Т. П. Гой, О. В. Махней

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
напрямів підготовки
«фізика», «прикладна фізика»

Видання друге, виправлене та доповнене

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА – БОГДАН

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Г 59

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист №1/11-5297 від 13.03.2013 р.)

Рецензенти:

Гасюк І. М., доктор фізико-математичних наук, професор (Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника),

Сторож О. Г., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський національний університет ім. Івана Франка),

Тацій Р. М., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський державний університет безпеки життєдіяльності)

Гой Т. П.

Г59 Диференціальні та інтегральні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. — Вид. 2-ге, випр. та доп. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. — 360 с.

ISBN 978-966-10-3530-9

У посібнику у вигляді курсу лекцій викладено основи теорії звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь, а також деякі споріднені питання (рівняння з частинними похідними першого порядку, основи стійкості розв'язків рівнянь, елементи варіаційного числення). Автори намагались поєднати строгість викладу матеріалу теорії диференціальних та інтегральних рівнянь з прикладним спрямуванням її методів, наводячи для цього численні приклади з фізики, механіки, інших наук. Кожна лекція супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування.

Для студентів напрямів підготовки «фізика», «прикладна фізика». Може бути корисним для студентів технічних напрямів підготовки.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

ISBN 978-966-10-3530-9

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні та інтегральні рівняння й методи дослідження їхніх розв'язків широко використовуються у різноманітних галузях і розділах сучасної науки й техніки. Саме тому навчальна дисципліна «Диференціальні та інтегральні рівняння» займає чільне місце у підготовці спеціалістів з фізики, механіки, електроніки, хімії, матеріалознавства, біології, машинобудування тощо.

Пропонований посібник охоплює основну частину університетської програми з диференціальних та інтегральних рівнянь для студентів напрямів підготовки «фізика», «прикладна фізика», але може бути використаний також студентами інженерно-технічних вищих навчальних закладів.

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу з допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка їх до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник має вигляд курсу з 24 лекцій, які умовно можна поділити на 7 розділів: «Звичайні диференціальні рівняння першого порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків», «Системи звичайних диференціальних рівнянь», «Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку», «Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь», «Інтегральні рівняння», «Основи варіаційного числення».

Те, що авторами названо «лекціями», можна вважати ними умовно — передовсім через обсяг, який не завжди відповідає двом академічним годинам, а також через нерівномірно розподілений матеріал. Насправді, термін «лекція» — це радше певний тематично об'єднаний матеріал, який може бути основою для справжньої лекції та відповідного практичного заняття.

Важливі поняття, теореми, методи ілюструються прикладами та задачами. Кінець розв'язаних прикладів і задач позначається символом ■, але у тих випадках, де було ймовірним «загубити» відповідь серед тексту, її написано в кінці прикладу чи задачі.

Кожна лекція супроводжується питаннями для контролю та самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми (у поєднанні з іншими збірниками). Посібник може використовуватись і як довідник, чому сприяє детальний предметний покажчик.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

У другому виданні виправлено помічені недоліки і помилки та оновлено рекомендовану літературу.

Сподіваємось, що цей посібник допоможе студентам в оволодінні важливими розділами сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

Усі критичні зауваження, рекомендації й побажання з вдячністю будуть сприйняті авторами та враховані для покращення змісту наступних видань посібника. Усю інформацію просимо надсилати на e-mail: tarasgoy@yahoo.com, makhney1@yahoo.com.

Розділ 3
СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Лекція 13. Системи звичайних диференціальних рівнянь (загальна теорія)

План

1. Основні означення й поняття.
2. Механічне тлумачення нормальної системи та її розв'язків.
3. Зведення диференціального рівняння n-го порядку до нормальної системи й обернена задача.
4. Лінійні однорідні системи.

1. Основні означення й поняття. Розв'язуючи багато проблем сучасної фізики та техніки, доводиться визначати відразу декілька невідомих функцій з відповідної кількості диференціальних рівнянь, тобто мати справу із системою диференціальних рівнянь. Сукупність співвідношень вигляду

$$\begin{cases} F_1\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n,\, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ F_2\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n,\, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ F_n\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n,\, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0, \end{cases} \tag{13.1}$$

де y_1, y_2, $\ldots$, y_n — шукані функції незалежної змінної x, називають ***системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку***.

Якщо (13.1) можна розв'язати відносно похідних усіх функцій, то одержимо систему

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \quad\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{13.2}$$

яку називають ***нормальною***.

Розв'язком системи (13.2) на деякому інтервалі (a, b) називають упорядковану сукупність функцій

$$y_1 = y_1(x), \ \ y_2 = y_2(x), \ \ldots, \ y_n = y_n(x), \qquad (13.3)$$

визначених і неперервно диференційовних на цьому інтервалі, якщо вона перетворює всі рівняння системи (13.2) у тотожності, які справджуються для всіх значень $x \in (a, b)$. Криву в $(n+1)$-вимірному просторі $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, яка відповідає розв'язку (13.3), називають ***інтегральною кривою*** системи (13.2).

Задача Коші для системи (13.2) формулюється так: серед усіх розв'язків цієї системи знайти розв'язок (13.3), який задовольняє умови

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \ \ldots, \ y_n(x_0) = y_{n0}, \qquad (13.4)$$

де $x = x_0$ — довільна точка з проміжку (a, b), а y_{10}, y_{20}, $\ldots$, y_{n0} — довільні наперед задані дійсні числа (їх називають ***початковими даними розв'язку***). Сукупність чисел x_0, y_{10}, y_{20}, $\ldots$, y_{n0} називають ***початковими даними системи*** (13.2), а умови (13.4) — ***початковими умовами*** системи (13.2).

З геометричної точки зору задача Коші полягає у відшуканні серед усіх інтегральних кривих системи (13.2) такої кривої, яка проходить через задану точку $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$.

Розглядаючи задачу Коші (13.2), (13.4), природно виникає питання про існування та єдиність її розв'язку. Виявляється, що для існування неперервно диференційовного розв'язку цієї задачі досить припустити, щоб *праві частини системи* (13.2) *були неперервними в деякому околі початкових даних* (***теорема Пеано***). Наступна теорема гарантує існування єдиного розв'язку задачі Коші (13.2), (13.4) (доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, у [21, с. 93–99]).

Теорема (Коші). *Нехай праві частини системи* (13.2) *визначені в* $(n+1)$*-вимірному паралелепіпеді*

$$G = \{(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) : |x - x_0| \leqslant a, \ \ |y_j - y_{j0}| \leqslant b, \ \ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

де $a > 0$, $b > 0$, *і задовольняють у ньому такі умови*:

ОСТРОГРАДСЬКИЙ Михайло Васильович (1801–1862) — український і російський математик (родом з Полтавщини), член Петербурзької Академії наук та багатьох закордонних академій наук. Розв'язав низку важливих задач математичної фізики, теорії звичайних диференціальних рівнянь (формули Остроградського–Ліувілля, Остроградського–Якобі), варіаційного числення, теоретичної механіки. Запропонував спосіб зведення неоднорідної крайової задачі до однорідної.

ПЕАНО Джузеппе (Peano Giuse; 1858–1932) — італійський математик. Запропонував систему аксіом арифметики, довів теорему існування розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння з неперервною правою частиною, першим побудував неперервну криву, яка цілком заповнює квадрат (крива Пеано).

ПІКАР Шарль Еміль (Picard Charles Émile; 1856–1941) — французький математик. Основні праці з теорії диференціальних рівнянь (дослідження особливих точок, асимптотичні розв'язки, метод послідовних наближень розв'язування задачі Коші).

ПУАНКАРЕ Анрі Жюль (Poincare Henri Jules; 1854–1912) — французький математик, фізик, астроном і філософ. Автор понад 1000 праць з диференціальних рівнянь, теорії потенціалів, математичної фізики, небесної механіки. Один із засновників якісної теорії диференціальних рівнянь.

ПУАССОН Сімеон Дені (Poisson Siméon Denis; 1781–1840) — французький математик, механік і фізик. Автор важливих праць з теоретичної механіки, математичної фізики, варіаційного числення, теорії ймовірностей. Зокрема, ввів так зване рівняння Пуассона і застосував його до розв'язування задач гравітації та електростатики. Досліджував питання теплопровідності, магнетизму, капілярності, поширення звукових хвиль та ін.

ПФАФФ Йоганн Фрідріх (Pfaff Johann Friedrich; 1765–1825) — німецький математик і астроном. Відомий дослідженнями з теорії диференціальних рівнянь (рівняння Пфаффа).

РАУС Едвард Джон (Routh Edward John; 1831–1907) — англійський механік і математик. Відомий працями з теоретичної механіки. Займався проблемами стійкості рівноваги і руху (критерій Рауса – Гурвіца). Встановив спеціальний алгоритм для визначення кількості коренів алгебричного рівняння, які мають додатні дійсні частини (теорема Рауса).

РІККАТІ Джакопо Франческо (Riccati Jacopo Francesco; 1676–1754) — італійський математик та інженер. Основні праці стосуються інтегрального числення й диференціальних рівнянь, зокрема інтегровності у квадратурах одного класу диференціальних рівнянь першого порядку (спеціальне рівняння Ріккаті).

СИЛЬВЕСТР Джеймс Джозеф (Sylvester James Joseph; 1814–1897) — англійський математик. Основні праці з алгебри (критерій Сильвестра), теорії чисел, теорії ймовірностей, механіки і математичної фізики.

ТЕЙЛОР Брук (Taylor Brook; 1685–1731) — англійський математик. Вивів загальну формулу (формула Тейлора) розвинення функцій у степеневі ряди (ряди Тейлора), започаткував математичну теорію коливання струни. Автор робіт, присвячених перспективі, взаємодії магнітів, капілярності та ін.

ФРЕДГОЛЬМ Ерік Івар (Fredholm Erik Ivar; 1866–1927) — шведський математик. Засновник загальної теорії лінійних інтегральних рівнянь (рівняння Фредгольма, теореми Фредгольма).

ФУР'Є Жан Батист Жозеф (Fourier Jean Baptiste Joseph; 1768–1830) — французький математик. Найвагоміші результати отримав у математичній фізиці. Зокрема, вивів диференціальне рівняння теплопровідності, розробив метод розв'язування цього рівняння при певних крайових умовах (метод Фур'є). Його ідеї стали потужним інструментом математичного дослідження найрізноманітніших задач, пов'язаних з хвилями і коливаннями (астрономія, акустика, радіотехніка та ін.).

ХОПФ Еберхард (Hopf Eberhard; 1902–1983) — німецький і американський математик. Основні роботи стосуються теорії динамічних систем і диференціальних рівнянь з частинними похідними. Займався також астрофізикою.

ШТУРМ Жак Шарль Франсуа (Sturm Jacques Charles François; 1803–1855) — швейцарський математик. Основні праці присвячені задачам математичної фізики та пов'язаним з ними крайовим задачам на власні значення для звичайних диференціальних рівнянь (задача Штурма–Ліувілля). Заклав основи теорії коливності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь. Автор важливих робіт з оптики і механіки.

ЯКОБІ Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob; 1804–1851) — німецький математик. Йому належать відкриття в теорії чисел, алгебрі, варіаційному численні, інтегральному численні та теорії диференціальних рівнянь. Досліджував диференціальні рівняння динаміки, розробив нові методи їх розв'язування.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Навчальне видання

ГОЙ Тарас Петрович
МАХНЕЙ Олександр Володимирович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
Видання друге, виправлене та доповнене

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Андрій Кравчук*
Дизайн та комп'ютерна верстка *Тараса Гоя, Олександра Махнея*

Підписано до друку 12.01.2014. Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Computer Modern Roman. Умовн. друк. арк. 20,93.
Умовн. фарбо-відб. 20,93.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 4221 від 07.12.2011 р.

Навчальна книга – Богдан, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46002
Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352)52-06-07; 52-19-66; 52-05-48
office@bohdan-books.com
www.bogdan-books.com

ISBN 978-966-10-3530-9

9 789661 035309