

Т. П. Гой, О. В. Махней

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
напрямів підготовки
«фізика», «прикладна фізика»

Видання друге, виправлене та доповнене



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист №1/11-5297 від 13.03.2013 р.)*

Рецензенти:

Гасюк І. М., доктор фізико-математичних наук, професор (Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника),

Сторож О. Г., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський національний університет ім. Івана Франка),

Тацій Р. М., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

Гой Т. П.

Г59 Диференціальні та інтегральні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. — Вид. 2-ге, випр. та доп. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. — 360 с.

ISBN 978-966-10-3530-9

У посібнику у вигляді курсу лекцій викладено основи теорії звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь, а також деякі споріднені питання (рівняння з частинними похідними першого порядку, основи стійкості розв'язків рівнянь, елементи варіаційного числення). Автори намагались поєднати строгість викладу матеріалу теорії диференціальних та інтегральних рівнянь з прикладним спрямуванням її методів, наводячи для цього численні приклади з фізики, механіки, інших наук. Кожна лекція супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування.

Для студентів напрямів підготовки «фізика», «прикладна фізика». Може бути корисним для студентів технічних напрямів підготовки.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

ISBN 978-966-10-3530-9

© Т. П. Гой, О. В. Махней, 2014
© Навчальна книга – Богдан, 2014

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	11
РОЗДІЛ 1. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	13
Лекція 1. Поняття про диференціальні рівняння. Приклади задач, які приводять до звичайних диференціальних рівнянь	13
1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь	13
2. Основні означення й поняття	19
3. Складання диференціальних рівнянь виключенням довільних сталих	21
Питання до лекції 1	23
Вправи до лекції 1	24
Лекція 2. Диференціальні рівняння першого порядку (загальна теорія)	25
1. Основні означення й поняття	25
2. Задача Коші. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші	26
3. Класифікація розв'язків диференціального рівняння першого порядку	29
4. Геометричне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків. Метод ізоклін	31
5. Механічне тлумачення диференціального рівняння першого порядку та його розв'язків	35
Питання до лекції 2	36
Вправи до лекції 2	37
Лекція 3. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратах	38
1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них	38
2. Однорідні рівняння	42
3. Рівняння, звідні до однорідних	45
Питання до лекції 3	49

Вправи до лекції 3	50
Лекція 4. Деякі класи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегровних у квадратах (продовження)	51
1. Лінійні рівняння	51
2. Рівняння Бернуллі	55
3. Рівняння у повних диференціалах	58
4. Інтегрувальний множник	61
Питання до лекції 4	63
Вправи до лекції 4	64
Лекція 5. Неявні диференціальні рівняння першого порядку	65
1. Основні означення й поняття	65
2. Окремі випадки інтегровних неявних диференціальних рівнянь першого порядку	68
3. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро	72
4. Задача про ортогональні траєкторії	75
Питання до лекції 5	78
Вправи до лекції 5	78
Лекція 6. Основні властивості розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку	79
1. Принцип стискаючих відображень	79
2. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші	83
3. Продовження розв'язку задачі Коші	87
4. Коректність задачі Коші	89
Питання до лекції 6	90
Вправи до лекції 6	91
РОЗДІЛ 2. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ	92
Лекція 7. Диференціальні рівняння вищих порядків	92
1. Основні означення й поняття	92
2. Неповні рівняння	96
3. Однорідні рівняння	102
Питання до лекції 7	104
Вправи до лекції 7	104

Лекція 8. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку	105
1. Основні означення й поняття	105
2. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння	107
3. Лінійно залежні та лінійно незалежні функції	109
4. Теорема про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння	112
5. Формула Остроградського–Ліувілля	114
Питання до лекції 8	116
Вправи до лекції 8	117
Лекція 9. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами	118
1. Основні означення й поняття	118
2. Метод Ейлера. Випадок простих характеристичних чисел	119
3. Метод Ейлера. Випадок кратних характеристичних чисел	122
4. Диференціальні рівняння, звідні до рівнянь зі сталими коефіцієнтами	124
5. Застосування лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	126
Питання до лекції 9	130
Вправи до лекції 9	131
Лекція 10. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку	132
1. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння	132
2. Метод варіації довільних сталих	134
3. Метод невизначених коефіцієнтів	137
4. Застосування лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку до коливальних рухів	142
Питання до лекції 10	146
Вправи до лекції 10	147

Лекція 11. Лінійні однорідні рівняння другого порядку	148
1. Канонічна форма лінійного однорідного рівняння другого порядку	148
2. Самоспряжена форма лінійного однорідного рівняння другого порядку	151
3. Побудова загального розв'язку у випадку, якщо відомий один частинний розв'язок	152
4. Використання формули Остроградського–Ліувілля для інтегрування лінійних однорідних рівнянь другого порядку	154
5. Інтегрування лінійних рівнянь з допомогою степеневих рядів	155
Питання до лекції 11	161
Вправи до лекції 11	162
Лекція 12. Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку	163
1. Основні означення й поняття	163
2. Існування та єдиність розв'язку крайової задачі	164
3. Функція Гріна крайової задачі	166
4. Крайові задачі на власні значення	170
Питання до лекції 12	173
Вправи до лекції 12	173
РОЗДІЛ 3. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	174
Лекція 13. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)	174
1. Основні означення й поняття	174
2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків	180
3. Зведення диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи й обернена задача	181
4. Лінійні однорідні системи	184
Питання до лекції 13	187
Вправи до лекції 13	188

Лекція 14. Лінійні однорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	188
1. Лінійно залежні (незалежні) сукупності функцій	188
2. Формула Остроградського–Якобі	192
3. Теорема про побудову загального розв’язку лінійної однорідної системи	193
4. Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Метод Ейлера	194
Питання до лекції 14	203
Вправи до лекції 14	203
Лекція 15. Лінійні неоднорідні системи звичайних диференціальних рівнянь	204
1. Структура загального розв’язку лінійної неоднорідної системи	204
2. Метод варіації довільних сталих	206
3. Метод невизначених коефіцієнтів	209
4. Метод Д’Аламбера	213
Питання до лекції 15	214
Вправи до лекції 15	215
РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	216
Лекція 16. Лінійні однорідні рівняння з частинними похідними першого порядку	216
1. Зв’язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку з відповідною системою характеристик	216
2. Побудова загального розв’язку лінійного однорідного рівняння	220
3. Задача Коші для лінійного однорідного рівняння	223
Питання до лекції 16	225
Вправи до лекції 16	225

Лекція 17. Квазілінійні та нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку	226
1. Побудова загального розв'язку квазілінійного рівняння першого порядку	226
2. Задачі Коші для квазілінійного рівняння першого порядку	229
3. Нелінійні рівняння з частинними похідними першого порядку	232
4. Рівняння Пфаффа	235
Питання до лекції 17	238
Вправи до лекції 17	238
РОЗДІЛ 5. СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	239
Лекція 18. Основи теорії стійкості за Ляпуновим	239
1. Основні означення й поняття	239
2. Дослідження на стійкість точок спокою	243
3. Стійкість за першим наближенням	245
4. Критерії Рауса–Гурвіца, Л'єнара–Шипара	250
Питання до лекції 18	252
Вправи до лекції 18	252
Лекція 19. Теорема Ляпунова. Фазова площина	253
1. Дослідження на стійкість з використанням функцій Ляпунова	253
2. Класифікація точок спокою автономної системи	256
Питання до лекції 19	268
Вправи до лекції 19	268
РОЗДІЛ 6. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ	269
Лекція 20. Інтегральні рівняння, їх застосування та деякі методи розв'язування	269
1. Основні означення й поняття	269
2. Фізичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь	271
3. Зв'язок між інтегральними рівняннями та задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь	274
Питання до лекції 20	280

Вправи до лекції 20	281
Лекція 21. Лінійні інтегральні рівняння	282
1. Метод послідовних наближень для рівняння Фредгольма	282
2. Метод послідовних наближень для рівняння Вольтерри	286
3. Метод ітерованих ядер для рівняння Фредгольма	289
4. Метод ітерованих ядер для рівняння Вольтерри	293
Питання до лекції 21	296
Вправи до лекції 21	297
Лекція 22. Інтегральні рівняння з виродженими ядрами та інтегральні рівняння першо- го роду	298
1. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з ви- родженими ядрами. Основні означення й поняття	298
2. Теорема Фредгольма	300
3. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду й ін- тегральні рівняння Вольтерри першого роду	309
Питання до лекції 22	313
Вправи до лекції 22	313
РОЗДІЛ 7. ОСНОВИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕН- НЯ	314
Лекція 23. Найпростіші варіаційні задачі	314
1. Предмет варіаційного числення. Класичні варіаційні задачі	314
2. Основи означення й поняття варіаційного числення	318
3. Найпростіша задача варіаційного числення	322
Питання до лекції 23	329
Вправи до лекції 23	330
Лекція 24. Деякі узагальнення найпростішої варіа- ційної задачі	330
1. Варіаційна задача з кількома функціями	330
2. Варіаційна задача з похідними вищих порядків	333
3. Ізопериметрична задача	337
Питання до лекції 24	344

Вправи до лекції 24	345
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ . .	346
КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО ВЧЕНИХ, ЯКІ ЗГА- ДУЮТЬСЯ У ПОСІБНИКУ	348
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	355

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні та інтегральні рівняння й методи дослідження їхніх розв'язків широко використовуються у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Диференціальні та інтегральні рівняння» займає чільне місце у підготовці спеціалістів з фізики, механіки, електроніки, хімії, матеріалознавства, біології, машинобудування тощо.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних та інтегральних рівнянь для студентів напрямів підготовки «фізика», «прикладна фізика», але може бути використаний також студентами інженерно-технічних вищих навчальних закладів.

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу з допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд курсу з 24 лекцій, які умовно можна поділити на 7 розділів: «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь», «Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку», «Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь», «Інтегральні рівняння», «Основи варіаційного числення».

Те, що авторами названо «лекціями», можна вважати ними умовно — передовсім через обсяг, який не завжди відповідає двом академічним годинам, а також через нерівномірно розподілений матеріал. Насправді, термін «лекція» — це радше певний тематично об'єднаний матеріал, який може бути основою для справжньої лекції та відповідного практичного заняття.

Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами та задачами. Кінець розв'язаних прикладів і задач позначається символом ■, але у тих випадках, де було ймовірним «за-

губити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу чи задачі.

Кожна лекція супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми (у поєднанні з іншими збірниками). Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

У другому виданні виправлено помічені недоліки і помилки та оновлено рекомендовану літературу.

Сподіваємось, що цей посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

Усі критичні зауваження, рекомендації й побажання з вдячністю будуть сприйняті авторами та враховані для покращення змісту наступних видань посібника. Усю інформацію просимо надсилати на e-mail: tarasgoy@yahoo.com, makhney1@yahoo.com.

Розділ 3

СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Лекція 13. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)

План

1. Основні означення й поняття.
2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків.
3. Зведення диференціального рівняння n -го порядку до нормальної системи й обернена задача.
4. Лінійні однорідні системи.

1. Основні означення й поняття. Розв'язуючи багато проблем сучасної фізики та техніки, доводиться визначати відразу декілька невідомих функцій з відповідної кількості диференціальних рівнянь, тобто мати справу із системою диференціальних рівнянь. Сукупність співвідношень вигляду

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0, \end{cases} \quad (13.1)$$

де y_1, y_2, \dots, y_n — шукані функції незалежної змінної x , називають *системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку*.

Якщо (13.1) можна розв'язати відносно похідних усіх функцій, то одержимо систему

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad (13.2)$$

яку називають *нормальною*.

Розв'язком системи (13.2) на деякому інтервалі (a, b) називають упорядковану сукупність функцій

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \dots, \quad y_n = y_n(x), \quad (13.3)$$

визначених і неперервно диференційованих на цьому інтервалі, якщо вона перетворює всі рівняння системи (13.2) у тотожності, які справджуються для всіх значень $x \in (a, b)$. Криву в $(n + 1)$ -вимірному просторі $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, яка відповідає розв'язку (13.3), називають **інтегральною кривою** системи (13.2).

Задача Коші для системи (13.2) формулюється так: серед усіх розв'язків цієї системи знайти розв'язок (13.3), який задовольняє умови

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}, \quad (13.4)$$

де $x = x_0$ — довільна точка з проміжку (a, b) , а $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ — довільні наперед задані дійсні числа (їх називають **початковими даними розв'язку**). Сукупність чисел $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ називають **початковими даними системи** (13.2), а умови (13.4) — **початковими умовами** системи (13.2).

З геометричної точки зору задача Коші полягає у відшуванні серед усіх інтегральних кривих системи (13.2) такої кривої, яка проходить через задану точку $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$.

Розглядаючи задачу Коші (13.2), (13.4), природно виникає питання про існування та єдиність її розв'язку. Виявляється, що для існування неперервно диференційованого розв'язку цієї задачі досить припустити, щоб *праві частини системи* (13.2) *були неперервними в деякому околі початкових даних* (**теорема Пеано**). Наступна теорема гарантує існування єдиного розв'язку задачі Коші (13.2), (13.4) (доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, у [21, с. 93–99]).

Теорема (Коші). *Нехай праві частини системи* (13.2) *визначені в* $(n + 1)$ -*вимірному паралелепіпеді*

$$G = \{(x, y_1, y_2, \dots, y_n) : |x - x_0| \leq a, \quad |y_j - y_{j0}| \leq b, \quad j = 1, 2, \dots, n\}$$

де $a > 0, b > 0$, *і задовольняють у ньому такі умови:*

ОСТРОГРАДСЬКИЙ Михайло Васильович (1801–1862) — український і російський математик (родом з Полтавщини), член Петербурзької Академії наук та багатьох закордонних академій наук. Розв'язав низку важливих задач математичної фізики, теорії звичайних диференціальних рівнянь (формули Остроградського–Ліувілля, Остроградського–Якобі), варіаційного числення, теоретичної механіки. Запропонував спосіб зведення неоднорідної крайової задачі до однорідної.

ПЕАНО Джузеппе (Peano Giuse; 1858–1932) — італійський математик. Запропонував систему аксіом арифметики, довів теорему існування розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння з неперервною правою частиною, першим побудував неперервну криву, яка цілком заповнює квадрат (крива Пеано).

ПКАР Шарль Еміль (Picard Charles Émile; 1856–1941) — французький математик. Основні праці з теорії диференціальних рівнянь (дослідження особливих точок, асимптотичні розв'язки, метод послідовних наближень розв'язування задачі Коші).

ПУАНКАРЕ Анрі Жюль (Poincare Henri Jules; 1854–1912) — французький математик, фізик, астроном і філософ. Автор понад 1000 праць з диференціальних рівнянь, теорії потенціалів, математичної фізики, небесної механіки. Один із засновників якісної теорії диференціальних рівнянь.

ПУАССОН Сімеон Дені (Poisson Siméon Denis; 1781–1840) — французький математик, механік і фізик. Автор важливих праць з теоретичної механіки, математичної фізики, варіаційного числення, теорії ймовірностей. Зокрема, ввів так зване рівняння Пуассона і застосував його до розв'язування задач гравітації та електростатики. Досліджував питання теплопровідності, магнетизму, капілярності, поширення звукових хвиль та ін.

ПФАФФ Йоганн Фрідріх (Pfaff Johann Friedrich; 1765–1825) — німецький математик і астроном. Відомий дослідженнями з теорії диференціальних рівнянь (рівняння Пфаффа).

РАУС Едвард Джон (Routh Edward John; 1831–1907) — англійський механік і математик. Відомий працями з теоретичної механіки. Займався проблемами стійкості рівноваги і руху (критерій Рауса – Гурвіца). Встановив спеціальний алгоритм для визначення кількості коренів алгебричного рівняння, які мають додатні дійсні частини (теорема Рауса).

РІККАТІ Джакопо Франческо (Riccati Jacopo Francesco; 1676–1754) — італійський математик та інженер. Основні праці стосуються інтегрального числення й диференціальних рівнянь, зокрема інтегров-

ності у квадратурах одного класу диференціальних рівнянь першого порядку (спеціальне рівняння Ріккати).

СИЛЬВЕСТР Джеймс Джозеф (Sylvester James Joseph; 1814–1897) — англійський математик. Основні праці з алгебри (критерій Сильвестра), теорії чисел, теорії ймовірностей, механіки і математичної фізики.

ТЕЙЛОР Брук (Taylor Brook; 1685–1731) — англійський математик. Вивів загальну формулу (формула Тейлора) розвинення функцій у степеневі ряди (ряди Тейлора), започаткував математичну теорію коливання струни. Автор робіт, присвячених перспективі, взаємодії магнітів, капілярності та ін.

ФРЕДГОЛЬМ Ерік Івар (Fredholm Erik Ivar; 1866–1927) — шведський математик. Засновник загальної теорії лінійних інтегральних рівнянь (рівняння Фредгольма, теореми Фредгольма).

ФУР'Є Жан Батист Жозеф (Fourier Jean Baptiste Joseph; 1768–1830) — французький математик. Найвагоміші результати отримав у математичній фізиці. Зокрема, вивів диференціальне рівняння теплопровідності, розробив метод розв'язування цього рівняння при певних крайових умовах (метод Фур'є). Його ідеї стали потужним інструментом математичного дослідження найрізноманітніших задач, пов'язаних з хвилями і коливаннями (астрономія, акустика, радіотехніка та ін.).

ХОПФ Еберхард (Hopf Eberhard; 1902–1983) — німецький і американський математик. Основні роботи стосуються теорії динамічних систем і диференціальних рівнянь з частинними похідними. Займався також астрофізикою.

ШТУРМ Жак Шарль Франсуа (Sturm Jacques Charles François; 1803–1855) — швейцарський математик. Основні праці присвячені задачам математичної фізики та пов'язаним з ними крайовим задачам на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь (задача Штурма–Ліувілля). Заклав основи теорії коливності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь. Автор важливих робіт з оптики і механіки.

ЯКОБІ Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob; 1804–1851) — німецький математик. Йому належать відкриття в теорії чисел, алгебрі, варіаційному численні, інтегральному численні та теорії диференціальних рівнянь. Досліджував диференціальні рівняння динаміки, розробив нові методи їх розв'язування.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Альтернатива Фредгольма 309
- Багаточлен характеристичний 119
– Чебишова 126
- Варіація аргументу 320
– функціонала 320
- Визначник Вронського (вронскі-ан) 110, 190
– Фредгольма 300
– характеристичний 195
- Відстань 319
- Вронскіан (визначник Вронського) 110, 190
- Вузол нестійкий 260, 265
– стійкий 259, 265
- Графік руху 35
- Дані початкові 26, 93, 175, 181
- Екстремаль 324, 332, 334, 341
– допустима 324, 332, 334, 341
- ϵ -окіл 319
– сильний 319
– слабкий 319
- Задача Абеля 271
– варіаційна 315
– – з кількома функціями 330
– – з похідними вищого порядку 333
– – найпростіша 322
– з закріпленими межами 322
– ізопериметрична 315, 337
– Коші 26, 67, 92, 175, 181, 223, 229
– крайова 163
– – на власні значення 171
– – неоднорідна 164
– – однорідна 164
- початкова (задача Коші) 26
– про брахістохрону 316
– геодезичні лінії 317
– Штурма – Ліувілля 172
- Залежність лінійна 109, 189
- Збурення 243
- Значення власне 171
– функціонала 318
- Ізокліна 32
- Інваріант 150
- Інтеграл диференціального рівняння 29
– енергії 326
– загальний 29, 95, 177
– імпульсу 326
– незалежний 177
– перший 177
– – незалежний 177
– системи 176
- Інтегрант 322, 331, 333
- Коефіцієнт рівняння 26, 106
– стиснення 80
- Коливання вільне 130
– власне 130
– гармонічне 128
– – згасаюче 129
– гармонічне накладене 143
- Комбінація інтегровна 177
- Коректність задачі Коші 89
- Крива інтегральна 21, 175
- Критерій Л'єнара–Шипара 250
– Рауса–Гурвіца 250
– Сильвестра 254
- Лагранжіан 341
- Лема Лагранжа 322

- основна варіаційного числення 322
- Лінії геодезичні 317
- рівня 77
- силові 77
- Максимум функціонала 321
 - абсолютний 321
 - локальний 321
 - – сильний 321
 - – слабкий 321
- Метод Бернуллі 64
 - варіації довільних сталих 52, 134, 206
 - виключення 182
 - відокремлення змінних 39
 - Д'Аламбера 213
 - Ейлера 65, 194
 - ізоклін 33
 - ітерацій (послідовних наближень) 81
 - Лагранжа 52, 134, 206
 - множників Лагранжа 337
 - невизначених коефіцієнтів 137, 209
 - послідовних наближень (ітерацій) 81
 - степеневих рядів 155
 - уведення параметра 70, 72
- Метрика 79, 319
- Мінімум функціонала 321
 - абсолютний 321
 - локальний 321
 - – сильний 321
 - – слабкий 321
- Множник інтегрувальний 61
 - Лагранжа 341
- Наближення послідовні 82
- Обвідна 31
- Область визначення функціонала 318
- Обмеження ізопериметричні 337
- Оператор 80
 - інтегральний Фредгольма 85, 282
 - лінійний диференціальний 107
 - стискаючий 80
- Площина фазова 180
- Поверхня інтегральна 217
- Поле напрямів 31
- Положення рівноваги 244
- Портрет фазовий 256
- Порядок рівняння 19
 - з частинними похідними 216
 - звичайного диференціального 19, 105
- Принцип варіаційний 315
 - стискаючих відображень 81
- Приріст функціонала 320
- Простір метричний 79
 - n -вимірний евклідовий 80
 - повний 80
 - фазовий 180
- Пряма фазова 180
- Ранг крайової задачі 165
 - характеристичного числа 304
- Резольвента 292, 295, 304
- Резонанс 144
- Рівняння Абеля 273
 - автономне 36
 - Бернуллі 55
 - Бесселя 150
 - Вольтерри 270
 - диференціальне 13
 - – з частинними похідними 20, 216
 - – звичайне 19
 - – сім'ї кривих 22
- Ейлера 124, 324, 341

- Ейлера–Пуассона 334
- з відокремленими змінними 39
- з відокремлюваними змінними 38
- інтегральне 269
 - – другого роду 270
 - – лінійне 270
 - – – неоднорідне 271
 - – – однорідне 271
 - – першого роду 270
 - – спряжене 305
- квазілінійне 226
- Клеро 74
- коливач 127
 - – вимушених 127, 142
 - – вільних 127
- Лагерра 162
- Лагранжа 72, 125
- Лежандра 153
- лінійне другого порядку 148
 - – з частинними похідними першого порядку 218
 - – зі сталими коефіцієнтами 118, 137
 - – неоднорідне n -го порядку 106
 - – – з частинними похідними першого порядку 226
 - – – першого порядку 52
 - – однорідне n -го порядку 106
 - – – з частинними похідними першого порядку 218
 - – – першого порядку 52
 - – першого порядку 51
- неявне 65
 - – , яке містить тільки похідну 68
 - – , не розв’язане відносно похідної 65
- однорідне 43, 102
- першого порядку степеня n 69
- Пфаффа 235
- Ріккати 64
- самоспряжене 151
- стаціонарне 36
- у повних диференціалах 58
- Фредгольма 270
- характеристичне 119, 195
- Чебишова 125
- Чебишова–Ерміта 162
- Розв’язок звичайного диференціального рівняння 20, 26, 65, 92
 - – загальний 29, 94
 - – – у параметричній формі 29, 95
 - – комплексний 107
 - – особливий 30, 95
 - – тривіальний 108
 - – у квадратурах 21
 - – частинний 30, 95
- рівняння з частинними похідними 217
 - – загальний 221, 228
 - – інтегрального рівняння 271, 283
 - – загальний 305
- крайової задачі 164
- системи звичайних диференціальних рівнянь 175
 - – асимптотично стійкий 241, 244
 - – загальний 176
 - – збурений 242
 - – комплексний 186
 - – незбурений 242
 - – нестійкий 242
 - – особливий 176
 - – стійкий (за Ляпуновим) 241, 244
 - – тривіальний 185, 243
 - – частинний 176
- Рух 35, 94, 180, 240
 - аперіодичний згасаючий 130
 - усталений 181
- Ряд степеневий 155
 - узагальнений 159

- Система автономна 181
- звичайних диференціальних рівнянь першого порядку 174
 - лінійна 184
 - – неоднорідна 185
 - – однорідна 185
 - нормальна 174
 - першого наближення 246
 - рівнянь Ейлера 332
 - розв'язків фундаментальна 112, 193
 - спряжена 306
 - стаціонарна 181
- Система характеристик 219, 227, 228
- характеристична 219
- Сідло 261
- Сім'я інтегральних кривих 21
- Стан спокою 36, 181
- Теорема Коші 28, 83, 94, 175
- Ляпунова 248, 253
 - Пеано 26, 94, 175
 - про неперервну залежність розв'язків від параметру 89
 - про неперервну залежність розв'язків від початкових умов 90
 - Фредгольма 301, 306, 307
- Типи Пуанкаре 257
- Точка аналітичності рівняння 156
- нерухома 81
 - особлива 29, 158
 - – регулярна 159
 - простору 79, 318
 - рівноваги 36
 - руху початкова 181
 - спокою 36, 181, 244
- Траекторія ортогональна 75
- руху 180
- Умова Ліпшица 86
- необхідна екстремуму функціонала 321
 - і достатня лінійної незалежності функцій 112, 191
 - – лінійної залежності функцій 110, 190
 - – – незалежності розв'язків 111, 191
 - сумісності системи нелінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку 233
 - повної інтегровності рівняння Пфаффа 236
- Умови крайові 163
- – однорідні 164
 - початкові 26, 93, 175, 223, 229
 - розв'язності інтегрального рівняння 307
- Фокус нестійкий 264
- стійкий 263
- Формула Абеля 153
- Ейлера 121
 - Остроградського–Ліувілля 115
 - Остроградського–Якобі 192
- Формули Пікара 28
- Функціонал 314
- лінійний 319
- Функція аналітична 156
- власна 171, 304
 - Гріна 167
 - допустима 322, 331, 333, 337
 - Ляпунова 254
 - однорідна 42
- Центр 263
- Цикл граничний 257
- Число характеристичне 119, 195
- ядра характеристичне 300
- Ядра ітеровані (повторні) 291, 295
- Ядро вироджене 278, 298
- інтегрального рівняння 269
 - спряжене 305



Навчальне видання

ГОЙ Тарас Петрович
МАХНЕЙ Олександр Володимирович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Видання друге, виправлене та доповнене

Головний редактор *Богдан Будний*

Редактор *Володимир Дячун*

Художник обкладинки *Андрій Кравчук*

Дизайн та комп'ютерна верстка *Тараса Гоя,*

Олександра Махнея

Підписано до друку 12.01.2014. Формат 60×84/16. Папір офсетний.

Гарнітура Computer Modern Roman. Умовн. друк. арк. 20,93.

Умовн. фарбо-відб. 20,93.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи

до Державного реєстру видавців,

виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції

ДК № 4221 від 07.12.2011 р.

Навчальна книга – Богдан, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46002

Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м. Тернопіль, 46008

тел./факс (0352)52-06-07; 52-19-66; 52-05-48

office@bohdan-books.com

www.bogdan-books.com

ISBN 978-966-10-3530-9

