 3. Знайдемо власні вектори матриці $\mathbf{A}$, відповідні власному значенню $\lambda_1 = 3$. Координати власних векторів є лінійно незалежними розв'язками системи рівнянь

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -3 & 5-3 & 1 \\ -3 & 2 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що підпростір розв’язків цієї системи є двовимірним. Лінійно незалежними розв’язками є, наприклад,

$$\xi_1 = 3,\ \xi_2 = 4,\ \xi_3 = 1 \quad \text{та} \quad \varsigma_1 = 1,\ \varsigma_2 = 1,\ \varsigma_3 = 1.$$

Таким чином, у матриці $\mathbf{A}$ є тільки одне власне значення $\lambda_1 = 3$, і йому відповідає двовимірний підпростір власних векторів, натягнутий на власні вектори $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. За теоремою 14.1 існує приєднаний вектор $\mathbf{h}_3$. Знайдемо його.

Крок 4. Вектор $\mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$, приєднаний до власного вектора $\mathbf{h}_2$, повинен задовольняти рівнянню $\mathbf{Ah}_3 = \lambda_1 \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_2$. У координатному вигляді це рівняння записується так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язком цієї системи є, наприклад, $\eta_1 = 0,\ \eta_2 = 0,\ \eta_3 = 1$. Таким чином, $\mathbf{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Крок 5. ФСР для СЛДУ (14.5) має вигляд:

$$\left\{e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_1,\ e^{\lambda_1 t}\mathbf{h}_2,\ e^{\lambda_1 t}(t\mathbf{h}_2+\mathbf{h}_3)\right\}=\left\{e^{3t}\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix},\ \ e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \ e^{3t}\left[t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]\right\}.$$

Крок 6. Всі розв'язки СЛДУ (14.5) задає формула

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^t\left[t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right],\quad \forall C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}.$$

Зауваження. У розглянутих нами прикладах базис із власних і приєднаних векторів будується досить просто. У загальному випадку метод побудови базису з власних і приєднаних векторів описаний, наприклад, у [4].

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Розв'язати системи: **№ 14.1.** $\begin{pmatrix}\dot x_1\\\dot x_2\\\dot x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-6&4&-1\\-4&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$ **№ 14.2.** $\begin{pmatrix}\dot x_1\\\dot x_2\\\dot x_3\\\dot x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-2&4\\0&1&-1&2\\-1&1&0&2\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$	Розв'язати системи: **№ 14.3.** $\begin{pmatrix}\dot x_1\\\dot x_2\\\dot x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&1&5\\-1&-1&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$ **№ 14.4.** $\begin{pmatrix}\dot x_1\\\dot x_2\\\dot x_3\\\dot x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&1&2&9\\-6&3&2&9\\-6&1&4&9\\-3&1&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$

15. Неоднорідні системи лінійних диференціальних рівнянь

Теорія

1. Розглянемо неоднорідну СЛДР зі сталими коефіцієнтами:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}. \tag{15.1}$$

Тут $\mathbf{A}$ – дійсна $n\times n$ матриця. Відмінна від тотожного нуля неперервна на інтервалі $(t_0,t_1)\subset\mathbb{R}$ вектор-функція $\mathbf{f}$ має вигляд:

$$\mathbf{f}=\begin{pmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}.$$

Можна довести, що всі розв'язки рівняння (15.1) визначені для всіх $t\in(t_0,t_1)$. Разом із неоднорідною СЛДР (15.1) ми розглядатимемо і відповідну однорідну СЛДР

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{15.2}$$

Теорема 15.1. *Нехай вектор-функції* $\mathbf{x}_1(t),\mathbf{x}_2(t),\ldots,\mathbf{x}_n(t)$ утворюють ФСР однорідної СЛДР (15.2), а вектор-функція $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ *є частинним розв'язком неоднорідної СЛДР (15.1). Тоді формула*

$$\boxed{\mathbf{x}=C_1\mathbf{x}_1(t)+C_2\mathbf{x}_2(t)+\ldots+C_n\mathbf{x}_n(t)+\tilde{\mathbf{x}}(t),\quad \forall C_1,C_2,\ldots,C_n\in\mathbb{R}} \tag{15.3}$$

задає усі розв'язки (загальний розв'язок) неоднорідної СЛДР (15.1).

Для знаходження частинного розв'язку рівняння (15.1) застосовується метод *варіації сталих*.

Теорема 15.2. *Нехай вектор-функції*

$$\mathbf{x}_1(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t)\\ x_{21}(t)\\ \vdots\\ x_{n1}(t)\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}_2(t)=\begin{pmatrix} x_{12}(t)\\ x_{22}(t)\\ \vdots\\ x_{n2}(t)\end{pmatrix},\ldots,\mathbf{x}_n(t)=\begin{pmatrix} x_{1n}(t)\\ x_{2n}(t)\\ \vdots\\ x_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

утворюють ФСР однорідною СЛДР (15.2). Тоді

1. *система лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$
\begin{cases}
\tilde{N}_1(t)x_{11}(t) + \tilde{N}_2(t)x_{12}(t) + \ldots + \tilde{N}_n(t)x_{1n}(t) = f_1(t) \\
\tilde{N}_1(t)x_{21}(t) + \tilde{N}_2(t)x_{22}(t) + \ldots + \tilde{N}_n(t)x_{2n}(t) = f_2(t) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tilde{N}_1(t)x_{n1}(t) + \tilde{N}_2(t)x_{n2}(t) + \ldots + \tilde{N}_n(t)x_{nn}(t) = f_n(t)
\end{cases}
\tag{15.4}
$$

має єдиний розв'язок у класі неперервних на інтервалі (t_0, t_1) *функцій* $\dot{C}_1(t), \dot{C}_2(t), \ldots, \dot{C}_n(t)$.

2. *Нехай функції* $C_1(t), C_2(t), \ldots, C_n(t)$ *позначають деякі первинні для функцій* $\dot{C}_1(t), \dot{C}_2(t), \ldots, \dot{C}_n(t)$. *Тоді вектор-функція*

$$
\boxed{\tilde{\mathbf{x}} = C_1(t)\mathbf{x}_1(t) + C_2(t)\mathbf{x}_2(t) + \ldots + C_n(t)\mathbf{x}_n(t)}
\tag{15.5}
$$

є частинним розв'язком неоднорідної СЛДР (15.1).

Приклад 15.1. *Розв'язати СЛДР:*

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t^2} + \ln t \end{pmatrix}, \quad t > 0.
\tag{15.6}
$$

Крок 1. ФСР однорідної СЛДР

$$
\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
$$

утворюють вектор-функції $\left\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Тому всі розв'язки однорідної СЛДР задає формула

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
$$

Крок 2. Методом варіації сталих знайдемо частинний розв'язок неоднорідної СЛДР (15.6). Система (15.4) має вигляд:

$$
\begin{cases}
\dot{C}_1(t)e^t + \dot{C}_2(t)e^{-t} = 0 \\
\dot{C}_1(t)e^t - \dot{C}_2(t)e^{-t} = \frac{1}{t^2} + \ln t.
\end{cases}
$$

Звідси

$$\dot{C}_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right), \quad \dot{C}_2(t) = -\frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t^2} + \ln t\right).$$

Інтегруючи, отримаємо

$$C_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\left(\frac{1}{t} + \ln t\right), \quad C_2(t) = \frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{1}{t} - \ln t\right).$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \ln t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - \ln t\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ln t \\ -\dfrac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Усі розв'язки СЛДР (15.6) задає формула

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ln t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Розглянемо неоднорідну СЛДР зі сталими коефіцієнтами та *правою частиною спеціального вигляду*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{P}(t)e^{\sigma t}. \tag{15.7}$$

Тут $\mathbf{A}$ – дійсна $n \times n$ матриця, $\sigma \in \mathbb{C}$ – числовий параметр, що називається *контрольним числом правої частини СЛДР* (15.7), та $\mathbf{P}(t)$ – векторний многочлен вигляду

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix},$$

компоненти якого $P_j(t)$, $1 \le j \le n$ є многочленами степеня m_j. Можна довести, що всі розв'язки СЛДР (15.7) визначені для усіх $t \in \mathbb{R}$. Частинний розв'язок СЛДР (15.7) можна знайти більш простим способом, ніж метод варіації сталих.

Теорема 15.3. *Нехай* $m = \max m_j$ *є максимальний степінь многочленів* $P_j(t)$, r *- кратність контрольного числа* σ *як власного значення матриці* $\mathbf{A}$ *(якщо* σ *не є власним значенням матриці* $\mathbf{A}$*, то вважаємо* $r = 0$*). Тоді у СЛДР (15.7) існує частинний розв'язок вигляду*

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}(t)e^{\sigma t}. \qquad (15.8)$$

Тут $\mathbf{Q}(t)$ *– векторний многочлен вигляду*

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{pmatrix},$$

причому $Q_j(t),\ 1 \le j \le n$ *многочлени степеня не вище* $m + r$*. Коефіцієнти цих многочленів здобуваються методом невизначених коефіцієнтів.*

Приклад 15.2. *Знайти частинний розв'язок СЛДУ*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}. \qquad (15.9)$$

Контрольне число $\sigma = -2$ не є власним значенням матриці системи. Тому $r = 0$. Елементи векторного многочлена $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ є многочленами нульового степеня. Тому у рівняння (15.9) існує частинний розв'язок наступного вигляду:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Підставляючи цей розв'язок у СЛДР (15.9), отримаємо систему рівнянь для визначення a та b:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

З цього випливає, що $a = 0$ та $b = 1$. Отже, вектор-функція

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

є частинним розв'язком СЛДР (15.9).

3. Розглянемо неоднорідну СЛДР зі сталими коефіцієнтами наступного вигляду:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{P}(t)e^{\alpha t}\cos\omega t. \tag{15.10}$$

Тут $\mathbf{A}$ – дійсна $n \times n$ матриця, $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ – числові параметри, та $\mathbf{P}(t)$ – векторний многочлен у вигляді

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix},$$

компоненти якого $P_j(t),\ 1 \le j \le n$ є дійсними многочленами степеня m_j. Можна довести, що всі розв'язки СЛДР (15.10) визначені для всіх $t \in \mathbb{R}$. Частинний розв'язок СЛДР (15.7) можна знайти *методом комплексифікації*. Із цією метою розглянемо СЛДР

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{P}(t)e^{\alpha t}\sin\omega t. \tag{15.11}$$

Помножимо обидві частини рівняння (15.11) на i та складемо рівняння (15.10) та (15.11). Отримаємо *комплексифіковане* рівняння

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{P}(t)e^{\sigma t}, \quad \sigma = \alpha + i\omega. \tag{15.12}$$

Частинний розв'язок $\tilde{\mathbf{z}}$ комплексифікованого рівняння (15.12) можна знайти за допомогою теореми 15.3. Тоді вектор-функції $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathrm{Re}\,\tilde{\mathbf{z}}(t)$ та $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathrm{Re}\,\tilde{\mathbf{z}}(t)$ є частинними розв'язками рівнянь (15.10) та (15.11) відповідно.

Приклад 15.3. *Знайти частинний розв'язок СЛДР*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} e^t \cos t.$$

Комплексифікована СЛДР має вигляд:

$$\begin{pmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ \dot{z}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -5\end{pmatrix}e^{(1+i)t}.$$

Контрольне число $\sigma=1+i$ не є власним числом матриці системи. Тому $r=0$, і у системи існує частинний розв'язок у вигляді:

$$\begin{pmatrix}\tilde{z}_1\\ \tilde{z}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}e^{(1+i)t}.$$

Підставляючи частинний розв'язок у комплексифіковане рівняння, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно a та b:

$$\begin{pmatrix}-1+i & 1\\ 1 & -1+i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -5\end{pmatrix}.$$

З цього випливає, що $a=-1+2i$ та $b=1+3i$. Тому

$$\begin{pmatrix}\tilde{z}_1\\ \tilde{z}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2i\\ 1+3i\end{pmatrix}e^{(1+i)t}=\begin{pmatrix}-1+2i\\ 1+3i\end{pmatrix}e^{t}(\cos t+i\sin t)$$
$$=e^{t}\begin{pmatrix}-\cos t-2\sin t\\ \cos t-3\sin t\end{pmatrix}+ie^{t}\begin{pmatrix}2\cos t-\sin t\\ 3\cos t+\sin t\end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix}=\mathrm{Re}\begin{pmatrix}\tilde{z}_1\\ \tilde{z}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{t}(-\cos t-2\sin t)\\ e^{t}(\cos t-3\sin t)\end{pmatrix}.$$

Зауваження. Нехай дано неоднорідне рівняння вигляду

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}_1+\mathbf{f}_2+\cdots+\mathbf{f}_k}, \tag{15.13}$$

і вектор-функції $\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2\ldots,\tilde{\mathbf{x}}_k$ задовольняють рівнянням

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}_j},\ 1\le j\le k.$$

Тоді вектор-функція $\tilde{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{x}}_1+\tilde{\mathbf{x}}_2+\ldots+\tilde{\mathbf{x}}_k$ є розв'язком рівняння (15.13).

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Розв'язати системи:	Розв'язати системи:
№ 15.1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \operatorname{tg} t \end{cases}.$	**№ 15.5.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + 4x_2 + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases}.$
№ 15.2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 - 2x_2 + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ \dot{x}_2 = 6x_1 + 3x_2 - \dfrac{3}{e^t - 1} \end{cases}.$	**№ 15.6.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + \dfrac{1}{\cos t} \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}.$
№ 15.3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + 16te^t \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}.$	**№ 15.7.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_1 - 3x_2 + 2e^{3t} \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 5e^{-t} \end{cases}.$
№ 15.4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + 2\sin t \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}.$	**№ 15.8.** $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - 3x_2 + \sin t \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 - 2\cos t \end{cases}.$

16. Розв'язання систем диференціальних рівнянь методом виключень

Теорія

Шляхом виключення невідомих функцій систему диференціальних рівнянь можна звести до рівняння вищого порядку для однієї невідомої функції. Цей метод зручний для розв'язку лише нескладних систем. Проілюструємо метод виключень на прикладах.

Приклад 16.1. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}.$$

Диференціюючи перше з рівнянь по t, отримаємо $\ddot{x} = \dot{y}$. Звідси та з другого рівняння випливає, що $\ddot{x} + x = 0$. Таким чином,

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{16.1}$$

Звідси та з першого рівняння маємо:

$$y = \dot{x} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{16.2}$$

Формули (16.1) та (16.2) задають усі розв'язки нашої системи.

Приклад 16.2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 1 \\ \dot{y} = -x + 2e^t \end{cases}.$$

З першого рівняння маємо $y = \dot{x} - 1$. Підставляючи в друге рівняння, отримаємо $\ddot{x} + x = 2e^t$. Розв'язок цього рівняння:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + e^t, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Звідси

$$y = \dot{x} - 1 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + e^t - 1.$$

Приклад 16.3. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 + \sin t \\ \dot{y} = \frac{x}{2y} \end{cases}.$$

Диференціюємо по t обидві частини першого з рівнянь системи. Здобудемо

$$\ddot{x} = 2y\dot{y} + \cos t. \tag{16.3}$$

З другого рівняння системи здобудемо $2y\dot{y} = x$. Підставимо цей вираз у (16.3). Здобудемо $\ddot{x} - x = \cos t$. Усі розв'язки цього рівняння мають вигляд:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \tfrac{1}{2} \cos t, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Звідси та з першого рівняння системи знаходимо:

$$y^2 = \dot{x} - \sin t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \tfrac{1}{2} \sin t.$$

Вправи

Аудиторні	Домашні
Методом виключень розв'язати системи:	Методом виключень розв'язати системи:
№ 16.1. $\begin{cases} \dot{x}+x-8y=0 \\ \dot{y}-x-y=0 \end{cases}$.	**№ 16.6.** $\begin{cases} \dot{x}=x+y \\ \dot{y}=3y-2x \end{cases}$.
№ 16.2. $\begin{cases} \dot{x}=3x-y \\ \dot{y}=4x-y \end{cases}$.	**№ 16.7.** $\begin{cases} \dot{x}-5x-3y=0 \\ \dot{y}+3x+y=0 \end{cases}$.
№ 16.3. $\begin{cases} \ddot{x}=2y \\ \ddot{y}=-2x \end{cases}$.	**№ 16.8.** $\begin{cases} \ddot{x}=3x+4y \\ \ddot{y}=-x-y \end{cases}$.
№ 16.4. $\begin{cases} \dot{x}=y+2e^t \\ \dot{y}=x+t^2 \end{cases}$.	**№ 16.9.** $\begin{cases} \dot{x}=3x+2y+4e^{5t} \\ \dot{y}=x+2y \end{cases}$
№ 16.5. $\begin{cases} \dot{x}=2x+y+e^t \\ \dot{y}=-2x+2t \end{cases}$.	**№16.10.** $\begin{cases} \dot{x}=2x-4y+4e^{-2t} \\ \dot{y}=2x-2y \end{cases}$

17. Метод перших інтегралів

Теорія

1. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \end{cases}, \qquad (17.1)$$

де $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – функції неперервні та диференційовані в області $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Набір неперервних та диференційованих на інтервалі $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ функцій $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ називається *розв'язком* системи (17.1), якщо

- точка $(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \Omega$ при всіх $t \in (\alpha, \beta)$;
- $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)) \end{cases}$, $\quad \forall t \in (\alpha, \beta)$.

Неперервна та диференційована функція $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ називається *першим інтегралом* системи рівнянь (17.1), якщо для будь-якого розв'язку $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$, визначеного на інтервалі $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, існує стала $C \in \mathbb{R}$ така, що

$$\psi(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \equiv C, \forall t \in (\alpha, \beta).$$

Теорема 17.1. *Для того, щоб неперервна та диференційована функція* $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ *була першим інтегралом системи (17.1), необхідно й достатньо, щоб у області* Ω *виконувалася рівність*

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x_1, x_2, \ldots x_n) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \cdot f_j(t, x_1, x_2, \ldots x_n) \equiv 0.$$

Перші інтеграли $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ системи (17.1) називаються *незалежними*, якщо в області Ω ранг матриці

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)}{D(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_k}{\partial t} & \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

дорівнює k. Якщо відомі k незалежних перших інтегралів системи (17.1), то з їх допомогою можна виключити з системи (17.1) k функцій і отримати систему з $n-k$ рівняннями.

Приклад 17.1. Дана система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{t} \\ \dot{y} = \frac{2x^2 - ty}{t^2} \end{cases}.$$

Показати, що для цієї системи функції $\psi_1 = tx$ та $\psi_2 = ty + x^2$ є незалежними першими інтегралами.

Маємо:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x} f_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial y} f_2 = x + t\left(-\frac{x}{t}\right) = 0.$$

І далі

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} f_1 + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} f_2 = y + 2x\left(-\frac{x}{t}\right) + t\,\frac{2x^2 - ty}{t^2} = 0.$$

Таким чином, функції $\psi_1 = tx$ та $\psi_2 = ty + x^2$ є першими інтегралами нашої системи. Доведемо їх незалежність. Дійсно

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(t, x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} x & t & 0 \\ y & 2x & t \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці дорівнює 2. Отже, перші інтеграли ψ_1 та ψ_2 – незалежні.

Приклад 17.2. Дана система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^2 + \sin x \\ \dot{y} = -y\cos x. \end{cases}$$

Знайти перший інтеграл цієї системи.

Помножимо перше рівняння на $y\cos x$, а друге – на $(-y^2 + \sin x)$ та складемо набуті рівності. Отримаємо:

$$(y\cos x)\dot{x} + (-y^2 + \sin x)\dot{y} = 0.$$

Останню рівність можна записати у вигляді:

$$\frac{d}{dt}\left(y\sin x - \frac{y^3}{3}\right) = 0.$$

Звідси знайдемо перший інтеграл:

$$y\sin x - \frac{y^3}{3} = C.$$

2. Перші інтеграли існують не завжди, і не існує загального методу їх знаходження. Проте часто буває корисним метод виділення інтегрованих комбінацій. Метод спирається на той факт, що систему вигляду (17.1) завжди можна записати в *симетричній формі* (див. [2]):

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\dots x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\dots x_n)}=\cdots\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,\dots x_n)}. \qquad (17.2)$$

При знаходженні інтегрованих комбінацій часто буває корисною наступна властивість рівних дробів: якщо дані рівні дроби

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

та довільні числа $k_1, k_2,\dots,k_n$, то

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\cdots+k_nb_n}. \qquad (17.3)$$

Якщо в останній рівності знаменник перетвориться на нуль, то і чисельник теж повинен перетворитися на нуль. Розглянемо приклади.

Приклад 17.3. Знайти два незалежні перші інтеграли системи

$$\frac{dx}{2z-y}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

Інтегруючи рівність $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$, отримаємо перший інтеграл:

$$\frac{y}{z}=C_1.$$

За допомогою (17.3) утворимо інтегровану комбінацію:

$$\frac{dx}{2z-y}=\frac{2dz-dy}{2z-y}.$$

Звідси $d(x+y-2z)=0$. Отже, ще один перший інтеграл має вигляд $x+y-2z=C_2$. Очевидно, що знайдені перші інтеграли незалежні.

Приклад 17.4. Знайти два незалежні перші інтеграли системи

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy}.$$

Із співвідношення $\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}$ знаходимо перший інтеграл $x=C_1y$. За допомогою (17.3) утворюємо інтегровану комбінацію $\frac{ydx+xdy}{yxz+xyz}=\frac{dz}{xy}$. Звідси

$d(xy-z^2)=0$. Отже, ще один перший інтеграл має вигляд $xy-z^2=C_2$. Очевидно, що знайдені перші інтеграли незалежні.

Приклад 17.5. Знайти два незалежні перші інтеграли системи

$$\frac{dx}{2xy}=\frac{dy}{y^2-x^2-z^2}=\frac{dz}{2yz}.$$

Прирівнюючи перше та третє співвідношення, здобудемо $\frac{dx}{2xy}=\frac{dz}{2yz}$. Скорочуючи на $2y$ та виконуючи інтегрування, знаходимо перший інтеграл $x=C_1z$. За допомогою (17.3) утворюємо інтегровану комбінацію:

$$\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{2x(2xy)+2y(y^2-x^2-z^2)+2z(2yz)}=\frac{dz}{2yz}.$$

Звідси $\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{y^2+x^2+z^2}=\frac{dz}{z}$. Отже, ще один перший інтеграл має вигляд $y^2+x^2+z^2=C_2z$. Очевидно, що знайдені перші інтеграли незалежні.

Приклад 17.6. Знайти два незалежні перші інтеграли системи

$$\frac{dx}{x+y-xy^2}=\frac{dy}{x^2y-x-y}=\frac{dz}{y^2-x^2}.$$

За допомогою (17.3) утворюємо інтегровану комбінацію:

$$\frac{2xdx+2ydy}{2x(x+y-xy^2)+2y(x^2y-x-y)}=\frac{dz}{y^2-x^2}.$$

Звідси $\frac{d(x^2+y^2)}{2(x^2-y^2)}=\frac{dz}{-(x^2-y^2)}$. І далі $d(x^2+y^2+2z)=0$. Звідси знаходимо перший інтеграл $x^2+y^2+2z=C_1$.

За допомогою (17.3) утворюємо ще одну інтегровану комбінацію:

$$\frac{ydx+xdy}{y(x+y-xy^2)+x(x^2y-x-y)}=\frac{dz}{y^2-x^2}.$$

Звідси маємо $\frac{d(xy)}{(y^2-x^2)(1-xy)}=\frac{dz}{y^2-x^2}$. Отже, ще один перший інтеграл має вигляд $\ln|1-xy|+z=C_2$. Очевидно, що знайдені перші інтеграли незалежні.

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Знайти перші інтеграли систем:	Знайти перші інтеграли систем:
№ 17.1. $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{z}$.	**№ 17.6.** $\frac{dx}{y-u}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{u-y}=\frac{du}{x-z}$.
№ 17.2. $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}$.	**№ 17.7.** $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{y}$.
№ 17.3. $\frac{dx}{y-x}=\frac{dy}{x+y+z}=\frac{dz}{x-y}$.	**№ 17.8.** $\frac{dx}{z^2-y^2}=\frac{dy}{z}=-\frac{dz}{y}$.
№ 17.4. $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{u}=\frac{dz}{x}=\frac{du}{y}$.	**№ 17.9.** $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy+z}$.
№ 17.5. $\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$.	**№ 17.10.** $\frac{dx}{x+y^2+z^2}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$.

18. Варіаційне числення

Теорія

1. Символом $C^1[a,b]$ позначимо клас неперервних та диференційованих функцій $x:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Стандартні операції складання двох функцій та множення функцій на дійсні числа задають в $C^1[a,b]$ структуру лінійного простору над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Визначимо норму для функції $x\in C^1[a,b]$ за формулою $\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|+\max\limits_{t\in[a,b]}|\dot{x}(t)|$.

У просторі $C^1[a,b]$ розглянемо лінійний підпростір:

$$\overset{\circ}{W}[a,b]=\left\{x\in C^1[a,b]:x(a)=x(b)=0\right\}$$

і лінійний многовид:

$$W[a,b]=\left\{x\in C^1[a,b]:x(a)=A,\,x(b)=B\right\}.$$

Тут A та B фіксовані дійсні числа.

Розглянемо ***інтегральний функціонал*** $F:W[a,b]\to\mathbb{R}$, який задається формулою

$$F[x(t)]=\int_a^b L(t,x,\dot{x})dt,\quad \forall x\in W[a,b]. \tag{18.1}$$

Тут $L(u,v,w)$ – двічі неперервно диференційована функція, що називається ***лагранжіаном*** інтегрального функціонала (18.1).

Говорять, що на функції $x\in W[a,b]$ інтегральний функціонал (18.1) досягає *локального максимуму* (відповідно *локального мінімуму*), якщо існує число $\delta>0$, таке, що для всіх функцій $h\in \overset{\circ}{W}[a,b],\ \|h\|<\delta$ виконується нерівність $F[x(t)]\ge F[x(t)+h(t)]$ (відповідно $F[x(t)]\le F[x(t)+h(t)]$). Локальні мінімуми та локальні максимуми *називаються локальними екстремумами.*

Теорема 18.1. *Нехай на функції* $x\in W[a,b]$ *функціонал (18.1) досягає локального екстремуму. Тоді функція* x *задовольняє рівнянню* ***Ейлера-Лагранжа:***

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L(t,x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L(t,x,\dot{x})}{\partial x}=0}. \tag{18.2}$$

Розв’язки рівняння Ейлера-Лагранжа (18.2) називаються *екстремалями* функціонала (18.1).

Приклад 18.1. Знайти екстремалі функціонала

$$\begin{cases} F[x(t)]=\int_0^1(\dot{x}^2-12tx)dt \\ x(0)=0,\quad x(1)=1. \end{cases}$$

У нашому випадку лагранжіан $L(t,x,\dot{x})=\dot{x}^2-12tx$.

Тому рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд: $\frac{d}{dt}\frac{\partial(\dot{x}^2-12tx)}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial(\dot{x}^2-12tx)}{\partial x}=0$.

Звідси маємо $\ddot{x}+6t=0$. Всі розв'язки цього рівняння задає формула

$$x=C_1+C_2t-t^3.$$

Далі, скориставшись крайовими умовами, здобудемо:

$$\begin{cases} C_1+C_2\cdot 0-0^3=0 \\ C_1+C_2\cdot 1-1^3=1 \end{cases}.$$

З цього випливає, що $C_1=0,\ C_2=2$. Таким чином, єдиною екстремаллю нашого функціонала є функція $x=2t-t^3$.

Приклад 18.2. Знайти екстремалі функціонала

$$\begin{cases} F[x(t)]=\int\limits_a^b(\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2})dt, \quad m>0, k>0 \\ x(a)=A, \quad x(b)=B \end{cases}.$$

У нашому випадку лагранжіан $L(t,x,\dot{x})=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2}$. Тому рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд: $\frac{d}{dt}\frac{\partial(\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2})}{\partial\dot{x}}-\frac{\partial(\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{kx^2}{2})}{\partial x}=0$. Звідси маємо: $m\ddot{x}+kx=0$. Таким чином, усі екстремалі даного функціонала задає формула $x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t,\ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}},\ \forall C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

2. Нехай у просторі $C^1[a,b]$ зафіксовані лінійні многовиди $W_1[a,b],\ W_2[a,b],\dots,W_n[a,b]$. Розглянемо ***інтегральний функціонал***, залежний від n функцій $x_j\in W_j[a,b],\ 1\le j\le n$:

$$F[x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)]=\int\limits_a^b L(t,x_1,x_2,\dots,x_n,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dots,\dot{x}_n)dt. \tag{18.3}$$

Тут $L(u,v_1,v_2,\dots,v_n,w_1,w_2,\dots,w_n)$ – двічі неперервно диференційована функція, яка називається ***лагранжіаном*** інтегрального функціонала (18.3).

Говорять, що на функціях $x_j\in W_j[a,b],\ 1\le j\le n$ інтегральний функціонал (18.3) досягає свого *локального максимуму* (відповідно *локального мінімуму*), якщо існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх функцій $h_j \in \overset{\circ}{W}[a,b]$, $\|h_j\| < \delta$ виконується нерівність:

$$F[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] \geq F[x_1(t) + h_1(t), x_2(t) + h_2(t), \ldots, x_n(t) + h_n(t)]$$

$\big($відповідно $F[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)] \leq F[x_1(t) + h_1(t), x_2(t) + h_2(t), \ldots, x_n(t) + h_n(t)]\big)$.

Локальні мінімуми та локальні максимуми називаються *локальними екстремумами.*

Теорема 18.2. *Нехай на функціях* $x_j \in W_j[a,b]$, $1 \leq j \leq n$ *інтегральний функціонал (18.3) досягає локального екстремуму. Тоді ці функції задовольняють системі рівнянь* ***Ейлера-Лагранжа:***

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)}{\partial \dot{x}_1} - \dfrac{\partial L(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)}{\partial \dot{x}_2} - \dfrac{\partial L(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)}{\partial x_2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)}{\partial \dot{x}_n} - \dfrac{\partial L(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)}{\partial x_n} = 0 \end{cases}. \qquad (18.4)$$

Розв'язки системи рівнянь Ейлера-Лагранжа (18.4) називаються *екстремалями* функціонала (18.3).

Приклад 18.3. Знайти екстремалі функціонала

$$\begin{cases} F[x_1(t), x_2(t)] = \int\limits_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)dt \\ x_1(0) = 0,\ x_1(\pi/2) = 1, \quad x_2(0) = 0,\ x_2(\pi/2) = -1 \end{cases}.$$

У нашому випадку лагранжіан $L(t, x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2$. Тому система рівнянь Ейлера-Лагранжа має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2\right)}{\partial \dot{x}_1} - \dfrac{\partial\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2\right)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2\right)}{\partial \dot{x}_2} - \dfrac{\partial\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2\right)}{\partial x_2} = 0 \end{cases}.$$

Звідси маємо:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 - x_1 = 0 \end{cases}.$$

З першого рівняння маємо $\ddot{x}_2 = \ddddot{x}_1$. Звідси та з другого рівняння маємо $\ddddot{x}_1 - x_1 = 0$. Всі розв'язки цього лінійного рівняння задаються формулою $x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$. Звідси та з першого рівняння системи маємо $x_2 = \ddot{x}_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t$. Для визначення констант скористаємося крайовими умовами. Отримаємо:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^{-0} + C_3 \cos 0 + C_4 \sin 0 = 0 \\ C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} + C_3 \cos \pi/2 + C_4 \sin \pi/2 = 1 \\ C_1 e^0 + C_2 e^{-0} - C_3 \cos 0 - C_4 \sin 0 = 0 \\ C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} - C_3 \cos \pi/2 - C_4 \sin \pi/2 = -1 \end{cases}.$$

Звідси $C_1 = C_2 = C_3 = 0, C_4 = 1$. Таким чином, екстремалями функціонала є функції $x_1 = \sin t,\ x_2 = -\sin t$.

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Знайти екстремалі функціоналів:	Знайти екстремалі функціоналів:
№ 18.1. $\begin{cases} F[x(t)] = \int\limits_0^1 (\dot{x}^2 + tx)dt \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}.$	**№ 18.8.** $\begin{cases} F[x(t)] = \int\limits_0^\pi [4x\cos t + \dot{x}^2 - x^2]dt \\ x(0) = x(\pi) = 0 \end{cases}.$
№ 18.2. $\begin{cases} F[x(t)] = \int\limits_1^e (2x - t^2\dot{x}^2)dt \\ x(1) = e; x(e) = 0 \end{cases}.$	**№ 18.9.** $\begin{cases} F[x(t)] = \int\limits_0^1 [\dot{x}^2 + x\dot{x} + 12tx]dt \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}.$
№ 18.3. $\begin{cases} F[x(t)] = \int\limits_0^1 (e^x + t\dot{x})dt \\ x(0) = 0; x(1) = 1 \end{cases}.$	**№ 18.10.** $\begin{cases} F[x(t)] = \int\limits_0^1 [\dot{x}^2 + x^2 + tx]dt \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}.$

Аудиторні	Домашні
Знайти екстремалі функціоналів:	Знайти екстремалі функціоналів:
№ 18.4. $\begin{cases} F[x(t)] = \int_0^1 \{\dot{x}^2 + x^2 + 6x\,\mathrm{sh}\,2t\}dt \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}.$	**№ 18.11.** $\begin{cases} F[x(t)] = \int_0^1 \{\dot{x}^2 + x^2 + 2xe^t\}dt \\ x(0) = 0; \quad x(1) = \dfrac{1}{2e} \end{cases}.$
№ 18.5. $\begin{cases} F[x(t)] = \int_a^b \{\dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin t\}dt \\ x(a) = A; \quad x(b) = B \end{cases}.$	**№ 18.12.** $\begin{cases} F[x(t)] = \int_0^{\ln 2} [\dot{x}^2 + 3x^2]e^{2t}dt \\ x(0) = 0; \quad x(\ln 2) = \dfrac{15}{8} \end{cases}.$
№ 18.6. $\begin{cases} F[x_1(t),\, x_2(t)] = \int_0^{\pi/2} (\dot{x}_1\dot{x}_2 - x_1x_2)dt \\ x_1(0) = 0, x_1(\pi/2) = 1, \\ x_2(0) = 0, x_2(\pi/2) = -1 \end{cases}.$	**№ 18.13.** $\begin{cases} F[x_1(t),\, x_2(t)] = \int_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + x_1x_2)dt \\ x_1(0) = 1, x_1(1) = e, \quad x_2(0) = 1, x_2(1) = \frac{1}{e} \end{cases}.$
№18.7 $\begin{cases} F[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^1 (\dot{x}_1\dot{x}_2 + 6tx_1 + 12t^2x_2)dt \\ x_1(0) = 0, x_1(1) = 1, x_2(0) = 0, x_2(1) = 1 \end{cases}.$	**№18.14.** $\begin{cases} F[x_1(t),\, x_2(t)] = \int_0^1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1)dt \\ x_1(0) = 1, x_1(1) = \frac{3}{2}, \quad x_2(0) = 1, x_2(1) = 1 \end{cases}.$

19. Варіаційний принцип у класичній механіці

У класичній механіці вивчають системи, характеристики яких змінюються із часом. Розглянемо основні властивості, що є характерними для систем класичної механіки.

А) *Детермінованість*. Ця властивість означає, що за станом механічної системи у деякий фіксований момент часу t_0 можна вказати її стан у будь-який інший момент часу t.

B) *Скінченномірність.* Ця властивість означає, що стан механічної системи в будь-який момент часу t описується скінченним набором узагальнених координат $q_1, q_2, \dots, q_n$.

C) *Диференційованість.* Система класичної механіки змінюється з часом. Тому узагальнені координати є функціями часу:

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t).$$

Диференційованість означає, що узагальнені координати є диференційованими функціями часу.

D) Для системи класичної механіки визначена *кінетична енергія*, що є додатньо означеною квадратичною формою відносно узагальнених швидкостей:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a(q_1, q_2, \dots, q_n)\dot{q}_i \dot{q}_j.$$

E) Для систем класичної механіки визначена *потенційна енергія*, що є функцією узагальнених координат:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Лагранжіаном класичної механічної системи називається різниця між кінетичною та потенційною енергією:

$$L = T - U.$$

Нехай при зміні часу від $t = t_0$ до $t = t_1$ класична механічна система перейшла зі стану $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$ у стан $q_1^1, q_2^1, \dots, q_n^1$. Варіаційний принцип класичної механіки стверджує, що перехід зі стану $q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0$ у стан $q_1^1, q_2^1, \dots, q_n^1$ відбувається по екстремалям функціонала дії

$$F[q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) dt.$$

Інакше кажучи, еволюція класичної механічної системи описується системою диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q_1, q_2,\ldots,q_n,\dot{q}_1, \dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L(q_1, q_2,\ldots,q_n,\dot{q}_1, \dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n)}{\partial q_1} = 0 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q_1, q_2,\ldots,q_n,\dot{q}_1, \dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L(q_1, q_2,\ldots,q_n,\dot{q}_1, \dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n)}{\partial q_2} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q_1, q_2,\ldots,q_n,\dot{q}_1, \dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n)}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L(q_1, q_2,\ldots,q_n,\dot{q}_1, \dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n)}{\partial q_n} = 0
\end{cases}.
$$

Приклад 19.1. *Описати можливі рухи матеріальної точки маси m у тривимірному просторі, якщо на неї не діють ніякі сили.*

У якості узагальнених координат оберемо декартові координати у тривимірному просторі. Потенційна енергія цієї системи дорівнює нулю, а кінетична енергія цієї системи – $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Функція Лагранжа для цієї системи дорівнює:

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Система рівнянь Ейлера-Лагранжа записується у вигляді:

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x} = 0 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial y} = 0 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial z} = 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \\
\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \\
\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = 0
\end{cases}.
$$

Розв’язуючи цю систему, отримаємо

$$
\begin{cases}
x = at + b \\
y = ct + d \\
z = et + f
\end{cases}.
$$

Тут a, b, c, d, e, f – довільні сталі. Таким чином, точка може перебувати у стані спокою або рівномірного та прямолінійного руху.

Приклад 19.2. *(Гармонійний осцилятор). Описати можливі рухи уздовж прямої матеріальної точки маси m, якщо на неї діє сила, прямо пропорційна відстані до початку координат.*

У нашому випадку лагранжіан $L(t,x,\dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$. Тому рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд: $\frac{d}{dt}\frac{\partial(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2})}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2})}{\partial x} = 0$. Звідси маємо: $m\ddot{x} + kx = 0$. Усі розв'язки цього диференціального рівняння задає формула $x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t,\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Таким чином, вихідна система може перебувати у стані спокою або у стані гармонійних коливань відносно початку координат із частотою $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

20. Інтегральне рівняння Фредгольма

1. *Інтегральним рівнянням Фредгольма 2-го роду* називається

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds + f(t). \tag{20.1}$$

Тут

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ – компактний відрізок у $\mathbb{R}$;

$f(t) \in C[a,b]$ – деяка неперервна функція на відрізку $[a,b]$;

$K(t,s) \in C(\Omega)$ – деяка неперервна функція двох змінних у квадраті

$$\Omega = \{(t,s) : a \le t, s \le b\};$$

λ – числовий параметр.

Неперервна на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ функція $x(t)$ називається *розв'язком* інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду, якщо рівність (20.1) виконано при всіх $t \in [a,b]$.

Теорема 20.1. *При виконанні умови*

$$|\lambda| < \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|\, dtds \right)^{-1/2} \tag{20.2}$$

існує єдиний розв'язок $x(t)$ у інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду (20.1). Більше того, ітераційна послідовність

$x_0(t) = f(t)$,

$x_1(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) x_0(s) ds + f(t)$,

$x_2(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) x_1(s) ds + f(t)$,

. . . .

$x_{n+1}(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) x_n(s) ds + f(t)$,

. . . .

збігається до єдиного розв'язку $x(t)$ *рівняння (20.1).*

Приклад 20.1. *Переконатися у виконанні умови (20.2) та методом ітерацій розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду*

$$x(t) = \tfrac{1}{2} \int_0^1 x(s) ds + \sin \pi t.$$

У нашому випадку $\lambda = \frac{1}{2}$, $K(t,s) \equiv 1$ і умову (20.2) виконано. Побудуємо ітераційну послідовність:

$x_0(t) = \sin \pi t,$

$x_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 x_0(s) ds + \sin \pi t = \frac{1}{\pi} + \sin \pi t,$

$x_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{\pi} + \sin \pi s \right) ds + \sin \pi t = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \sin \pi t,$

. . . .

$x_{n+1}(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 x_n(s) ds + \sin \pi t = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2 \pi} + \dots + \frac{1}{2^n \pi} + \sin \pi t$,

. . . .

З цього випливає, що розв'язком рівняння є функція $x(t) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n(t) = \frac{2}{\pi} + \sin \pi t.$

2. Інтегральним рівнянням Фредгольма 2-го роду з *виродженим* ядром називається рівняння

$$x(t) = \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^n p_j(t) q_j(s) \cdot x(s) ds + f(t). \qquad (20.3)$$

Введемо позначення

$$y_j = \int_a^b q_j(s) \cdot x(s) ds, \quad j = 1, 2, \ldots, n.. \tag{20.4}$$

За допомогою цих величин рівняння (20.3) можна записати в еквівалентній формі

$$x(t) = \lambda \sum_{j=1}^{n} p_j(t) y_j + f(t). \tag{20.5}$$

Помножимо обидві частини (20.5) на $q_i(t),\ \ i = 1, 2, \ldots, n$ й інтегруємо по t в межах від a до b. Беручи до уваги (20.4), одержимо:

$$y_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b q_i(t) p_j(t) dt \right) y_j + \int_a^b q_i(t) f(t) dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n..$$

Після введення позначень

$$a_{ij} = \int_a^b q_i(t) p_j(t) dt, \qquad f_i = \int_a^b q_i(t) f(t) dt, \tag{20.6}$$

отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих величин y_i

$$y_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{20.7}$$

Підставляючи розв'язки цієї системи y_i в (20.5), отримаємо розв'язок вихідного інтегрального рівняння із виродженим ядром.

Приклад 20.2. *Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма другого роду:*

$$x(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \sin t \sin s + s \right) x(s) ds + \sin 2t.$$

Ядро цього рівняння $K(t,s) = \dfrac{1}{\pi} \sin t \sin s + s$ є виродженим. Позначивши через

$$p_1(t) = \frac{1}{\pi} \sin t, \quad p_2(t) = 1,$$
$$q_1(s) = \sin s, \quad q_2(s) = s$$

за формулами (20.6) здобудемо:

$$a_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 t}{\pi} dt = 1, \qquad a_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt = 0,$$

$$a_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t \sin t}{\pi} dt = 2, \qquad a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0,$$

$$f_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \sin 2t dt = 0, \quad f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t \sin 2t dt = -\pi.$$

Тепер система (20.7) виглядає:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -\pi \end{pmatrix}.$$

У цієї системи існує нескінченно багато розв'язків виду:

$$y_1 = C, \quad y_2 = -\pi + 2C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Але тоді й вихідне рівняння має нескінченно багато розв'язків (див. (20.5))

$$x(t) = \sin 2t + \tfrac{C}{\pi}\sin t - \pi + 2C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

3. У деяких випадках інтегральне рівняння Фредгольма другого роду можна звести до задачі Коші для диференціального рівняння 2-го порядку.

Приклад 20.3. *Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма другого роду:*

$$x(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds + 1, \quad K(t,s) = \begin{cases} t, & s \le t \\ s, & s \ge t \end{cases}.$$

Інтегральне рівняння можна записати у вигляді:

$$x(t) = t\int_0^t x(s)ds + \int_t^1 s\,x(s)ds + 1.$$

Диференціюючи обидві частини цього рівняння, здобудемо:

$$\dot{x}(t) = \int_0^t x(s)ds + tx(t) - t\,x(t) \;\Rightarrow\; \ddot{x}(t) = x(t).$$

Розв'язки останнього рівняння мають вигляд:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

З умов $x(0) = \int_0^1 s\,x(s)ds + 1, \quad \dot{x}(0) = 0$ випливає, що $C_1 = C_2 = e/2$. Тому всі розв'язки вихідного інтегрального рівняння задає формула $x(t) = e\,\mathrm{ch}t$.

4. *Інтегральним рівнянням Фредгольма 1-го роду* називається

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t). \tag{20.8}$$

Тут

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ – компактний відрізок у $\mathbb{R}$;

$f(t) \in C[a,b]$ – деяка неперервна функція на відрізку $[a,b]$;

$K(t,s) \in C(\Omega)$ – деяка неперервна функція двох змінних у квадраті

$$\Omega = \left\{(t,s) : a \le t, s \le b\right\}.$$

Неперервна на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ функція $x(t)$ називається *розв'язком* інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду, якщо рівність (20.8) виконано при всіх $t \in [a,b]$.

У деяких випадках за допомогою диференціювання можна розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду.

Приклад 20.4. *Розв'язати інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду:*

$$\int_0^1 \left(ts + \operatorname{sgn}(t-s)\right) x(s)ds = t^2 + t/3 - 1/2.$$

Рівняння можна записати у вигляді:

$$\int_0^t \left(ts + 1\right) x(s)ds + \int_t^1 \left(ts - 1\right) x(s)ds = t^2 + t/3 - 1/2.$$

Диференціюємо обидві частини цього рівняння. Отримаємо:

$$\left(t^2 + 1\right) x(t) + \int_0^t s x(s)ds - \left(t^2 - 1\right) x(t) + \int_t^1 s x(s)ds = 2t + 1/3.$$

Або, що теж саме,

$$2x(t) + \int_0^1 s x(s)ds = 2t + 1/3. \qquad (20.9)$$

Ще раз диференціюємо обидві частини останнього рівняння. Отримаємо $\dot{x}(t) = 1$. З цього випливає, що $x(t) = t + C$. І далі, врахувавши (20.9),

$$2\left(t + C\right) + \int_0^1 s\left(s + C\right)ds = 2t + 1/3.$$

Тому

$$2C + C + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 0.$$

Остаточно маємо $x(t) = t$. Безпосередньою підстановкою переконуємося у тому, що знайдена функція дійсно є розв'язком вихідного рівняння.

5. У деяких випадках за допомогою диференціювання інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду можна звести до інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду.

Приклад 20.5. *Звести інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду*

$$\int_0^1 \frac{1}{|t-s|+4} x(s)ds = f(t)$$

до інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду

Наше рівняння можна записати у вигляді:

$$\int_0^t \frac{1}{t-s+4} x(s)ds + \int_t^1 \frac{1}{s-t+4} x(s)ds = f(t).$$

Диференціюємо обидві частини цього рівняння. Отримаємо:

$$\frac{1}{4}x(t) - \int_0^t \frac{1}{(t-s+4)^2} x(s)ds - \frac{1}{4}x(t) + \int_t^1 \frac{1}{(s-t+4)^2} x(s)ds = \dot{f}(t).$$

Ще раз диференціюємо обидві частини цього рівняння. Здобудемо:

$$-\frac{1}{16}x(t) + \int_0^t \frac{2}{(t-s+4)^3} x(s)ds - \frac{1}{16}x(t) + \int_t^1 \frac{2}{(s-t+4)^3} x(s)ds = \ddot{f}(t).$$

З цього випливає рівняння Фредгольма 2-го роду:

$$x(t) = 16\int_0^1 \frac{1}{(|t-s|+4)^3} x(s)ds - 8\ddot{f}(t).$$

Може трапитися так, що у рівняння Фредгольма 1-го роду розв’язків не існує, а у здобутого після диференціювань рівняння Фредгольма 2-го роду розв'язки існують. Тому розв’язання інтегральних рівнянь цим методом завжди слід завершувати перевіркою здобутих розв’язків.

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Методом ітерацій розв'язати інтегральні рівняння:	Методом ітерацій розв'язати інтегральні рівняння:
№ 20.1. $x(t)=\int\limits_0^1 tsx(s)ds+2t.$	**№ 20.8.** $x(t)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos^2 s\cdot x(s)ds+1.$
№ 20.2. $x(t)=\pi\int\limits_0^1(1-t)\cdot\sin 2\pi s\cdot x(s)ds+(1-t)/2.$	**№ 20.9.** $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin t\cdot s\cdot x(s)ds+2\sin t.$
Розв'язати інтегральні рівняння з виродженими ядрами:	Розв'язати інтегральні рівняння з виродженими ядрами:
№ 20.3. $x(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos t\sin s\; x(s)ds+\sin t.$	**№ 20.10.** $x(t)=\frac{24}{7}\int\limits_0^1\left(1-t^2\right)\left(1-\frac{3}{2}s\right)x(s)ds+t.$
№ 20.4. $x(t)=\frac{2e}{e^2-1}\int\limits_0^1 \operatorname{ch} t\;\; x(s)ds+1.$	**№ 20.11.** $x(t)=\int\limits_0^1(1+t)\cos 2\pi s\; x(s)ds+t.$
За допомогою диференціювання розв'язати інтегральні рівняння:	За допомогою диференціювання розв'язати інтегральні рівняння:
№ 20.5. $x(t)=\frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^1 K(t,s)\,x(s)ds+\frac{t}{2},$ $K(t,s)=\frac{1}{2}\begin{cases}t(2-s), & 0\le t\le s;\\ s(2-t), & s\le t\le 2.\end{cases}$	**№ 20.12.** $x(t)=-\int\limits_0^1 K(t,s)\,x(s)ds+te^t,$ $K(t,s)=\frac{1}{\operatorname{sh}1}\begin{cases}\operatorname{sh}t\operatorname{sh}(s-1), & 0\le t\le s;\\ \operatorname{sh}s\operatorname{sh}(t-1), & s\le t\le 1.\end{cases}$
№ 20.6. $\int\limits_0^1 K(t,s)\,x(s)ds=\sin^3\pi t,$ $K(t,s)=\begin{cases}(1-t)s, & s\le t;\\ t(1-s), & t\le s.\end{cases}$	**№ 20.13.** $\int\limits_0^{\pi/2}K(t,s)\,x(s)ds=\frac{(\pi-2t)\sin t}{4},$ $K(t,s)=\begin{cases}\sin s\cos t, & s\le t;\\ \sin t\cos s, & t\le s.\end{cases}$

Аудиторні	Домашні
Звести рівняння 1-го роду до рівняння 2-го роду: **№ 20.7.** $\int\limits_1^2 \sin\lvert t-s\rvert\, x(s)ds = f(t).$	Звести рівняння 1-го роду до рівняння 2-го роду: **№ 20.14.** $\int\limits_2^3 \frac{1}{\lvert t-s\rvert + i} x(s)ds = f(t).$

21. Інтегральне рівняння Вольтерра

1. *Інтегральним рівнянням Вольтерра 2-го роду* називається

$$x(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in [a,b]. \tag{21.1}$$

Тут

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ – компактний відрізок у $\mathbb{R}$;

$f(t) \in C[a,b]$ – деяка неперервна функція на відрізку $[a,b]$;

$K(t,s) \in C(\Omega)$ – деяка неперервна функція двох змінних у трикутнику

$$\Omega = \{(t,s) : a \le t \le b, a \le s \le t\}.$$

Неперервна на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ функція $x(t)$ називається *розв'язком* інтегрального рівняння Вольтерра 2-го роду, якщо рівність (21.1) виконано при всіх $t \in [a,b]$.

Теорема 21.1. *У інтегрального рівняння Вольтерра 2-го роду (21.1) існує єдиний розв'язок* $x(t) \in C[a,b]$. *Більше того, ітераційна послідовність*

$x_0(t) = f(t),$

$x_1(t) = \lambda \int\limits_a^t K(t,s)x_0(s)ds + f(t),$

$x_2(t) = \lambda \int\limits_a^t K(t,s)x_1(s)ds + f(t),$

. . . .

$$x_{n+1}(t)=\lambda\int_a^t K(t,s)x_n(s)ds+f(t),$$

. . . .

збігається до єдиного розв'язку $x(t)$ *рівняння (21.1).*

Приклад 21.1. *Методом ітерацій розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра 2-го роду:*

$$x(t)=-\int_0^t (t-s)x(s)ds+1.$$

Побудуємо ітераційну послідовність

$x_0(t)=1,$

$x_1(t)=-\int_0^t (t-s)x_0(t)ds+1=1-\frac{t^2}{2},$

$x_2(t)=-\int_0^t (t-s)x_1(t)ds+1=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!},$

. . . .

$x_{n+1}(t)=-\int_0^t (t-s)x_n(t)ds+1=1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{(2n+2)!},$

. . . .

З цього випливає, що розв'язком рівняння є функція $x(t)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=\cos t.$

2. Інтегральним рівнянням Вольтерра 2-го роду з *виродженим* ядром називається рівняння

$$x(t)=\int_a^t \sum_{j=1}^n p_j(t)q_j(s)\cdot x(s)ds+f(t). \qquad (21.2)$$

Запишемо це рівняння у вигляді:

$$x(t)=\sum_{j=1}^n p_j(t)\int_a^t q_j(s)x(s)ds+f(t). \qquad (21.3)$$

Розглянемо функції

$$\begin{cases} u_1(t) = \int\limits_a^t q_1(s)x(s)ds \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad . \\ u_n(t) = \int\limits_a^t q_n(s)x(s)ds. \end{cases} \tag{21.4}$$

Підставимо ці функції у (21.3). Отримаємо формулу, яка виражає розв'язок інтегрального рівняння Вольтерра з виродженим ядром (21.2) через невідомі функції $u_j(t)$:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\, u_j(t) + f(t). \tag{21.5}$$

Диференціюємо співвідношення (21.4). Користуючись (21.5), одержимо для невідомих функцій $u_j(t)$ систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) = \sum_{j=1}^{n} q_1(t)p_j(t)\, u_j(t) + q_1(t)f(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad . \\ \dot{u}_n(t) = \sum_{j=1}^{n} q_n(t)p_j(t)\, u_j(t) + q_n(t)f(t) \end{cases}$$

З (21.4) отримаємо початкові умови $u_1(a) = \cdots = u_n(a) = 0$. Розв'яжемо цю задачу Коші відносно функцій $u_j(t)$. Підставимо функції $u_j(t)$ у рівність (21.5) та отримаємо формулу для розв'язків вихідного інтегрального рівняння із виродженим ядром.

Приклад 21.2. *Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра другого роду:*

$$x(t) = \int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch} s}{\operatorname{ch} t} x(s)ds + 1.$$

Ядро цього рівняння $K(t,s) = \dfrac{\operatorname{ch} s}{\operatorname{ch} t}$ є виродженим. Нехай $u(t) = \int\limits_0^t \operatorname{ch} s\, x(s)ds.$ Тоді

$$x(t) = \frac{u(t)}{\operatorname{ch} t} + 1.$$

Диференціальне рівняння для функції $u(t)$ має вигляд:

$$\dot{u}(t) = \operatorname{ch} t\, x(t) = \operatorname{ch} t \left(\frac{u(t)}{\operatorname{ch} t} + 1 \right).$$

Або, що те ж саме,

$$\dot{u}(t)-u(t)=\mathrm{ch}\,t.$$

Коли ми розв'яжемо це диференціальне рівняння з урахуванням умови $u(0)=0$, отримаємо $u(t)=\frac{1}{2}\left(te^{t}+\mathrm{sh}\,t\right)$. З цього випливає, що розв'язком вихідного рівняння є функція $x(t)=\frac{1}{2}\frac{te^{t}+\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}\,t}+1$.

3. У деяких випадках інтегральне рівняння Вольтерра другого роду можна звести до задачі Коші для диференціального рівняння.

Приклад 21.3. *Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра другого роду:*

$$x(t)=\int_0^t \sin(t-s)x(s)ds+\sin t. \qquad (21.6)$$

Послідовно диференціюючи обидві частини цього рівняння, здобудемо:

$$\dot{x}(t)=\int_0^t \cos(t-s)x(s)ds+\cos t. \qquad (21.7)$$

$$\ddot{x}(t)=x(t)-\int_0^t \sin(t-s)x(s)ds-\sin t. \qquad (21.8)$$

Виключивши з інтегральних рівнянь (21.6) та (21.8) інтеграл $\int_0^t \cos(t-s)x(s)ds$, отримаємо $\ddot{x}(t)=0$. З рівнянь (21.6)–(21.7) випливають початкові умови: $x(0)=0,\ \dot{x}(0)=1$. Таким чином, розв'язком рівняння (21.6) є функція $x(t)=t$.

4. *Інтегральним рівнянням Вольтерра 1-го роду* називається:

$$\int_a^t K(t,s)x(s)ds=f(t),\quad f(a)=0,\quad t\in[a,b]. \qquad (21.9)$$

Тут

$[a,b]\subset\mathbb{R}$ – компактний відрізок у $\mathbb{R}$;

$f(t)$ – деяка неперервно диференційована функція на відрізку $[a,b]$;

$K(t,s)\in C(\Omega)$ – деяка неперервна функція двох змінних у трикутнику

$$\Omega=\left\{(t,s):a\le t\le b,\ a\le s\le t\right\}.$$

Неперервна на відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$ функція $x(t)$ називається розв'язком інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду, якщо рівність (21.8) виконано при всіх $t\in[a,b]$.

У випадку, коли функція $K(t,s)$ є неперервно диференційованою та задовольняє умові $K(t,t)\neq 0$, за допомогою диференціювання інтегральне рівняння Вольтерра 1-го роду можна звести до інтегрального рівняння Вольтерра 2-го роду. Дійсно, диференціюємо обидві частини рівняння (21.8) по t. Дістанемо:

$$K(t,t)x(t)+\int_a^t \frac{\partial K(t,s)}{\partial s}x(s)ds=\dot{f}(t).$$

З цього випливає інтегральне рівняння Вольтерра 2-го роду:

$$x(t)=-\int_a^t \frac{1}{K(t,t)}\frac{\partial K(t,s)}{\partial s}x(s)ds+\frac{\dot{f}(t)}{K(t,t)}.$$

Приклад 21.4. *Розв'язати інтегральне рівняння Вольтерра 1-го роду:*

$$\int_0^t (2+t^2-s^2)x(s)ds=t^2.$$

Диференціюючи обидві частини цього рівняння, отримаємо:

$$2x(t)+\int_0^t 2tx(s)ds=2t$$

або, що теж саме, $x(t)=-\int_0^t tx(s)ds+t$. Останнє рівняння є рівнянням Вольтера 2-го роду з виродженим ядром. Його розв'язком є функція $x(t)=te^{-t^2/2}$. Підстановкою переконуємося в тому, що знайдена функція дійсно є розв'язком вихідного рівняння

Вправи

Аудиторні	**Домашні**
Методом ітерацій розв'язати інтегральні рівняння: **№ 21.1.** $x(t)=\int_0^t x(s)ds+1.$	Методом ітерацій розв'язати інтегральні рівняння: **№ 21.7.** $x(t)=-\int_0^t x(s)ds+t+\frac{t^2}{2}.$

Аудиторні	Домашні
№ 21.2. $x(t)=\int\limits_0^t t\,x(s)ds+1-t^2.$	**№ 21.8.** $x(t)=\int\limits_0^t s\,x(s)ds+1.$
Розв'язати інтегральні рівняння із виродженими ядрами:	Розв'язати інтегральні рівняння із виродженими ядрами:
№ 21.3. $x(t)=\int\limits_0^t x(s)ds+e^t.$	**№ 21.9.** $x(t)=\int\limits_0^t 2\,x(s)ds+1.$
№ 21.4. $x(t)=\int\limits_0^t \sin(t-s)x(s)ds+\frac{1}{1+t^2}.$	**№ 21.10.** $x(t)=\int\limits_0^t t^3s^3x(s)ds+t^3.$
За допомогою диференціювання розв'язати інтегральні рівняння:	За допомогою диференціювання розв'язати інтегральні рівняння:
№ 21.5. $x(t)=-\int\limits_0^t (t-s)\,x(s)ds+4e^t+3t-4.$	**№ 21.11.** $x(t)=\int\limits_0^t (t-s)\,x(s)ds+t-1.$
№ 21.6. $x(t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t (t-s)^2\,x(s)ds+\sin t.$	**№ 21.12.** $x(t)=-\int\limits_0^t \mathrm{sh}(t-s)\,x(s)ds+\mathrm{ch}\,t.$

22. Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь за допомогою Maple

Існує ряд пакетів прикладних програм (Derive, Maple, MathCad, Mathematica, MatLab), використання яких значно полегшує проведення викладок як при розв'язанні математичних проблем, так і при математичному моделюванні.

Ми розглянемо основні прийоми роботи в Maple, необхідні для дослідження звичайних диференціальних рівнянь. Більш детальну інформацію про Maple можна знайти в [12, 13].

1. Розглянемо прийоми знаходження загального розв'язку диференціального рівняння 1 порядку:

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0. \qquad (22.1)$$

де F - неперервна диференційована функція, визначена в області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Розв'язком рівняння (22.1) називається функція $x(t)$, що визначена та неперервно диференційована при $t \in (\alpha, \beta)$ така, що:

- точка $(t, x(t)) \in \Omega$ при всіх $t \in (\alpha, \beta)$;
- $F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$ при всіх $t \in (\alpha, \beta)$.

Для здобуття загального розв'язку рівняння (22.1) в Maple можна скористатися, наприклад, командами:

```
ODE:=F(t,x(t),diff(x(t),t))=0;
dsolve(ODE,x(t));
```

Перша з цих команд присвоює змінній **ODE** вихідне рівняння (у вигляді **diff(x(t),t**) у Maple записується похідна $\dot{x}(t)$). Друга команда розв'язує рівняння **ODE** відносно функції **x(t)**.

Приклад 22.1. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $\dot{x} = t^2 e^{-x}$.

Розв'яжемо це рівняння у Maple за допомогою команд:

```
> ODE:=diff(x(t),t)=t*t*exp(-x(t));
```

$$ODE := \frac{d}{dt}\mathrm{x}(t) = t^2 \mathbf{e}^{(-\mathrm{x}(t))}$$

```
> dsolve(ODE,x(t));
```

$$\mathrm{x}(t) = \ln\left(\frac{t^3}{3} + \_C1\right).$$

У другому рядку міститься вихідне диференціальне рівняння, як його зрозумів Maple, у четвертому – розв'язок вихідного рівняння. Зауважимо, що у розв'язку, який здобув Maple, символ _C1 позначає довільну сталу. Приведене у прикладі рівняння було раніше розв'язане в прикладі 1.1. При цьому множина всіх розв'язків була отримана у вигляді $e^x = \frac{t^3}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Очевидно, що ця множина розв'язків збігається із множиною розв'язків, яку здобув Maple.

Приклад 22.2. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $t\dot{x} - x = t \cdot \mathrm{tg}\dfrac{x}{t}$.

Розв'яжемо це однорідне рівняння у Maple за допомогою команд:

> **eq:=t*diff(x(t),t)-x(t)=t*tan(x(t)/t);**

$$eq := \left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t)\right) t - \mathrm{x}(t) = t \tan\left(\frac{\mathrm{x}(t)}{t}\right)$$

> **dsolve(eq,x(t));**

$$\mathrm{x}(t) = \arcsin(t\ \_C1)\ t\ .$$

Приклад 22.3. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $\dot{x} - x = t$.

Розв'яжемо це рівняння у Maple за допомогою наступних команд:

> **eq31:=diff(x(t),t)-x(t)=t;**

$$eq31 := \left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t)\right) - \mathrm{x}(t) = t$$

> **dsolve(eq31,x(t));**

$$\mathrm{x}(t) = -t - 1 + \mathrm{e}^{t}\ \_C1\ .$$

Відповідь Maple збіглась із розв'язком цього лінійного неоднорідного рівняння $x(t) = C \cdot e^{t} - (t+1),\quad \forall \tilde{N} \in \mathbb{R}$, що було отримані раніше (дивись приклад 3.1.).

Приклад 22.4. *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$e^{-x}dt - (2x + te^{-x})\,dx = 0.$$

Перетворімо це рівняння до вигляду $(2x + te^{-x})\dot{x} = e^{-x}$. Тепер розв'яжемо за допомогою команд:

> **eq41:=(2*x(t)+t*exp(-x(t)))*diff(x(t),t)=exp(-x(t));**

$$eq41 := (2\,\mathrm{x}(t) + t\,\mathrm{e}^{(-\mathrm{x}(t))})\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t)\right) = \mathrm{e}^{(-\mathrm{x}(t))}$$

> **dsolve(eq41,x(t));**

$$t - (\mathrm{x}(t)^2 + \_C1)\,\mathrm{e}^{\mathrm{x}(t)} = 0\ .$$

2. Для виділення із множини всіх розв’язків диференціального рівняння єдиного розв’язку потрібні початкові умови. Диференціальне рівняння із доданими початковими умовами називається **задачею Коші:**

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}. \qquad (22.2)$$

Де $f(t,x)$ – неперервно диференційована функція в області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ та $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Розв’язком задачі Коші (22.2) називається неперервно диференційована на (α, β) функція $x(t)$ така, що:

- точка $(t, x(t)) \in \Omega$ при всіх $t \in (\alpha, \beta)$,
- $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ при всіх $t \in (\alpha, \beta)$,
- $x(t_0) = x_0$.

Для того, щоб розв’язати задачу Коші (22.2), можна скористатися, наприклад, командами:

ODE:=diff(x(t),t)=f(t,x(t));

dsolve({ODE,x(t0)=x0},x(t));

Фігурні дужки в команді **dsolve** позначають поєднання вихідного диференціального рівняння та початкової умови.

Приклад 22.5. *Знайти розв’язок задачі Коші:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{e^t}{(1+e^t)\cdot x}. \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Розв’яжемо задачу за допомогою команд:

> **eq13:=diff(x(t),t)=exp(t)/((1+exp(t))*x(t));**

$$eq13 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \frac{\mathbf{e}^t}{(1+\mathbf{e}^t)\,\mathrm{x}(t)}.$$

> **dsolve({eq13,x(0)=1},x(t));**

$$\mathrm{x}(t) = \sqrt{2\ln(1+\mathbf{e}^t) - 2\ln(2) + 1}.$$

Отриманий раніше (дивись приклад 1.3.) розв'язок $x = \sqrt{1 + 2\ln\frac{1+e^t}{2}}$ цієї задачі Коші збігається із розв'язком, що отримав Maple.

3. При пошуку розв'язку рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, застосування розглянутих команд часто призводить до незручного подання розв'язку, що шукався.

Приклад 22.6. *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$t = \exp(\dot{x}) + \dot{x} \ . \qquad (22.3)$$

Розв'яжемо рівняння за допомогою команд:

> **eq51:=t=exp(diff(x(t),t))+diff(x(t),t);**

$$eq51 := t = \mathrm{e}^{\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)} + \left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right).$$

> **dsolve(eq51,x(t));**

$$\mathrm{x}(t) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{LambertW}(\mathrm{e}^t)^2 - \mathrm{LambertW}(\mathrm{e}^t) + \frac{t^2}{2} + \_C1 \ .$$

Цей розв'язок виданий із використанням спеціальної функції Ламберта **LambertW**, що визначена рівнянням **LambertW(x) * exp(LambertW(x)) = x .**

Однак раніше, розв'язуючи вихідне рівняння (див. приклад 5.1.), ми отримали розв'язок у більш зручному параметричному вигляді:

$$\begin{cases} t = e^p + p \\ x = (p-1)e^p + \dfrac{p^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Для отримання у Maple розв'язку вихідного рівняння у параметричному вигляді скористаємось командами:

>**eq51:=t=exp(diff(x(t),t))+diff(x(t),t);**

$$eq51 := t = \mathrm{e}^{\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)} + \left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right).$$

>**dsolve (eq51,x(t),implicit,parametric);**

$$\left[\mathrm{t}(\_T) = \mathrm{e}^{\_T} + \_T, \mathrm{x}(\_T) = \_T\,\mathrm{e}^{\_T} - \mathrm{e}^{\_T} + \frac{\_T^2}{2} + \_C1\right].$$

Відзначимо, що символом _T Maple позначає параметр.

Таким чином, для отримання розв'язку в параметричному вигляді слід використовувати команди:

ODE:=F(t,x(t),diff(x(t),t))=0;

dsolve(ODE,x(t),implicit,parametric);

4. При розв'язанні деяких диференціальних рівнянь Maple може отримати не всі розв'язки.

Приклад 22.7. *Розв'язати рівняння*

$$x = t\dot{x} + \sqrt{1+\dot{x}^2}\ . \tag{22.4}$$

Розв'яжемо рівняння за допомогою команд:

>**eq53:=x(t)=t*diff(x(t),t)+sqrt(1+(diff(x(t),t))^2);**

$$eq53 := \mathrm{x}(t) = t\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right) + \sqrt{1+\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)^2}\ .$$

>**dsolve(eq53,x(t));**

$$\mathrm{x}(t) = t\,\_C1 + \sqrt{1+\_C1^2}\ .$$

Рівняння (22.4) – це рівняння Клеро, що, як відомо, має загальний та особливий розв'язки. Maple знайшов тільки загальний розв'язок.

Спробуємо розв'язати задачу так:

>**dsolve(eq53,x(t),implicit,parametric);**

$$\left[\mathrm{t}(\_T) = -\frac{\_T}{\sqrt{1+\_T^2}},\ \mathrm{x}(\_T) = \frac{1}{\sqrt{1+\_T^2}}\right].$$

Зараз ми отримали тільки особливий розв'язок.

Для отримання усіх розв'язків потрібно скористатися спеціальними командами для розв'язання рівняння Клеро:

>**with (DEtools):**

>**clairautsol(eq53);**

$$\left\{\mathrm{x}(t) = \sqrt{-\frac{1}{-1+t^2}} - \sqrt{-\frac{1}{-1+t^2}}\ t^2,\ \mathrm{x}(t) = t\,\_C1 + \sqrt{1+\_C1^2}\ \right\}.$$

Тепер за допомогою Maple отримані всі розв'язки рівняння (22.4). Команда **with (DEtools)** потрібна для підключення спеціального пакета **DEtools**. Такі пакети розвиваються із кожною новою версією Maple.

Наведемо ще деякі з команд пакета **DEtools**, що можна використовувати при розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь:

bernoullisol(deqn,vars) – розв'язання рівняння Бернуллі;

clairautsol(deqn,vars) – знаходження розв'язку рівняння Клеро;

eulersols(deqn,vars) – розв'язання рівняння Ейлера;

exactsol(deqn,vars) – розв'язання рівняння у повних диференціалах.

Приклад 22.8. *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$e^{-x}dt-(2x+te^{-x})\,dx=0.$$

```
>eq41:=(2*x(t)+t*exp(-x(t)))*diff(x(t),t)=exp(-x(t));
```

$$eq41 := (2\,\mathrm{x}(t)+t\,\mathrm{e}^{(-\mathrm{x}(t))})\left(\frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t)\right)=\mathrm{e}^{(-\mathrm{x}(t))}.$$

Підключимо пакет Detools:

```
>with(DEtools):
```

Застосуємо спеціальну команду розв'язання рівнянь у повних диференціалах:

```
>exactsol(eq41,x(t));
```

$$\{-t\,\mathrm{e}^{(-\mathrm{x}(t))}+\mathrm{x}(t)^2+\_C1=0\}.$$

Така форма розв'язку співпадає із типовим виглядом розв'язку рівняння у повних диференціалах $U(t,x)=C,\quad C\in\mathbb{R}$. (Порівняйте з прикладом 22.4).

5. Розглянемо неоднорідне лінійне диференціальне рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t),\qquad(22.6)$$

де $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R},\ a_0\neq 0$ і неперервна функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\,f\not\equiv 0$.

Для отримання загального розв'язку рівняння (22.6) можна використати команди:

```
ODE:=a0*diff(x(t),t$n)+a1*diff(x(t),t$(n-1))+…+an*x(t)=f(t);
dsolve(ODE,x(t));
```

Приклад 22.9. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $\ddot{x}+2\dot{x}-8x=0$.

Розв'яжемо це однорідне рівняння за допомогою команд:

```
>eq71:=diff(x(t),t$2)+2*diff(x(t),t)-8*x(t)=0;
```

$$eq71 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{x}(t)\right)+2\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)-8\,\mathrm{x}(t)=0$$

```
>dsolve(eq71,x(t));
```

$$\mathrm{x}(t)=\_C1\,\mathrm{e}^{(-4\,t)}+\_C2\,\mathrm{e}^{(2\,t)}$$

Приклад. 22.10. *Знайти загальний розв'язок рівняння* $\ddddot{x}-\dddot{x}+\dot{x}-x=0$.

Розв'яжемо це рівняння за допомогою команд:

```
>eq75:=diff(x(t),t$4)-diff(x(t),t$3)+diff(x(t),t)-x(t)=0;
```

$$eq75 := \left(\frac{d^4}{dt^4}\mathrm{x}(t)\right)-\left(\frac{d^3}{dt^3}\mathrm{x}(t)\right)+\left(\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\right)-\mathrm{x}(t)=0$$

```
>dsolve(eq75,x(t));
```

$$\mathrm{x}(t)=\_C1\,\mathrm{e}^{t}+\_C2\,\mathrm{e}^{(-t)}+\_C3\,\mathrm{e}^{\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)+\_C4\,\mathrm{e}^{\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)$$

Приклад 22.11. *Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння*

$$\dddot{x}-\ddot{x}=2t\,e^{t}.$$

Розв'яжемо рівняння за допомогою команд:

```
>eq76:=diff(x(t),t$3)-diff(x(t),t$2)=2*t*exp(t);
```

$$eq76 := \left(\frac{d^3}{dt^3}\mathrm{x}(t)\right)-\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{x}(t)\right)=2\,t\,\mathrm{e}^{t}$$

```
>dsolve(eq76,x(t));
```

$$\mathrm{x}(t)=\mathrm{e}^{t}\,t^2-4\,t\,\mathrm{e}^{t}+6\,\mathrm{e}^{t}+\_C1\,\mathrm{e}^{t}+\_C2\,t+\_C3$$

Приклад 22.12. *Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння*

$$\ddot{x}-9x=e^{3t}\cos t.$$

Розв'яжемо рівняння за допомогою команд:

```
>eq82:=diff(x(t),t$2)-9*x(t)=cos(t)*exp(3*t);
```

$$eq82 := \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{x}(t)\right)-9\,\mathrm{x}(t)=\cos(t)\,\mathrm{e}^{(3\,t)}$$

>**dsolve(eq82,x(t));**

$$x(t) = e^{(-3\,t)}\,\_C2 + e^{(3\,t)}\,\_C1 + \frac{1}{37}\,e^{(3\,t)}\,(-\cos(t) + 6\sin(t))$$
.

6. Розглянемо задачу Коші для неоднорідного лінійного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = f(t), \\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{x}(t_0) = x_1, \\ \ldots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \end{cases} \tag{22.7}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ і неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \not\equiv 0$.

Для розв'язання задачі Коші (22.7) в Maple можна скористатися, наприклад, командами:

ODE:=a0*diff(x(t),t\$n)+a1*diff(x(t),t\$(n-1))+...+an*x(t)=f(t);

ic:=x(t0)=x0,D(x)(t0)=x1,...,(D@@n-1)(x)(t0)=xn-1;

dsolve({ODE,ic},x(t));

Змінній **ic** присвоєні початкові умови у вигляді послідовності. Для завдання похідних у початкових умовах у Maple використовується оператор диференціювання **D**. Конструкція **(D@@n-1)(x)(t0)** завдає $x^{(n-1)}(t_0)$.

Приклад 22.13. *Знайти розв'язок задачі Коші*

$$\begin{cases} x^{(IV)} + \ddot{x} = 2\cos t; \\ x(0) = -2,\ \dot{x}(0) = 1, \\ \ddot{x}(0) = \dddot{x}(0) = 0 \end{cases}.$$

Розв'яжемо задачу Коші за допомогою наступних команд:

> **ODE:=diff(x(t),t\$4)+diff(x(t),t\$2)=2*cos(t);**

$$ODE := \left(\frac{d^4}{dt^4}\,x(t)\right) + \left(\frac{d^2}{dt^2}\,x(t)\right) = 2\cos(t)$$
.

> **ic:=x(0)=-2,D(x)(0)=1,(D@@2)(x)(0)=0,(D@@3)(x)(0)=0;**

$$ic := x(0) = -2,\ D(x)(0) = 1,\ (D^{(2)})(x)(0) = 0,\ (D^{(3)})(x)(0) = 0$$
.

> **dsolve({ODE,ic},x(t));**

$$x(t) = -2\cos(t) - \sin(t)\,t + t.$$

7. Розглянемо рівняння Ейлера:

$$a_0 t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_n t^0 x = f(t), \tag{22.8}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_0 \neq 0$ і неперервна функція $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$.

Для розв'язання рівняння (22.8) у Maple можна застосувати команди:

ODE:=t^n*a0*diff(x(t),t$n)+...+an*x(t)=f(t);

dsolve(ODE,x(t));

Приклад 22.14. *Розв'язати рівняння* $t^2\ddot{x} + 3t\dot{x} + x = 0,\ t > 0$.

Розв'яжемо рівняння за допомогою команд:

>**eq92:=t^2*diff(x(t),t$2)+3*t*diff(x(t),t)+x(t)=0;**

$$eq92 := t^2\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right) + 3\,t\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) + x(t) = 0.$$

> **dsolve(eq92,x(t));**

$$x(t) = \frac{\_C1}{t} + \frac{\_C2\ \ln(t)}{t}.$$

Також для розв'язання рівняння Ейлера можна застосувати команди:

with(DEtools):

eulersols(ODE,x(t));

Розв'яжемо попереднє рівняння із використанням цих команд:

> **with(DEtools):**

> **eq92:=t*t*diff(x(t),t$2)+3*t*diff(x(t),t)+x(t)=0;**

$$eq92 := t^2\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right) + 3\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)t + x(t) = 0.$$

> **eulersols(eq92,x(t));**

$$\left[\frac{1}{t}, \frac{\ln(t)}{t}\right].$$

Ми отримали фундаментальну систему розв'язків вихідного рівняння Ейлера.

8. Крайовою задачею для рівняння другого порядку з однорідними відокремленими крайовими умовами називається задача:

$$\begin{cases} a_0(t)\ddot{x}+a_1(t)\dot{x}+a_2(t)x=f(t),\ t\in[t_0,t_1] \\ \alpha_0 x(t_0)+\beta_0\dot{x}(t_0)=0 \\ \gamma_1 x(t_1)+\delta_1\dot{x}(t_1)=0 \end{cases}. \qquad (22.9)$$

Тут $[t_0,t_1]$ – скінчений відрізок у $\mathbb{R}$; функції $a_0(t),\ a_1(t),\ a_2(t),\ f(t)$ неперервні на відрізку $[t_0,t_1]$ та $f(t)\not\equiv 0,\ a_0(t)\neq 0,\ \forall t\in[t_0,t_1]$; $\alpha_0,\beta_0,\gamma_1,\delta_1\in\mathbb{R}$, $\alpha_0^{\ 2}+\beta_0^{\ 2}\neq 0, \gamma_1^{\ 2}+\delta_1^{\ 2}\neq 0$.

Для розв'язання задачі (22.9) в Maple можна скористатися командами:

ODE:=a0(t)*diff(x(t),t$2)+a1(t)*diff(x(t),t)+a2(t)*x(t)=f(t);
BC:=alfa0*x(t0)+beta0*diff(x(t),t)=0,gamma1*x(t1)+delta1*diff(x(t),t)=0;
dsolve({ODE,BC},x(t));

Приклад 22.15. *Розв'язати крайову задачу*

$$\begin{cases} \ddot{x}+x=0, \quad t\in[0,\frac{\pi}{2}], \\ x(0)=0, \quad x(\frac{\pi}{2})=1. \end{cases}$$

Використаємо команди:

\> **ode:=diff(x(t),t$2)+x(t)=0;**

$$ode := \left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)+x(t)=0$$

\> **bc:=x(0)=0,x(Pi/2)=1;**

$$bc := x(0)=0,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

\> **dsolve({ode,bc},x(t));**

$$x(t)=\sin(t)$$

9. Розглянемо неоднорідну систему лінійних диференціальних рівнянь (СЛДР) зі сталими коефіцієнтами:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{f}. \qquad (22.10)$$

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\qquad \dot{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\vdots\\\dot{x}_n\end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{f}=\begin{pmatrix}f_1(t)\\f_2(t)\\\vdots\\f_n(t)\end{pmatrix}$$

(Дивись розділи 13 та 15).

Для розв'язання СЛДР (22.10) у Maple можна застосувати команди:

```
sys_ODE:={diff(x1(t),t)=a11*x1(t)+a12*x2(t)+...+a1n*xn(t),
                    ....,
                         diff(xn(t),t)=an1*x1(t)+an2*x2(t)+...ann*xn(t)};
fns:={x1(t),x2(t),...,xn(t)};
dsolve(sys_ODE, fns);
```

Приклад 22.16. *Розв'язати систему:*

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-5x_1+5x_2-3x_3\\\dot{x}_2=-6x_1+5x_2\\\dot{x}_3=-2x_1+x_2+2x_3\end{cases}.$$

Для розв'язання використаємо команди:

```
> sys121:={diff(x1(t),t)=-5*x1(t)+5*x2(t)-3*x3(t),
    diff(x2(t),t)=-6*x1(t)+5*x2(t),
    diff(x3(t),t)=-2*x1(t)+x2(t)+2*x3(t)};
```

$$sys121 := \{\frac{d}{dt}\mathrm{x3}(t)=-2\,\mathrm{x1}(t)+\mathrm{x2}(t)+2\,\mathrm{x3}(t),\\ \frac{d}{dt}\mathrm{x1}(t)=-5\,\mathrm{x1}(t)+5\,\mathrm{x2}(t)-3\,\mathrm{x3}(t),\ \frac{d}{dt}\mathrm{x2}(t)=-6\,\mathrm{x1}(t)+5\,\mathrm{x2}(t)\}.$$

```
> fns:={x1(t),x2(t),x3(t)};
```

$$fns := \{\mathrm{x1}(t),\mathrm{x2}(t),\mathrm{x3}(t)\}.$$

```
> dsolve(sys121,fns);
```

$$\{\mathrm{x1}(t)=\frac{2}{3}\_C1\,\mathrm{e}^{t}+\frac{1}{2}\_C2\,\mathrm{e}^{(2\,t)}+\_C3\,\mathrm{e}^{(-t)},\\ \mathrm{x3}(t)=\frac{1}{3}\_C1\,\mathrm{e}^{t}+\frac{1}{2}\_C2\,\mathrm{e}^{(2\,t)}+\frac{1}{3}\_C3\,\mathrm{e}^{(-t)},\ \mathrm{x2}(t)=\_C1\,\mathrm{e}^{t}+\_C2\,\mathrm{e}^{(2\,t)}+\_C3\,\mathrm{e}^{(-t)}\\ \}.$$

Приклад 22.17. *Розв'язати систему:*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} e^t \cos t.$$

Розв'яжемо цю систему за допомогою команд:

```
> sys143:={diff(x1(t),t)=2*x1(t)-x2(t),
     diff(x2(t),t)=-x1(t)+2*x2(t)-5*exp(t)*cos(t)};
```

$$sys143 := \{\frac{d}{dt}\mathrm{x2}(t) = -\mathrm{x1}(t) + 2\,\mathrm{x2}(t) - 5\,\mathrm{e}^t \cos(t),\ \frac{d}{dt}\mathrm{x1}(t) = 2\,\mathrm{x1}(t) - \mathrm{x2}(t)\}.$$

```
> fns:={x1(t),x2(t)};
```

$$fns := \{\mathrm{x1}(t),\ \mathrm{x2}(t)\}.$$

```
> dsolve(sys143,fns);
```

$$\{\mathrm{x2}(t) = \mathrm{e}^t\,\_C2 - \mathrm{e}^{(3\,t)}\,\_C1 - 3\,\mathrm{e}^t \sin(t) + \mathrm{e}^t \cos(t),$$
$$\mathrm{x1}(t) = \mathrm{e}^t\,\_C2 + \mathrm{e}^{(3\,t)}\,\_C1 - 2\,\mathrm{e}^t \sin(t) - \mathrm{e}^t \cos(t)\}.$$

23. Побудова графіків розв'язків звичайних диференціальних рівнянь за допомогою Maple

Розглянемо основні прийоми побудови графіків розв'язків звичайних диференціальних рівнянь за допомогою Maple.

1. Найпростіший випадок задачі Коші.

Приклад 23.1. *Нехай дана задача Коші:*

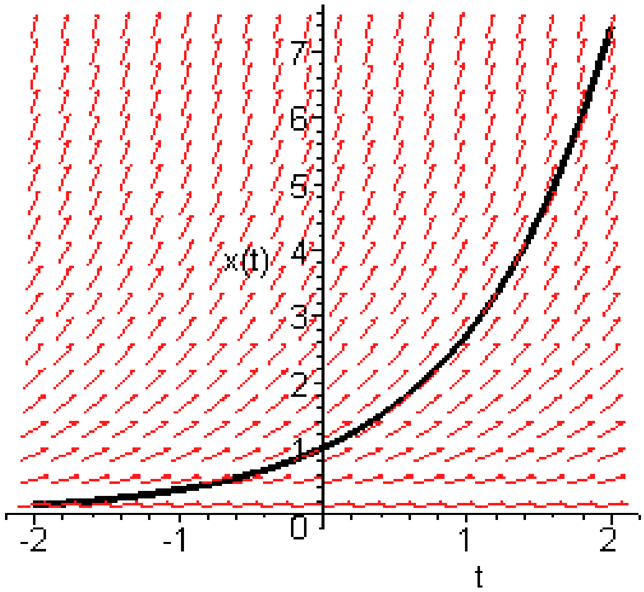
$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}. \qquad (23.1)$$

Побудуємо графік розв'язку задачі (23.1) на інтервалі $[-2; 2]$ за допомогою команд:

```
> with(DEtools):
> eq:=diff(x(t),t)=x(t);
```

$$eq := \frac{d}{dt}\mathrm{x}(t) = \mathrm{x}(t).$$

```
> DEplot(eq,x(t),t=-2..2,[[x(0)=1]],linecolor=black);
```



Ми отримали графік функції $x(t) = e^t$ на інтервалі $[-2; 2]$ та поле напрямів.

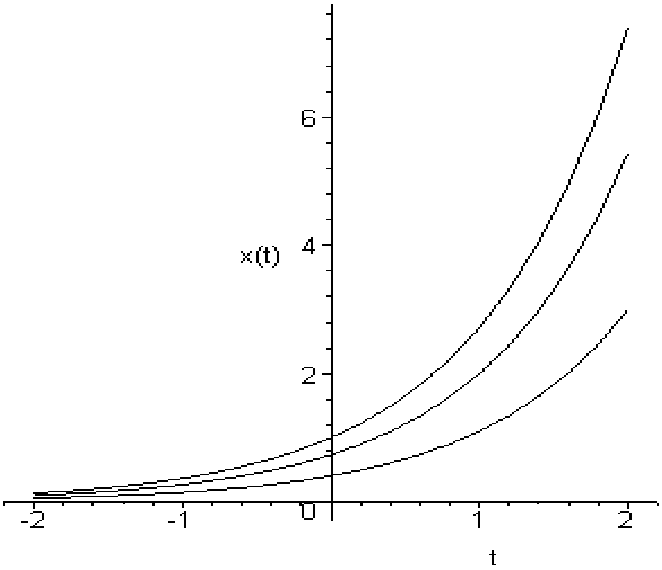
Можна задати в задачі (23.1) декілька початкових умов.

Приклад 23.2. *Нехай дані задачі Коші:*

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = x \\ x(1) = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = x \\ x(2) = 3 \end{cases}. \tag{23.2}$$

Побудуємо графіки розв'язків цих задач:

```
> with(DEtools):
> eq:=diff(x(t),t)=x(t):
>DEplot(eq,x(t),t=-2..2,[[x(0)=1],[x(1)=2],[x(2)=3]],
        arrows=NONE, linecolor=black, thickness=1);
```



Тут опція **arrows=NONE** відміняє креслення поля напрямів.

Приклад 23.3. *Побудувати графіки розв'язків диференціального рівняння* $\dot{x} = 2\left(\dfrac{x+1}{t+x-2}\right)^2$, *що задовольняють початковим умовам* $x(4) = 8,\ x(4) = 6,\ x(4) = 4$.

Побудуємо графіки розв'язків за допомогою команд:

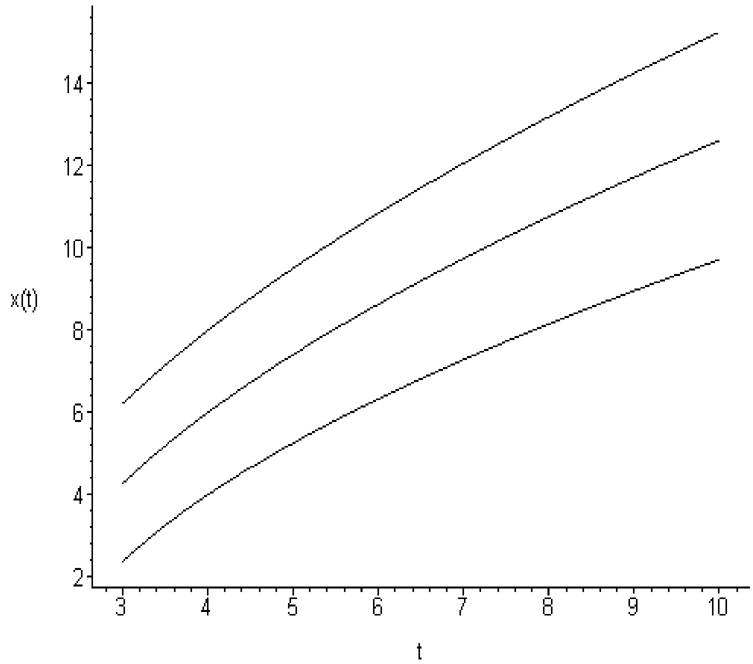
> **with(DEtools):**

> **eq22:=diff(x(t),t)=2*((x(t)+1)/(t+x(t)-2))^2;**

$$eq22 := \frac{d}{dt}\,\mathrm{x}(t) = \frac{2\,(\mathrm{x}(t)+1)^2}{(t+\mathrm{x}(t)-2)^2}\,.$$

>**DEplot(eq22,x(t),t=3..10,[[x(4)=8],[x(4)=6],[x(4)=4]],**

arrows=NONE,linecolor=black,thickness=1);



У загальному випадку для побудови графіків розв'язків задач Коші

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},\quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases},\quad \ldots \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x(t)) \\ x(t_n) = x_n \end{cases}$$

можна скористатися командами:

> **with(DEtools):**

> **ODE:=diff(x(t),t)=f(t,x(t));**

> **DEplot(ODE,x(t),t=a..b,[[x(t0)=x0],...,[x(tn)=xn]],**

arrows=NONE, linecolor=black);

2. Приведемо основні прийоми побудови графіків розв’язку задачі Коші для диференціальних рівняннянь n-го порядку.

Приклад 23.4. *Побудувати графік розв’язку задачі Коші для рівняння гармонійного осцілятора*

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

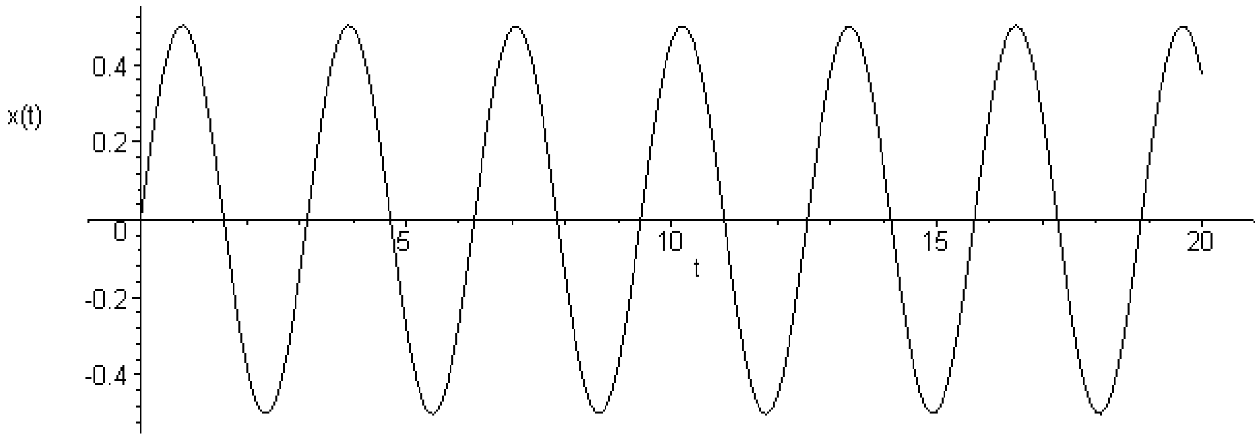
на інтервалі $[0, 20]$.

> **with(DEtools):**

> **eq:=diff(x(t),t$2)+4*x(t)=0;**

$$eq := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,\mathrm{x}(t)\right) + 4\,\mathrm{x}(t) = 0$$

> **DEplot(eq,x(t),t=0..20,[[x(0)=0,D(x)(0)=1]],**
arrows=NONE,stepsize=0.1,linecolor=black,thickness=1);



Приклад 23.5. *Побудувати графік розв’язку задачі Коші для рівняння гармонійного осцилятора, на який діє зовнішня сила, що змінюється за гармонійним законом* $F = \cos t$

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4x = \cos t \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

на інтервалі $[0, 20]$.

Оскільки частота власних коливань $\omega_0 = 2$, а частота коливань зовнішньої сили $\omega = 1$, то ми маємо *нерезонансний випадок*.

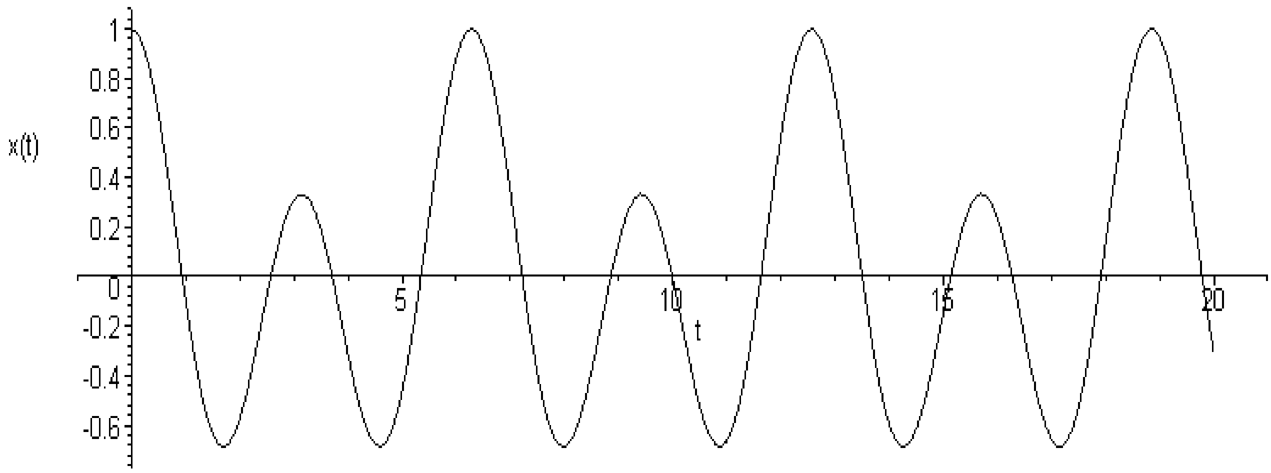
> with(DEtools):

> eq:=diff(x(t),t$2)+4*x(t)=cos(t);

$$eq := \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{x}(t)\right) + 4\,\mathrm{x}(t) = \cos(t)$$

> DEplot(eq,x(t),t=0..20,[[x(0)=1,D(x)(0)=0]],

arrows=NONE,stepsize=0.1,linecolor=black,thickness=1);



Приклад 23.6. *Побудувати графік розв'язку задачі Коші для гармонійного осцилятора (резонансний випадок)*

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4x = \cos 2t \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

на інтервалі $[0, 20]$.

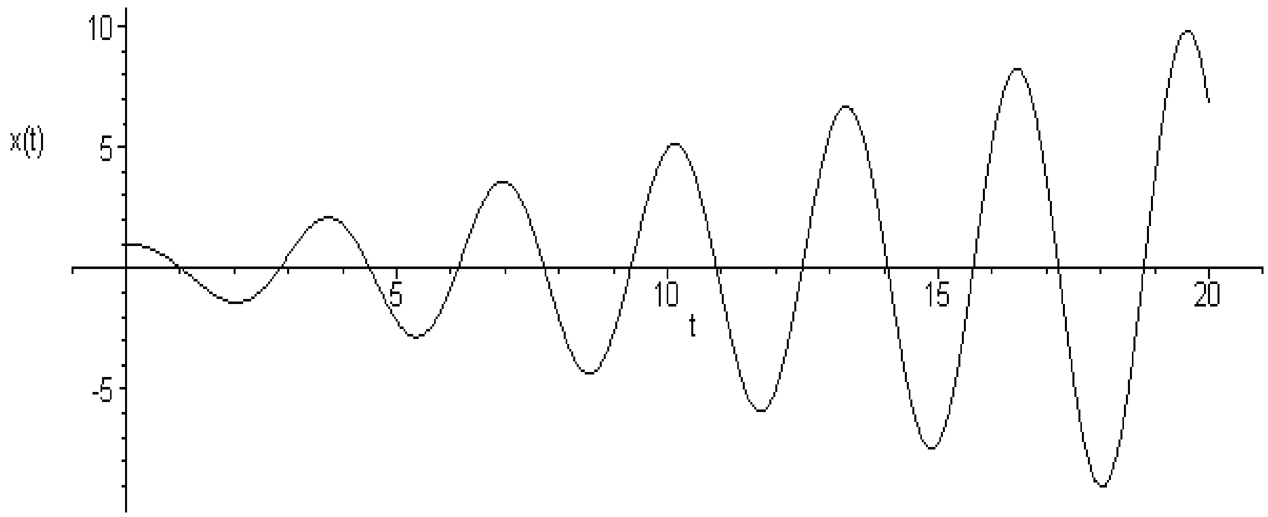
> with(DEtools):

> eq:=diff(x(t),t$2)+4*x(t)=2*cos(2*t);

$$eq := \left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{x}(t)\right) + 4\,\mathrm{x}(t) = \cos(2\,t)$$

> DEplot(eq,x(t),t=0..20,[[x(0)=1,D(x)(0)=0]],

arrows=NONE, stepsize=0.1, linecolor=black, thickness=1);



Приклад 23.7. *Побудувати графік малих коливань математичного маятника, тобто графік розв'язку задачі Коші*

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\sin x \\ x(0) = 0,5 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

на інтервалі $[0,50]$.

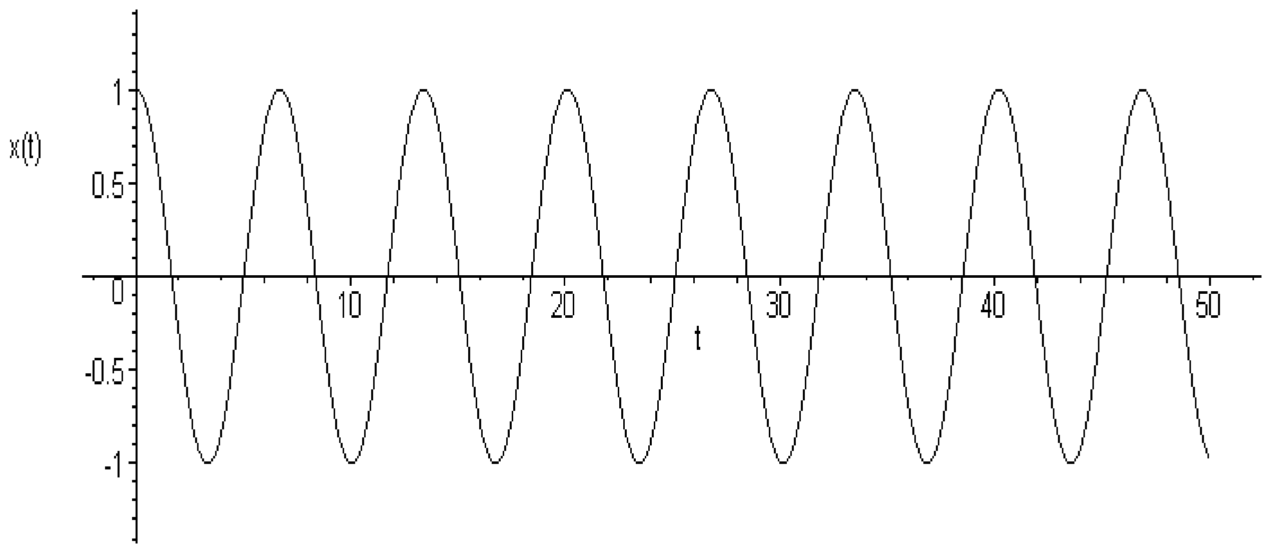
\> **with(DEtools):**

\> **eq:=diff(x(t),t$2)=-sin(x(t));**

$$eq := \frac{d^2}{dt^2}\,x(t) = -\sin(x(t))$$

\> **DEplot(eq,x(t),t=0..50,[[x(0)=1,D(x)(0)=0]],**

arrows=NONE, stepsize=0.1, linecolor=black, thickness=1);



Приклад 23.8. *Побудувати графік великих коливань математичного маятника, тобто графік розв'язку задачі Коші*

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\sin x \\ x(0) = \pi - 0,001 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

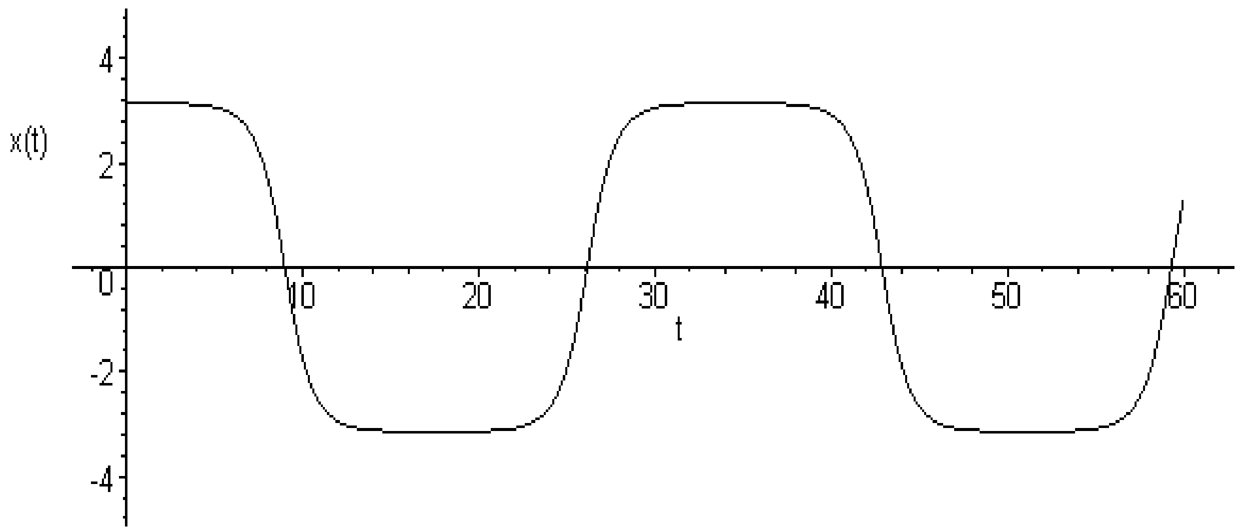
на інтервалі $[0,60]$.

> **with(DEtools):**

> **eq:=diff(x(t),t$2)=-sin(x(t));**

$$eq := \frac{d^2}{dt^2}\, x(t) = -\sin(x(t))$$

> **DEplot(eq,x(t),t=0..60, x=-4.5..4.5, [[x(0)=Pi-0.001,D(x)(0)=0]], arrows=NONE, stepsize=0.1, linecolor=black, thickness=1);**



3. Наведемо приклад побудови графіків розв'язку задачі Коші для системи диференціальних рівнянь

Приклад 23.9. *Побудувати графік розв'язку задачі Коші для системи диференційних рівнянь*

$$\begin{cases} \dot{x} = -0,5x + 4y \\ \dot{y} = -4x - 0,5y, \\ x(0) = 4, \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

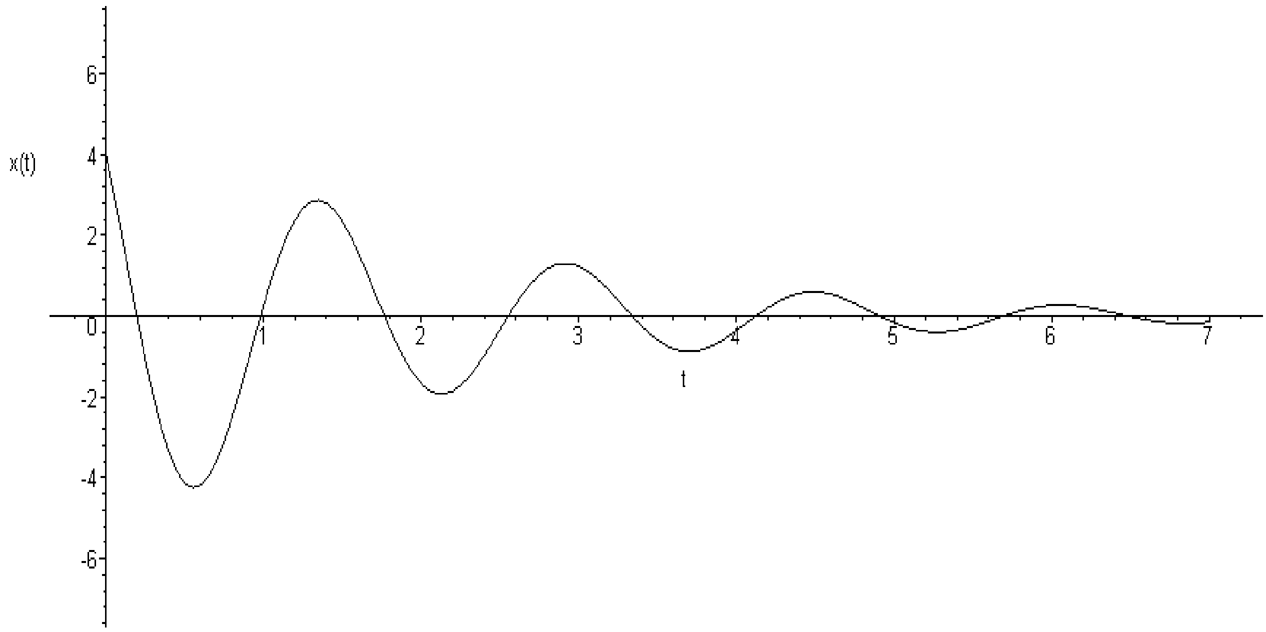
на інтервалі $[0,7]$.

> **with(DEtools):**

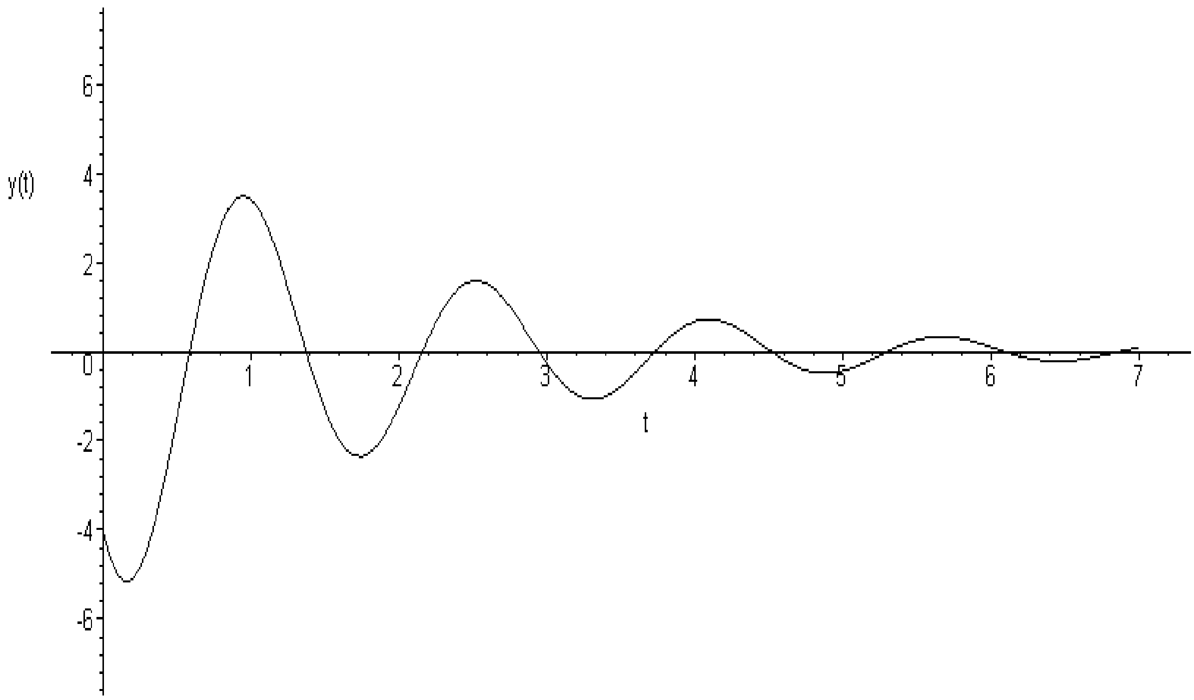
> **sys:={diff(x(t),t)=-0.5*x(t)+4*y(t),diff(y(t),t)=-4*x(t)-0.5*y(t)};**

$$sys := \left\{\frac{d}{dt}\,x(t) = -0.5\,x(t) + 4\,y(t),\ \frac{d}{dt}\,y(t) = -4\,x(t) - 0.5\,y(t)\right\}$$

> **DEplot(sys,[x(t),y(t)],t=0..7,x=-7..7,[[x(0)=4,y(0)=-4]],**
scene=[t,x(t)],stepsize=0.05,linecolor=black, thickness=1);



> **DEplot(sys,[x(t),y(t)],t=0..7,y=-7..7,[[x(0)=4,y(0)=-4]],**
scene=[t,y(t)],stepsize=0.05,linecolor=black, thickness=1);



4. Нехай функції $x(t)$, $y(t)$ є розв'язками деякої системи диференціальних рівнянь. Крива, що задається параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

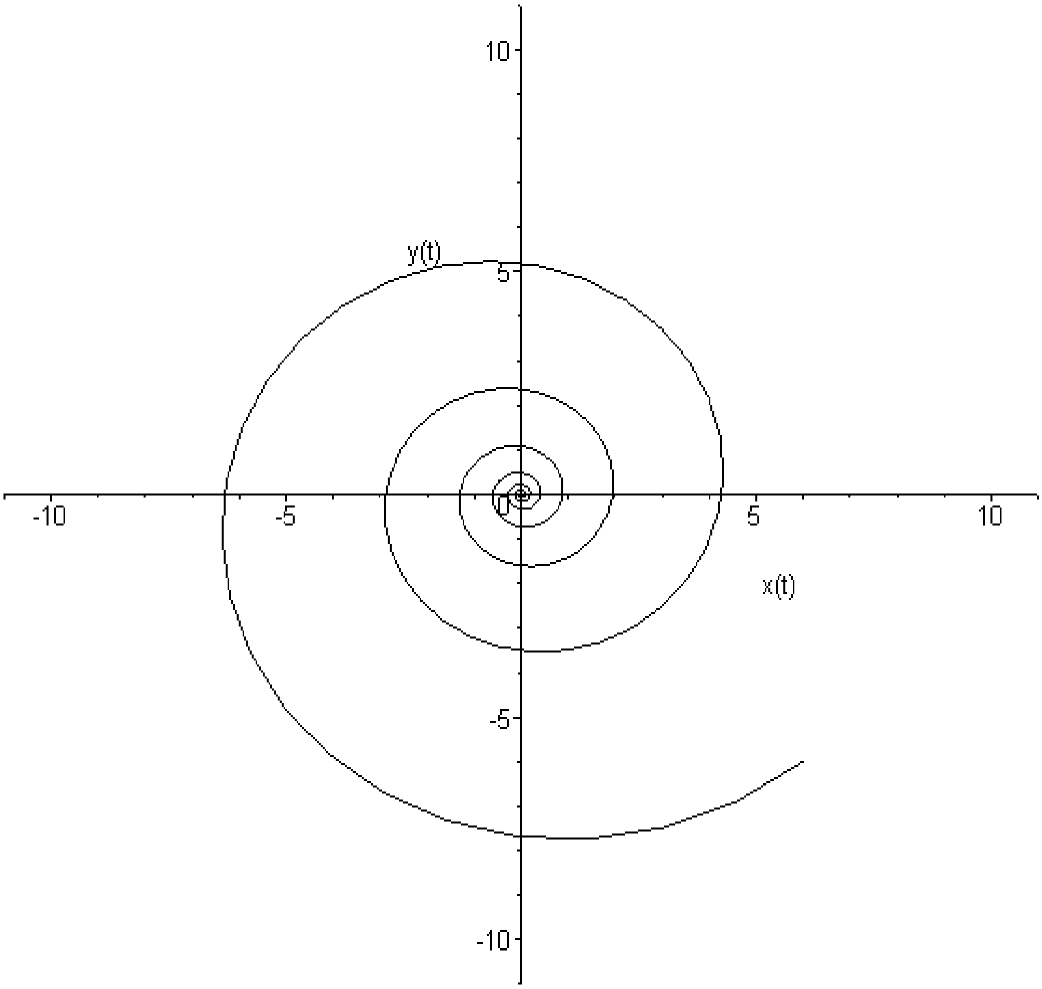
називається *фазовою траєкторією*.

Приклад 23.10. *Побудувати фазову траєкторію розв'язку задачі Коші з прикладу 23.9.*

```
> with(DEtools):
>sys:={diff(x(t),t)=-0.5*x(t)+4*y(t),diff(y(t),t)=-4*x(t)-0.5*y(t)};
```

$$sys := \{\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t) = -0.5\ \mathrm{x}(t) + 4\ \mathrm{y}(t), \frac{d}{dt}\mathrm{y}(t) = -4\ \mathrm{x}(t) - 0.5\ \mathrm{y}(t)\}$$

```
> DEplot(sys,[x(t),y(t)],t=0..10,x=-10..10,y=-10..10, [[x(0)=6,y(0)=-6]],
                    scene=[x(t),y(t)], stepsize=0.05,linecolor=black,
                              arrows=NONE,thickness=1);
```



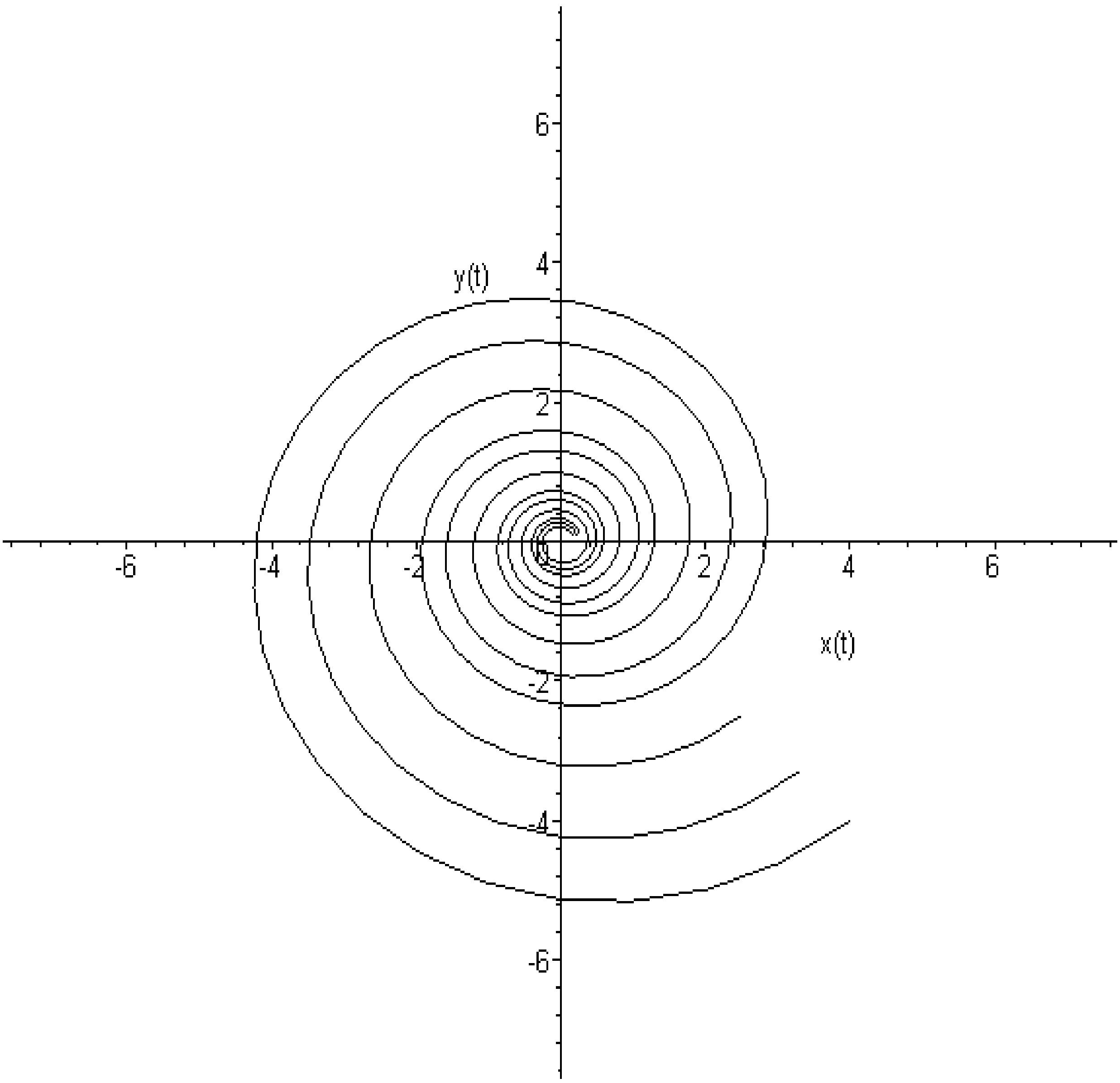
5. Множина фазових траєкторій називається *фазовим портретом*.

Приклад 23.11. *Побудувати фазовий портрет для системи диференціальних рівнянь, розглянутої в прикладі 22.9.*

```
> with(DEtools):
>sys:={diff(x(t),t)=-0.5*x(t)+4*y(t),diff(y(t),t)=-4*x(t)-0.5*y(t)};
```

$$sys := \{\frac{d}{dt}\mathrm{x}(t) = -0.5\ \mathrm{x}(t) + 4\ \mathrm{y}(t), \frac{d}{dt}\mathrm{y}(t) = -4\ \mathrm{x}(t) - 0.5\ \mathrm{y}(t)\}$$

```
> DEplot(sys,[x(t),y(t)],t=0..6,x=-7..7, y=-10..10, [[x(0)=4,y(0)=-4],
        [x(0)=3.3,y(0)=-3.3],[x(0)=2.5,y(0)=-2.5]], scene=[x(t),y(t)],
        stepsize=0.05,linecolor=black,arrows=NONE,thickness=1);
```



24. Відповіді

1. Рівняння з відокремлюваними змінними

№ 1.1. $\operatorname{arctg} x = \sin t + C.$

№ 1.2. $x(1 - Ct) = 1, \quad x = 0.$

№ 1.3. $x = \tilde{N}(t+1)e^{-t}.$

№ 1.4. $x = 2 + C\cos t, \; x = 2 - 3\cos t.$

№ 1.5. $27(x - 2t)^2 = (C - 2t)^3, \quad x = 2t.$

№ 1.6. $\sqrt{4t + 2x - 1} - 2\ln(\sqrt{4t + 2x - 1} + 2) = t + C.$

№ 1.7. $x\,(\ln\left|t^2 - 1\right| + C) = 1; \; x = 0. \quad x\,[\ln(1 - t^2) + 1] = 1.$

№ 1.8. $\dfrac{x^2}{2} = t - \dfrac{t^2}{2} + \tilde{N}.$

№ 1.9. $x^2 = C(t^2 - 1).$

№ 1.10. $x^2 - 2 = \tilde{N}e^{1/t}.$

№ 1.11. $x = -\lg\,(C - 10^t).$

№ 1.12. $2t + x - 1 = Ce^t.$

№ 1.13. $t + 2x + 2 = Ce^x; \quad t + 2x + 2 = 0.$

№ 1.14. $x = (t - C)^3; \; x = 0. \quad x = (t - 2)^3; \quad x = 0.$

2. Однорідні рівняння

№ 2.1. $\ln(x^2 + t^2) = C - 2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{t}\right).$

№ 2.2. $\sin\dfrac{x}{t} = Ct.$

№ 2.3. $\arcsin\dfrac{x}{t} = \ln Ct \cdot \operatorname{sgn} t; \quad x = \pm t.$

№ 2.4. $2t + x - 1 = Ce^{2x - t}.$

№ 2.5. $(x - t + 5)^5(t + 2x - 2) = C.$

№ 2.6. $(x-t)t = Cx;\ x=0.$

№ 2.7. $Cx = x^2 - t^2;\ \ x=0.$

№ 2.8. $\ln Ct = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x}{t}\right);\ \ x = te^{2\pi k},\ k = 0;\pm1;\pm2,\ldots$

№ 2.9. $\ln\frac{x+t}{t+3} = 1 + \frac{C}{x+t}.$

№ 2.10. $\sin\frac{x-2t}{t+1} = C(t+1).$

3. Лінійні рівняння першого порядку

№ 3.1. $x = Ct^2 + t^4.$

№ 3.2. $x = e^t(\ln|t| + C).$

№ 3.3. $x = C\ln^2 t - \ln t.$

№ 3.4. $t = x^2 + Cx;\ x=0.$

№ 3.5. $x^3 = Ct^3 - 3t^2.$

№ 3.6. $x^2 = Ct^2 - 2t.$

№ 3.7. $tx = C - \ln|t|.$

№ 3.8. $x = t(C + \sin t).$

№ 3.9. $tx = (t^3 + C)e^{-t}.$

№ 3.10. $t = (C - \cos x)\sin x.$

№ 3.11. $(x-1)^2 t = x - \ln Cx;\ \ x=0;\ \ x=1.$

№ 3.12. $x^{-2} = t^4(2e^t + C).$

4. Рівняння у повних диференціалах. Рівняння, не розв'язані відносно похідної

№ 4.1. $te^{-x} - x^2 = C.$

№ 4.2. $t + \frac{t^3}{x^2} + \frac{5}{x} = C.$

№ 4.3. $t^2 + 1 = 2(C - 2t)\sin x.$

№ 4.4. $x = Ce^{\pm t}.$

№ 4.5. $(t+C)^2 + x^2 = 1; \quad x = \pm 1.$

№ 4.6. $3t^2x - x^3 = C.$

№ 4.7. $t^2 - 3t^3x^2 + x^4 = C.$

№ 4.8. $t - x^2\cos^2 t = C.$

№ 4.9. $x(t+C)^2 = 1; \quad x = 0.$

№ 4.10. $x = 2t^2 + C; \quad x = -t^2 + C.$

5. Метод введення параметра для рівнянь, не розв'язаних відносно похідної. Рівняння Клеро та Лагранжа

№ 5.1. $t = p^3 + p; \quad 4x = 3p^4 + 2p^2 + \tilde{N}.$

№ 5.2. $t = e^p + C; \quad x = (p-1)e^p; \; x = -1.$

№ 5.3. $x = Ct - C^2; \; 4x = t^2.$

№ 5.4. $2C^2(x - Ct) = 1; \; 8x^3 = 27t^2.$

№ 5.5. $tp^2 = p + C; \quad x = 2 + 2Cp^{-1} - \ln p.$

№ 5.6. $t\sqrt{p} = \ln p + C; \quad x = \sqrt{p}(4 - \ln p - C); \quad x = 0.$

№ 5.7. $tp^2 = C\sqrt{|p|} - 1, \quad x = tp - t^2p^3, \; x = 0.$

№ 5.8. $t = \dfrac{2p}{p^2-1}, \quad x = \dfrac{2}{p^2-1} - \ln|p^2-1| + C.$

№ 5.9. $t = 3p^2 + 2p + C, \; x = 2p^3 + p^2, \quad x = 0.$

№ 5.10. $C^3 = 3(Ct - x), \quad 9x^2 = 4t^3.$

№ 5.11. $x = Ct - \ln C, \; x = \ln t + 1.$

№ 5.12. $x = Ct - C - 2.$

№ 5.13. $t = 3p^2 + Cp^{-2}, \; x = 2p^3 + 2Cp^{-1}, \quad x = 0.$

№ 5.14. $2p^2t = C - C^2p^2, \; px = C, \quad 32t^3 = -27x^4.$

6. Різні рівняння першого порядку

№ 6.1. $\sin\frac{x}{t}=-\ln Ct.$

№ 6.2. $2x=2C(t-1)+C^2,\quad 2x=-(t-1)^2.$

№ 6.3. $x(t^2-C)=t,\quad x=0.$

№ 6.4. $x\sin t-\frac{t^3}{3}+\frac{x^2}{2}=C.$

№ 6.5. $t=x^2(C-2\ln|x|),\quad x=0.$

№ 6.6. $t=2\sqrt{p^2+1}-\ln(1+\sqrt{p^2+1})+\ln Cp,\quad x=p\sqrt{p^2+1},\quad x=0.$

№ 6.7. $(2t+3x-7)^3=Ce^{-(t+2x)}.$

№ 6.8. $t(p-1)^2=\ln Cp-p,\ \ x=tp^2+p,\ \ x=0,\ \ x=t+1.$

№ 6.9. $pt=C\sqrt{p}-1,\ x=\ln p-C\sqrt{p}+1.$

№ 6.10. $x=t(Ce^{-t}-1).$

№ 6.11. $x=C,\ x=C\pm e^t.$

№ 6.12. $x^2+\sqrt{t^4+x^4}=C.$

№ 6.13. $(x+3t+7)(x-t-1)^3=C.$

№ 6.14. $t=2p-\ln p,\ x=p^2-p+C.$

№ 6.15. $t\sqrt{x}=\sin t+C,\quad x=0.$

№ 6.16. $tx\cos t-x^2=C.$

7. Застосування диференційних рівнянь в прикладних і геометричних задачах

№ 7.1. $(C\pm x)y=2a^2$.

№ 7.2. Кількість азоту (у літрах) $x(t)=20-4e^{-t/200};\quad x(t)=19.8$ при $t=200\ln 20\approx 600\,\text{ñåê}=10\ \text{õâ}.$

№ 7.3. Швидкість

$$v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}\,\mathrm{tg}\sqrt{kg}\,(C-t),\ g=10,\ k=0.012,\ C=\frac{1}{\sqrt{kg}}\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}\,v(0)\approx 1.75\text{ñåê};\quad v(t)=0$$

при $t=C\approx 1.75\ \text{ñåê}$; найбільша висота $h=\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{k}{g}v^2(0)+1\right)\approx 16.3\,\text{ì}$ (без опору повітря $t=2\ \text{ñåê},\ h=20\ \text{ì}$).

№ 7.4. Кількість речовини, що залишилася, $x(t)=x(0)2^{-t/30}$; $x(t)=0.01x(0)$ при $t=60/\lg 2\approx 200$ днів.

№ 7.5. Температура тіла $x(t)=20+80\cdot 2^{-t/10}$; $x(t)=25$ при $t=40$ *хв.*

№ 7.6. $b\ln y-y=\pm x+C, 0<y<b$.

№ 7.7. Кількість солі $x(t)=10e^{-t/20}$; $x(60)=10e^{-3}\approx 0.5$ *кг.*

№ 7.8. Швидкість $v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}}\mathrm{th}\sqrt{kg}t$, шлях $s(t)=\frac{1}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{kg}t$; $s(t)=h=16.3$ *м* при

$$t=\frac{1}{\sqrt{kg}}\ln\left(e^{kh}+\sqrt{e^{2kh}-1}\right)\approx 1.87\ \textit{сек},\ v(t)=\sqrt{\frac{g}{k}\left(1-e^{-2kh}\right)}\approx 16.4\ \textit{м/сек.}$$

№ 7.9. Кількість радію, що залишилася,

$x(t)=x(0)\cdot(1-0.00044)^t$; $x(t)=x(0)/2$ при $t=\ln 0.5/\ln(1\text{-}0.00044)\approx 1600$ років.

№ 7.10. Різниця температур води та предмету $x(t)=55\cdot(3/5)^t$; $x(t)=1$ при $t=\ln 55/(\ln 5\text{-}\ln 3)\approx 8$ *хв.*

8. Однорідні та неоднорідні лінійні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Неоднорідні рівняння зі спеціальною правою частиною

№ 8.1. $x=C_1e^t+C_2e^{-2t}$.

№ 8.2. $x=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$.

№ 8.3. $x=e^{-t/2}(C_1+C_2t)$.

№ 8.4. $x=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$.

№ 8.5. $x=(C_1+C_2t)\cos t+(C_3+C_4t)\sin t$.

№ 8.6. $x = C_1 + (C_2 + C_3 t)\cos 2t + (C_4 + C_5 t)\sin 2t.$

№ 8.7. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + (2t - 2)e^t.$

№ 8.8. $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + te^t + t^2 + 2.$

№ 8.9. $x = C_1 + C_2 e^{2t}.$

№ 8.10. $x = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(C_3 \cos t + C_4 \sin t).$

№ 8.11. $x = e^{t\sqrt{3}}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t$

$$+e^{-t\sqrt{3}}(C_5 \cos t + C_6 \sin t).$$

№ 8.12. $x = e^t(C_1 + C_2 t + C_3 t^2).$

№ 8.13. $x = e^t(C_1 + C_2 t) + C_3 e^{-2t}.$

№ 8.14. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + (1/5)e^{4t}.$

№ 8.15. $x = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{3}\right)e^t.$

№ 8.16. $x = e^t(C_1 + C_2 t + t^3).$

9. Метод комплексифікації для розв’язання неоднорідних лінійних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

№ 9.1. $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 0{,}1\cos t - 0{,}3\sin t.$

№ 9.2. $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t - 2t\cos t.$

№ 9.3. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + 0{,}5\, t e^{-t} + e^{-t}(0{,}05\sin 2t - 0{,}1\cos 2t).$

№ 9.4. $x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{1}{34}\{e^t(\sin 2t - 4\cos 2t) -$

$$-e^{-t}(4\cos 2t + \sin 2t)\}.$$

№ 9.5. $x = t - t\sin t - 2\cos t.$

№ 9.6. $x = e^{2t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 0{,}25e^{2t} + 0{,}1\cos 2t + 0{,}05\sin 2t.$

№ 9.7. $x=\left(C_1-\dfrac{t^2}{4}\right)\cos t+\left(C_2+\dfrac{t}{4}\right)\sin t.$

№ 9.8. $x=e^{4t}\,(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)-\dfrac{5}{16}te^{4t}(2t\cos 2t-\sin 2t).$

№ 9.9.

$$x=C_1e^t+C_2te^t+C_3e^{-t}+\frac{3}{4}e^t\,(t^2-t+2)+\frac{5}{4}(t-1)\cos t-\frac{5}{4}(t+2)\sin t\,.$$

№ 9.10. $x=2+e^{-t}.$

10. Метод варіації сталих. Рівняння Ейлера

№ 10.1. $x=e^t(t\,\ln|t|-t+C_1t+C_2).$

№ 10.2. $x=(C_1+\ln|\sin t|)\,\sin t+(C_2-t)\,\cos t.$

№ 10.3. $x=e^{-t}\left(\dfrac{4}{5}(t+1)^{\frac{5}{2}}+C_1+C_2t\right).$

№ 10.4. $x=C_1t^2+C_2t^3.$

№ 10.5. $x=t(C_1+C_2\ln|t|)+2t^3.$

№ 10.6. $x=(t-2)^2(C_1+C_2\ln|t-2|)+t-1{,}5.$

№ 10.7. $x=(e^{-t}+e^{-2t})\ln(e^t+1)+C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}.$

№ 10.8. $x=C_1\sin 2t+C_2\cos 2t+\sin 2t\ln|\cos t|-t\cos 2t-\dfrac{1}{2}\sin 2t.$

№ 10.9. $x=C_1\cos t+C_2\sin t-\dfrac{\cos 2t}{\cos t}.$

№ 10.10. $x=t(C_1+C_2\ln|t|+\tilde{N}_3\ln^2|t|).$

№ 10.11. $x=C_1t^2+\dfrac{1}{t}\left(C_2-\dfrac{2}{3}\ln t-\ln^2 t\right).$

№ 10.12. $x=C_1\left(t+\dfrac{3}{2}\right)+C_2\left|t+\dfrac{3}{2}\right|^{\frac{3}{2}}+C_3\left|t+\dfrac{3}{2}\right|^{\frac{1}{2}}.$

11. Крайова задача та функція Гріна

№ 11.1. $x = (\operatorname{sh} t / \operatorname{sh} 1) - 2t.$

№ 11.2. Розв'язків не існує.

№ 11.3. $x = 2t - \pi + \pi \cos t + C \sin t, \ \forall C \in \mathbb{R}.$

№ 11.4. $G(t,s) = \begin{cases} (s-1)t, & 0 \le t \le s \\ s(t-1), & s \le t \le 1 \end{cases}.$

№ 11.5. $G(t,s) = \begin{cases} -e^{-s} \operatorname{ch} t, & 0 \le t \le s \\ -e^{-t} \operatorname{ch} s, & s \le t \le 2 \end{cases}.$

№ 11.6. $G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} - 1, & 1 \le t \le s \\ \dfrac{1}{s} - 1, & s \le t \le 3 \end{cases}.$

№ 11.7. $x = 1 - \sin t - \cos t.$

№ 11.8. $G(t,s) = \begin{cases} \sin s \cos t, & 0 \le t \le s \\ \cos s \sin t, & s \le t \le \pi \end{cases}.$

№ 11.9. $G(t,s) = \begin{cases} e^{s}(e^{-t} - 1), & 0 \le t \le s \\ 1 - e^{s}, & s \le t \le 1 \end{cases}.$

№ 11.10. $G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{s^2 - 4}{2s^2}, & 1 \le t \le s \\ \dfrac{t^2 - 4}{2s^2}, & s \le t \le 2 \end{cases}.$

№ 11.11. $G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{1 - t^3}{3s^3 t}, & 1 \le t \le s \\ \dfrac{1 - s^3}{3s^3 t}, & s \le t \le 2 \end{cases}.$

12. Властивості функції Гріна

№ 12.1. $G(t,s)=\begin{cases}(s-1)t, & 0\le t\le s\\ s(t-1), & s\le t\le 1.\end{cases}$

№ 12.2. $G(t,s)=\begin{cases}-e^{-s}\operatorname{ch}t, & 0\le t\le s\\ -e^{-t}\operatorname{ch}s, & s\le t\le 2.\end{cases}$

№ 12.3. $G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-e)}\left[e^{s-t}+e^{1-(s-t)}\right], & 0\le t\le s\\ \dfrac{1}{2(1-e)}\left[e^{t-s}+e^{1-(t-s)}\right], & s\le t\le 1.\end{cases}$

№ 12.4. $G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{t}-1, & 1\le t\le s\\ \dfrac{1}{s}-1, & s\le t\le 3.\end{cases}$

№ 12.5. $G(t,s)=\begin{cases}\sin s\cos t, & 0\le t\le s\\ \cos s\sin t, & s\le t\le \pi.\end{cases}$

№ 12.6. $G(t,s)=\begin{cases}e^{s}(e^{-t}-1), & 0\le t\le s\\ 1-e^{s}, & s\le t\le 1.\end{cases}$

№ 12.7. $G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{s^2-4}{2s^2}, & 1\le t\le s\\ \dfrac{t^2-4}{2s^2}, & s\le t\le 2.\end{cases}$

№ 12.8. $G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{1-t^3}{3s^3t}, & 1\le t\le s\\ \dfrac{1-s^3}{3s^3t}, & s\le t\le 2.\end{cases}$

13. Однорідні системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

№ 13.1. $\begin{cases} x_1 = 4C_1e^{-2t} + 2C_2e^{-t} + C_3e^t \\ x_2 = C_1e^{-2t} - C_3e^t \\ x_3 = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t} + C_3e^t \end{cases}.$

№ 13.2. $\begin{cases} x_1 = -C_1e^{-t} - 3C_2e^t + C_3e^t \\ x_2 = C_1e^{-t} + C_3e^t \\ x_3 = C_1e^{-t} + C_2e^t \end{cases}.$

№ 13.3. $\begin{cases} x_1 = (6C_1 - 2C_2)e^t \cos t + (6C_2 + 2C_1)e^t \sin t \\ x_2 = 4C_1e^t \cos t + 4C_2e^t \sin t \end{cases}.$

№ 13.4. $\begin{cases} x_1 = -C_1e^t - C_2e^t \cos t - C_3e^t \sin t \\ x_2 = -C_1e^t - (C_3 + 2C_2)e^t \cos t + (C_2 - 2C_3)e^t \sin t \\ x_3 = 2C_1e^t + 3C_2e^t \cos t + 3C_3e^t \sin t \end{cases}.$

№ 13.5. $\begin{cases} x_1 = -C_1e^{-t} + 2C_2e^t + C_3e^{2t} \\ x_2 = -2C_1e^{-t} - C_3e^{2t} \\ x_3 = C_1e^{-t} + C_2e^t + C_3e^{2t} \end{cases}.$

№ 13.6. $\begin{cases} x_1 = 2C_1e^{-t} + C_2e^{-t} + C_3e^t \\ x_2 = 3C_2e^{-t} + 2C_3e^t \\ x_3 = 3C_1e^{-t} + C_3e^t \end{cases}.$

№ 13.7. $\begin{cases} x_1 = (-3C_1 - C_2)e^t \cos 2t + (3C_2 - C_1)e^t \sin 2t \\ x_2 = +2C_1e^t \cos 2t - 2C_2 \sin 2t \end{cases}.$

№ 13.8. $\begin{cases} x_1 = -C_1e^t - (3C_2 + C_3)e^{-t} \cos t + (C_2 - 3C_3)e^{-t} \sin t \\ x_2 = -C_1e^t - (C_3 + 5C_2)e^{-t} \cos t + (C_2 - 5C_3)e^{-t} \sin t \\ x_3 = C_1e^t + 2C_2e^{-t} \cos t + 2C_3e^{-t} \sin t \end{cases}.$

14. Випадок системи лінійних диференціальних рівнянь із матрицею, що має приєднані вектори

14.1. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8,$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{2t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

14.2. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1,$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + C_4 e^{t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

14.3. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27,$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{3t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

14.4. $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 24\lambda^2 - 32\lambda + 16,$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \left[t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + C_4 e^{2t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

15. Неоднорідні системи лінійних диференціальних рівнянь

№ 15.1. $\begin{cases} x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t \\ x_2 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2 \end{cases}.$

№ 15.2. $\begin{cases} x_1 = C_1 + 2C_2 e^{-t} + 2e^{-t} \ln|e^t - 1| \\ x_2 = -2C_1 - 3C_2 e^{-t} - 3e^{-t} \ln|e^t - 1| \end{cases}.$

№ 15.3. $\begin{cases} x_1 = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - (12t + 13)e^t \\ x_2 = C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-3t} - (8t + 6)e^t \end{cases}.$

№ 15.4. $\begin{cases} x_1 = C_1\cos t + C_2\sin t + t\sin t - t\cos t \\ x_2 = C_1(\sin t + \cos t) + C_2(\sin t - \cos t) - 2t\cos t + \sin t + \cos t \end{cases}$.

№ 15.5. $\begin{cases} x_1 = C_1e^t + 2C_2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t}\operatorname{arctg} e^t \\ x_2 = C_1e^t + 3C_2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) + 3e^{2t}\operatorname{arctg} e^t \end{cases}$.

№ 15.6. $\begin{cases} x_1 = C_1\cos t + C_2\sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\ln|\cos t| \\ x_2 = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + 2\cos t\ln|\cos t| + 2t\sin t \end{cases}$.

№ 15.7. $\begin{cases} x_1 = C_1e^{2t} + 3C_2e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t} \\ x_2 = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t} \end{cases}$.

№ 15.8. $\begin{cases} x_1 = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + \cos t - 2\sin t \\ x_2 = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t \end{cases}$.

16. Розв'язання систем диференціальних рівнянь методом виключень

№ 16.1. $\begin{cases} x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t} \\ y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} \end{cases}$.

№ 16.2. $\begin{cases} x = (C_1 + C_2t)e^t \\ y = (2C_1 - C_2 + 2C_2t)e^t \end{cases}$.

№ 16.3. $\begin{cases} x = (C_1\cos t + C_2\sin t)e^t + (C_3\cos t + C_4\sin t)e^{-t} \\ y = (-C_1\sin t + C_2\cos t)e^t + (-C_4\cos t + C_3\sin t)e^{-t} \end{cases}$.

№ 16.4. $\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t} + te^t - t^2 - 2 \\ y = C_1e^t - C_2e^{-t} + (t-1)e^t - 2t \end{cases}$.

№ 16.5. $\begin{cases} x = C_1e^t\cos t + C_2e^t\sin t + e^t + t + 1 \\ y = C_1e^t(-\cos t - \sin t) + C_2e^t(\cos t - \sin t) - 2e^t - 2t - 1 \end{cases}$.

№ 16.6. $\begin{cases} x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t) \\ y = e^{2t}[(C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t] \end{cases}$.

№ 16.7. $\begin{cases} x = (C_1 + 3C_2t)e^{2t} \\ y = (C_2 - C_1 - 3C_2t)e^{2t} \end{cases}$.

№ 16.8. $\begin{cases} x = -2e^t(C_1 + C_2 + C_2t) - 2e^{-t}(C_3 - C_4 + C_4t) \\ y = e^t(C_1 + C_2t) + e^{-t}(C_3 + C_4t) \end{cases}.$

№ 16.9. $\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{4t} + 3e^{5t} \\ y = -C_1e^t + C_2e^{4t} + e^{5t} \end{cases}.$

№ 16.10. $\begin{cases} x = C_1(\cos 2t - \sin 2t) + C_2(\cos 2t + \sin 2t) \\ y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + e^{-2t} \end{cases}.$

17. Метод перших інтегралів

№ 17.1. $x^2 - y^2 = C_1,\ x + y = C_2z$.

№ 17.2. $x - y = C_1(y - z),$

$(x + y + z)(x - y)^2 = C_2$.

№ 17.3. $x + z = C_1,$

$(x + y + z)(y - 3x - z) = C_2$.

№ 17.4. $x^2 - z^2 = C_1,\quad y^2 - u^2 = C_2,\quad (x + z) = C_3(u + y).$

№ 17.5. $x = C_1y,\quad xy - 2\sqrt{z^2 + 1} = C_2.$

№ 17.6. $x + z = C_1,\quad y + u = C_2,$

$(x - z)^2 + (y - u)^2 = C_3$.

№ 17.7. $x^2 - 2y = C_1,\ \ 6xy - 2x^3 - 3z^2 = C_2.$

№ 17.8. $y^2 + z^2 = C_1,\quad x - yz = C_2.$

№ 17.9. $x = C_1y,\quad xy - z = C_2x$.

№ 17.10. $y = C_1z,\ x - y^2 - z^2 = C_2z$.

18. Варіаційне числення

№ 18.1. $x(t) = \dfrac{t^3 - t}{12}.$

№ 18.2. $x(t) = \dfrac{e}{t} - \ln t$.

№ 18.3. Розв'язків не існує.

№ 18.4. $x(t)=\operatorname{sh}2t-\dfrac{\operatorname{sh}2}{\operatorname{sh}1}\operatorname{sh}t$.

№ 18.5. $x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}+\sin t$.

№ 18.6. $x_1=\sin t,\ x_2=-\sin t$.

№ 18.7. $x_1=t^4,\ x_2=t^3$.

№ 18.8. $x(t)=(C+t)\sin t$.

№ 18.9. $x(t)=t^3-t$.

№ 18.10. $x(t)=\dfrac{\operatorname{sh}t}{2\operatorname{sh}1}-\dfrac{t}{2}$.

№ 18.11. $x(t)=\dfrac{t}{2}e^t-\operatorname{sh}t$.

№ 18.12. $x(t)=e^t-e^{-3t}$.

№ 18.13. $x_1=e^t,\ x_2=e^{-t}$.

№ 18.14. $x_1=\frac{t^2}{2}+1,\ x_2\equiv 1$.

20. Інтегральне рівняння Фредгольма

№ 20.1. $x(t)=3t$.

№ 20.2. $x(t)=1-t$.

№ 20.3. $x(t)=\sin t+\cos t$.

№ 20.4. Розв'язків не існує.

№ 20.5. $x(t)=\sin\dfrac{\pi t}{2}$.

№ 20.6. $x(t)=3\pi^2\sin\pi t\left(3\sin^2\pi t-2\right)$.

№ 20.7. $x(t)=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\sin|t-s|\,x(s)ds+\frac{1}{2}\ddot{f}(t)$.

№ 20.8. $x(t)=2/3$.

№ 20.9. $x(t)=4\sin t$.

№ 20.10. $x(t) = t + C(1 - t^2), \forall C \in \mathbb{R}$.

№ 20.11. $x(t) = t$.

№ 20.12. $x(t) = 2e^t - 2 + (2 - e)t$.

№ 20.13. $x(t) = \cos t$.

№ 20.14. $x(t) = -\int_2^3 \frac{1}{\left(|t-s| + i\right)^3} x(s)ds + \frac{1}{2}\ddot{f}(t)$.

21. Інтегральне рівняння Вольтерра

№ 21.1. $x(t) = e^t$.

№ 21.2. $x(t) = 1$.

№ 21.3. $x(t) = e^t(t+1)$.

№ 21.4. $x(t) = \frac{1}{1+t^2} + t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$.

№ 21.5. $x(t) = 2e^t - 2\cos t + 5\sin t$.

№ 21.6. $x(t) = \frac{1}{6}\left(e^t + 3\cos t + 3\sin t - 4e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

№ 21.7. $x(t) = t$.

№ 21.8. $x(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

№ 21.9. $x(t) = e^{2t}$.

№ 21.10. $x(t) = t^3 e^{t^7/7}$.

№ 21.11. $x(t) = -e^{-t}$.

№ 21.12. $x(t) = 1$.

Список використаних джерел

1. А.Н Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 231с.

2. В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1959. – 468 с.

3. А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980. – 295 с.

4. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1983. – 331с.

5. Л.Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – 2-е изд., – М.: Наука, 1960. – 424 с.

6. И.Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – 7-е изд., – М.: Изд-во МГУ, 1984.

7. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979. – 126 с.

8. А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. – М.: Высшая школа, 1989. – 383 с.

9. Э.А. Вуколов, А.В. Ефимов и др. Сборник задач по математике. 4-я часть. – М.: Наука, 1990. – 302 с.

10. М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев. Вариационное исчисление. Задачи с подробными решениями. – М.: УРСС, 2002. – 166 с.

11. Г.П. Головач, О.Ф. Калайда. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. – К.: Техніка, 1997. – 285 с.

12. А.В. Матросов. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.

13. М.О. Гірник, А.В. Костенко, М.В. Лучко, М.І. Плеша. Maple 7. Основи практичного застосування. – Львів: ВНТЛ-Класика, 2002. – 174 с.

14. С.А. Кривошея, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. Диференціальні та інтегральні рівняння. – К.: Либідь, 2004. – 408 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Дюкарев Юрій Михайлович, **Літвінова** Ольга Геннадіївна

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНІ Й ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник