МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник для інженерних спеціальностей

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Диференціальні рівняння. Навчальний посібник для інженерних спеціальностей [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 131 «Прикладна меїханіка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: І. М. Копась. – Електронні текстові данні (1 файл: 2504 Кбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 126 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 21.06.2018 р.)
за поданням Вченої ради фізико-математичного факультету (протокол № 5 від 24.05.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник для інженерних спеціальностей

Укладач: *Копась Інна Миколаївна,* канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Журавська Ганна Вікторівна*, канд. фіз.-мат. наук

Рецензенти: *Денисенко Н. Л.,* , канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь КПІ ім. Ігоря Сікорського

Варивода В.О., асистент кафедри вищої та обчислювальної математики Національного авіаційного університету

Даний навчальний посібник призначено для студентів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів, які вивчають диференціальні рівняння в курсі математики.

Пропонований посібник включає розділи, в яких розглядаються основні питання теорії диференціальних рівнянь першого порядку, диференціальних рівнянь вищих порядків та систем диференціальних рівнянь. Кожен розділ містить коротке викладення теорії диференціальних рівнянь та стандартні методи розв'язання типових задач.

У посібнику наведено достатню кількість розв'язаних прикладів з докладними поясненнями щодо розв'язування, що допоможе закріпити теоретичний матеріал, а також запропоновано задачі для самостійного розв'язування, контрольні запитання та індивідуальні завдання для самостійної роботи, що дозволить студенту оволодіти основами теорії диференціальних рівнянь.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

ЗМІСТ

Передмова

Багато фізичних явищ і процесів у природі та техніці описуються за допомогою звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем. Класична теорія звичайних диференціальних рівнянь є потужним апаратом, необхідним для складання математичних моделей різних прикладних задач та їхнього розв'язування.

Даний навчальний посібник призначено для студентів інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів, які вивчають диференціальні рівняння в курсі математики.

Мета цього посібника – ознайомити студентів з основними поняттями, методами, теоремами та формулами теорії диференціальних рівнянь та допомогти їм набути первинних навичок застосування теоретичного матеріалу до практичних задач.

Пропонований посібник включає розділи, в яких розглядаються основні питання теорії диференціальних рівнянь першого порядку, диференціальних рівнянь вищих порядків та систем диференціальних рівнянь. Він складається з трьох розділів, які поділені на пункти. На початку кожного пункту наводяться основні означення і теоретичні положення, на які слід спиратися при розв'язанні задач заданої теми. Потім детально викладено стандартні методи розв'язання типових задач, проілюстровані достатньою кількістю розв'язаних прикладів з докладними поясненнями щодо розв'язування. Для закріплення основних положень і навичок розв'язання задач читачеві пропонується для самоконтролю завдання для самостійної роботи та контрольні запитання. Всі задачі запропоновані в самостійній роботі супроводжуються відповідями. Посібник також містить індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів: 10 завдань, кожний з яких має 30 варіантів, які дають можливість перевірити базові знання та готовність студента до практичного застосування набутих знань.

РОЗДІЛ 1
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ
1.1. Загальні поняття та означення

Означення. *Диференціальним рівнянням n–го порядку* відносно функції $y = y(x)$ називається співвідношення, яке пов'язує незалежну змінну x, шукану функцію $y(x)$ та її похідні (або диференціали):

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Означення. *Порядком диференціального рівняння* називається найвищий порядок похідної (або диференціала), що входить в це рівняння.

Якщо невідома функція залежить тільки від однієї змінної, то диференціальне рівняння називається *звичайним*; якщо невідома функція залежить від кількох змінних і диференціальне рівняння містить її частинні похідні за цими змінними, то воно називається рівнянням у частинних похідних. Надалі будемо розглядати лише звичайні диференціальні рівняння.

Означення. *Розв'язком* диференціального рівняння називається функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння обертає його в тотожність. Розв'язок диференціального рівняння називається *загальним*, якщо він містить стільки довільних сталих, яким є порядок рівняння, і при будь-яких значеннях сталих задовольняє це рівняння.

Означення. Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається *інтегруванням рівняння*.

Означення. *Диференціальним рівнянням 1–го порядку* відносно функції $y = y(x)$ називається вираз вигляду $F(x, y, y') = 0$ або

$$y' = f(x, y), \tag{1.1}$$

якщо він розв'язаний відносно похідної $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Існує ще одна форма запису диференціального рівняння 1–го порядку, розв'язаного відносно похідної:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ - задані функції. В цьому рівнянні змінні x та y - рівноправні, тобто будь-яку з них можна розглядати як функцію іншої.

Означення. *Загальним розв'язком* диференціального рівняння 1–го порядку (1.1) називається функція $y = \varphi(x, C)$, яка прибудь-якому значенні сталої C є розв'язком цього рівняння. Співвідношення $\Phi(x, y, C) = 0$, яке містить розв'язок в неявному вигляді, називається *загальним інтегралом* рівняння (1.1).

Означення. *Частинним розв'язком* диференціального рівняння 1-го порядку називається будь-яка функція $y = \varphi(x, C_0)$, отримана із загального розв'язку при певному значенні довільної сталої $C = C_0$. Відповідно, співвідношення $\Phi(x, y, C_0) = 0$, в цьому випадку, називається *частинним інтегралом.*

Означення. Графік розв'язку $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння на площині Oxy називається *інтегральною кривою*. Загальному розв'язку (загальному інтегралу) відповідає сукупність (сімейство) інтегральних кривих.

Інколи серед всіх розв'язків диференціального рівняння потрібно знайти такий розв'язок, який задовольняє умову: $y = y_0$ при $x = x_0$, де x_0 і y_0 - задані числа. Така умова називається *початковою умовою* і позначається таким чином:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{або} \quad y\big|_{x=x_0} = y_0. \tag{1.2}$$

Геометрично це означає, що із *сімейства інтегральних кривих*, які визначаються загальним розв'язком (загальним інтегралом) рівняння, потрібно виділити інтегральну криву, яка проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$.

Означення. Задача знаходження частинного розв'язку $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння, який задовольняє початкову умову (1.2) $\varphi(x_0) = y_0$, називається *задачею Коші*.

Умови, при яких рівняння (1.1) має розв'язок, дає наступна теорема.

Теорема Коші *(існування та єдності розв'язку)*.

Якщо в диференціальному рівнянні (1.1) функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ неперервні в точці $M_0(x_0; y_0)$ та її околі, то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкову умову (1.2), тобто $\varphi(x_0) = y_0$.

Геометричний зміст цієї теореми полягає в тому, що при виконанні її умов існує єдина інтегральна крива диференціального рівняння, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Означення. Точки, у яких порушуються умови теореми Коші, називаються *особливими точками.*

Через такі точки або взагалі не проходить жодна інтегральна крива, або проходить кілька інтегральних кривих.

Означення. Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдність розв'язку задачі Коші, називаються *особливими*.

Особливий розв'язок не може бути отриманий із загального розв'язку при жодному значенні довільної сталої C. Особливі розв'язки можуть з'явитися серед розв'язків, загублених в результаті перетворень даного рівняння в процесі його інтегрування.

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається *диференціальним*?
2. Що називається *порядком* диференціального рівняння?
3. Яке рівняння називається *звичайним* диференціальним рівнянням?
4. Що називається *розв'язком* диференціальним рівнянням?
5. Як називається процес знаходження розв'язку диференціального рівняння?
6. Що називається *загальним розв'язком* диференціальним рівнянням?
7. Яке рівняння називається *диференціальним рівнянням 1-го порядку*? Які існують *форми запису* диференціальних рівнянь 1-го порядку?

8. Що називається *загальним розв’язком та загальним інтегралом* диференціальним рівнянням 1-го порядку?
9. Що називається *частинним розв’язком та частинним інтегралом* диференціальним рівнянням 1-го порядку?
10. Як називається *графік розв'язку* диференціального рівняння?
11. Що називається *початковою умовою* для диференціального рівняння 1-го порядку? Яким є геометричний зміст початкової умови для диференціального рівняння 1-го порядку?
12. Сформулюйте *задачу Коші* для диференціального рівняння 1-го порядку?
13. Сформулюйте *теорему існування та єдності розв'язку задачі Коші* диференціального рівняння 1-го порядку? Дати *геометричну інтерпретацію* цієї теореми.
14. Чи завжди загальний розв’язок диференціального рівняння 1-го порядку містить усі частинні розв’язки?
15. Які розв’язки називаються *особливими*?

1.2. Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. *Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними* називається рівняння 1-го порядку вигляду

$$y' = f(x) \cdot g(x) \tag{2.1}$$

або

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{2.2}$$

якщо $P(x,y) = M_1(x)N_1(y)$ і $Q(x,y) = M_2(x)N_2(y)$.

Особливість цього рівняння у тому, що коефіцієнти при диференціалах розкладаються на множники, які залежать лише від однієї змінної.

Поділимо обидві частини рівняння (2.2) на добуток $N_1(y) \cdot M_2(x)$, виключаючи з розгляду точки, в яких $N_1(y) = 0$ та $M_2(x) = 0$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0.$$

Одержали рівняння, у якого змінні відокремлені, тобто коефіцієнт при dx залежить тільки від x , а коефіцієнт при dy - тільки від y. Таке рівняння називається рівнянням з *відокремленими змінними*.

Почленно інтегруючи це рівняння, знайдемо загальний інтеграл рівняння (2.2):

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C.$$

Зауваження 1. При почленному діленні диференціального рівняння на $N_1(y)\cdot M_2(x)$ можуть бути загублені деякі розв'язки. Тому слід окремо розв'язати рівняння $N_1(y)=0$ та $M_2(x)=0$ і встановити ті розв'язки диференціального рівняння, які не можуть бути отримані із загального розв'язку, - *особливі розв'язки*.

Зауваження 2. Рівняння (2.1) зводиться до рівняння з відокремленими змінними, якщо покласти $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $x^2y^2y'+1=y$.

<u>Розв'язання.</u> Дане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними типу (2.1). Скориставшись зауваженням 2, зведемо його до вигляду (2.2):

$$x^2y^2dy=(y-1)dx.$$

Поділимо обидві частини рівняння на добуток $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{(y-1)}dy=\frac{1}{x^2}dx.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними. Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int\frac{y^2}{(y-1)}dy=\int\frac{1}{x^2}dx+C.$$

Звідси отримаємо *загальний інтеграл*

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

При діленні на $x^2(y-1)$ могли бути загублені розв'язки $x=0$ та $(y-1)=0$, тобто $y=1$. Безпосередньою підстановкою в вихідне рівняння впевнюємось, що $y=1$ - розв'язок рівняння, а $x=0$ - ні. Оскільки розв'язок $y=1$ не може бути отриманий із загального розв'язку при жодному значенні довільної сталої C, то він є *особливим*.

Приклад 2. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$(y-xy)dx + (x+xy)dy = 0.$$

Розв'язання. Винесемо спільні множники в обох дужках:

$$y(1-x)dx + x(1+y)dy = 0.$$

Отримане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділимо його почленно на $xy \neq 0$ і отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{1-x}{x}dx + \frac{1+y}{y}dy = 0.$$

Виконаємо інтегрування:

$$\int \frac{1-x}{x}dx + \int \frac{1+y}{y}dy = C,$$

$$\ln|x| - x + \ln|y| + y = C \quad \Rightarrow \quad \ln|xy| + \ln e^{y-x} = \ln|C|.$$

Оскільки стала інтегрування – довільна, то для спрощення виразу при наступних перетвореннях її можна записати у вигляді $\ln|C|$. Тоді:

$$\ln\left(|xy|e^{y-x}\right) = \ln|C| \quad \Rightarrow \quad |xy|e^{y-x} = |C|.$$

Звідси знаходимо *загальний інтеграл* рівняння:

$$xye^{y-x} = \pm C \quad \Rightarrow \quad xye^{y-x} = C_1 \quad (C_1 = \pm C).$$

При розв'язанні рівняння було припущено, що $x \neq 0$, $y \neq 0$. Проте функції $x=0$ та $y=0$ також є розв'язками вихідного рівняння, що легко перевірити безпосередньою підстановкою. З іншого боку їх можна отримати із загального інтеграла при $C = 0$. Отже, $x = 0$ і $y = 0$ - *частинні розв'язки* рівняння.

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y' ctgx = -y,$$

який задовольняє початкову умову $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ (*задача Коші*).

Розв'язання. Покладаючи $y' = \frac{dy}{dx}$, отримаємо

$$ydx + ctgxdy = 0.$$

Відокремлюємо змінні

$$tgxdx + \frac{dy}{y} = 0$$

та зінтегруємо

$$\int \frac{dy}{y} = -\int tgxdx + \ln C \qquad \Rightarrow \qquad \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln C.$$

Звідси знаходимо *загальний розв'язок* рівняння:

$$\ln|y| = \ln C|\cos x| \qquad \Rightarrow \qquad y = C \cdot \cos x.$$

Підставляємо в загальний розв'язок початкову умову $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $y_0 = -1$ і знайдемо довільну сталу C:

$$-1 = C \cdot \cos\frac{\pi}{3} \qquad \Rightarrow \qquad C = -2.$$

Отже, при цьому значенні C із загального розв'язку отримаємо *частинний розв'язок*

$$y = -2\cos x,$$

який задовольняє заданій початкову умову (інтегральна крива проходить через точку $M_0(\pi/3, -1)$).

Контрольні запитання

1. Дати означення диференціального рівняння з *відокремлюваними змінними* і сформулювати метод його інтегрування.
2. Які існують *форми запису* диференціального рівняння з відокремлюваними змінними і як вони між собою пов'язані?
3. Як можуть з'явитися *особливі розв'язки* для диференціального рівняння з відокремлюваними змінними?
4. Чи можна стверджувати, що через точку (0;2) проходить лише одна інтегральна крива рівняння $y' = 3y^{1/3}$?
5. Що можна сказати про порядок диференціального рівняння, якщо його загальний інтеграл має вигляд:

а) $\varphi(x, y, C) = 0$;   б) $\varphi(x, y, C_1, C_2) = 0$?

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок:

1.1. $(y-1)^2 dx + (1-x)^3 dy = 0.$

1.2. $x\sqrt{9-y^2}dx - y\left(4+x^2\right)dy = 0.$

1.3. $\cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy = 0.$

1.4. $\ln x \sin^3 y dx - x \cos y dy = 0.$

1.5. $\left(xy^2 - y^2\right)dx - \left(x^2 y + x^2\right)dy = 0.$

1.6. $yy' + x = 1.$

1.7. $\left(\sqrt{xy} - 2\sqrt{x}\right)y' - y = 0.$

1.8. $(1+y')e^y + 1 = 0.$

1.9. $\left(1+x^2\right)y' = xy - y\sqrt{1+x^2}.$

1.10. $y' = \dfrac{y \ln y}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}.$

2. Знайти частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову:

2.1. $3x\sqrt[3]{y}dx + \left(1-x^2\right)dy = 0, \quad y(0) = 0.$

2.2. $ydx - \left(4+x^2\right)\ln y dy = 0, \quad y(2) = 1.$

2.3. $\sin^2 x \cos^2 y dx - \cos^2 x dy = 0, \quad y(0) = \pi/4.$

2.4. $y'e^{-x} = x - 1, \quad y(1) = -e.$

2.5. $y'\left(x+\sqrt{x}\right) = \sqrt{1-y}, \quad y(0) = 1.$

Відповіді

1.1. $\dfrac{1}{(y-1)}+\dfrac{1}{2(x-1)^2}=C.$ **1.2.** $\ln\left(4+x^2\right)+\sqrt{9-y^2}=C.$ **1.3.** $\sin x\cos y=C.$

1.4. $\ln^2 x-ctg^2 y=C.$ **1.5.** $\ln|xy|+\dfrac{y-x}{xy}=C.$ **1.6.** $(x-1)^2+y^2=C.$

1.7. $y-\sqrt{x}+C=\ln|y|.$ **1.8.** $\left(e^y+1\right)e^x=C.$ **1.9.** $y=\dfrac{C\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$

1.10. $y=e^{C\arcsin x}.$ **2.1.** $y=\sqrt{\ln^3\left|1-x^2\right|}.$ **2.2.** $arctg\left(x/2\right)=\ln^2 y+\pi/4.$

2.3. $tgy=1-x+tgx.$ **2.4.** $y=e^x(x-2).$ **2.5.** $\ln\left(\sqrt{x}+1\right)=-\sqrt{1-y}.$

1.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння, що до них зводяться

Означення. Функція $f(x,y)$ називається *однорідною* функцією *n–го* виміру (n – натуральне число), якщо при будь-якому λ справедлива тотожність:

$$f(\lambda x,\lambda y)\equiv\lambda^n f(x,y). \tag{3.1}$$

Наприклад, функція $f(x,y)=x^2+y^2-xy$ є однорідною функцією *2–го* виміру, оскільки

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+(\lambda y)^2-(\lambda x)(\lambda y)=\lambda^2(x^2+y^2-xy)=\lambda^2 f(x,y).$$

Покладаючи в (3.1) $\lambda=\dfrac{1}{x}$, отримаємо

$$f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^n}f(x,y),\qquad\Rightarrow\qquad f(x,y)=x^n f\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

Тобто, однорідну функцією *n–го* виміру можна подати у вигляді

$$f(x,y)=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.2}$$

Означення. Диференціальне рівняння 1–го порядку вигляду

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{3.3}$$

називається однорідним, якщо $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ є однорідними функціями однакового виміру.

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x, y) \tag{3.4}$$

називається однорідним відносно своїх змінних (шуканої функції y і аргументу x), якщо $f(x, y)$ є однорідною функцією <u>нульового</u> виміру відносно y та x.

Однорідні рівняння (3.3) або (3.4), враховуючи (3.2), можуть бути перетворені до рівняння, права частина якого є функцією відношення $\frac{y}{x}$, тобто

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.5}$$

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $\frac{y}{x} = u$, де $u = u(x)$ - нова шукана функція. Тоді

$$y = ux \qquad \Rightarrow \qquad y' = u'x + u.$$

Підставляючи y та y' в рівняння (3.5), отримаємо

$$u'x + u = \varphi(u), \qquad \text{або} \qquad x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u,$$

звідки

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}, \qquad \varphi(u) \neq u.$$

Інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок (інтеграл) відносно функції u:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Підставляючи після інтегрування замість u відношення $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний розв'язок (інтеграл) даного однорідного рівняння.

Зауваження. При розв'язанні однорідних рівнянь не обов'язково зводити їх до вигляду (3.5). Можна зразу робити підстановку $y = ux$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y - xy' = y\ln\frac{x}{y}$.

<u>Розв'язання.</u> Розв'яжемо дане рівняння відносно похідної:

$$xy' = y - y\ln\frac{x}{y} \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{y}{x} - \frac{y}{x}\ln\frac{x}{y} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Одержали однорідне рівняння вигляду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Для його розв'язання введемо нову функцію, зробивши заміну

$$\frac{y}{x} = u(x) \qquad \Rightarrow \qquad y = ux, \qquad y' = u'x + u.$$

У результаті цієї заміни одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'x + u = u - u\ln u \qquad \Rightarrow \qquad x\frac{du}{dx} = u\ln u.$$

Відокремлюємо змінні, поділивши обидві частини на $xu\ln u$

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}$$

та інтегруємо

$$\int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x} + \ln C \qquad \Rightarrow \qquad \ln|\ln u| = \ln|x| + \ln C \qquad \Rightarrow \qquad \ln|\ln u| = \ln C|x|.$$

Потенціюючи два рази, отримаємо загальний розв'язок відносно функції u:

$$\ln u = \pm Cx \qquad \Rightarrow \qquad u = e^{C_1 x}.$$

Виконуючи обернену заміну $u = \frac{y}{x}$, отримаємо *загальний розв'язок* рівняння:

$$\frac{y}{x} = e^{C_1 x} \qquad \Rightarrow \qquad y = xe^{C_1 x}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\left(x^2 + y^2\right)dx - 2xydy = 0$.

Розв'язання. Розв'язуючи дане рівняння відносно похідної

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

встановлюємо, що вона є функцією тільки відношення $\frac{y}{x}$, тобто дане рівняння є однорідним.

Введемо нову функцію, зробивши заміну

$$\frac{y}{x} = u(x) \quad \Rightarrow \quad y = ux, \quad y' = u'x + u.$$

У результаті цієї заміни одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'x + u = \frac{1+u^2}{2u} \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} - u \quad \Rightarrow \quad xdu = \frac{1-u^2}{2u}dx.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{2u}{1-u^2}du = \frac{dx}{x}$$

та інтегруємо

$$\int \frac{2u}{1-u^2}du = \int \frac{dx}{x} - \ln C \quad \Rightarrow \quad -\ln\left|1-u^2\right| = \ln|x| - \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln\left|x\left(1-u^2\right)\right| = \ln C.$$

Потенціюємо:

$$x\left(1-u^2\right) = \pm C = C_1.$$

Виконуючи тепер обернену заміну $u = \frac{y}{x}$, отримаємо *загальний інтеграл* рівняння:

$$x\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C_1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 = xC_1.$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початкову умову (*задача Коші*):

$$xdy - ydx = ydy, \quad y(-1) = 1.$$

Розв'язання. Перетворимо рівняння до вигляду:

$$(x-y)dy - ydx = 0.$$

Тоді, легко переконатися, що функції $P(x,y) = x - y$ і $Q(x,y) = -y$ - однорідні першого виміру, отже, рівняння однорідне.

Використовуючи *зауваження*, зробимо в отриманому рівнянні заміну

$$y = ux, \quad dy = xdu + udx.$$

Отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(x-ux)(xdu+udx)-uxdx=0 \quad \Rightarrow \quad x^2\,(1-u)du+(xu-u^2x-ux)dx=0,$$

$$x^2\,(1-u)du-u^2xdx=0.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{1-u}{u^2}du=\frac{dx}{x}$$

та інтегруємо

$$\int\frac{1-u}{u^2}du=\int\frac{dx}{x}-C \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u}+\ln|ux|=C.$$

Повертаючись до змінної y, знаходимо *загальний інтеграл* рівняння:

$$\frac{x}{y}+\ln\left|\frac{y}{x}x\right|=C \quad \Rightarrow \quad x=y(C-\ln|y|).$$

Визначимо довільну сталу C, скориставшись початковою умовою:

$$y(-1)=1 \quad \Rightarrow \quad -1=1(C-\ln 1) \quad \Rightarrow \quad C=\text{-}1.$$

Підставляючи це значення в загальний інтеграл, знайдемо шуканий *частинний інтеграл*

$$x=-y(1+\ln|y|).$$

Диференціальні рівняння які зводяться до однорідних

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{3.6}$$

де a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 - сталі, а $f(u)$ - неперервна функція на деякому проміжку.

Якщо в рівнянні (3.6) $c_1=c_2=0$, то отримаємо однорідне рівняння вигляду (3.4).

Нехай $c_1\neq 0$ або $c_2\neq 0$. Тоді

1) якщо визначник $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$, то рівняння (3.6) зводиться до однорідного підстановкою

$$x = t + x_0, \qquad y = z + y_0,$$

де (x_0, y_0) - координати точки перетину прямих $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0,$ які знаходяться з системи

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0; \end{cases}$$

2) якщо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то рівняння (3.6) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою

$$a_1x + b_1y = z.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y' = -\dfrac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}.$

Розв'язання. Дане рівняння вигляду (3.6). Зведемо його до однорідного.

Для цього складемо та обчислимо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то робимо заміну:

$$x = t + x_0, \qquad y = z + y_0,$$

де (x_0, y_0) знаходимо з системи

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = -1, \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

Тоді:

$$x = t - 1, \qquad y = z + 1 \qquad \Rightarrow \qquad dx = dt, \qquad dy = dz \qquad \Rightarrow \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt}.$$

У нових змінних задане рівняння зводиться до вигляду:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2t - 2 + z + 1 + 1}{t - 1 + 2z + 2 - 1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dz}{dt} = -\frac{2t + z}{t + 2z} \qquad \Rightarrow \qquad z' = -\frac{2 + \frac{z}{t}}{1 + 2\frac{z}{t}}.$$

Отримане рівняння є однорідним відносно t і z, тому робимо заміну:

$$\frac{z}{t}=u \quad \Rightarrow \quad z(t)=ut \quad \Rightarrow \quad z'=u't+u.$$

Тоді

$$u't+u=-\frac{2+u}{1+2u} \quad \Rightarrow \quad u't=-\frac{2+u}{1+2u}-u \quad \Rightarrow \quad u't=-2\frac{u^2+u+1}{1+2u}.$$

В останньому рівнянні відокремлюємо змінні та інтегруємо:

$$-\frac{1}{2}\frac{1+2u}{u^2+u+1}du=\frac{dt}{t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\int\frac{1+2u}{u^2+u+1}du=\int\frac{dt}{t}+\ln|C_1|,$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d(u^2+u+1)}{u^2+u+1}=\int\frac{dt}{t}-\ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln\left|u^2+u+1\right|=\ln|t|-\ln|C_1|.$$

Виконавши перетворення, одержимо загальний інтеграл

$$t=\frac{C_2}{\sqrt{u^2+u+1}},\ (C_2=\pm C_1) \quad \Rightarrow \quad t\sqrt{u^2+u+1}=C_2.$$

Після оберненої заміни $\frac{z}{t}=u$ матимемо

$$\sqrt{z^2+zt+t^2}=C_2 \quad \Rightarrow \quad z^2+zt+t^2=C_2{}^2,$$

а повертаючись до вихідних змінних x і y за формулами

$$t=x+1, \quad z=y-1,$$

знайдемо загальний інтеграл початкового рівняння:

$$(y-1)^2+(y-1)(x+1)+(x+1)^2=C_2{}^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+xy+x-y=C,\ \ (C=C_2{}^2-1).$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0.$$

Розв'язання. Оскільки визначник $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0,$ робимо заміну

$$x+y=z \quad \Rightarrow \quad y=z-x,\ \ dy=dz-dx.$$

Тоді дане рівняння набуває вигляду:

$$(z+2)dx+(2z-1)(dz-dx)=0 \quad \Rightarrow \quad (3-z)dx+(2z-1)dz=0.$$

Отримали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержимо:

$$\frac{2z-1}{z-3}dz = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{2z-1}{z-3}dz = \int dx + C \quad \Rightarrow \quad 2z + 5\ln|z-3| = x + C.$$

Повертаючись до вихідних змінних $(z = x + y)$, знаходимо остаточну відповідь:

$$x + 2y + 5\ln|x + y - 3| = C.$$

Контрольні запитання

1. Яка функція називається *однорідною*?
2. Чи є наведені нижче функції однорідними? Якщо так, то вкажіть вимір однорідності:

   1) $\dfrac{4x^2 + xy - y^2}{y - 2x}$; 2) $\ln\dfrac{x+2y}{3y+5x}$;

   3) $\dfrac{\left(\sqrt{xy} - 2y\right)^3}{x^2 + y^2}$; 4) $\ln\dfrac{x}{y} + 4x$;

   5) $x\ln\dfrac{x}{2y} - y$.
3. Дати означення *однорідного диференціального рівняння 1-го порядку*.
4. Вказати *метод* знаходження загального розв'язку однорідного диференціального рівняння 1-го порядку.
5. Диференціальне рівняння записане у вигляді $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$:

   а) за якої умови це рівняння буде *однорідним*?

   б) у якому випадку воно є рівнянням *з відокремлюваними змінними*?
6. Які диференціальні рівняння *зводяться до однорідних*? Вказати *метод* їхнього розв’язування.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв’язок рівняння:

1.1. $y' = 2 + \dfrac{y}{x}.$

1.2. $(x+y)dx+2xdy=0.$

1.3. $y-xy'=x+yy'.$

1.4. $ydy+(x-2y)dx=0.$

1.5. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0.$

1.6. $y=x(y'-\sqrt[x]{e^y}).$

1.7. $x\sin\frac{y}{x}\cdot y'+x=y\sin\frac{y}{x}.$

1.8. $xy+y^2=(2x^2+xy)y'.$

1.9. $xy'\cdot\ln\frac{y}{x}=x+y\cdot\ln\frac{y}{x}.$

1.10. $(xy'-y)\sin\frac{y}{x}=x.$

1.11. $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0.$

1.12. $(x-y+4)dy+(x+y-2)dx=0.$

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

2.1. $(2x-3y)dx+xdy=0,\quad y(1)=-1.$

2.2. $(5\sqrt{xy}-y)dx+xdy=0,\quad y(1)=25.$

2.3. $xy'-y=x\cos^2\frac{y}{x},\quad y(3)=0.$

2.4. $xy'=y(3+\ln y-\ln x),\quad y(1)=1/e.$

2.5. $xy'-y=x\cdot tg\frac{y}{x},\quad y(1)=\pi/2.$

2.6. $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0,\quad y(0)=2.$

Відповіді

1.1. $y=2x(C+\ln|x|).$ **1.2.** $x+(x+3y)^2=C.$ **1.3.** $arctg\frac{y}{x}+\ln C\sqrt{x^2+y^2}=0.$

1.4. $x=(y-x)\ln C(y-x).$**1.5.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}\ln Cy=0.$ **1.6.** $e^{-\frac{y}{x}}+\ln Cx=0.$

1.7. $Cx=e^{\cos\frac{y}{x}}$**. 1.8.** $y^2=Cxe^{-\frac{y}{x}}$**. 1.9.** $\ln x=\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)+C.$

1.10. $\ln|Cx|=-\cos\frac{y}{x}.$ **1.11.** $x^2+xy-y^2-x+3y=C.$

1.12. $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C.$ **2.1.** $y=x-2x^3.$ **2.2.** $2-\ln|x|=\frac{2}{5}\sqrt{\frac{y}{x}}.$

2.3. $x=3e^{tg\frac{y}{x}}.$ **2.4.** $x-2=\ln\frac{y}{x}.$ **2.5.** $y=x\cdot\arcsin x.$

2.6. $3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=0.$

1.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. *Лінійним диференціальним рівняння 1–го порядку* називається рівняння лінійне (першого степеня) відносно функції y та її похідної y' вигляду:

$$y'+P(x)y=Q(x), \tag{4.1}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ - визначені і неперервні на деякому проміжку функції.

Якщо $Q(x)\neq 0$, то рівняння (4.1) називається *лінійним неоднорідним*.

Якщо $Q(x)=0$, то рівняння

$$y'+P(x)y=0 \tag{4.2}$$

називається *лінійним однорідним*, що відповідає даному неоднорідному рівнянню (4.1).

Рівняння (4.2) є рівнянням з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dx}=-P(x)y.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знайдемо його загальний розв'язок

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|,$$

$$y(x)=Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{4.3}$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння (4.1) можна отримати методом Бернуллі або методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа).

Метод Бернуллі

Метод Бернуллі полягає в тому, що розв’язок рівняння (4.1) шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$y = u \cdot v, \tag{4.4}$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ - невідомі функції, одна з яких довільна, але не рівна нулю.

(Дійсно, кожну функцію можна записати у вигляді

$$y(x) = \frac{y(x)}{v(x)} v(x) = u(x) \cdot v(x)\text{, де } v(x) \neq 0\text{).}$$

Знаходимо похідну

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставляючи вирази y та y' в рівняння (4.1), отримаємо:

$$u'v + uv' + P(x) \cdot uv = Q(x) \quad \Rightarrow \quad u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x) \quad (*).$$

Користуючись довільністю у виборі функції $v(x)$, підберемо її так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю,тобто

$$v' + P(x)v = 0.$$

Тоді рівняння $(*)$ буде рівносильне системі двох рівнянь

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases}$$

Перше рівняння системи є лінійним однорідним вигляду (4.2) і його загальний розв’язок :

$$v = C_1 e^{-\int P(x)dx}, \qquad C_1 \neq 0.$$

В силу довільності вибору функції v, виберемо з цього загального розв'язку який-небудь частинний розв’язок, поклавши, наприклад, $C_1 = 1$. Тоді

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставляючи отримане значення функції v в друге рівняння системи, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними для функції $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримаємо його загальний розв’язок:

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \quad \Rightarrow \quad u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Врешті, підставляючи знайдені значення функцій u і v в рівняння (4.4), отримаємо *загальний розв'язок* лінійного диференціального рівняння (4.1):

$$y(x) = u \cdot v = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Метод Лагранжа полягає в тому, що загальний розв'язок рівняння (4.1) шукаємо у вигляді розв'язку відповідного однорідного рівняння, в якому сталу вважають функцією.

Спочатку записуємо лінійне однорідне рівняння (4.2), відповідне даному неоднорідному рівнянню (4.1):

$$y' + P(x)y = 0,$$

Інтегруючи, отримаємо його загальний розв'язок, який дається формулою (4.3):

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Далі записуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) у такому ж вигляді (4.3), вважаючи довільну сталу деякою диференційовною функцією:

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{4.5}$$

Знаходимо похідну

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x)).$$

Підставляючи вирази $y(x)$ та $y'(x)$ в рівняння (4.1), отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $C(x)$:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

інтегруючи яке, знаходимо:

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + \overline{C}.$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ у вираз (4.5) дістаємо *загальний розв'язок* лінійного неоднорідного рівняння (4.1):

$$y(x)=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+\overline{C}\right)\cdot e^{-\int P(x)dx}, \tag{4.6}$$

який повністю збігається з розв'язком, отриманим методом Бернуллі.

Зауваження 1. Розкривши у формулі (4.6) дужки

$$y(x)=\overline{C}e^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

можна помітити, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) дорівнює сумі загального розв'язку $y_{зо}$ відповідного однорідного рівняння (4.2) і частинного розв'язку $y_{чн}$ даного неоднорідного рівняння: $y_{зн}=y_{зо}+y_{чн}$.

Зауваження 2. При розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь методом Бернуллі або методом Лагранжа слід <u>використовувати наведені алгоритми</u>, а не отримані кінцеві формули.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'-yctgx=\frac{1}{\sin x}.$$

<u>Розв'язання.</u> Дане рівняння має вигляд (4.1), тобто воно є лінійним відносно шуканої функції y та її похідної y', при цьому $P(x)=ctgx,\ Q(x)=\frac{1}{\sin x}$.

Для його розв'язання застосуємо метод Бернуллі, тобто загальний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y=uv.$$

Звідси

$$y'=u'v+uv'.$$

Підставляємо y та y' у вихідне рівняння

$$u'v+uv'-uvctgx=\frac{1}{\sin x}\qquad\Rightarrow\qquad u'v+u(v'-vctgx)=\frac{1}{\sin x}.$$

Для визначення невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ розіб'ємо отримане рівняння на два рівняння:

$$\begin{cases} v' - v\,ctgx = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння системи, як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = v\,ctgx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int ctgx\,dx + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|\sin x| + \ln|C_1|,$$

звідки

$$\ln|v| = \ln|C_1 \sin x| \quad \Rightarrow \quad v = C\sin x, \text{ де } C = \pm C_1.$$

Оскільки в даному рівнянні досить знайти який-небудь *частинний розв'язок*, то, для спрощення подальшого розв'язання, покладемо $C = 1$.

(Надалі, при розв'язанні першого рівняння системи, постійну інтегрування записувати не будемо, зразу шукаючи його найпростіший *частинний розв'язок*, який, як правило, можна отримати при $C = 1$ або $C = 0$).

Тоді

$$v = \sin x.$$

Підставляємо функцію $v(x) = \sin x$ у друге рівняння системи і знайдемо функцію $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}\sin x = \frac{1}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{\sin^2 x},$$

звідки

$$\int du = \int \frac{dx}{\sin^2 x} + C \quad \Rightarrow \quad u = -ctgx + C.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = uv = (-\,ctgx + C)\sin x = -\cos x + C\sin x.$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початкову умову (*задача Коші*):

$$y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}, \qquad y(0) = -1.$$

Розв’язання. Маємо лінійне рівняння відносно функції y та її похідної y'. Застосуємо метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Спочатку знайдемо *загальний розв’язок однорідного рівняння*, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню:

$$y' + 2xy = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2xdx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -2\int xdx + \ln|C|,$$

звідси

$$\ln|y| - \ln|C| = -x^2 \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{C} = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-x^2}.$$

Загальний розв’язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y = C(x)e^{-x^2}, \qquad (*)$$

вважаючи довільну сталу функцією змінної x. Тоді

$$y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x).$$

Підставляючи y та y' у задане рівняння, отримаємо:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 3x^2e^{-x^2}.$$

Після скорочення, маємо:

$$C'(x)e^{-x^2} = 3x^2e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad C(x) = x^3 + \overline{C}.$$

Підставивши знайдене значення $C(x)$ у вираз $(*)$, отримаємо *загальний розв’язок неоднорідного лінійного рівняння*:

$$y = \left(x^3 + \overline{C}\right)e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y_{зн} = y_{зо} + y_{чн} = \overline{C}e^{-x^2} + x^3e^{-x^2}.$$

В даному випадку $y_{зо} = \overline{C}e^{-x^2}$ - загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння, $y_{чн} = x^3e^{-x^2}$ - частинний розв’язок заданого неоднорідного рівняння.

Тепер розв'яжемо задачу Коші, тобто знайдемо частинний розв'язок даного рівняння, який відповідає заданій початковій умові.

Підставивши в загальний розв'язок початкову умову $y(0) = -1$, знайдемо значення сталої $\overline{C}$:

$$-1 = \left(0 + \overline{C}\right)e^{0} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{C} = -1.$$

Отже, *розв'язком задачі Коші* є функція

$$y = \left(x^{3} - 1\right)e^{-x^{2}}.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$(x + y)y' = 1.$$

Розв'язання. Дане рівняння не є лінійним відносно функції $y(x)$. Оскільки містить добуток yy' і його не можна подати у вигляді (4.1). Але воно може бути лінійним відносно функції $x(y)$. Перевіримо це, перетворивши це рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x + y)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dy} = (x + y) \qquad \Rightarrow \qquad x' - x = y.$$

Дійсно, отримали *лінійне рівняння відносно функції* $x(y)$. Розв'яжемо його методом Лагранжа.

Знайдемо спочатку *загальний розв'язок однорідного рівняння*, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню:

$$x' - x = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dx}{dy} = x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{x} = dy.$$

Інтегруючи, знаходимо *загальний розв'язок однорідного рівняння*

$$\ln|x| = y + \ln C \qquad \Rightarrow \qquad x = Ce^{y}.$$

Тоді, загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$x = C(y)e^{y}. \qquad (*)$$

Диференціюючи вираз $(*)$, знайдемо

$$x' = C'(y)e^y + C(y)e^y.$$

Підставляючи y та y' у задане рівняння, матимемо:

$$C'(y)e^y + C(y)e^y - C(y)e^y = y \quad \Rightarrow \quad C'(y)e^y = y.$$

Звідси випливає:

$$C'(y) = ye^{-y} \quad \Rightarrow \quad dC(y) = ye^{-y}dy \quad \Rightarrow \quad C(y) = \int ye^{-y}dy + C.$$

Використовуючи метод інтегрування частинами, отримаємо:

$$C(y) = -ye^{-y} - e^{-y} + C \quad \Rightarrow \quad C(y) = -e^{-y}(y+1) + C.$$

Підставляючи знайдену функцію $C(y)$ у вираз $(*)$, отримаємо *загальний розв'язок неоднорідного рівняння*:

$$x = \left(C - e^{-y}(y+1)\right)e^y \quad \Rightarrow \quad x_{зн} = x_{зо} + x_{чн} = Ce^y - (y+1).$$

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається *лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку*?
2. Яке рівняння називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку*?
3. Яке рівняння називається *лінійним однорідним, що відповідає даному неоднорідному диференціальним рівнянням 1-го порядку*?
4. Описати *метод Бернуллі* розв'язання лінійних диференціальним рівнянням 1-го порядку.
5. У чому полягає суть *методу варіації довільної сталої (метод Лагранжа)* розв'язання лінійних диференціальним рівнянням 1-го порядку?
6. Якою є *структура загального розв'язку* лінійного диференціального рівняння 1-го порядку?

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1.1. $y' - \frac{y}{x} = 3x.$

1.2. $y' + 4\frac{y}{x} + x = 0.$

1.3. $x^2 y' + 2xy - 1 = 0.$

1.4. $y' - 7y = 8e^{3x}.$

1.5. $\left(x^2 + 1\right)y' - xy = x^3 + x.$

1.6. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}} = 0.$

1.7. $y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x.$

1.8. $xy' \ln x = 5x - y.$

1.9. $\frac{dy}{dx} \cdot \cos^2 x + y = tgx.$

1.10. $y'\left(x^2 + 4\right) - xy = \sqrt{x^2 + 4}.$

1.11. $y^2 dx + (5xy - 4)dy = 0.$

Вказівка. Прийняти за невідому функцію x.

1.12. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x + ye^{-1/y}}.$

Вказівка. Прийняти за невідому функцію x.

2. Знайти частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

2.1. $y' + 3y = xe^{-3x}, \quad y(0) = 0.$

2.2. $y'\left(1 - x^2\right) = xy + 1, \quad y(\sqrt{3}/2) = 2\pi/3.$

2.3. $\frac{dy}{dx} + e^x y = e^{2x}, \quad y(0) = 1/e.$

2.4. $\left(1 - x^2\right)y' - 2xy = \left(1 - x^2\right)^2, \quad y(3) = 40.$

2.5. $x\frac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x, \quad y(\pi/2) = \pi.$

2.6. $xy' \ln x = x + \ln x, \quad y(e^2) = 2\ln 2.$

Відповіді

1.1. $y = x(C + 3x)$. **1.2.** $y = C/x^4 - x^2/6)$. **1.3.** $y = (C + x)/x^2$.

1.4. $y = Ce^{7x} - 2e^{3x}$. **1.5.** $y = C\sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1$. **1.6.** $y = e^{2\sqrt{x}}(C + x)$.

1.7. $y = \dfrac{1}{\cos x}\left(C + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2x\right)$. **1.8.** $y = \dfrac{C + 5x}{\ln x}$. **1.9.** $y = Ce^{-tgx} + tgx - 1$.

1.10. $y = \sqrt{x^2 + 4}\left(C + \dfrac{1}{2}arctg\,\dfrac{x}{2}\right)$. **1.11.** $x = \dfrac{C + y^4}{y^5}$. **1.12.** $x = e^{-1/y}(C + y)$.

2.1. $y = \dfrac{1}{2}x^2e^{-3x}$. **2.2.** $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$. **2.3.** $y = e^{-e^x} + e^x - 1$.

2.4. $y = x^3 + x^2 + x + 1$. **2.5.** $y = x(2 - \cos x)$. **2.6.** $y = \ln x \cdot \ln|\ln x|$.

1.5. Диференціальне рівняння Бернуллі

Означення. *Рівнянням Бернуллі* називається диференціальне рівняння 1-го порядку вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{5.1}$$

де $n \in R, n \neq 0, n \neq 1$, а $P(x)$ і $Q(x)$ - визначені і неперервні на деякому проміжку функції.

Якщо $n = 0$, то рівняння (5.1) є лінійним неоднорідним рівнянням, якщо $n = 1$, то рівняння (5.1) є лінійним однорідним рівнянням. Для інших дійсних значень показника n рівняння Бернуллі можна звести до лінійного диференціального рівняння, за допомогою введення нової функції $z = z(x)$.

Для цього, спочатку поділимо рівняння (5.1) на y^n ($y \neq 0$).

Отримаємо

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x) \qquad (**).$$

Зробимо заміну

$$z = y^{1-n}, \text{ де } z = z(x) \text{ - нова невідома функція.}$$

Звідси

$$z' = \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}y' \qquad \Rightarrow \qquad y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}.$$

Перейдемо в рівнянні $(**)$ до змінної z:

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x) \qquad \Rightarrow \qquad z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Отримане рівняння є *лінійним диференціальним рівнянням* відносно функції $z(x)$, для якого можна застосувати або метод Бернуллі, або метод Лагранжа.

Зауваження 1. Очевидно, що $y = 0$ є розв'язком рівняння Бернуллі, коли $n > 0$.

Зауваження 2. Розв'язок рівняння Бернуллі можна шукати безпосередньо методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його попередньо до лінійного рівняння.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2.$$

<u>Розв'язання.</u> Дане рівняння має вигляд (5.1), тобто це - *рівняння Бернуллі*.

Зведемо його до лінійного, для чого поділимо обидві частини рівняння на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y'y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} = x^2. \qquad (*)$$

Введемо нову змінну $z(x)$, зробивши заміну

$$z = y^{-1}.$$

Диференціюючи функцію $z(x)$, знайдемо

$$z' = \frac{dz}{dx} = -y^{-2} \cdot y' \qquad \Rightarrow \qquad y'y^{-2} = -z'.$$

Переходячи в рівнянні $(*)$ до змінної $z(x)$, отримаємо:

$$-z' + \frac{1}{x}z = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad z' - \frac{1}{x}z = -x^2. \qquad (**)$$

Отримане рівняння є *лінійним рівнянням 1* –го порядку відносно функції $z(x)$, і для знаходження його розв'язку скористаємось методом Бернуллі, поклавши

$$z = uv \quad \Rightarrow \quad z' = u'v + uv'.$$

Підставляючи z і z' в рівняння $(**)$, отримаємо:

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -x^2 \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = -x^2. \qquad (***)$$

Знайдемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз в дужках дорівнював нулю, в наслідок чого рівняння $(***)$ зводиться до системи:

$$\begin{cases} v' - \frac{1}{x}v = 0, \\ u'v = -x^2. \end{cases}$$

Відокремлюючи змінні в першому рівнянні системи та інтегруючи, одержимо:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|x| \quad \Rightarrow \quad v = x.$$

Підставивши знайдену функцію $v = x$ в друге рівняння системи, отримаємо:

$$u'x = -x^2 \quad \Rightarrow \quad u' = -x.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо функцію $u(x)$:

$$du = -x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int du = -\int xdx + C \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Отже, загальний розв’язок *лінійного рівняння* $(**)$:

$$z = uv = \left(C - \frac{x^2}{2}\right)x = Cx - \frac{x^3}{2}.$$

Для отримання розв'язку рівняння $(*)$, слід повернутися до змінної y. Оскільки $z = y^{-1}$, то

$$\frac{1}{y} = \frac{2Cx - x^3}{2} \quad \text{або} \quad y = \frac{2}{2Cx - x^3}.$$

Це і є *загальний розв’язок* заданого рівняння Бернуллі.

Дане рівняння можна легко розв’язати і не зводячи його до лінійного, а безпосередньо застосовуючи до нього *метод Бернуллі*.

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$x^2y^2y' + xy^3 = 1.$$

Розв’язання. Поділимо обидві частини рівняння на x^2y^2:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2y^2}.$$

Отримали *рівняння Бернуллі* вигляду (5.1). Розв’яжемо його безпосередньо *методом Бернуллі*, поклавши

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + uv'.$$

Підставляючи y і y' в отримане рівняння, маємо:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2u^2v^2} \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2u^2v^2}.$$

Звідси, як і в розв’язанні попередньої задачі, отримаємо два зв’язаних між собою рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{x^2u^2v^2}. \end{cases}$$

Розв’язуючи перше рівняння, знаходимо v як найпростіший частинний розв’язок цього рівняння:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln\left|x^{-1}\right| \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x}.$$

Підставляючи v в друге рівняння системи та розв’язуючи його, знаходимо u як загальний розв’язок цього рівняння:

$$\frac{du}{dx}\frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2u^2} \quad \Rightarrow \quad u^2du = xdx \quad \Rightarrow \quad \int u^2du = \int xdx + \overline{C},$$

звідси

$$\frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{3} \quad \Rightarrow \quad u^3 = \frac{3x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}.$$

Отже, можемо записати загальний розв’язок рівняння Бернуллі:

$$y = uv = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}\right)\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}.$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початкову умову (*задача Коші*):

$$\left(x^2\ln y - x\right)y' = y, \qquad y\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

Розв'язання. Дане рівняння не буде лінійним відносно функції $y(x)$, оскільки змінна y входить під знак логарифма. Зробимо деякі перетворення:

$$\left(x^2\ln y - x\right)\frac{dy}{dx} = y \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x^2\ln y - x} \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dy}=\frac{x^2\ln y - x}{y},$$

звідси

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x^2\ln y}{y}-\frac{x}{y} \quad\Rightarrow\quad x'+\frac{x}{y}=\frac{\ln y}{y}x^2.$$

Отримане рівняння є *рівняння Бернуллі*, якщо вважати змінну x функцією, а y її аргументом. Тоді його розв'язок шукаємо у вигляді

$$x=u(y)\cdot v(y) \quad\Rightarrow\quad x'=u'v+uv'.$$

Підставляючи x і x' в отримане рівняння, маємо:

$$u'v+uv'+\frac{uv}{y}=\frac{\ln y}{y}u^2v^2 \quad\Rightarrow\quad u'v+u\left(v'+\frac{v}{y}\right)=\frac{\ln y}{y}u^2v^2. \qquad (*)$$

Покладемо $v'+\dfrac{v}{y}=0$ і знайдемо функцію $v(y)$:

$$\frac{dv}{dy}=-\frac{v}{y} \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{v}=-\frac{dy}{y} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dy}{y} \quad\Rightarrow\quad \ln|v|=-\ln|y| \quad\Rightarrow\quad v=\frac{1}{y}.$$

Далі підставляємо знайдену функцію $v=\dfrac{1}{y}$ в рівняння $(*)$ та відокремлюємо змінні:

$$u'\frac{1}{y}=\frac{\ln y}{y}u^2\frac{1}{y^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dy}=\frac{\ln y}{y^2}u^2 \quad\Rightarrow\quad \int\frac{du}{u^2}=\int\frac{\ln y}{y^2}dy.$$

Інтеграл справа беремо частинами:

$$\int \frac{\ln y}{y^2}dy = \left| \begin{matrix} u = \ln y, & du = \frac{1}{y}dy \\ dv = \frac{dy}{y^2}, & v = -\frac{1}{y} \end{matrix} \right| = -\frac{\ln y}{y} + \int \frac{dy}{y^2} + C = -\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y} + C.$$

У результаті знаходимо функцію $u(y)$:

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y} + C \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{y}{\ln y + 1 - Cy}.$$

Отже, *загальний розв'язок* рівняння має вигляд:

$$x(y) = u(y)\cdot v(y) = \frac{1}{\ln y + 1 - Cy}.$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову $x = \frac{1}{2}$ при $y = 1$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\ln 1 + 1 - C\cdot 1} \qquad \Rightarrow \qquad C = -1.$$

Отже, *частинний розв'язок заданого* рівняння має вигляд:

$$x = \frac{1}{\ln y + y + 1}.$$

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається *рівнянням Бернуллі*?
2. Описати *метод розв'язання* рівняння Бернуллі?
3. Чим відрізняється рівняння Бернуллі від лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку?
4. Чи можна розв'язувати рівняння Бернуллі безпосередньо методом Бернуллі, не зводячи його до лінійного рівняння?

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти розв'язок рівняння:

1.1. $y' + y = x\sqrt{x}.$

1.2. $y' + 2\dfrac{y}{x} = 3x^2 y^{4/3}.$

1.3. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}.$

1.4. $y' + 2\dfrac{y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$

1.5. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$

1.6. $y' + y = e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{y} = 0, \quad y(0) = \dfrac{9}{4}.$

1.7. $y' + \dfrac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2\left(x^3+1\right)\sin x, \quad y(0) = 1.$

1.8. $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0.$

Вказівка. Прийняти за невідому функцію x.

1.9. $y' - 2ytgx + y^2\sin^2 x = 0.$

1.10. $y'\left(y^2 + 2y + x^2\right) + 2x = 0, \quad y(1) = 0.$

Вказівка. Прийняти за невідому функцію x.

Відповіді

1.1. $y = \left(x - 2 + Ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2$. **1.2.** $y^{-\frac{1}{3}} = Cx^{\frac{2}{3}} - \dfrac{3}{7}x^3$. **1.3.** $y = \dfrac{x-1}{C-x}.$

1.4. $y^{\frac{1}{2}} - tgx = \dfrac{\ln\cos x + C}{x}$. **1.5.** $y^{-4} = x^3\left(e^x + C\right)$. **1.6.** $y = e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}e^x + 1\right)^2$.

1.7. $y = \dfrac{\sec x}{x^3+1}$. **1.8.** $x = \dfrac{1}{y(y+C)}$.**1.9.** $y = \dfrac{\sec^2 x}{tgx - x + C}$. **1.10.** $x^2 + y^2 = e^{-y}$.

РОЗДІЛ 2
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ
2.1. Загальні поняття та означення

Означення. *Диференціальним рівнянням* n *–го порядку* називається рівняння вигляду

$$F\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}\right)=0 \tag{1.1}$$

або, якщо воно розв’язане відносно старшої похідної,

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)}\right), \tag{1.2}$$

де функція f визначена і неперервна в деякій області D зміни своїх аргументів.

Означення. *Розв’язком* диференціального рівняння (1.2) називається будь-яка n разів неперервно-диференційовна функція $y=\varphi(x)$, яка при підстановці в це рівняння обертає його в тотожність:

$$\varphi^{(n)}(x)=f\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\dots,\varphi^{(n-1)}(x)\right).$$

Означення. *Загальним розв’язком* диференціального рівняння n–го порядку (1.2) називається функція $y=\varphi(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$, де $C_1,C_2,\dots,C_n$ - довільні сталі, яка задовольняє умовам:

1) функція $\varphi(x,C_1,C_2,\dots,C_n)$ є розв’язком цього рівняння для будь-яких значень $C_1,C_2,\dots,C_n$;
2) для будь-яких початкових умов

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0, \tag{1.3}$$

існують єдині значення сталих $C_1=C_1^0,\ C_2=C_2^0,\ \dots,\ C_n=C_n^0$ такі, що функція $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0,\dots,C_n^0)$ є розв’язком цього рівняння і задовольняє початкові умови (1.3).

Означення. Будь-який розв’язок $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0,\dots,C_n^0)$ рівняння (1.2), який отримано із загального розв'язку при конкретних значеннях сталих $C_1=C_1^0,\ C_2=C_2^0,\ \dots,\ C_n=C_n^0$, називається *частинним розв’язком*.

Означення. Розв’язок диференціального рівняння (1.2), записаний у вигляд $\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$ або $\Phi(x,y,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0)=0$, називається *загальним* або *частинним інтегралом* відповідно.

Означення. Графік будь-якого розв'язку диференціального рівняння n –го порядку називається *інтегральною кривою*.

Загальний розв’язок диференціального рівняння (1.2) зображує множину інтегральних кривих; частинний розв’язок – одну інтегральну криву цієї множини.

Означення. Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння (1.2), який задовольняє заданим початковим умовам (1.3), називається *задачею Коші*.

Теорема Коші *(існування та єдності розв'язку)*.

Якщо в диференціальному рівнянні (1.2) функція $f\left(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}\right)$ та її частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ неперервні в деякій області D зміни змінних $x,\ y,\ y',\ y'',\ ...,y^{(n-1)}$, то для будь-якої точки $(x_0;y_0;y_0',...,y_0^{(n-1)})\in D$ існує єдиний розв’язок $y=\varphi(x)$ цього рівняння, який задовольняє початкові умови (1.3).

Геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку полягає в тому, що при виконанні умов теореми існує єдина інтегральна крива, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ і має в цій точці дотичну із заданим кутовим коефіцієнтом $y'(x_0)=y_0'$.

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається *диференціальним рівнянням n-го порядку*?
2. Що називається *розв’язком* диференціальним рівнянням n-го порядку?
3. Який розв’язок диференціального рівняння n-го порядку називається *загальним*?

4. Який розв’язок диференціального рівняння n-го порядку називається *частинним*?
5. Що називають *загальним* і *частинним інтегралом* диференціального рівняння n-го порядку?
6. Дати *геометричну інтерпретацію* загального та частинного розв'язку диференціального рівняння n-го порядку?
7. Скільки сталих інтегрування містить загальний розв’язок диференціального рівняння 2-го порядку?
8. Сформулюйте постановку *задачі Коші* для диференціального рівняння n-го порядку та її геометричний зміст для диференціального рівняння 2-го порядку.
9. Сформулюйте *теорему про існування та єдиність* розв’язку задачі Коші для диференціального рівняння n-го порядку.

2.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

Розв’язування деяких диференціальних рівнянь вищих порядків можна звести до розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку за допомогою певної заміни змінних. Розглянемо деякі типи таких рівнянь, які допускають зниження порядку.

1. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x), \tag{2.1}$$

яке *містить тільки похідну* n *-го порядку і незалежну змінну* x, розв’язуються послідовним n-кратним інтегруванням.

Знайдемо загальний розв’язок рівняння (2.1). Для цього помножимо обидві частини цього рівняння на dx та зінтегрувавши

$$\int y^{(n)}dx = \int f(x)dx,$$

отримаємо

$$y^{(n-1)} = \varphi_1(x) + C_1,$$

де $\varphi_1(x)$ - первісна, C_1 - довільна стала інтегрування. В результаті порядок отриманого диференціального рівняння знизився на одиницю.

Провівши аналогічні дії з отриманим рівнянням, можемо ще раз знизити його порядок на одиницю:

$$\int y^{(n-1)}dx = \int \varphi_1(x)dx + \int C_1 dx,$$

звідки

$$y^{(n-2)} = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2,$$

де $\varphi_2(x)$ - первісна, C_1, C_2 - довільні сталі інтегрування.

Повторюючи цей процес інтегрування n разів, отримаємо загальний розв'язок рівняння (2.1):

$$y = \varphi_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Зауваження 1. Отриману формулу запам'ятовувати непотрібно, необхідно <u>запам'ятати сам метод</u> пониження порядку похідної.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(4)} = \sin 3x.$$

<u>Розв'язання.</u> Дане диференціальне рівняння 4-го порядку вигляду $y^{(4)} = f(x)$ (7.1), коли $n = 4$. Тому його загальний розв'язок знайдемо послідовним чотирьохкратним інтегруванням за змінною x:

$$\int y^{(4)}dx = \int \sin 3x dx \quad \Rightarrow \quad y''' = -\frac{1}{3}\cos 3x + C_1,$$

$$\int y''' dx = -\frac{1}{3}\int \cos 3x dx + \int C_1 dx \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1 x + C_2,$$

$$\int y'' dx = -\frac{1}{9}\int \sin 3x dx + \int C_1 x dx + \int C_2 dx \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Останній раз зінтегрувавши

$$\int y' dx = \frac{1}{27}\int \cos 3x \sin 3x dx + \int C_1 \frac{x^2}{2}dx + \int C_2 x dx + \int C_3 dx,$$

отримаємо загальний розв'язок

$$y' = \frac{1}{81}\sin 3x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 .$$

2. Диференціальне рівняння другого порядку вигляду

$$y'' = f(x, y') \quad \text{або} \quad F(x, y', y'') = 0 \tag{2.2}$$

яке *явно не містить шуканої функції* y.

Порядок такого рівняння можна знизити за допомогою заміни:

$$y' = p(x),$$

де $p = p(x)$ - нова невідома функція. Тоді

$$y'' = p'(x)$$

і рівняння (2.2) стає диференціальним рівнянням першого порядку відносно нової змінної $p(x)$ вигляду

$$F(x, p, p') = 0 . \tag{2.3}$$

Знайшовши для рівняння (2.3) загальний розв'язок $p = \varphi(x, C_1)$, повертаємось до функції y, зробивши обернену заміну

$$p = y' .$$

В результаті знову отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно функції y, вигляду (2.1):

$$y' = \varphi(x, C_1),$$

яке інтегрується, і дає загальний розв'язок рівняння (2.2)

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2 .$$

Зауваження 2.

1) Частинним випадком рівняння (2.2) є рівняння вигляду

$$y'' = f(y'), \tag{2.4}$$

яке також *не містить явно шуканої функції* y *та незалежної змінної* x.

Метод його розв'язування такий самий, за допомогою заміни

$$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'(x).$$

Тоді рівняння (2.4) приймає вигляд рівняння з відокремлюваними змінними:

$$p' = f(p).$$

2) Узагальненням рівняння (2.2) є рівняння вигляду

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (2.5)$$

яке *явно не містить шуканої функції* y *та її похідних до* $(k-1)$*-го порядку* включно.

Його порядок може бути знижений на k одиниць до $(n-k)$-го порядку заміною змінної

$$y^{(k)} = p(x) \quad \Rightarrow \quad y^{(k+1)} = p'(x), \ \ y^{(k+2)} = p''(x), \ldots, \ \ y^{(n)} = p^{(n-k)}(x)$$

і рівняння (2.5) приймає вигляд

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Зокрема, порядок рівняння вигляду

$$F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \qquad (2.6)$$

що містить дві послідовні похідні, знижується заміною $y^{(n-1)} = p(x)$ і рівняння (2.6) приймає вигляд

$$F(x, p, p') = 0.$$

Якщо для цього рівняння вдається знайти загальний розв'язок $p = p(x, C_1)$, то приходимо до рівняння $y^{(n-1)} = p(x, C_1)$ вигляду (2.1), після інтегрування якого отримаємо загальний розв'язок рівняння (2.6).

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + \frac{2}{x} y' = x.$$

<u>Розв'язання.</u> Дане диференціальне рівняння має вигляд $F(x, y', y'') = 0$ (2.2), тобто не містить явно шуканої функції y, отже, має місце випадок **2.** Порядок такого рівняння можна знизити за допомогою уведення нової невідомої функції $p(x)$, зробивши заміну:

$$y' = p(x) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'(x).$$

У результаті отримаємо диференціальне рівняння 1-го порядку відносно функції $p(x)$:

$$p' + \frac{2}{x}p = x.$$

Отримали лінійне неоднорідне рівняння 1-го порядку вигляду (4.1) (див. пункт **1.4.**), яке можна розв'язати, наприклад, методом Бернуллі, поклавши

$$p = u(x)v(x) \quad \Rightarrow \quad p' = u'v + uv'.$$

Тоді маємо

$$u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = x \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = x.$$

Звідси складаємо систему рівнянь для функцій $u(x)$ і $v(x)$:

$$\begin{cases} v' + \frac{2}{x}v = 0, \\ u'v = x. \end{cases}$$

Інтегруючи перше рівняння, знайдемо:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2}{x}v \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{2dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -2\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v(x) = \frac{1}{x^2}.$$

З другого рівняння системи маємо

$$u'\frac{1}{x^2} = x \quad \Rightarrow \quad u' = x^3 \quad \Rightarrow \quad \int du = \int x^3 dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{x^4}{4} + C_1$$

Отже, функція $p(x)$ дорівнює:

$$p = u(x)v(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C_1\right)\frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Повертаючись до змінної y, зробимо обернену заміну $p = y'$. Тоді маємо

$$y' = \frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Це рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними, але вже відносно функції $y(x)$:

$$dy = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2} \right) dx \qquad \Rightarrow \qquad \int dy = \int \left(\frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{x^2} \right) dx .$$

Звідси отримаємо *загальний розв'язок* початкового рівняння 2-го порядку:

$$y = \frac{x^3}{12} - \frac{C_1}{x} + C_2 .$$

Таким чином, розв'язування одного диференціального рівняння 2-го порядку звелося до інтегрування двох рівнянь 1-го порядку.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(4)} x = y''' .$$

<u>Розв'язання.</u> Рівняння має вигляд $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ (2.6), тобто не містить явно шуканої функції y та її похідних до другого порядку включно. Тому, його порядок може бути знижений заміною $y''' = p(x)$.

Тоді $y^{(4)} = p'(x)$ і задане рівняння зводиться до такого:

$$p' x = p .$$

Дане рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dp}{dx} x = p \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} .$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ln|p| = \ln|x| + \ln C_1 .$$

Потенціюючи, одержимо

$$p = C_1 x .$$

Повертаючись до змінної y, зробимо обернену заміну $p = y'''$, маємо рівняння вигляду (2.1)

$$y''' = C_1 x .$$

Тоді, унаслідок трьох послідовних інтегрувань, отримаємо *загальний розв'язок* початкового рівняння 4-го порядку:

$$\int y'''dx = \int C_1 x dx \quad \Rightarrow \quad y'' = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2,$$

$$\int y''dx = \int C_1 \frac{x^2}{2} dx + \int C_2 dx \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3,$$

$$\int y'dx = \int C_1 \frac{x^3}{6} dx + \int C_2 x dx + \int C_3 dx \quad \Rightarrow \quad y = C_1 \frac{x^4}{24} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

або

$$y = \overline{C}_1 x^4 + \overline{C}_2 x^2 + C_3 x + C_4,$$

де $\overline{C}_1 = \frac{C_1}{24}$, $\overline{C}_2 = \frac{C_2}{2}$.

3. Диференціальне рівняння другого порядку вигляду

$$y'' = f(y, y') \text{ або } F(y, y', y'') = 0 \qquad (2.7)$$

яке *явно не містить незалежної змінної* x.

Порядок такого рівняння можна знизити за допомогою заміни:

$$y' = p(y),$$

де $p = p(y)$ - нова невідома функція. Тоді

$$y'' = p'(y) \cdot y'(x) = p'p$$

і рівняння (2.7) стає диференціальним рівнянням першого порядку відносно нової змінної $p(y)$ вигляду

$$F(y, p, p') = 0. \qquad (2.8)$$

Загальний розв'язок рівняння (2.8) буде мати вигляд $p = \varphi(y, C_1)$. Повертаємось до функції y, зробивши обернену заміну

$$p = y'.$$

В результаті знову отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно функції y, вигляду:

$$y' = \varphi(y, C_1),$$

яке інтегрується, і дає загальний розв'язок рівняння (2.7):

$$\int \frac{dy}{\varphi(x,C_1)} = \int dx \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{\varphi(x,C_1)} = x + C_2 .$$

Зауваження 3.

1) Частинним випадком рівняння (2.7) є рівняння вигляду

$$y'' = f(y), \tag{2.9}$$

яке також *не містить явно незалежну змінну* x *та похідну функції* y'.

Метод його розв’язування такий самий, за допомогою заміни

$$y' = p(y) \qquad \Rightarrow \qquad y'' = p'p .$$

Тоді рівняння (2.9) приймає вигляд рівняння з відокремлюваними змінними:

$$p'p = f(y).$$

2) Узагальненням рівняння (2.7) є рівняння вигляду

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{2.10}$$

яке *явно не містить незалежну змінну* x.

Його порядок можна знизити на одиницю, поклавши

$$y' = p(y) \qquad \Rightarrow \qquad y'' = p'_y p, \quad y''' = \left(p'_y p\right)'_x = \left(p'_y p\right)'_x \cdot y'_x =$$
$$= \left(p''_{yy} p + p'_y p'_y p\right) \cdot p = p''_{yy} p^2 + \left(p'_y\right)^2 p^2, \ \ldots ,$$

і рівняння (2.10) приймає вигляд

$$F(y, p, p'_y p, p''_{yy} p^2 + \left(p'_y\right)^2 p^2, \ldots) = 0 .$$

Приклад 4. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' ctg y = 2(y')^2 .$$

Розв’язання. Задане диференціальне рівняння має вигляд $F(y, y', y'') = 0$ (2.7), тобто не містить явно незалежної змінної x отже, має місце випадок **3.** Рівняння такого типу допускає зниження порядку за допомогою уведення нової невідомої функції $p(y)$, аргументом якої є сама шукана функція $y(x)$. Тобто, зробимо заміну:

$$y' = p(y) \qquad \Rightarrow \qquad y'' = p'p .$$

У результаті задане рівняння зводиться до диференціальне рівняння 1-го порядку відносно функції $p(y)$:

$$p'pctgy = p^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dy}ctgy = p.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуючи його знайдемо

$$\int \frac{dp}{p} = \int tgydy \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = -\ln|\cos y| + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad p(y) = \frac{C_1}{\cos y}.$$

Враховуючи, що $p(y) = y'$, отримаємо рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними відносно шуканої функції $y(x)$:

$$y' = \frac{C_1}{\cos y}.$$

Інтегруючи це рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\cos y} \quad \Rightarrow \quad \int \cos ydy = C_1 \int dx \quad \Rightarrow \quad \sin y = C_1 x + C_2,$$

знайдемо *загальний розв'язок* вихідного рівняння:

$$y = \arcsin(C_1 x + C_2).$$

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + y - 1 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

<u>Розв'язання.</u> Тут маємо випадок рівняння вигляду $y'' = f(y)$ (2.9), тобто рівняння не містить явно незалежної змінної x. Знизити його порядок можна за допомогою заміни:

$$y' = p(y) \quad \Rightarrow \quad y'' = p'p.$$

У результаті маємо рівняння 1-го порядку відносно функції $p(y)$:

$$p'p + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p'p = 1 - y.$$

Відокремлюємо змінні і виконуємо інтегрування:

$$\int pdp = \int (1-y)dy \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2} = y - \frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{2} \quad \Rightarrow \quad p^2 = 2y - y^2 + C_1.$$

Отже функція $p(y)$ визначається виразом

$$p(y) = \pm\sqrt{2y - y^2 + C_1}\,.$$

Повертаючись до функції $y(x)$, робимо обернену заміну $p(y) = y'$. Маємо

$$y' = \pm\sqrt{2y - y^2 + C_1}\,.$$

На цьому етапі можна визначити довільну сталу C_1, використовуючи початкові умови. Оскільки $y = 1$ і $y' = 1$ при $x = 0$, то

$$1 = \pm\sqrt{2 - 1 + C_1} \quad \Rightarrow \quad 1 = \pm\sqrt{1 + C_1}\,,$$

звідки випливає,що $C_1 = 0$. Зауважимо, оскільки $y'(0) = 1 > 0$, то перед коренем потрібно брати знак «+».

Таким чином, знову маємо диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремлюваними змінними, але вже відносно шуканої функції $y(x)$:

$$y' = \pm\sqrt{2y - y^2}\,.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2y - y^2}} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\sqrt{1 - (y-1)^2}} = x + C_2 \quad \Rightarrow \quad \arcsin(y-1) = x + C_2\,.$$

Знову звертаючись до початкових умов, визначимо сталу C_2. Враховуючи, що $y = 1$ при $x = 0$, то

$$\arcsin(1-1) = 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0\,.$$

В результаті маємо *розв'язок задачі Коші*:

$$\arcsin(y-1) = x \quad \Rightarrow \quad y - 1 = \sin x$$

або $$y = \sin x + 1\,.$$

Контрольні запитання

1. Опишіть метод розв'язання рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$.
2. Опишіть метод розв'язання рівняння вигляду $F(x, y', y'') = 0$.
3. Опишіть метод розв'язання рівняння вигляду $F(y, y', y'') = 0$.

4. У якому випадку для зниження порядку диференціального рівняння використовується заміна $y' = p(x)$?
5. У якому випадку для зниження порядку диференціального рівняння використовується заміна $y' = p(y)$?
6. Яку заміну слід використати для зниження порядку рівняння вигляду $y'' = f(y')$?
7. Яку заміну слід використати для зниження порядку рівняння вигляду $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$?
8. Яким чином можна знизити порядок рівняння $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, що містить *дві послідовні* похідні?
9. Яку заміну слід використати для зниження порядку рівняння вигляду $y'' = f(y)$?
10. Яку заміну слід використати для зниження порядку рівняння вигляду $F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$?

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок (загальний інтеграл) рівняння:

1.1. $y'' = \sin 2x.$

1.2. $y''' = e^{-x/4}.$

1.3. $y'' = \ln x.$

1.4. $x^2 y'' = 2.$

1.5. $xy'' - y' = 0.$

1.6. $y''\left(e^x + 1\right) + y' = 0.$

1.7. $x^2 y'' + xy' = 1.$

1.8. $y'' + y' tg 2x = \sin 2x.$

1.9. $2xy'y'' = \left(y'\right)^2 + 1.$

1.10. $2yy'' = y'^2.$

1.11. $y''\left(3y + 4\right) - 3y'^2 = 0.$

1.12. $yy'' = y^2 y' + y'^2.$

1.13. $y'' = 8\big/ y^3.$

1.14. $yy'' + y'^2 = 1.$

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє задані початкові умови:

2.1. $y'' = \sin 3x, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 4/9.$

2.2. $xy'' = 1, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2.$

2.3. $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$

2.4. $yy'' + y'^3 - y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1/2.$

2.5. $y''(x^2+1) = 2xy', \quad y(1) = 1/3, \quad y'(1) = 2.$

2.6. $2yy'' = y'^2 - y^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Відповіді

1.1. $y = (-1/4)\sin 2x + C_1x + C_2$. **1.2.** $y = -64e^{-x/4} + C_1x^2 + C_2x + C_3$.
1.3. $y = (1/2)x^2 \ln x - (3/4)x^2 + C_1x + C_2$. **1.4.** $y = -2\ln|x| + C_1x + C_2$.
1.5. $y = C_1x^2 + C_2$. **1.6.** $y = C_1\left(x - e^{-x}\right) + C_2$.
1.7. $y = (1/2)\ln^2|x| + C_1 \ln|x| + C_2$. **1.8.** $y = C_2 + C_1 \sin x - x - (1/2)\sin 2x$.
1.9. $y = \dfrac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3} + C_2$. **1.10.** $y = (C_1x + C_2)^2$.
1.11. $y = (1/3)\ln|3y+4| = C_1x + C_2$. **1.12.** $x = (1/C_1)\ln|y/(y+C_1)| + C_2$.
1.13. $(C_1x + C_2)^2 = C_1y^2 - 8$. **1.14.** $x = (1/2)\sqrt{y^2 + C_1} + C_2$.

2.1. $y = 1/3 - (1/9)\sin 3x$. **2.2.** $y = x\ln|x| + x - 1$.
2.3. $y = x^4/8 - x^3/6 + x^2/2 - x$. **2.4.** $x = y + \ln|y| - 1$. **2.5.** $y = x^3/3 + x - 1$.
2.6. $y = 1 + \sin x$.

2.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Означення. *Лінійним однорідним диференціальним рівнянням n–го порядку зі сталими коефіцієнтами* називається рівняння, *лінійне відносно невідомої функції* $y = y(x)$ *та її похідних* $y', \ y'', \ \ldots, \ y^{(n)}$:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_1y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{3.1}$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, ..., a_n$ - дійсні числа (деякі з них можуть дорівнювати нулю).

Розглянемо *лінійне однорідне диференціальне рівняння 2–го порядку зі сталими коефіцієнтами* вигляду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{3.2}$$

та встановимо деякі властивості його розв'язків.

Означення. Функції $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ називаються *лінійно незалежними* на інтервалі (a,b), якщо рівність

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0, \text{ де } \alpha_1, \alpha_2 \in R, \tag{3.3}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Якщо хоча б одне з чисел α_1 або α_2 відмінні від нуля і виконується рівність (3.3), то функції y_1 та y_2 називаються *лінійно залежними* на інтервалі (a,b).

Очевидно, що дві функції y_1 та y_2 *лінійно залежні* тоді і тільки тоді, коли вони пропорційні, тобто виконується рівність

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda \quad \text{або} \quad y_1 = \lambda y_2, \quad \text{де } \lambda = const \ .$$

Більш універсальним засобом вивчення лінійної залежності системи функцій є, так званий, *визначник Вронського* або *вронскіан*.

Означення. *Визначником Вронського* системи двох функцій $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ називаються визначник 2-го порядку

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} .$$

Для того щоб система розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійного однорідного рівняння (3.2) була *лінійно незалежною* на інтервалі (a,b), необхідно і достатньо, щоб вронскіан на цьому інтервалі був відмінний від нуля.

Означення. Сукупність будь-яких двох лінійно незалежних на інтервалі (a,b) частинних розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійного однорідного рівняння (3.2) утворює *фундаментальну систему* розв'язків цього рівняння. Тобто будь-який довільний розв'язок може бути поданий лінійною комбінацією лінійно незалежних (фундаментальних) розв'язків:

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x).$$

Теорема *(про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку)*

Якщо два частинні розв'язки $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ лінійного однорідного диференціальне рівняння 2–го порядку (3.2) утворюють на інтервалі (a,b) фундаментальну систему, то загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{3.4}$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Тобто, для знаходження загального розв'язку рівняння (3.2) достатньо знайти два лінійно незалежних розв'язки цього рівняння, які утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Частинні розв'язки лінійного однорідного диференціальне рівняння шукають у вигляді

$$y = e^{\lambda x},$$

де λ - стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти.

Тоді

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Підставляючи значення y, y' і y'' в рівняння (3.2), отримаємо:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_2 e^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2\right) = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, маємо

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{3.5}$$

Означення. Рівняння (3.5) називається *характеристичним рівнянням* для лінійного однорідного рівняння (3.2).

Для його складання достатньо в рівнянні (3.2) зробити заміну:

$$y'' = \lambda^2, \ y' = \lambda, \ y = \lambda^0 = 1.$$

Залежно від коренів характеристичного рівняння (3.5) можливі такі розв'язки рівняння (3.2):

1. Корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння (3.5) *дійсні й різні* (*прості*), тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$.

В цьому випадку частинними розв'язками рівняння (3.2) є функції $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ і $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків на довільному проміжку числової осі, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq \text{const}.$$

Можна також показати, що визначник Вронського для цих функцій відмінний від нуля. Дійсно,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

Тому, загальний розв'язок рівняння (3.2), згідно формули (3.4) має вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{3.6}$$

2. Корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння (3.5) *дійсні й рівні* (*кратні*), тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in R$.

В цьому випадку лінійно незалежними частинними розв'язками рівняння (3.2) будуть функції $y_1 = e^{\lambda x}$ і $y_2 = xe^{\lambda x}$, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x} \neq \text{const}.$$

Також неважко переконатися, що вронскіан для цих функцій відмінний від нуля. Тобто вони утворюють фундаментальну систему розв'язків і тому загальний розв'язок рівняння (3.2) має вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}. \tag{3.7}$$

3. Корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння (3.5) комплексно-спряжені, тобто $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0$.

В цьому випадку частинні лінійно незалежні розв'язки мають вигляд

$$y_1 = e^{ax}\cos bx\,,\; y_2 = e^{ax}\sin bx\,,$$

оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{ax}\cos bx}{e^{ax}\sin bx} = ctgbx \neq \text{const} \;\text{ або }\; W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Тоді загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння (3.2):

$$y = e^{ax}\left(C_1\cos bx + C_2\sin bx\right). \tag{3.8}$$

Зауваження. Розглянутий вище метод знаходження загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (3.2) зводиться до знаходження коренів характеристичного рівняння (3.5) та використання формул (3.6) - (3.8) без його інтегрування.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' + 5y' - 6y = 0\,.$$

<u>Розв’язання.</u> Задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду (3.2).

Складемо для нього характеристичне рівняння. Для цього замінимо в рівнянні функцію y та її похідні y', y'' відповідними степенями λ:

$$y'' = \lambda^2\,,\;\; y' = \lambda\,,\;\; y = \lambda^0 = 1\,.$$

Тоді маємо

$$\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0\,.$$

Знаходимо його корені: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -6$.

Оскільки корені характеристичного рівняння *дійсні й різні*

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R\,,$$

то має місце випадок **1**.

Тоді, згідно з формулою (8.6), *загальний розв’язок* цього рівняння має вигляд

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-6x}\,.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' + 6y' + 9y = 0\,.$$

Розв'язання. Задано лінійне однорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду (3.2).

Складемо його характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0.$$

Як бачимо, корені характеристичного рівняння *дійсні й кратні*

$$\lambda_{1,2} = -3 \in R,$$

тобто має місце випадок **2**.

Отже, згідно з формулою (3.7), *загальний розв'язок* цього рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Корені цього квадратного рівняння – *комплексно-спряжені числа*

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i \in C.$$

Отже, має місце випадок **3**, де дійсна частина $a = 2$ і уявна $b = 1$.

Тоді, згідно з формулою (3.8), шуканий *загальний розв'язок* заданого рівняння набуває вигляду

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right).$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 4..$$

Розв'язання. Спочатку необхідно знайти фундаментальну систему розв'язків, потім скласти загальний розв'язок, нарешті, використовуючи початкові умови, знайти частинний розв'язок.

Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню, і знайдемо його корені:

$$\lambda^2+4=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2}=\pm 2i.$$

Отже, $y_1(x)=\cos 2x$, $y_2(x)=\sin 2x$ і загальний розв'язок однорідного рівняння буде таким:

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

Для визначення сталих C_1 і C_2 скористаємось початковими умовами, для чого попередньо знайдемо

$$y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x.$$

У результаті маємо систему рівнянь відносно C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1+C_2\cdot 0=1, \\ -2C_1\cdot 0+2C_2=4. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} C_1=1, \\ C_2=2. \end{array}\right.$$

Підставляючи значення сталих C_1 і C_2 в загальний розв'язок, знаходимо шуканий *частинний розв'язок* однорідного рівняння:

$$y=\cos 2x+2\sin 2x.$$

Розглянутий вище метод побудови загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами можна поширити і на рівняння n–го порядку вигляду (3.1). Не розглядаючи детально теорію, сформулюємо основні твердження.

Нехай маємо рівняння *n–го порядку* вигляду (3.1):

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_1y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0.$$

Функції $y_1=y_1(x),\ y_2=y_2(x),\ \ldots,\ y_n=y_n(x)$ називаються *лінійно незалежними* на інтервалі (a,b), якщо рівність $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\ldots+\alpha_ny_n=0$ виконується тоді і тільки тоді, коли всі числа $\alpha_i=0\quad(i=1,2,\ldots,n)$. У протилежному випадку, якщо хоча б одне з чисел $\alpha_i\neq 0$, функції $y_1,y_2,\ldots,y_n$ називаються *лінійно залежними*.

Визначник Вронського системи функцій $y_1,y_2,\ldots,y_n$ має вигляд

$$W(y_i)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Для того щоб система розв'язків $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійного однорідного рівняння (3.1) була *лінійно незалежною* на інтервалі (a,b), необхідно і достатньо, щоб вронскіан на цьому інтервалі був відмінний від нуля.

Сукупність n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1, y_2, ..., y_n$ рівняння (3.1) утворює *фундаментальну систему розв'язків* на інтервалі (a,b).

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (3.1) має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \tag{3.9}$$

де C_i $(i=1,2,\dots,n)$ - довільні сталі, y_i - частинні розв'язки рівняння (3.1), які утворюють фундаментальну систему.

Частинні розв'язки лінійного однорідного диференціальне рівняння (3.1) також шукають у вигляді $y = e^{\lambda x}$, де λ - стала, яку треба знайти.

Характеристичним рівнянням для рівняння (3.1) є алгебраїчне рівняння *n–го* степеня вигляду

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = 0. \tag{3.10}$$

Рівняння (3.10), як відомо, має *n* коренів (серед них можуть бути і комплексні). Позначимо ці корені через $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ і розглянемо випадки.

1. Всі корені λ_i $(i=1,2,\dots,n)$ характеристичного рівняння (3. 10) *дійсні й різні* (*прості*).

Тоді функції $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$ є частинними розв'язками рівняння (3.1) і утворюють фундаментальну систему розв'язків. Тому загальний розв'язок рівняння (3.1) записують у вигляді

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2. Всі корені λ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ характеристичного рівняння (3.10) *дійсні, але деякі з них кратні* (кратності $k>1$).

Тоді кожному простому кореню λ відповідає один частинний розв'язок вигляду $e^{\lambda x}$, а кожному кореню λ кратності $k>1$ відповідає k частинних розв'язків вигляду: $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, $x^2e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$.

3. Серед коренів характеристичного рівняння (3. 10) є *комплексно-спряжені*. Тоді кожній парі $a \pm ib$ простих комплексно-спряжених коренів відповідає два частинних розв'язки:

$$e^{ax}\cos bx \text{ і } e^{ax}\sin bx,$$

а кожній парі $a \pm ib$ комплексно-спряжених коренів кратності $k>1$ відповідає $2k$ частинних розв'язків вигляду:

$$e^{ax}\cos bx,\; xe^{ax}\cos bx,\; \ldots,\; x^{k-1}e^{ax}\cos bx;$$

$$e^{ax}\sin bx,\; xe^{ax}\sin bx,\; \ldots,\; x^{k-1}e^{ax}\sin bx.$$

Позначимо ці частинні розв'язки через $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок рівняння (3.1) знаходимо за формулою (3.9).

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

Розв'язання. Задано лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами вигляду (3.1), порядку $n=3$. Для його розв'язання використовуємо ту саму схему, що й для рівнянь 2-гопорядку.

Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому лінійному однорідному рівнянню 3-го порядку:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0.$$

Знайдемо його корені:

$$\lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda - 3\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 0,\\ \lambda_2 = -1,\\ \lambda_3 = 3.\end{array}\right.$$

Оскільки всі корені *дійсні й різні*, то їм відповідають частинні розв'язки

$$y_1(x)=1, \qquad y_2(x)=e^{-x}, \qquad y_3(x)=e^{3x}.$$

Тоді, згідно з формулою (3.9), *загальний розв'язок* даного рівняння має вигляд

$$y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{3x}.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{IV}+2y'''-2y'-y=0.$$

Розв'язання. Задано лінійне однорідне диференціальне рівняння 4-го порядку.

Складемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^4+2\lambda^3-2\lambda-1=0.$$

Один корінь цього рівняння легко вгадується: $\lambda_1=1$. Тому

$$(\lambda-1)\left(\lambda^4+2\lambda^3-2\lambda-1\right)=0 \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda-1)(\lambda+1)^3=0.$$

Звідси знаходимо: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-1$. Корні дійсні, але корінь -1 трикратний.

Фундаментальна система розв'язків в цьому випадку має вигляд:

$$y_1(x)=e^{x}, \qquad y_2(x)=e^{-x}, \qquad y_3(x)=xe^{-x}, \qquad y_4(x)=x^2e^{-x}.$$

Оскільки вони лінійно незалежні, то їхня лінійна комбінація дає *загальний розв'язок* даного рівняння

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}+C_4x^2e^{-x} \quad \text{або} \quad y=C_1e^{x}+e^{-x}\left(C_2+C_3x+C_4x^2\right).$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{V}+y^{IV}+2y'''+2y''+y'+y=0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому лінійному однорідному рівнянню 5-го порядку:

$$\lambda^5+\lambda^4+2\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+1=0 \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda+1)\left(\lambda^4+2\lambda^2+1\right)=0.$$

Звідси маємо один дійсний корінь $\lambda_1=-1$, інші чотири корені знайдемо, розв'язавши біквадратне рівняння $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$.

Поклавши $\lambda^2 = t$, зводимо його до квадратного рівняння відносно t і визначаємо його корені:

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (t+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = -1.$$

Тоді корені біквадратного рівняння $\lambda_{2,3} = \pm i$, $\lambda_{4,5} = \pm i$ *комплексно-спряжені й кратні.*

Отже, частинні розв'язки однорідного рівняння мають вигляд:

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = \cos x, \quad y_3(x) = \sin x, \quad y_4(x) = x\cos x,$$

$$y_5(x) = x\sin x.$$

Оскільки вони лінійно незалежні, то їхня лінійна комбінація дає *загальний розв'язок* заданого диференціального рівняння:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + C_4 x\cos x + C_5 x\sin x$$

або $$y = C_1 e^{-x} + \cos x(C_2 + C_4 x) + \sin x(C_3 + C_5 x).$$

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами*?
2. Яке рівняння називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами*?
3. Сформулюйте означення *лінійної залежності* та *лінійної незалежності* системи функцій.
4. Який визначник називається *визначником Вронського*?
5. Яким чином умови *лінійної незалежності* системи функцій $y_i(x)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ пов'язані з визначником Вронського?
6. Що можна сказати про функції y_1 і y_2, визначені на інтервалі (a,b), якщо для цих функцій визначник $W(y_1, y_2)$ Вронського дорівнює нулю?
7. Які два частинні розв'язки лінійного однорідного рівняння 2-го порядку називаються *лінійно незалежними*?
8. Які з поданих пар функції є *лінійно незалежними* в будь-якому проміжку:

1) $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = 2e^{3x}$;

2) $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin^2 x$;

3) $y_1 = x^k$, $y_2 = x^m$, $(k \neq m)$;

4) $y_1 = 3\cos x$, $y_2 = 5\sin x$.

9. Що називається *фундаментальною системою розв'язків* лінійного однорідного рівняння?
10. Сформулюйте теорему *про структуру загального розв'язку* лінійного однорідного рівняння 2-го порядку.
11. У якому вигляді слід шукати *частинні розв'язки* лінійного однорідного диференціального рівняння?
12. Чи може функція $y = \ln x$ бути розв'язком рівняння $y'' + py' + q = 0$, де $p, q - const$?
13. Яке рівняння називається *характеристичним* для лінійного однорідного рівняння другого порядку?
14. Як записується *загальний розв'язок* лінійного однорідного рівняння другого порядку, якщо корені характеристичного рівняння:

    1) дійсні, $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

    2) дійсні, $\lambda_1 = \lambda_2$;

    3) уявні, $\lambda_{1,2} = \pm ib$;

    4) комплексні, $\lambda_{1,2} = a \pm ib$.
15. Сформулюйте *алгоритм розв'язання* лінійного однорідного диференціального рівняння.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1.1. $y'' - y' - 12y = 0.$

1.2. $y'' + 7y' + 6y = 0.$

1.3. $y'' + 4y' + 4y = 0.$

1.4. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

1.5. $y'' + 8y' = 0.$

1.6. $y'' + 25y = 0.$

1.7. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

1.8. $y''' + 2y'' - 15y' = 0.$

1.9. $y''' - 8y'' + 16y' = 0.$

1.10. $y''' - 3y' - 2y = 0.$

1.11. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

1.12. $y''' + 64y' = 0.$

1.13. $y^{IV} - y''' + y'' - y' = 0.$

1.14. $y^{IV} + 18y'' + 81y = 0.$

1.15. $y^{V} - 4y''' = 0.$

1.16. $y^{V} - 81y' = 0.$

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє задані початкові умови:

2.1. $y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6.$

2.2. $y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

2.3. $y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(\pi/6) = 0, \quad y'(\pi/6) = e^{\pi/6}.$

2.4. $9y'' + y = 0, \quad y(3\pi/2) = 2, \quad y'(3\pi/2) = 0.$

2.5. $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

Відповіді

1.1. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{4x}$. **1.2.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-6x}$. **1.3.** $y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)$.
1.4. $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. **1.5.** $y = C_1 + C_2 e^{-8x}$.
1.6. $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$. **1.7.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}$.
1.8. $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + C_3 e^{3x}$. **1.9.** $y = C_1 + e^{4x}(C_2 + C_3 x)$.
1.10. $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{3x}$. **1.11.** $y = e^{x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$.
1.12. $y = C_1 + C_2 \cos 8x + C_3 \sin 8x$. **1.13.** $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.
1.14. $y = \cos x (C_1 + C_2 x) + \sin x (C_3 + C_4 x)$.
1.15. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-2x} + C_5 e^{2x}$.
1.16. $y = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{3x} + C_4 \cos 3x + C_5 \sin 3x$.

2.1. $y = 4e^{-3x} - 3e^{-2x}$. **2.2.** $y = xe^{5x}$. **2.3.** $y = -\frac{1}{3} e^{x} \cos 3x$. **2.4.** $y = 2\sin\frac{x}{3}$.
2.5. $y = \frac{1}{3}\left(5 - 2e^{-3x}\right)$.

2.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Означення. *Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n–го порядку зі сталими коефіцієнтами* називається рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{4.1}$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - дійсні числа, а $f(x) \neq 0$ - задана функція, неперервна на деякому проміжку (a,b).

Означення. Рівнянні вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{4.2}$$

ліва частина якого співпадає з лівою частиною лінійного неоднорідного рівняння (4.1), а права $f(x) = 0$, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням*, відповідним даному неоднорідному рівняння (4.1).

Теорема *(про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння)*

Загальний розв'язок $y_{\text{зн}}$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння (4.1) дорівнює сумі загального розв'язку $y_{\text{зо}}$ відповідного однорідного рівняння (4.2) і деякого частинного розв'язку $y_{\text{чн}}$ рівняння (4.1), тобто

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}}. \tag{4.3}$$

Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

Розглянемо *лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами* вигляду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{4.4}$$

Тоді відповідне йому однорідне рівняння має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{4.5}$$

Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, загальний розв'язок рівняння (9.4) визначається формулою (4.3), в якій

$$y_{\text{зо}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{4.6}$$

- *загальний розв'язок* відповідного однорідного рівняння 2-го порядку (3.2), а $y_{\text{чн}}$ - *частинний розв'язок* неоднорідного рівняння (4.4).

Будемо шукати *загальний розв'язок* неоднорідного рівняння (4.4) у такому ж вигляді, замінивши у формулі (4.6) сталі C_1 і C_2 невідомими функціями від x, які слід підібрати так, щоб функція

$$y_{зн} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \tag{4.7}$$

задовольняла неоднорідне рівняння (4.4), тобто була його розв'язком.

Функція (4.7) буде розв'язком рівняння (4.4), коли $C_1(x)$ і $C_2(x)$ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{4.8}$$

Система (4.8) є лінійною неоднорідною системою рівнянь відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Визначник цієї системи $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ не дорівнює нулю, оскільки це визначник Вронського $W(y_1, y_2)$ для системи лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ однорідного рівняння (4.5). Отже система (4.8) має єдиний розв'язок (сумісна), що може бути знайдений, за формулами Крамера, або будь-яким іншим способом:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x) \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}, \qquad C_2'(x) = \frac{y_1(x) \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}.$$

Інтегруючи ці функції знаходимо:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x) \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + \overline{C}_1, \qquad C_2(x) = \int \frac{y_1(x) \cdot f(x)}{W(y_1, y_2)} dx + \overline{C}_2,$$

де $\overline{C}_1$ і $\overline{C}_2$ - довільні сталі інтегрування.

Підставляючи значення функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в рівняння (4.7), отримаємо *загальний розв'язок* неоднорідного рівняння (4.4):

$$y_{зн} = \overline{C}_1(x)y_1(x) + \overline{C}_2(x)y_2(x) - \int \frac{y_2(x)\cdot f(x)}{W(y_1,y_2)}dx \cdot y_1(x) + \int \frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(y_1,y_2)}dx \cdot y_2(x). \quad (4.9)$$

Розв'язок (4.9) задовольняє теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, тобто має вигляд

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}},$$

де $y_{\text{зо}} = \overline{C}_1 y_1(x) + \overline{C}_2 y_2(x)$ - загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (4.5) і

$$y_{чн} = -\int \frac{y_2(x)}{W(y_1,y_2)}dx \cdot y_1(x) - \int \frac{y_2(x)}{W(y_1,y_2)}dx \cdot y_2(x)$$

- частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.4).

Зауваження . Метод варіації довільних сталих може бути застосований і до розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь вищих порядків. Для рівняння *n–го* порядку невідомі функції $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, …, $C_n'(x)$ знаходяться із системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Визначник цієї системи – вронскіан $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}.$$

Розв'язання. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного даному рівнянню однорідного рівняння:

$$y'' - y' = 0.$$

Для цього складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені:

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 1. \end{array}\right.$$

Для дійсних різних коренів характеристичного рівняння маємо лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння:

$$y_1(x) = e^{0x} = 1, \qquad y_2(x) = e^x.$$

Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння*, згідно з формулою (3.6), має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 + C_2 e^x.$$

2. *Загальний розв'язок неоднорідного рівняння* шукатимемо у вигляді

$$y_{зн} = C_1(x) + C_2(x) e^x, \qquad (*)$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ - невідомі функції, які належить знайти склавши систему (4.8). Оскілки $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^x$ і $y_1'(x) = 0$, $y_2'(x) = e^x$ дістанемо систему, лінійну відносно функцій $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x) e^x = 0, \\ C_2'(x) e^x = \dfrac{1}{e^x + 1}, \end{cases}$$

розв'язавши яку, матимемо:

$$C_2'(x) = \frac{1}{e^x(e^x + 1)}, \qquad C_1'(x) = -\frac{1}{e^x + 1},$$

звідки

$$C_1(x) = -\int \frac{1}{e^x + 1} dx = -\int \frac{1 + e^x - e^x}{e^x + 1} dx = -\int \frac{1 + e^x}{e^x + 1} dx + \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx =$$

$$= -\int dx + \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = -x + \ln\left|e^x + 1\right| + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{e^x(e^x + 1)} = \int \frac{dx}{e^{2x}(1 + e^{-x})} = \int \frac{e^{-2x} dx}{e^{-x} + 1} = \int \frac{e^{-2x} - 1 + 1}{e^{-x} + 1} dx =$$

$$= \int \left(e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{e^x(e^{-x} + 1)} \right) dx = \int (e^{-x} - 1) dx + \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = -e^{-x} - x + \ln\left|e^x + 1\right| + \overline{C}_2.$$

3. Підставляючи функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у передбачуваний розв'язок $(*)$, знайдемо *загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння:*

$$y_{зн} = -x + \ln\left|e^x + 1\right| + \overline{C}_1 + \left(-e^{-x} - x + \ln\left|e^x + 1\right| + \overline{C}_2\right)e^x =$$
$$= \overline{C}_1 + \overline{C}_2 e^x - x + \ln(e^x + 1) - 1 - xe^x + \ln(e^x + 1)e^x =$$
$$= \overline{C}_1 + \overline{C}_2 e^x + (e^x + 1)(\ln(e^x + 1) - x) - 1.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' + y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Розв'язання. Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Однорідне рівняння, що відповідає йому

$$y''' + y' = 0$$

має такі корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = \pm i. \end{array}\right.$$

Тобто, фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння утворюють функції $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \cos x$, $y_3(x) = \sin x$ і *загальний розв'язок однорідного рівняння* має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

2. Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y_{зн} = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x. \qquad (*)$$

Складемо систему рівнянь для функцій $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot 1 + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)\cdot 0 - C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x = 0, \\ C_1'(x)\cdot 0 - C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x = \dfrac{1}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

Дану систему зручно розв'язувати за формулами Крамера. Головний визначник системи дорівнює:

$$\Delta = W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & \text{-}\sin x & \cos x \\ 1 & \text{-}\cos x & \text{-}\sin x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \text{-}\sin x & \cos x \\ \text{-}\cos x & \text{-}\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & \text{-}\sin x & \cos x \\ \frac{1}{\cos^2 x} & \text{-}\cos x & \text{-}\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \text{-}\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 x} & \text{-}\sin x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \frac{1}{\cos^2 x} & \text{-}\sin x \end{vmatrix} = -\frac{1}{\cos x},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \frac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -\sin x & 0 \\ -\cos x & \frac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

У результаті маємо:

$$C_1'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + \overline{C}_1;$$

$$C_2'(x) = -\frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = -\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \overline{C}_2;$$

$$C_3'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_3(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} + \overline{C}_3.$$

3. Підставляючи знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ у вираз $(*)$, знаходимо *загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння:*

$$y_{зн}=\overline{C}_1+tgx+\left(\overline{C}_2+\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\cos x+\left(\overline{C}_3-\frac{1}{\cos x}\right)\sin x=$$

$$=\overline{C}_1+\overline{C}_2\cos x+\overline{C}_3\sin x+tgx+\cos x\cdot\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-tgx=$$

$$=\overline{C}_1+\overline{C}_2\cos x+\overline{C}_3\sin x+\cos x\cdot\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами*?
2. Яке рівняння називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами*?
3. Яке рівняння називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням*, відповідним даному неоднорідному рівнянню?
4. Сформулюйте теорему *про структуру загального розв'язку* лінійного неоднорідного диференціального рівняння.
5. У чому полягає *метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)* розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку?

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок рівняння. Розв'язати, де вказано, задачу Коші:

1.1. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}.$

1.2. $y''+y=ctgx.$

1.3. $y''-y=\dfrac{e^x}{e^x+1}.$

1.4. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}.$

1.5. $y''+9y=\dfrac{1}{\sin 3x}.$

1.6. $y''+2y'+y=\dfrac{1}{xe^x}.$

1.7. $y''+4y=\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

1.8. $y''+y=\dfrac{1}{\cos^3 x}.$

1.9. $y''+y=tgx,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$

1.10. $y'''+y'=\dfrac{1}{\cos x}.$

Відповіді

1.1. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x|$.

1.2. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln|tg(x/2)|$.

1.3. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \dfrac{1}{2}\left((e^x + e^{-x})\ln(e^x + 1) - (xe^x + 1)\right)$.

1.4. $y = C_1 e^x + C_2 xe^x + xe^x \ln|x|$.

1.5. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \dfrac{1}{9}\cos 3x + \dfrac{1}{9}\sin 3x \ln|\sin 3x|$.

1.6. $y = C_1 e^{-x} + C_2 xe^{-x} + xe^{-x} \ln|x|$.

1.7. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \cos 2x \ln|\sin x| - \left(x + \dfrac{1}{2} ctgx\right)\sin 2x$.

1.8. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{2\cos x}$. **1.9.** $y = 2\sin x + \cos x \cdot \ln tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

1.10. $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \ln\left|\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right| - x\cos x + \sin x \cdot \ln|\cos x|$.

2.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Метод підбору частинного розв'язку

Означення. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (5.1)$$

в якому права частина

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x\right), \qquad (5.2)$$

коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_n, \alpha, \beta$ - дійсні числа, а $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - многочлени від x степеня n і m відповідно, називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n–го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду*.

Розв'язок рівняння (5.1) можна шукати методом варіації довільних сталих, але при його застосуванні доволі часто доводиться виконувати складні, громіздкі операції під час інтегрування. Проте для рівнянь зі спеціальною правою частиною існує свій більш простіший метод, який називається *методом підбору частинного розв'язку або методом невизначених коефіцієнтів.* Суть методу полягає в наступному: по вигляду правої частини $f(x)$ рівняння (5.1) записують очікувану форму його частинного розв'язку з невизначеними коефіцієнтами, потім підставляють її в рівняння (5.1) та з отриманої тотожності знаходять значення невідомих коефіцієнтів.

Нехай права частина рівняння (5.1) має спеціальний вигляд (5.2). Тоді частинний розв’язок цього рівняння слід шукати у вигляді

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_l(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_l(x)\sin\beta x\right), \qquad (5.3)$$

де r дорівнює кратності кореня λ характеристичного рівняння

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (5.4)$$

що співпадає з числом $\alpha + \beta i$, тобто r - число, яке показує скільки разів $\alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння (якщо характеристичне рівняння такого кореня не має, то слід покласти $r = 0$); $\widetilde{P}_l(x)$ і $\widetilde{Q}_l(x)$ - повні многочлени від x з невизначеними коефіцієнтами степеня l, яке дорівнює найбільшому з чисел n і m, тобто $l = \max\{n, m\}$; числа α і β у формулах (5.2) і (5.3) ті самі.

Зауваження 1. Многочлени $\widetilde{P}_l(x)$ і $\widetilde{Q}_l(x)$ повні бути повними, тобто містити всі степені x від нуля до l, з різними невизначеними коефіцієнтами при однакових степенях x в обох многочленах.

Зауваження 2. Якщо у вираз функції (5.2) входить хоча б одна з функцій $\cos\beta x$ або $\sin\beta x$, то у вираз $y_{чн}$ (5.3) треба завжди записувати обидві функції.

Розглянемо деякі частинні випадки функції (5.2) в рівняннях (5.1), до яких можна застосувати метод підбору частинного розв'язку, і вкажемо форму, в якій потрібно шукати частинний розв’язок цього рівняння залежно від вигляду його правої частини.

1. Нехай права частина неоднорідного рівняння (5.1) має вигляд

$$f(x) = P_n(x),$$

тобто у виразі функції (5.2) $\alpha = 0$ і $\beta = 0$, а $P_n(x)$ - многочлен степеня n. Тоді:

а) якщо $\alpha+\beta i=0\neq\lambda$, тобто $\lambda=0$ не є коренем характеристичного рівняння

(5.4) $(r=0)$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн}=\widetilde{P}_n(x);$$

б) якщо $\alpha+\beta i=0=\lambda_{1,2,...,r}$, тобто $\lambda=0$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (5.4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн}=x^r\widetilde{P}_n(x).$$

Тут $\widetilde{P}_n(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+...+A_n$ - повний многочлен степеня n (тобто того самого степеня, що і заданий) з невизначеними коефіцієнтами.

Щоб знайти невизначені коефіцієнти $A_0,A_1,...,A_n$ необхідно знайти вирази $y'_{чн}$, $y''_{чн},\ldots,$ $y^{(n)}_{чн}$ і підставити їх разом із функцією $y_{чн}$ у неоднорідне рівняння (5.1), зрівняти коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, в результаті чого отримати систему $(n+1)$-го лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A_0,A_1,...,A_n$ многочлена $\widetilde{P}_n(x)$.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''+3y'-4y=4x^2+3.$$

<u>Розв'язання.</u> Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку такого рівняння

$$y_{зн}=y_{зо}+y_{чн}.$$

1. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного даному рівнянню однорідного рівняння

$$y''+3y'-4y=0.$$

Характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню має дійсні різні корені

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -4. \end{array}\right.$$

Отже, згідно з формулою (3.6), *загальний розв'язок однорідного рівняння* має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}.$$

2. Оскільки права частина заданого неоднорідного рівняння має спеціальний

вигляд (10.2) коли $\alpha = 0$ і $\beta = 0$, будемо шукати його частинний розв'язок методом підбору.

Права частина даного рівняння $P_n(x) = x^2 + 2,\ (n = 2)$ – многочлен 2-го степеня. Число $\alpha + \beta i = 0 \neq \lambda_{1,2}$, тобто серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}$ немає нуля, тому у формулі (5.3) $r = 0$. Має місце випадок **1а**. Отже, частинний розв'язок шукаємо у вигляді многочлена того самого 2-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, що містить всі степені незалежної змінної x:

$$y_{чн} = Ax^2 + Bx + C.$$

Щоб знайти невизначені коефіцієнти A, B, C, підставимо цей розв'язок у вихідне рівняння, для чого попередньо обчислимо похідні функції $y_{чн}$:

$$y'_{чн} = 2Ax + B, \qquad y''_{чн} = 2A.$$

Підставляючи, маємо:

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2 + 3,$$
$$-4Ax^2 + (6A - 4B)x + 2A + 3B - 4C = 4x^2 + 3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій і лівій частинах рівності, матимемо:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -4A = 4, \\ x^1 & 6A - 4B = 0, \\ x^0 & 2A + 3B - 4C = 3, \end{array}$$

звідки $A = -1,\ B = -3,\ C = -4$.

Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* має вигляд

$$y_{чн} = -x^2 - 3x - 4.$$

3. Тоді *загальний розв'язок* заданого неоднорідного рівняння буде таким:

$$y_{зн} = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - x^2 - 3x - 4.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - y'' = x - 1.$$

<u>Розв'язання.</u> Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Оскільки загальний розв'язок такого рівняння має вигляд

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн},$$

то послідовно шукаємо $y_{зо}$ і $y_{чн}$.

1. Запишемо лінійне однорідне рівняння, що відповідає даному неоднорідному

$$y''' - y'' = 0.$$

Складемо для нього характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_{1,2} = 0, \\ \lambda_3 = 1. \end{array}\right.$$

Всі корені характеристичного рівняння дійсні, але корені $\lambda_{1,2} = 0$ - кратності 2. Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння* має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x.$$

2. За виглядом правої частини заданого рівняння підберемо *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*. Оскільки в правій частині рівняння маємо $P_n(x) = x - 1,\ (n = 1)$ – многочлен 1-го степеня, а число $\alpha + \beta i = 0 = \lambda_{1,2}$, інакше кажучи характеристичне рівняння має корені $\lambda_{1,2} = 0$ кратності 2, тобто $r = 2$, то відповідно до пункту **1б** шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{чн} = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2.$$

Підставимо цей розв'язок у вихідне рівняння, для чого попередньо обчислимо

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx, \qquad y''_{чн} = 6Ax + 2B, \qquad y'''_{чн} = 6A.$$

Маємо:

$$6A - (6Ax + 2B) = x - 1 \quad \Rightarrow \quad -6Ax + 6A + 2B = x - 1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, матимемо:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & -6A = 1, \\ x^0 & 6A + 2B = -1. \end{array}$$

звідки $A = -\dfrac{1}{6}$, $B = 1$.

Тоді *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*

$$y_{чн} = -\frac{1}{6}x^3 + x^2.$$

3. *Загальний розв'язок* заданого лінійного неоднорідного диференціального рівняння 3-го порядку запишемо у вигляді

$$y_{зн} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - \frac{1}{6}x^3 + x^2.$$

2. Нехай права частина неоднорідного рівняння (5.1) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x},$$

тобто $\alpha \neq 0$ - дійсне число, $\beta = 0$, $P_n(x)$ - многочлен степеня n. Тоді:

а) якщо $\alpha + \beta i = \alpha \neq \lambda$, тобто $\lambda = \alpha$ не є коренем характеристичного рівняння (5.4) $(r = 0)$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = \widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x};$$

б) якщо $\alpha + \beta i = \alpha = \lambda_{1,2,\ldots,r}$, тобто $\lambda = \alpha$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (10.4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = x^r \widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x},$$

де $\widetilde{P}_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$ - повний многочлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 3. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови (*задача Коші*)

$$y'' + y' - 2y = 3xe^x, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = -\frac{1}{3}.$$

Розв'язання. Для розв'язання задачі Коші спочатку потрібно знайти загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, а потім за допомогою початкових умов виділити з нього частинний розв'язок.

Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y_{\text{зн}} = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}}.$$

1. Знайдемо загальний розв'язок $y_{\text{чн}}$ лінійного однорідного рівняння

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння має дійсні різні корені:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -2.\end{array}\right.$$

Тоді *загальний розв'язок однорідного рівняння* набуває вигляду:

$$y_{зо} = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

2. Права частина заданого рівняння має вигляд $f(x) = 3xe^x$, тобто $P_n(x) = 3x,\ (n = 1)$ – многочлен 1-го степеня, $\alpha = 1,\ \beta = 0$. Оскільки число $\alpha + \beta i = 1 = \lambda_1$, тобто характеристичне рівняння має простий корінь $\lambda_1 = 1$, який співпадає з числом $\alpha + \beta i = 1$, то $r = 1$. Тоді, відповідно до пункту **2б** шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{чн} = x(Ax + B)e^x = \left(Ax^2 + Bx\right)e^x.$$

Знайдемо похідні від передбачуваного частинного розв'язку $y_{чн}$:

$$y'_{чн} = (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x = \left(Ax^2 + (2A + B)x + B\right)e^x,$$

$$y''_{чн} = (2Ax + 2A + B)e^x + \left(Ax^2 + (2A + B)x + B\right)e^x =$$
$$= \left(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B\right)e^x,$$

і підставимо їх у задане рівняння:

$$\left(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B\right)e^x + \left(Ax^2 + (2A + B)x + B\right)e^x - 2\left(Ax^2 + Bx\right)e^x = 3xe^x,$$

$$6Ax + 2A + 3B = 3x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах останньої рівності, знайдемо невизначені коефіцієнти A і B:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 6A = 3, \\ x^0 & 2A + 3B = 0. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{1}{2}, \\ B = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* набуває вигляду:

$$y_{чн} = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x.$$

3. Таким чином, з*агальний розв'язок* неоднорідного рівняння буде таким:

$$y_{зн} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x.$$

4. Для розв'язання задачі Коші, слід знайти похідну від загального розв'язку:

$$y'_{зн} = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} + \left(x - \frac{1}{3}\right)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x.$$

Використовуючи початкові умови, отримаємо систему рівнянь для визначення довільних сталих C_1 і C_2:

$$\begin{array}{l} y(0) = 3, \\ y'(0) = -\dfrac{1}{3}, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 - 2C_2 = -\dfrac{1}{3}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{array}\right.$$

Підставляючи знайдені сталі в загальний розв'язок, отримаємо шуканий частинний розв'язок рівняння, тобто *розв'язок задачі Коші*:

$$y = 2e^x + e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x\right)e^x.$$

3. Нехай права частина рівняння (5.1) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x,$$

тобто $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ - дійсне число, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлен степеня n і m відповідно. Тоді:

а) якщо $\alpha + \beta i = \beta i \neq \lambda$, тобто $\lambda = \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння (5.4) $(r = 0)$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = \tilde{P}_l(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_l(x)\sin\beta x;$$

б) якщо $\alpha + \beta i = \beta i = \lambda_{1,2,\ldots,r}$, тобто $\lambda = \beta i$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (10.4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = x^r\left(\tilde{P}_l(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_l(x)\sin\beta x\right),$$

де $\tilde{P}_l(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$, $\tilde{Q}_l(x) = B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_n$ - повні многочлени степеня $l = \max\{n, m\}$ з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = 2\cos 3x + 4\sin 3x.$$

<u>Розв'язання</u>. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, як і раніше, шукатимемо у вигляді:

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}.$$

1. Однорідне рівняння, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню, має вигляд:

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Характеристичне рівняння має дійсні різні корені:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = -1,\\ \lambda_2 = -2.\end{array}\right.$$

Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння*

$$y_{зо} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}.$$

2. Права частина заданого рівняння має вигляд $f(x) = 2\cos 3x + 4\sin 3x$, тобто $P_n(x) = 2,\ (n = 0)$, $Q_m(x) = 4,\ (m = 0)$ – многочлени 0-го степеня, $\alpha = 0,\ \beta = 3$. Оскільки число $\alpha + \beta i = 3i \neq \lambda_{1,2}$, тобто серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}$ не має числа $\alpha + \beta i = 3i$, то $r = 0$. Тоді, відповідно до пункту **3а** шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{чн} = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Знайдемо

$$y'_{чн} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$

$$y''_{чн} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x,$$

і підставимо у вихідне рівняння:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 3(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + 2(A\cos 3x + B\sin 3x) =$$
$$= 2\cos 3x + 4\sin 3x,$$

$$(-9A + 9B + 2A)\cos 3x + (-9B - 9A + 2B)\sin 3x = 2\cos 3x + 4\sin 3x,$$

$$(-7A + 9B)\cos 3x + (-7B - 9A)\sin 3x = 2\cos 3x + 4\sin 3x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos 3x$ і $\sin 3x$:

$$\begin{array}{l|l} \cos 3x & -7A + 9B = 2, \\ \sin 3x & -9A - 7B = 4. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = -\dfrac{5}{13}, \\ B = -\dfrac{1}{13}. \end{array} \right.$$

З урахуванням знайдених невизначених коефіцієнтів частинний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_{чн} = -\frac{5}{13}\cos 3x - \frac{1}{13}\sin 3x.$$

3. Отже, з*агальний розв'язок* неоднорідного рівняння запишемо так:

$$y_{зн} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \frac{5}{13}\cos 3x - \frac{1}{13}\sin 3x.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = x\sin x.$$

<u>Розв'язання.</u> Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}.$$

1. Для лінійного однорідного рівняння

$$y'' + y = 0,$$

що відповідає заданому неоднорідному, маємо таке характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i,$$

де $a = 0$ і $b = 1$. Отже, його *загальний розв'язок* має вигляд

$$y_{зо} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2. Права частина заданого рівняння має вигляд $f(x) = x \sin x$, тобто $P_n(x) = 0,\ (n = 0)$ - многочлен 0-го степеня, $Q_m(x) = x,\ (m = 1)$ – многочлен 1-го степеня, тобто $l = 1,\ \ \alpha = 0,\ \beta = 1$. Оскільки число $\alpha + \beta i = i = \lambda_1$, тобто характеристичне рівняння має простий корінь $\lambda_1 = i$, який співпадає з числом $\alpha + \beta i = i$, то $r = 1$. Тоді, відповідно до пункту **3б** шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{чн} = x \cdot \left((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right) = \left(Ax^2 + Bx\right)\cos x + \left(Cx^2 + Dx\right)\sin x.$$

Тоді

$$y'_{чн} = \left(2Ax + B + Cx^2 + Dx\right)\cos x + \left(2Cx + D - Ax^2 - Bx\right)\sin x,$$

$$y''_{чн} = \left(2D + 2A - Ax^2 - Bx + 4Cx\right)\cos x + \left(2C - 2B - Cx^2 - Dx - 4Ax\right)\sin x.$$

Після підстановки в початкове рівняння матимемо рівність:

$$\left(2D + 2A - Ax^2 - Bx + 4Cx\right)\cos x + \left(2C - 2B - Cx^2 - Dx - 4Ax\right)\sin x +$$
$$+ \left(Ax^2 + Bx\right)\cos x + \left(Cx^2 + Dx\right)\sin x = x \sin x,$$

$$\left(2D + 2A - Ax^2 - Bx + 4Cx + Ax^2 + Bx\right)\cos x +$$
$$+ \left(2C - 2B - Cx^2 - Dx - 4Ax + Cx^2 + Dx\right)\sin x = x \sin x,$$

$$\left(2D + 2A + 4Cx\right)\cos x + \left(2C - 2B - 4Ax\right)\sin x = x \sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти в обох частинах тотожності при $x \cos x$, $x \sin x$, $\cos x$ і $\sin x$, складемо систему рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{array}{l|l} x\cos x & 4C=0, \\ x\sin x & -4A=1, \\ \cos x & 2D+2A=0, \\ \sin x & 2C-2B=0, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} C=0, \\ A=-\dfrac{1}{4}, \\ D=\dfrac{1}{4}, \\ B=0. \end{array}\right.$$

Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* набуває вигляду:

$$y_{чн}=-\frac{1}{4}x^2\cos x+\frac{1}{4}x\sin x.$$

3. Тоді *загальний розв'язок неоднорідного рівняння*

$$y_{зн}=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{4}x^2\cos x+\frac{1}{4}x\sin x.$$

4. Нехай права частина рівняння (5.1) має загальний вигляд спеціальної правої частини (5.2)

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

тобто $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ - дійсні числа, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлен степеня n і m відповідно. Тоді:

а) якщо $\alpha+\beta i\neq\lambda$, тобто $\lambda=\alpha+\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння

(5.4) $(r=0)$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн}=e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_l(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_l(x)\sin\beta x\right);$$

б) якщо $\alpha+\beta i=\lambda_{1,2,\ldots,r}$, тобто $\lambda=\alpha+\beta i$ є коренем кратності r

характеристичного рівняння (5.4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді (5.3)

$$y_{чн}=x^r e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_l(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_l(x)\sin\beta x\right),$$

де $\tilde{P}_l(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n$, $\tilde{Q}_l(x)=B_0x^n+B_1x^{n-1}+\ldots+B_n$ - повні многочлени степеня $l=\max\{n,m\}$ з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 13y = e^x \cos x.$$

Розв'язання. Маємо загальний випадок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду. Його загальний розв'язок визначається формулою:

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}.$$

1. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' - 4y' + 13y = 0,$$

для чого складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

Маємо *загальний розв'язок однорідного рівняння*

$$y_{зо} = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

2. Права частина неоднорідного рівняння $f(x) = e^x \cos x$ є функцією спеціального вигляду, де $P_n(x) = 1,\ (n = 0)$, $Q_m(x) = 0,\ (m = 0)$ – многочлени 0-го степеня, $\alpha = 1,\ \beta = 1$. Оскільки число $\alpha + \beta i = 1 + i \neq \lambda_{1,2}$, тобто серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}$ не має числа $\alpha + \beta i = 1 + i$, то $r = 0$. Тоді частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння слід шукати відповідно до пункту **4а**, тобто за формулою (5.3), в якій $l = 0$, $\alpha = 1,\ \beta = 1$:

$$y_{чн} = e^x\left(A\cos x + B\sin x\right).$$

Тоді

$$y'_{чн} = e^x\left(A\cos x + B\sin x\right) + e^x\left(-A\sin x + B\cos x\right) = e^x\left((A+B)\cos x + (B-A)\sin x\right),$$

$$y''_{чн} = e^x\left((A+B)\cos x + (B-A)\sin x\right) + e^x\left(-(A+B)\sin x + (B-A)\cos x\right) =$$
$$= e^x\left(2B\cos x - 2A\sin x\right).$$

Після підстановки у вихідне рівняння скоротимо обидві частини рівності на спільний множник $e^x \neq 0$ і дістанемо:

$$2B\cos x - 2A\sin x - 4\left[\left((A+B)\cos x + (B-A)\sin x\right)\right] + 13\left(A\cos x + B\sin x\right) = \cos x,$$

$$(9A - 2B)\cos x + (2A + 9B)\sin x = \cos x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, знайдемо A і B:

$$\begin{array}{l|l} \cos x & 9A - 2B = 1, \\ \sin x & 2A + 9B = 0, \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{9}{13}, \\ B = -\dfrac{2}{13}. \end{array} \right.$$

Таким чином, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* набуває вигляду:

$$y_{чн} = e^{x}\left(\frac{9}{13}\cos x - \frac{2}{13}\sin x\right).$$

3. Отже, *загальний розв'язок* заданого рівняння має вигляд

$$y_{зн} = e^{2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + e^{x}\left(\frac{9}{13}\cos x - \frac{2}{13}\sin x\right).$$

Зауваження 2. Якщо права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (5.1) дорівнює сумі декількох функцій спеціального вигляду (5.2), то знаходження частинного розв'язку такого рівняння робиться за допомогою *теореми про накладання розв'язків*. Сформулюємо її для випадку диференціального рівняння 2-го порядку.

Теорема *(про накладання розв'язків)*

Якщо права частина рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

має вигляд суми двох функцій спеціального вигляду (5.2):

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

а функції $y_{1чн}(x)$ та $y_{2чн}(x)$ - частинні розв'язки рівнянь

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x),$$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x)$$

відповідно, то функція $y_{чн}(x) = y_{1чн}(x) + y_{2чн}(x)$ буде частинним розв'язком даного рівняння.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 9y = chx.$$

Розв'язання. Права частина заданого рівняння може бути поданою у вигляді суми двох функцій спеціального вигляду:

$$f(x) = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = f_1(x) + f_2(x).$$

Отже, при підборі частинного розв'язку слід скористатися *теоремою про накладання розв'язків.* Загальний розв'язок такого неоднорідного рівняння можна записати у вигляді

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{1чн} + y_{2чн}.$$

1. Запишемо однорідне рівняння

$$y'' + 9y = 0,$$

що відповідає даному неоднорідному складемо. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \pm 3i.,$$

Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння* буде таким:

$$y_{зо} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

2. Частинний розв'язок $y_{1чн}$, що відповідає першому доданку правої частини

неоднорідного рівняння – добуток многочлена $P_n(x) = \frac{1}{2}$ нульового степеня на експоненту, шукатимемо у вигляді

$$y_{1чн} = Ae^x,$$

оскільки $\alpha + \beta i = 1$ не є коренем $\lambda_{1,2}$ характеристичного рівняння $(r = 0)$.

Продиференціюємо передбачуваний частинний розв'язок $y_{1чн}$:

$$y'_{1чн} = Ae^x, \qquad y''_{1чн} = Ae^x$$

і підставимо в задане неоднорідне рівняння, обмеживишсь у правій частині лише функцією $f_1(x)$:

$$Ae^x + 9Ae^x = \frac{1}{2}e^x,$$

звідки

$$10Ae^x = \frac{1}{2}e^x \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{20}.$$

Отже, перший *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* матиме вигляд

$$y_{1чн} = \frac{1}{20}e^x.$$

Другий доданок правої частини за структурою має такий самий вигляд, як і перший з тією лише різницею, що $\alpha + \beta i = -1$. Оскільки серед коренів характеристичного рівняння такого значення не має $(r = 0)$, частинний розв'язок $y_{2чн}$ слід шукати у вигляді

$$y_{2чн} = Be^{-x}.$$

Диференціюємо цей частинний розв'язок з невизначеним коефіцієнтом:

$$y'_{2чн} = -Be^{-x}, \qquad y''_{2чн} = Be^{-x}$$

і підставляємо в задане неоднорідне рівняння, розглядаючи його праву частину тепер уже лише як функцією $f_2(x)$:

$$Be^{-x} + 9Be^{-x} = \frac{1}{2}e^{-x},$$

звідки

$$10Be^x = \frac{1}{2}e^x \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{20}.$$

У результаті знаходимо другий *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*:

$$y_{2чн} = \frac{1}{20}e^{-x}.$$

3. Отже, *загальний розв'язок* заданого неоднорідного рівняння набуває вигляду

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{1чн} + y_{2чн} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{20}e^x + \frac{1}{20}e^{-x}$$

або

$$y_{зн} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{10}chx.$$

Контрольні запитання

1. Яке лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами буде *рівнянням зі спеціальною правою частиною*?
2. Опишіть суть *методу підбору* частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною.
3. Чи до будь-якого лінійного неоднорідного диференціального рівняння може бути застосований *метод підбору* частинного розв'язку?
4. Чи існує зв'язок між коренями характеристичного рівняння і виглядом частинного розв'язку неоднорідного рівняння? Якщо так, то в чому він проявляється?
5. Визначити вигляд *частинного розв'язку* лінійного неоднорідного рівняння, якщо відомі корені його характеристичного рівняння й права частина:

   1) $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad f(x) = ax^2 + bx + c;$

   2) $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad f(x) = e^{-x}(ax + b);$

   3) $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad f(x) = e^{-x}(ax + b);$

   4) $\lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = -2i, \quad f(x) = a\sin 2x + b\cos 2x;$

   5) $\lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = -2i, \quad f(x) = e^{x}(\cos 2x + \sin 2x);$

   6) $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0, \quad f(x) = ae^{-x} + bx + c;$

   7) $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad f(x) = e^{2x} + e^{x};$

   8) $\lambda_1 = 2 - i, \quad \lambda_2 = 2 + i, \quad f(x) = e^{2x} + \sin x.$
6. Що робити у тому випадку, якщо права частина неоднорідного рівняння має вигляд *алгебраїчної суми функцій* спеціального вигляду?
7. Сформулюйте теорему *про накладання розв'язків* лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку.

8. Який метод є *більш загальним* для визначення загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння:

а) метод *варіації довільних сталих*;

б) метод *підбору частинного розв'язку* за виглядом правої частини і коренями характеристичного рівняння?

9. У чому перевага *методу варіації* порівняно з методом підбору частинного розв'язку? У чому його недоліки?

10. У чому привабливість *методу підбору* частинного розв'язку?

Завдання для самостійної роботи

1. Для заданого рівняння записати загальний розв'язок та частинний розв'язок з невизначеними коефіцієнтами (чисельних значень коефіцієнтів не знаходити):

1.1. $y'' + 2y' + 5y = e^{-2x}(x^2 - 7x + 2).$

1.2. $y'' + 4y' + 3y = xe^{-3x}.$

1.3. $y'' - 8y' = x^3 - 2x.$

1.4. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}(1 - x^2).$

1.5. $y'' - 2y' + 10y = xe^{x}\cos 2x.$

1.6. $y'' + 16y = (x^2 - 7)\sin 4x.$

1.7. $y'' - 6y' + 13y = e^{3x}\sin 2x.$

1.8. $y'' + 10y' = x^2 + xe^{-10x}\sin x.$

1.9. $y'' - 36y = xe^{-6x} - e^{6x} + \sin 6x.$

1.10. $y'' + 9y' + 25y = e^{-3x}\cos 4x + x\sin 4x.$

2. Знайти загальний розв'язок рівняння методом підбору:

2.1. $y'' + 3y' - 10y = 10x^2 + 4x - 5.$

2.2. $y'' - 4y' - 5y = (27x - 39)e^{-4x}.$

2.3. $y'' - 4y' + 3y = 10e^{3x}.$

2.4. $y'' + 4y' = -2xe^{-4x}.$

2.5. $y'' + 16y = (34x + 13)e^{-x}.$

2.6. $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}.$

2.7. $y'' + 5y' = 50\cos 5x.$

2.8. $y'' - 4y' + 5y = 2\cos x + 6\sin x.$

2.9. $y'' + 4y = 10\cos 2x - 6\sin 2x.$

2.10. $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x.$

2.11. $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\sin x.$

2.12. $y'' - 3y' = e^{3x} + 12x - 7.$

3. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє задані початкові умови:

3.1. $y'' + 4y = (6x+5)e^{-2x},\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 3/4.$

3.2. $y'' + 2y' - 8y = (12x+20)e^{2x},\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1.$

3.3. $y'' - 2y' + 10y = 74\sin 3x,\quad y(0) = 6,\quad y'(0) = 3.$

3.4. $y'' + y = -8\sin x - 6\cos x,\quad y(\pi/2) = -\pi/2,\quad y'(\pi/2) = -2\pi.$

3.5. $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos 3x,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = -1.$

Відповіді

1.1. $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + (Ax^2 + Bx + C)e^{-2x}$**.**

1.2. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x} + (Ax^2 + Bx)e^{-3x}$**.**

1.3. $y = C_1 + C_2e^{8x} + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$**.**

1.4. $y = (C_1 + C_2x)e^{5x} + (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{5x}$**.**

1.5. $y = e^{x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + e^{x}((Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x)$**.**

1.6. $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx)\cos 4x +$
$+ (Dx^3 + Ex^2 + Fx)\sin 4x.$

1.7. $y = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{3x}(Ax\cos 2x + Bx\sin 2x)$**.**

1.8. $y = C_1 + C_2e^{-10x} + Ax^3 + Bx^2 + Cx + e^{-10x}((Dx+E)\cos x + (Fx+G)\sin x)$**.**

1.9. $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{6x} + (Ax^2 + Bx)e^{-6x} + C\cos 6x + D\sin 6x$**.**

1.10. $y = e^{-3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + e^{-3x}(Ax\cos 4x + Bx\sin 4x) +$
$+ (Cx+D)\cos 4x + (Ex+F)\sin 4x.$ **2.1.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-5x} - x^2 - x$**.**

2.2. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{5x} + (x-1)e^{-4x}$**. 2.3.** $y = C_1e^{x} + C_2e^{3x} + 5xe^{3x}$**.**

2.4. $y = C_1 + C_2e^{-4x} + (x^2/4 + x/8)e^{-4x}$**.**

2.5. $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + (2x+1)e^{-x}$**.**

2.6. $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)+(1/2)x^3e^{-2x}$. **2.7.** $y=C_1+C_2e^{-5x}+\sin 5x-\cos 5x$.

2.8. $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\cos x+(1/2)\sin x$.

2.9. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+(3/2)x\cos 2x+(5/2)x\sin 2x$.

2.10. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-e^{2x}(2\cos 2x+\sin 2x)/20$.

2.11. $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)-(1/2)xe^{x}\cos x$.

2.12. $y=C_1+C_2e^{3x}+(1/3)xe^{3x}-2x^2+x$.

3.1. $y=-\cos 2x+\sin 2x+(3x/4+1)e^{-2x}$.

3.2. $y=(1/3)e^{-4x}-(1/3)e^{2x}+\left(x^2+3x\right)e^{2x}$.

3.3. $y=e^{x}(-6\cos 3x+\sin 3x)+12\cos 3x+2\sin 3x$.

3.4. $y=-3\cos x+\pi\sin x+x(4\cos x-3\sin x)$.

3.5. $y=e^{2x}(\cos 3x-\sin 3x+(1/6)x\sin 3x)$.

РОЗДІЛ 3
СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
3.1. Загальні поняття та означення

Означення. Сукупність диференціальних рівнянь, кожне з яких містить незалежну змінну, шукані функції та їхні похідні, тобто співвідношення вигляду

$$F_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n',\ldots,y_1^{(n)},y_2^{(n)},\ldots,y_n^{(n)})=0, \tag{1.1}$$

де $i=1,2,\ldots,n$, називається *системою диференціальних рівнянь n-го порядку.*

Означення. *Система диференціальних рівнянь 1-го порядку*, яка містить n шуканих функцій $y_1,y_2,\ldots,y_n$ має вигляд

$$\begin{cases} F_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n')=0, \\ F_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n')=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n')=0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Розв’язуючи систему (1.2) відносно похідних шуканих функцій, отримаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{1.3}$$

яка називається *нормальною системою диференціальних рівнянь.* При цьому число рівнянь в цій системі дорівнює числу шуканих функцій.

Означення. *Розв'язком системи* (1.3) називається сукупність з n функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$, які задовольняють кожне з рівнянь цієї системи.

Початкові умови для системи (1.3) мають вигляд:

$$y_1(x_0) = y_1^0, \;\; y_2(x_0) = y_2^0, \; \ldots \; y_n(x_0) = y_n^0. \tag{1.4}$$

Задача Коші для системи (1.3) ставиться наступним чином: знайти розв'язок системи (1.3), який задовольняє початкові умови (1.4).

Умови існування та єдності розв'язку задачі Коші описує наступна теорема.

Теорема Коші *(існування та єдності розв'язку)*.

Якщо в системі (1.3) всі функції $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними за y_i в деякій області D ($(n+1)$-вимірного простору), то в кожній точці $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ цієї області існує, і притому єдиний, розв'язок $y_1 = \varphi_1(x), \;\; y_2 = \varphi_2(x), \; \ldots, \; y_n = \varphi_n(x)$ системи, який задовольняє початкові умови (1.4).

Означення. *Загальним розв'язком системи* (1.3) називається сукупність n функцій

$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \;\; y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \; \ldots, \; y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, які задовольняють усі рівняння системи і така, що за заданими початковими умовами (1.4) можна однозначно визначити сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$ з системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_1^0, \\ \varphi_2(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_2^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_n^0. \end{cases}$$

Означення. Розв'язок, отриманий із загального при певних значеннях сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ називається *частинним розв'язком системи*.

Контрольні запитання

1. Що називається *системою диференціальних рівнянь n-го порядку*?
2. Що називається *системою диференціальних рівнянь 1-го порядку*?
3. Що називається *розв'язком* системи диференціальних рівнянь 1-го порядку?
4. Сформулюйте *теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші* для системи диференціальних рівнянь 1-го порядку.
5. Що називається *загальним розв'язком* системи диференціальних рівнянь 1-го порядку.
6. Що називається *частинним розв'язком* системи диференціальних рівнянь 1-го порядку.

3.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Означення. Нормальна система диференціальних рівнянь називається *лінійною*, якщо кожне рівняння системи лінійне відносно шуканої функції та їхніх похідних:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

де функції $a_{ij}(x)$ і $f_i(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ визначені й неперервні при $x \in (a, b)$.

Означення. Якщо всі a_{ij} - сталі, то (2.1) називається лінійною системою рівнянь *зі сталими коефіцієнтами*.

Означення. Лінійна система називається *однорідною*, якщо при всіх $x \in (a,b)$ функції $f_i(x)$ тотожно дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n. \end{cases} \tag{2.2}$$

Теорема. Загальний розв'язок $\bar{y}_k$ *однорідної лінійної системи* (2.2) в інтервалі (a,b) є лінійною комбінацією

$$\bar{y}_k = C_1 y_{1k} + C_2 y_{2k} + \ldots + C_n y_{nk} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik} \qquad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{2.3}$$

n її частинних лінійно незалежних розв'язків $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}$, що утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Означення. Система функцій $y_{1k}(x), y_{2k}(x), \ldots, y_{nk}(x)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ називається фундаментальною, якщо її визначник Вронського

$$W(y_{ik}) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля хоча б в одній точці інтервалу (a,b).

Теорема. Загальний розв'язок y_k *неоднорідної лінійної системи* (2.1) в інтервалі (a,b) дорівнює сумі загального розв'язку $\bar{y}_k$ *відповідної однорідної системи* (2.2) та будь-якого частинного розв'язку y_k^* неоднорідної системи:

$$y_k = \bar{y}_k + y_k^* = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik} + y_k^* \qquad (k = 1,2,\ldots,n). \tag{2.4}$$

Контрольні запитання

1. Яка система диференціальних рівнянь називається *лінійною*?
2. Яка система диференціальних рівнянь називається *однорідною* (*неоднорідною*)?
3. Які з наведених систем лінійних диференціальних рівнянь є (а) *однорідними*, (б) *неоднорідними*?

1) $\begin{cases} x_t' = 3x + 2y, \\ y_t' = 2x - y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_t' = y, \\ y_t' = -x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_t' = 2x - y + 3, \\ y_t' = x + 3y - 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_t' = 2x - y + 3, \\ y_t' = x + 3y - 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_t' = x - y + t, \\ y_t' = -x + t. \end{cases}$

4. Яку систему диференціальних рівнянь називається лінійною системою рівнянь *зі змінними* (*сталими*) *коефіцієнтами*?
5. Що розуміють під *фундаментальною системою розв'язків* лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь?
6. Сформулюйте *теорему про структуру загального розв'язку* лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь.
7. Сформулюйте *теорему про структуру загального розв'язку* лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь.

3.3. Інтегрування нормальних систем

Одним з основних методів інтегрування нормальної системи диференціальних рівнянь є *метод виключення*. Суть цього методу полягає в послідовному виключенню невідомих функцій з рівнянь системи, внаслідок чого система зводиться до одного диференціального рівняння n-го порядку від однієї невідомої функції.

Розглянемо цей метод на прикладі нормальної *системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь* 1-го порядку вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = b_1 x + b_2 y, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x'_t = a_1 x + a_2 y, \\ y'_t = b_1 x + b_2 y, \end{cases} \qquad (3.1)$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$ - диференційовані функції незалежної змінної t, а коефіцієнти a_i і b_i - сталі, але можуть бути і функціями змінної t.

1. Продиференціюємо перше рівняння системи за змінною t:

$$x''_{tt} = a_1 x'_t + a_2 y'_t.$$

2. Підставимо в цю рівність вираз y'_t із другого рівняння системи:

$$x''_{tt} = a_1 x'_t + a_2 (b_1 x + b_2 y).$$

3. Замінимо функцію y її виразом з першого рівняння системи, тобто

$$y = \frac{1}{a_2}(x'_t - a_1 x). \qquad (*)$$

Тоді

$$x''_{tt} = a_1 x'_t + a_2 \left(b_1 x + b_2 \frac{1}{a_2}(x'_t - a_1 x) \right) \quad \Rightarrow$$

Спростимо отриманий вираз

$$x''_{tt} = a_1 x'_t + a_2 b_1 x + b_2 x'_t - b_2 a_1 x \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} = (a_1 + b_2) x'_t + (a_2 b_1 - b_2 a_1) x,$$

$$x''_{tt} - (a_1 + b_2) x'_t - (a_2 b_1 - b_2 a_1) x = 0,$$

або

$$x''_{tt} + A x'_t + B x = 0,$$

де $A = -(a_1 + b_2)$, а $B = -(a_2 b_1 - b_2 a_1)$.

4. Одержали *лінійне однорідне* рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

відносно функції $x(t)$. Метод розв'язання таких рівнянь викладений в пункті **2.3.** Розв'язавши це рівняння, отримаємо *загальний розв'язок відносно функції* $x(t)$:

$$x(t) = \varphi(t, C_1, C_2).$$

5. Для знаходження функції $y(t)$, підставимо в рівняння $(*)$ знайдену функцію

$x(t)$ та її похідну $x'(t)$. В результаті отримаємо *загальний розв'язок відносно функції* $y(t)$:

$$y(t) = \psi(t, C_1, C_2).$$

Сукупність двох знайдених функцій є *загальним розв'язком заданої системи*:

$$x(t) = \varphi(t, C_1, C_2), \qquad y(t) = \psi(t, C_1, C_2).$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо *однорідну систему* двох диференціальних рівнянь відносно шуканих функцій $x(t)$ і $y(t)$. Застосуємо до її розв'язання метод виключення та зведемо її до одного диференціального рівняння 2-го порядку. Перепишемо цю систему в більш компактному вигляді:

$$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y, \\ y'_t = 4x + 5y. \end{cases}$$

1. Продиференціюємо перше рівняння системи за змінною t:

$$x''_{tt} = 5x'_t + 4y'_t.$$

2. Підставляючи в цю рівність вираз y'_t із другого рівняння системи, маємо

$$x''_{tt} = 5x'_t + 4(4x + 5y) \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} = 5x'_t + 16x + 20y.$$

3. Нарешті замінюючи функцію y її виразом з першого рівняння системи

$$y = \frac{1}{4}(x'_t - 5x) \qquad (*)$$

дістанемо

$$x''_{tt} = 5x'_t + 16x + 20\frac{1}{4}(x'_t - 5x) \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} = 5x'_t + 16x + 5x'_t - 25x,$$

$$x''_{tt} = 10x'_t - 9x, \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} - 10x'_t + 9x = 0$$

- *лінійне однорідне* рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$.

Для його розв'язання складемо і розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 9. \end{array}\right.$$

Отже, частинні лінійно незалежні розв'язки (фундаментальна система розв'язків) - $x_1(t) = e^x$ і $x_2(t) = e^{9x}$, а загальний розв'язок

$$x(t) = C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

4. Щоб знайти $y(t)$, підставимо в рівняння $(*)$ знайдену функцію $x(t)$ та її похідну:

$$x'(t) = C_1 e^x + 9C_2 e^{9x}.$$

Маємо:

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} - 5\left(C_1 e^x + C_2 e^{9x}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} - 5C_1 e^x - 5C_2 e^{9x}\right) =$$
$$= -C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

Сукупність двох знайдених функцій дає нам *загальний розв'язок заданої системи*:

$$x(t) = C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \qquad y(t) = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

Його можна записати у вигляді

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} e^x \\ -e^x \end{Bmatrix} + C_2 \begin{Bmatrix} e^{9x} \\ e^{9x} \end{Bmatrix},$$

де $\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^x \\ -e^x \end{Bmatrix}$ і $\begin{Bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^{9x} \\ e^{9x} \end{Bmatrix}$ - два лінійно незалежні розв'язки, що утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь, що задовольняє початкові умови (*задача Коші*):

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y - 4z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + y - 3z = 3x, \end{cases} \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = 0.$$

<u>Розв'язання.</u> Щоб знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, необхідно спочатку знайти її загальний розв'язок і потім домагатися, щоб він задовольняв початкові умови.

Задано *неоднорідну систему* лінійних диференціальних рівнянь, де $y(x)$ і $z(x)$ - шукані функції. Застосуємо до її розв'язання метод виключення та зведемо її до одного диференціального рівняння 2-го порядку.

1. Диференціюємо перше рівняння системи за змінною x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4\frac{dz}{dx} = 0.$$

2. Підставимо в цю рівність вираз $\dfrac{dz}{dx}$ із другого рівняння системи:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4(3x - y + 3z) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 12x + 4y - 12z = 0.$$

3. Замінюючи функцію z її виразом з першого рівняння системи

$$z = \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx} + 2y\right) \qquad (*)$$

отримаємо *лінійне неоднорідне* рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $y(x)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 12x + 4y - 12 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx} + 2y\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 12x + 3. \ (**)$$

4. Дотримуючись схеми розв'язання лінійних неоднорідних рівнянь (див. пункт **2.5.**) знайдемо спочатку загальний розв'язок $y_{зо}$ відповідного однорідного рівняння

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0,$$

якому відповідає характеристичне рівняння з дійсними різними коренями:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -1. \end{array}\right.$$

Отже,

$$y_{зо} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок $y_{чн}$ неоднорідного рівняння з правою частиною спеціального вигляду. Оскільки $P_n(x) = 12x + 3, (n = 1)$ і число $\alpha + \beta i = 0 \neq \lambda_{1,2}$, тобто $r = 0$, то функцію $y_{чн}$ шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = Ax + B.$$

Тоді

$$\frac{dy_{чн}}{dx} = A, \qquad \frac{d^2 y_{чн}}{dx^2} = 0.$$

Підставляючи $y_{чн}$ й знайдені похідні в неоднорідне рівняння, матимемо таке співвідношення для визначення коефіцієнтів A і B:

$$-A - 2(Ax + B) = 12x + 3 \quad \Rightarrow \quad -2Ax - A - 2B = 12x + 3,$$

звідки

$$\begin{array}{l|l} x & -2A = 12, \\ x^0 & -A - 2B = 3, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = -6, \\ B = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Отже,

$$y_{чн} = -6x + \frac{3}{2}.$$

Таким чином, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $(**)$ має вигляд

$$y(x) = y_{зо} + y_{чн} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 6x + \frac{3}{2}.$$

5. Тепер визначимо функцію $z(x)$. Для цього підставимо у вираз $(*)$ функцію $y(x)$ та її похідну:

$$\frac{dy}{dx} = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - 6.$$

В результаті маємо:

$$z(x)=\frac{1}{4}\left(2C_1e^{2x}-C_2e^{-x}-6+2\left(C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-6x+\frac{3}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(4C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-12x-3\right),$$

$$z(x)=C_1e^{2x}+\frac{1}{4}C_2e^{-x}-3x-\frac{3}{4}.$$

Таким чином, *загальний розв'язок заданої системи*:

$$y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-6x+\frac{3}{2},\qquad z(x)=C_1e^{2x}+\frac{1}{4}C_2e^{-x}-3x-\frac{3}{4}.$$

6. Щоб знайти частинний розв'язок, скористаємось початковими умовами:

$$\begin{cases} y(0)=0, \\ z(0)=0, \end{cases}\quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 0=C_1+C_2+\dfrac{3}{2}, \\ 0=C_1+\dfrac{1}{4}C_2-\dfrac{3}{4}, \end{cases}\quad\Rightarrow\quad \begin{cases} C_1=\dfrac{3}{2}, \\ C_2=-3. \end{cases}$$

Підставивши C_1 і C_2 у загальний розв'язок системи, матимемо шуканий *частинний розв'язок*:

$$y(x)=\frac{3}{2}e^{2x}-3e^{-x}-6x+\frac{3}{2},\qquad z(x)=\frac{3}{2}e^{2x}-\frac{3}{4}C_2e^{-x}-3x-\frac{3}{4}.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_t'=3x-y+z, \\ y_t'=-x+5y-z, \\ z_t'=x-y+3z. \end{cases}$$

Розв'язання. Задано лінійну однорідну систему трьох рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Зведемо її до одного диференціального рівняння 3-го порядку.

Виключимо спочатку функцію $z(t)$. Для цього виразимо $z(t)$ з першого рівняння системи:

$$z(t)=x_t'-3x+y,$$

продиференціюємо $z'_t = x''_{tt} - 3x'_t + y'_t$ і підставимо в друге і третє рівняння системи:

$$\begin{cases} y'_t = -x + 5y - x'_t + 3x - y, \\ x''_{tt} - 3x'_t + y'_t = x - y + 3\left(x'_t - 3x + y\right), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y'_t + x'_t = 2x + 4y, \\ x''_{tt} - 6x'_t + y'_t = -8x + 2y. \end{cases} \quad (*)$$

Залишилось вилучити функцію $y(t)$. Віднімемо від другого рівняння системи $(*)$ перше рівняння:

$$x''_{tt} - 7x'_t = -10x - 2y.$$

Продиференціюємо обидві частини цього співвідношення:

$$x'''_{ttt} - 7x''_{tt} = -10x'_t - 2y'_t. \qquad (**)$$

Віднімемо від подвоєного другого рівняння системи $(*)$ перше рівняння та виразимо y'_t через $x(t)$, x'_t, x''_{tt}:

$$2x''_{tt} - 13x'_t + y'_t = -18x \quad \Rightarrow \quad y'_t = -2x''_{tt} + 13x' - 18x.$$

Підставляючи знайдений вираз для y'_t в рівняння $(**)$, одержимо *лінійне однорідне* диференціальне рівняння 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$:

$$x'''_{ttt} - 11x''_{tt} + 36x'_t - 36x = 0. \qquad (***)$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$$

має дійсні різні корені

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6.$$

Отже, загальний розв’язок рівняння $(***)$ має вигляд:

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}.$$

Для знаходження функції $y(t)$ підставимо знайдену функцію $x(t)$ та її похідні

$$x'_t = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t} + 6C_3 e^{6t}, \qquad x''_{tt} = 4C_1 e^{2t} + 9C_2 e^{3t} + 36C_3 e^{6t}$$

у рівняння $x''_{tt} - 7x'_t = -10x - 2y$. Тоді

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(-x''_{tt} + 7x'_t - 10x\right) \quad \Rightarrow \quad y(t) = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}.$$

Нарешті, з рівняння $z = x'_t - 3x + y$ дістанемо

$$z(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}.$$

Таким чином, *загальний розв'язок* системи має вигляд:

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}, \qquad y(t) = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t},$$

$$z(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}.$$

Або

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + C_3 e^{6t} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Зауваження 1. З наведених прикладів видно, що *метод виключення* може бути застосований як до *однорідних систем*, так і *неоднорідних*. В першому випадку система зводиться до *лінійного однорідного* рівняння, а в другому – як правило до *неоднорідного*. Причому, якщо всі коефіцієнти a_{ij} лінійної системи були сталими, то й отримані рівняння будуть зі сталими коефіцієнтами.

Зауваження 2. Метод виключення може бути застосований і для нормальних систем з більшою кількістю рівнянь і невідомих функцій, але його реалізація при цьому ускладнюється. Тому існують і інші методи розв'язування таких систем.

Розглянемо ще один метод, який називається *матричним методом* інтегрування нормальної системи рівнянь (1.3), у випадку, коли вона є системою *лінійних однорідних* диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, тобто систему вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \ldots + a_{nn} y_n. \end{cases}$$

Для простоти обмежимось розглядом системи трьох рівнянь з трьома невідомими функціями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \dfrac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases} \tag{3.2}$$

де всі коефіцієнти a_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ - сталі.

Цю систему можна записати у вигляді *матричного диференціального рівняння*:

$$X'(t) = A \cdot X(t),$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - головна матриця системи, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ - матриця стовпець невідомих функцій, а $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ - матриця стовпець похідних цих функцій.

Будемо шукати *частинний розв'язок* системи (3.2) у вигляді

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t}, \quad y(t) = \beta e^{\lambda t}, \quad z(t) = \gamma e^{\lambda t}, \tag{3.3}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ - сталі, які треба підібрати таким чином, щоб функції (3.3) задовольняли систему (3.2).

Підставивши ці функції в систему (3.2) та скоротивши на множник $e^{\lambda t} \neq 0$, дістанемо:

$$\begin{cases} \alpha\lambda = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ \beta\lambda = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ \gamma\lambda = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - \lambda)\gamma = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Систему (3.4) можна розглядати як однорідну систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими α, β, γ. Щоб ця система мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.5)$$

Означення. Рівняння (3.5) називається *характеристичним рівнянням* системи (3.2).

Його можна записати у *матричному* вигляді:

$$|\, A-\lambda E \,| = 0, \qquad (3.6)$$

де

A - головна матриця системи (13.2), $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - одинична матриця.

Тоді рівняння (3.6) є характеристичним рівнянням матриці A і в той же час характеристичним рівнянням системи (3.2).

Розкривши визначник (3.5) , отримаємо рівняння третього степеня відносно λ.

Воно матиме три кореня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, які називаються *характеристичними числами* матриці A. Кожному характеристичному числу λ_i відповідає свій *власний вектор* $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$.

Розглянемо можливі випадки.

Випадок 1. Нехай всі *корені характеристичного рівняння дійсні і різні*: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$.

Для кожного кореня λ_i $(i = 1,2,3)$ запишемо систему (3.4) і визначимо коефіцієнти $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ (один з коефіцієнтів можна вважати рівним одиниці). Таким чином, отримаємо:

1) для кореня λ_1 *частинний розв'язок* системи (3.2):

$$x_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_1(t) = \beta_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_1(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t},$$

тобто власному числу λ_1 відповідає власний вектор $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$;

2) для кореня λ_2 *частинний розв'язок* системи (3.2):

$$x_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y_2(t) = \beta_2 e^{\lambda_2 t}, \quad z_2(t) = \gamma_2 e^{\lambda_2 t},$$

власному числу λ_2 відповідає власний вектор $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$;

3) для кореня λ_3 *частинний розв'язок* системи (3.2):

$$x_3(t) = \alpha_3 e^{\lambda_3 t}, \quad y_3(t) = \beta_3 e^{\lambda_3 t}, \quad z_3(t) = \gamma_3 e^{\lambda_3 t},$$

власному числу λ_3 відповідає власний вектор $\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$.

Можна показати, що ці функції утворюють *фундаментальну систему частинних розв'язків системи*. Тоді *загальний розв'язок* системи (3.2) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t), \\ y(t) &= C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + C_3 y_3(t), \qquad \Rightarrow \\ z(t) &= C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) + C_3 z_3(t), \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} x(t) &= C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 \alpha_3 e^{\lambda_3 t}, \\ y(t) &= C_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 \beta_3 e^{\lambda_3 t}, \\ z(t) &= C_1 \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \gamma_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 \gamma_3 e^{\lambda_3 t}. \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Або

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{Bmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} + C_3 e^{\lambda_3 t} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{Bmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 12y - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -4x + 12y + 3z. \end{cases}$$

Розв’язання. Дана система є *лінійною однорідною* системою трьох рівнянь відносно шуканих функцій $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$. Застосуємо для її розв’язання *матричний метод*.

Складемо *характеристичне рівняння* цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -12 & -1 \\ 1 & -3-\lambda & -1 \\ -4 & 12 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник, знаходимо

$$(6-\lambda)(\lambda^2-9)-48-12+4(3+\lambda)+12(6-\lambda)+12(3-\lambda)=0,$$

остаточно отримаємо

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0.$$

Отримане кубічне рівняння має три *дійсних різних кореня*: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$ - власні числа головної матриці системи A. Знайдемо відповідні їм *власні вектори* $\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}$, та *частинні розв’язки* системи

$$x_i(t)=\alpha_i e^{\lambda_i t},\ y_i(t)=\beta_i e^{\lambda_i t},\ z_i(t)=\lambda_i e^{\lambda_i t}, \quad (i=1,2,3).$$

Для цього побудуємо систему (13.4) для кожного числа λ_i .

1. Для $\lambda_1=1$ маємо:

$$\begin{cases} (6-1)\alpha_1-12\beta_1-\gamma_1=0, \\ \alpha_1+(-3-1)\beta_1-\gamma_1=0, \\ -4\alpha_1+12\beta_1+(3-1)\gamma_1=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\alpha_1-12\beta_1-\gamma_1=0, \\ \alpha_1-4\beta_1-\gamma_1=0, \\ -4\alpha_1+12\beta_1+2\gamma_1=0. \end{cases}$$

Додамо перше рівняння системи до третього:

$$\begin{cases} \alpha_1+\gamma_1=0, \\ \alpha_1-4\beta_1-\gamma_1=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=-\gamma_1, \\ 4\beta_1=\alpha_1-\gamma_1. \end{cases}$$

Дана система має безліч розв’язків. Покладемо $\alpha_1=1$, тоді з першого рівняння $\gamma_1=-1$, а з другого рівняння $\beta_1=\dfrac{1}{2}$.

Отже, власному числу $\lambda_1=1$ відповідає власний вектор

$$\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}=\left\{1, \frac{1}{2}, -1\right\},$$

а частинний розв'язок, при цьому, матиме вигляд:

$$x_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} = e^t, \quad y_1(t) = \beta_1 e^{\lambda_1 t} = \frac{1}{2} e^t, \quad z_1(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} = -e^t.$$

2. Для $\lambda_2 = 2$ маємо:

$$\begin{cases} (6-2)\alpha_2 - 12\beta_2 - \gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 + (-3-2)\beta_2 - \gamma_2 = 0, \\ -4\alpha_2 + 12\beta_2 + (3-2)\gamma_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha_2 - 12\beta_2 - \gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 - 5\beta_2 - \gamma_2 = 0, \\ -4\alpha_2 + 12\beta_2 + \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Система знову має безліч розв'язків, оскільки третє рівняння є наслідком першого. Тому візьмемо, наприклад, перші два рівняння

$$\begin{cases} 4\alpha_2 - 12\beta_2 - \gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 - 5\beta_2 - \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

і додамо їх попередньо помноживши друге рівняння на (-1):

$$\begin{cases} 3\alpha_2 - 7\beta_2 = 0, \\ \gamma_2 = \alpha_2 - 5\beta_2. \end{cases}$$

Поклавши $\alpha_2 = 1$, одержимо з системи $\beta_2 = \frac{3}{7}$, $\gamma_2 = -\frac{8}{7}$.

Таким чином, власному числу $\lambda_2 = 2$ відповідає власний вектор

$$\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\} = \left\{1, \frac{3}{7}, -\frac{8}{7}\right\},$$

а частинний розв'язок, має вигляд:

$$x_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = e^{2t}, \quad y_2(t) = \beta_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{3}{7} e^{2t}, \quad z_2(t) = \gamma_2 e^{\lambda_2 t} = -\frac{8}{7} e^{2t}.$$

3. Для кореня $\lambda_3 = 3$ маємо:

$$\begin{cases} (6-3)\alpha_3 - 12\beta_3 - \gamma_3 = 0, \\ \alpha_3 + (-3-3)\beta_3 - \gamma_3 = 0, \\ -4\alpha_3 + 12\beta_3 + (3-3)\gamma_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_3 - 12\beta_3 - \gamma_3 = 0, \\ \alpha_3 - 6\beta_3 - \gamma_3 = 0, \\ -4\alpha_3 + 12\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Знову додавши перше і третє рівняння, отримаємо :

$$\begin{cases} -\alpha_2 - \gamma_2 = 0, \\ \alpha_2 - 6\beta_2 - \gamma_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\gamma_2, \\ 6\beta_2 = \alpha_2 - \gamma_2. \end{cases}$$

Покладемо $\alpha_3 = 1$, тоді з першого рівняння $\gamma_3 = -1$, а з другого рівняння $\beta_3 = \frac{1}{3}$.

Тоді, власному числу $\lambda_3 = 3$ відповідає власний вектор

$$\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\} = \left\{1, \frac{1}{3}, -1\right\}$$

і частинний розв'язок, набуває вигляду:

$$x_3(t) = \alpha_3 e^{\lambda_3 t} = e^{3t}, \quad y_3(t) = \beta_3 e^{\lambda_3 t} = \frac{1}{3} e^{3t}, \quad z_3(t) = \gamma_3 e^{\lambda_3 t} = -e^{3t}.$$

Частинні розв'язки, отримані в пунктах 1, 2, 3, утворюють *фундаментальну систему* розв'язків. Тоді згідно з формулою (3.7) *загальний розв'язок* системи запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t), \\ y(t) &= C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + C_3 y_3(t), \\ z(t) &= C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t) + C_3 z_3(t), \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ y(t) &= C_1 \frac{1}{2} e^{t} + C_2 \frac{3}{7} e^{2t} + C_3 \frac{1}{3} e^{3t}, \\ z(t) &= -C_1 e^{t} + C_2 - \frac{8}{7} e^{2t} + C_3 - e^{3t}. \end{aligned}$$

Випадок 2. *Корені характеристичного рівняння різні, але серед них є комплексні*: $\lambda_1 = a + ib, \ \ \lambda_2 = a - ib, \ \ \lambda_3 \in R$.

У цьому випадку вигляд частинних розв'язків визначається так само, як і у *випадку 1*.

При цьому, відокремлюючи в отриманих комплексних частинних розв'язках за допомогою формул Ейлера ($e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$) дійсну та уявну частини, які містять функції вигляду $e^{at} \cdot \cos bt, \ e^{at} \cdot \sin bt$, отримаємо два дійсних лінійно незалежних частинних розв'язки.

Зауваження 3. Комплексно-спряженим кореням $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ характеристичного рівняння відповідають одні і ті самі розв'язки, тобто корінь $\lambda_2 = a - ib$ не дає нових лінійно незалежних дійсних розв'язків.

Побудувавши частинні розв'язки, що відповідають усім кореням характеристичного рівняння, і взявши лінійну комбінацію всіх побудованих лінійно незалежних частинних розв'язків з довільними сталими, дістанемо загальний розв'язок системи (3.2).

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь, що задовольняє початкові умови (*задача Коші*):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 3y + z, \end{cases} \qquad x(0) = 7, \qquad y(0) = 2, \qquad z(0) = 1.$$

Розв'язання. Задано лінійну *однорідну систему* трьох рівнянь відносно шуканих функцій $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$. Застосуємо для її розв'язання *матричний метод*.

Складемо та розв'яжемо *характеристичне рівняння* цієї системи:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-\lambda)^3 + 3(1-\lambda) + (1-\lambda) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0.$$

Звідси отримаємо три *різних кореня* серед яких є *комплексні*: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1 + 2i,\ \lambda_3 = 1 - 2i$.

Для кожного числа λ_i побудуємо систему (3.4).

1. Для $\lambda_1 = 1$ отримаємо:

$$\begin{cases} 0 \cdot \alpha_1 + \beta_1 + 0 \cdot \gamma_1 = 0, \\ -\alpha_1 + 0 \cdot \beta_1 - \gamma_1 = 0, \\ 0 \cdot \alpha_1 + 3\beta_1 + 0 \cdot \gamma_1 = 0, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \beta_1 = 0, \\ -\alpha_1 - \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Отримали систему, яка має безліч розв'язків. З першого рівняння маємо: $\beta_1 = 0$. Покладемо $\alpha_1 = 1$, тоді з другого рівняння $\gamma_1 = -1$.

Тоді, власному числу $\lambda_1 = 1$ відповідає власний вектор

$$\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} = \{1, 0, -1\},$$

а частинний розв’язок, при цьому, матиме вигляд:

$$x_1(t)=\alpha_1 e^{\lambda_1 t}=e^t,\quad y_1(t)=\beta_1 e^{\lambda_1 t}=0,\quad z_1(t)=\gamma_1 e^{\lambda_1 t}=-e^t.$$

2. Для $\lambda_2=1+2i$ маємо:

$$\begin{cases}-2i\alpha_2+\beta_2=0,\\ -\alpha_2-2i\beta_2-\gamma_2=0,\\ 3\beta_2-2i\gamma_2=0.\end{cases}$$

Поклавши $\alpha_2=1$, одержимо з системи $\beta_2=2i,\ \gamma_2=3$.

Отже, власному числу $\lambda_2=2$ відповідає власний вектор

$$\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\}=\{1,2i,3\},$$

а частинний комплексний розв’язок в цьому випадку, має вигляд:

$$x_2(t)=\alpha_2 e^{\lambda_2 t}=e^{(1+2i)t},\quad y_2(t)=\beta_2 e^{\lambda_2 t}=2ie^{(1+2i)t},\quad z_2(t)=\gamma_2 e^{\lambda_2 t}=3e^{(1+2i)t}.$$

В знайдених розв’язках виділимо дійсну (Re) та уявну (Im) частини:

$$x_2(t)=e^{(1+2i)t}=e^t(\cos 2t+i\sin 2t),$$

$$\mathrm{Re}\,x_2(t)=e^t\cos 2t,\qquad \mathrm{Im}\,x_2(t)=e^t\sin 2t;$$

$$y_2(t)=2ie^{(1+2i)t}=e^t(2i\cos 2t-2\sin 2t),$$

$$\mathrm{Re}\,y_2(t)=-2e^t\sin 2t,\qquad \mathrm{Im}\,y_2(t)=2e^t\cos 2t;$$

$$z_2(t)=3e^{(1+2i)t}=e^t(3\cos 2t+3i\sin 2t),$$

$$\mathrm{Re}\,z_2(t)=3e^t\cos 2t,\qquad \mathrm{Im}\,z_2(t)=3e^t\sin 2t.$$

Як відмічалося, отримані дійсні та уявні частини комплексного розв'язку є також частинними розв’язками заданої системи.

3. Для кореня $\lambda_3=1-2i$ частинних розв’язків шукати не будемо, оскільки, згідно *зауваження 3*, це призведе з точністю до знака до таких самих розв’язків, тобто вони будуть лінійно залежними з розв’язками, що відповідають кореню $\lambda_2=1+2i$.

Отже, отримані в пунктах 1, 2 частинні розв’язки, утворюють *фундаментальну систему* розв’язків. Таким чином, згідно з формулою (3.7) *загальний розв’язок* системи має вигляд:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^t \cos 2t + C_3 e^t \sin 2t,$$
$$y(t) = C_1 \cdot 0 - 2C_2 e^t \sin 2t + 2C_3 e^t \cos 2t,$$
$$z(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^t \cos 2t + 3C_3 e^t \sin 2t.$$

Тепер з отриманого загального розв'язку виділимо частинний розв’язок. Скориставшись початковими умовами, отримаємо систему рівнянь для визначення сталих C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} 7 = C_1 + C_2 + 0, \\ 2 = 0 - 0 + 3C_3, \\ 1 = -C_1 + 3C_2 + 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 5, \ \ C_2 = 2, \ \ C_3 = 1.$$

Отже, шуканий *частинний розв’язок* має вигляд:

$$x(t) = 5e^t + 2e^t \cos 2t + e^t \sin 2t,$$
$$y(t) = -4e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t,$$
$$z(t) = -5e^t + 6e^t \cos 2t + 3e^t \sin 2t.$$

Випадок 3. *Характеристичне рівняння містить корінь λ кратності m $(m = 2,3)$.*

Розв’язок системи, що відповідає кратному кореню, належить шукати у вигляді:

1) якщо $m = 2$, то

$$x(t) = (At + B)e^{\lambda t}, \ \ y(t) = (Ct + D)e^{\lambda t}, \ z(t) = (Et + F)e^{\lambda t};$$

2) якщо $m = 3$, то

$$x(t) = (At^2 + Bt + C)e^{\lambda t}, \ \ y(t) = (Dt^2 + Et + F)e^{\lambda t}, \ z(t) = (Gt^2 + Ht + N)e^{\lambda t}.$$

Цей розв’язок залежить від m довільних сталих. Сталі $A, B, C, \ldots, N$ визначаються методом невизначених коефіцієнтів. Виразивши усі коефіцієнти через довільні m з них, покладаємо почергово один з них рівним одиниці, а решта – нулю. В результаті отримаємо m лінійно незалежних частинних розв’язків системи (3.2).

Якщо поряд з кратним коренем λ є дійсний корінь, то побудувавши n $(n = 3)$ лінійно незалежних дійсних частинних розв’язків, що відповідають усім кореням, і взявши їхню лінійну комбінацію з довільними сталими, дістанемо загальний розв’язок системи (3.2).

Приклад 6. Знайти загальний розв’язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -y + 2z. \end{cases}$$

<u>Розв’язання.</u> Складемо *характеристичне рівняння* даної однорідної системи:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-\lambda)^2(2-\lambda) - 1 - (1-\lambda) + (2-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 - 2\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) = 0.$$

Остаточно отримаємо кубічне рівняння

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0,$$

з якого отримаємо *три дійсних кореня, два з яких є кратними*: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$

1. Для простого кореня $\lambda_1 = 2$ система (3.4) має вигляд:

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 = 0, \\ -\beta_1 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta_1 = 0, \\ \alpha_1 - \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Покладаючи $\alpha_1 = 1$, знаходимо $\gamma_1 = 1.$

Маємо один частинний розв’язок вихідної системи:

$$x_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} = e^{2t},\ \ y_1(t) = \beta_1 e^{\lambda_1 t} = 0,\ \ z_1(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} = e^{2t}.$$

2. Для двократного кореня $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ $(m = 2)$ відповідний розв’язок записуємо у вигляді:

$$x_{2,3}(t) = (At + B)e^{\lambda t},\ \ y_{2,3}(t) = (Ct + D)e^{\lambda t},\ z_{2,3}(t) = (Et + F)e^{\lambda t},$$

де A, B, C, D, E, F - невизначені коефіцієнти.

Знайшовши похідні від цих функцій (розв'язків) і підставивши їх разом із самими функціями в рівняння вихідної системи, матимемо:

$$\begin{cases} A\cdot e^t+(At+B)e^t=(At+B)e^t-(Ct+D)e^t+(Et+F)e^t, \\ C\cdot e^t+(Ct+D)e^t=(At+B)e^t+(Ct+D)e^t-(Et+F)e^t, \\ E\cdot e^t+(Et+F)e^t=-(Ct+D)e^t+2(Et+F)e^t, \end{cases}$$

або, після скорочення на $e^t \neq 0$ та зібравши подібні доданки, отримаємо

$$\begin{cases} (C-E)t+A+D-F=0, \\ (A-E)t+B-C-F=0, \\ (C-E)t+D+E-F=0. \end{cases}$$

Якщо прирівняти коефіцієнти при однакових степенях t в усіх рівняннях, то одержимо систему рівнянь для знаходження A, B, C, D, E, F:

$$\begin{cases} C-E=0, \\ A-E=0, \\ A+D-F=0, \\ B-C-F=0, \\ D+E-F=0. \end{cases}$$

Оскільки розв'язок залежить від двох $(m=2)$ довільних сталих, виразимо усі коефіцієнти через два з них, наприклад через A і B. З другого рівняння маємо $E=A$. Тоді, з урахуванням першого рівняння, отримаємо $C=A$. З четвертого рівняння знаходимо $F=B-C$, тобто $F=B-A$. З третього рівняння $D=F-A$, тобто $D=B-A-A$, або $D=B-2A$. Коефіцієнти A і B - довільні.

Покладаючи $A=1,\ B=0$, знаходимо: $C=1,\ D=-2,\ E=1,\ F=-1.$

Покладаючи $A=0,\ B=1$, знаходимо: $C=0,\ D=1,\ E=0,\ F=1.$

Таким чином, отримали два лінійно незалежних частинних розв'язки, що відповідають двократному кореню $\lambda=1$:

$$x_2(t)=te^t,\ \ y_2(t)=(t-2)e^t,\ z_2(t)=(t-1)e^t,$$

$$x_3(t)=e^t,\ \ y_3(t)=e^t,\ z_3(t)=e^t.$$

Отже, *загальний розв'язок* вихідної системи має вигляд:

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^t + C_3 e^t,$$
$$y(t) = C_2 (t-2) e^t + C_3 e^t,$$
$$z(t) = C_1 e^{2t} + C_2 (t-1) e^t + C_3 e^t.$$

Контрольні запитання

1. Які існують методи розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь?
2. У чому полягає *метод виключення невідомих* при розв'язанні лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?
3. Чи може бути застосований метод виключення до лінійних *однорідних* (*неоднорідних*) систем диференціальних рівнянь?
4. Які *недоліки* методу виключення змінних?
5. До яких систем диференціальних рівнянь можна застосувати *матричний метод*?
6. У чому полягає *матричний метод* при розв'язанні лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?
7. В якому вигляді шукають частинні розв'язки системи однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?
8. Що називається *характеристичним рівнянням* системи однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?
9. Що називається *власним числом* та *власним вектором* головної матриці системи?
10. Як записується *загальний розв'язок* системи, що складається з трьох однорідних рівнянь з трьома невідомими функціями?
11. Скільки довільних сталих містить загальний розв'язок системи?

1) $\begin{cases} x'_t - 4x - y = 0, \\ y'_t - 5x + 3y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x'_t = x + 4y, \\ y'_t = 4x + 3y - z, \\ z'_t = 2x + z. \end{cases}$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь:

1.1. $\begin{cases} x_t' = -y, \\ y_t' = -4x. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_t' = x - y, \\ y_t' = -4x + y. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} x_t' = 3x - y, \\ y_t' = 4x - y. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_t' = y, \\ y_t' = -x. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x_t' = x - 3y, \\ y_t' = 3x + y. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x_t' = x - 2y - z, \\ y_t' = -x + y + z, \\ z_t' = x - z. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} x_t' = x - y + z, \\ y_t' = x + y - z, \\ z_t' = 2x - y. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x_t' = 3x - y + z, \\ y_t' = -x + 5y - z, \\ z_t' = x - y + 3z. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} x_t' = x - z, \\ y_t' = x, \\ z_t' = x - y. \end{cases}$

2. Знайти частинний розв'язок системи, що задовольняє початкові умови:

2.9. $\begin{cases} x_t' = 2x + y, \\ y_t' = 3x + 4y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 3.$

2.10. $\begin{cases} x_t' = 3x + 2y, \\ y_t' = x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = -\dfrac{1}{2}.$

2.11. $\begin{cases} x_t' = -3x + 2y, \\ y_t' = -2x + y, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

2.12. $\begin{cases} x_t' = x - 5y, \\ y_t' = x - y, \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = \dfrac{1}{5}.$

2.13. $\begin{cases} x_t' = x + y, \\ y_t' = -2x + 3y, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$

2.14. $\begin{cases} x_t' = -x + y + z, \\ y_t' = x - y + z, \\ z_t' = x + y + z. \end{cases}$ $x(0) = 2,\quad y(0) = 4,\quad z(0) = 0.$

2.15. $\begin{cases} x_t' = x - y + z, \\ y_t' = x + y - z, \\ z_t' = 2x - y. \end{cases}$ $x(0) = 2,\quad y(0) = 4,\quad z(0) = 0.$

Відповіді

1.1. $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t},\quad y = 2C_1 e^{-2t} - 2C_2 e^{2t}.$

1.2. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t},\quad y = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}.$

1.3. $x = (C_1 + C_2 t)e^t,\quad y = (2C_1 - C_2 + 2C_2 t)e^t.$

1.4. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,\quad y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$

1.5. $y = e^t (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t),\quad y = e^t (C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t).$

1.6. $x = C_1 + 3C_2 e^{2t},\quad y = -2C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t},\quad z = C_1 + C_2 e^{2t} - 2C_3 e^{-t}.$

1.7. $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t},\quad y = C_1 e^t - 3C_3 e^{-t},\quad z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}.$

1.8. $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t},\quad y = C_2 e^{3t} + 2C_3 e^{6t},\quad z = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} - C_3 e^{6t}.$

1.9. $x = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t,\quad y = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t,$
$z = C_2 (\cos t + \sin t) + C_3 (\sin t - \cos t).$ **2.1.** $x = e^{5t},\quad y = 3e^{5t}.$

2.2. $x = e^t + e^{4t},\quad y = -e^t + (1/2)e^{4t}.$ **2.3.** $x = -e^{-x},\quad y = (1/2)te^{-x}.$

2.4. $x = 3\cos 2t + \sin 2t,\quad y = (7/5)\sin 2t + (1/5)\cos 2t.$

2.5. $x = e^{2t}(2\cos t - \sin t),\quad y = e^{2t}(\cos t - 3\sin t).$

2.6. $x = e^{-t} + 2e^{2t} - e^{-2t},\quad y = e^{-t} + 2e^{2t} + e^{-2t}\quad z = -e^{-t} + 4e^{2t}.$

2.7. $x = e^{-t} + 2e^{2t} - e^{-2t},\quad y = e^{-t} + 2e^{2t} + e^{-2t}\quad z = -e^{-t} + 4e^{2t}.$

Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Розв'язати диференційне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язати, де вказано, задачу Коші.

1. $xydx + (x+1)dy = 0.$
2. $\sqrt{y^2 + 1}\,dx = xydy.$
3. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0,\quad y(0) = 1.$
4. $y' ctgx + y = 2,\quad y(0) = -1.$

5. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(2) = 0.$

6. $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 1/2.$

7. $2xyy' + y^2 = 2.$

8. $y' - xy^2 = 2xy.$

9. $e^{-y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 1.$

10. $y' = 10^{x+y}.$

11. $y\frac{dy}{dx} + x = 1.$

12. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0.$

13. $xydy + (1+y^2)dx = 0.$

14. $y'\sin x - y\cos x = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

15. $(1+y^2)dx = xdy.$

16. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$

17. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0, \quad y(0) = 1.$

18. $y\ln ydx + ydy = 0, \quad y(1) = 1.$

19. $y' = a^{x+y} (a > 0, a \neq 1).$

20. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0.$

21. $2x\sqrt{1-y^2} = y'(1+x^2).$

22. $e^x\sin^3 y + (1+e^{2x})\cos yy' = 0.$

23. $y^2\sin xdx + \cos^2 x\ln ydy = 0.$

24. $tgx\sin^2 ydx + \cos^2 xctgydy = 0.$

25. $xy' - y = y^3.$

26. $xyy' = 1 - x^2.$

27. $3e^x tgydx + (1-e^x)\sec^2 ydy = 0.$

28. $y'tgx = y.$

29. $(1+e^x)yy' = e^x, \quad y(0) = 1.$

30. $(xy^2+x)dx + (x^2y - y)dy = 0, \quad y(0) = 1.$

Завдання 2. Розв'язати диференційне рівняння однорідне відносно змінних. Розв'язати, де вказано, задачу Коші.

1. $xy' - y = xtg\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$

2. $xy'\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x = y\sin\left(\frac{y}{x}\right).$

3. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$

4. $xy'\ln\left(\frac{y}{x}\right) = x + y\ln\left(\frac{y}{x}\right).$

5. $xyy' = y^2 + 2x^2.$

6. $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}.$

7. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad y(1) = 2.$

8. $(x^2+y^2)dx - xydy = 0.$

9. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

10. $xy' = xe^{y/x} + y, \quad y(1) = 0.$

11. $(x+2y)dx - xdy = 0.$

12. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0.$

13. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0.$

14. $2x^2y' = y(2x^2 - y^2).$

15. $y^2 + x^2y' = xyy'.$

16. $(x^2+y^2)y' = 2xy.$

17. $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}.$

18. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy.$

19. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2} + y.$

20. $xy' = y + x\cos^2\frac{x}{y}.$

21. $(x-y)dx + xdy = 0.$

22. $xy' = y(\ln y - \ln x).$

23. $x^2dy = (y^2 - xy + x^2)dx.$

24. $2x^2y' = x^2 + y^2.$

25. $(4x-3y)dx + (2y-3x)dy = 0.$

26. $xy' = y\left(1+\ln\dfrac{x}{y}\right), \quad y(1) = e^{-\frac{1}{2}}.$

27. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}.$

28. $xdy = \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx.$

29. $yy' = 2y - x.$

30. $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x.$

Завдання 3. Розв'язати лінійне диференційне рівняння. Розв'язати, де вказано, задачу Коші.

1. $y' + ytgx = \sec x.$
2. $x^2 + xy' = y, \quad y(1) = 0.$
3. $(2x+1)y' = 4x + 2y.$
4. $xy' - 2y = 2x^4.$
5. $(xy + e^x)dx - xdy = 0.$
6. $x^2y' + xy + 1 = 0.$
7. $y = x(y' - x\cos x).$
8. $y'\cos x - ysix = 2x, \quad y(0) = 0.$
9. $2x(x^2+y)dx = dy.$
10. $(xy'-1)\ln x = 2y.$
11. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}.$
12. $(x+y^2)dy = ydx.$
13. $y' + 2y = e^{-x}.$
14. $y' - 2xy = 2xe^{x^2}.$
15. $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos^3 x}, \quad y(0) = 0.$
16. $y' + 2xy = e^{-x^2}.$
17. $xy' - 2y = x^3\cos x.$
18. $(2x - y^2)y' = 2y.$
19. $y' + y\cos x = \cos x, \quad y(0) = 1.$
20. $y'x\ln x - y = 3x^2\ln^2 x.$
21. $(2e^y - x)y' = 1.$
22. $y' - \dfrac{y}{(1-x^2)} - 1 - x = 0, y(0) - 0.$
23. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^{3.}$
24. $y' - ytgx = \dfrac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0.$
25. $xy' - y = x^2\cos x.$
26. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$
27. $y'\cos x + y = 1 - \sin x.$
28. $xy' + y - e^x = 0, \quad y(1) = 2.$
29. $(1+x^2)y' + y = arctgx.$
30. $y'\cos^2 x + y = tgx.$

Завдання 4. Розв'язати рівняння Бернуллі. Розв'язати, де вказано, задачу Коші.

1. $y' + 2xy = 2xy^2.$
2. $3xy^2y' - 2y^3 = x^2.$
3. $(x^3 + e^y)y' = 3x^2.$
4. $y' + 2xy = y^2e^{x^2}.$
5. $y' - 2ye^x = 2\sqrt{y}e^x.$

6. $2y'\ln x + \dfrac{y}{x} = y^{-1}\cos x.$

7. $2y'\sin x + y\cos x = y^3\sin^2 x.$

8. $y' - y\cos x = y^2\cos x.$

9. $y' + 2y = y^2 e^x.$

10. $y' = y^4\cos x + ytgx.$

11. $xy^2y' = x^2 + y^3.$

12. $xydy = (y^2 + x^2)dx.$

13. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$

14. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2y^{4/3}.$

15. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}.$

16. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$

17. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$

18. $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}, \quad y(0) = 9/4.$

19. $y' - 2ytgx + y^2\sin x = 0.$

20. $y' = \dfrac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$

21. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$

22. $y'x + y = -xy^2.$

23. $xdy = (x^5y^2 - 2y)dx.$

24. $y' = xy + x^3y^2.$

25. $yy' - 4x - y^2\sqrt{x} = 0.$

26. $x^2y^2y' + xy^3 = 1.$

27. $y' + y = x\sqrt{y}.$

28. $2xyy' - y^2 + x = 0.$

29. $xy' + y = y^2\ln x.$

30. $y' + \dfrac{3x^2y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\sin x, y(0) = 1.$

Завдання 5. Розв'язати диференційне рівняння вищого порядку, що допускає зниження порядку. Розв'язати, де вказано, задачу Коші.

1. $xy'' + y' = 0.$

2. $y'' = 1 + (y')^2.$

3. $y^{IV} = x.$

4. $xy'' = (1 + 2x^2)y'.$

5. $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}.$

6. $y'' = (y')^2.$

7. $(x+1)y'' - (x+2)y' + x + 2 = 0.$

8. $y''' - (y'')^3 = 0.$

9. $y''(x+2)^5 = 1, \quad y(-1) = 1/12, \quad y'(-1) = -1/4.$

10. $y'y'' = -x.$

11. $y''y^3 = 1, \quad y(1/2) = y'(1/2) = 1.$

12. $yy'' + (y')^2 = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

13. $y'' = xe^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

14. $yy'' = (y')^2.$

15. $(1-x^2)y'' - xy' = 2.$

16. $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

17. $yy'' - y'(1+y') = 0.$

18. $y'' + y' tgx = \sin 2x.$

19. $xy'' = xy' + y'.$

20. $y''' = x + \cos x.$

21. $2y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}, \quad y(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{5}, \quad y'(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

22. $y''' = \dfrac{1}{x}, \quad y(1) = y'(1) = 1.$

23. $xy'' = y', \quad y(0) = y'(0) = 0.$

24. $(y'')^2 = y'.$

25. $xy'' + y' + x = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

26. $y'' - 2ctgxy' = \sin^3 x.$

27. $y'' = (y')^2 - y, \quad y(1) = -1/4, \quad y'(1) = 1/2.$

28. $yy'' - (y')^2 = y^4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

29. $y'' = 2x \ln x.$

30. $y'' + \dfrac{2}{1-y}(y')^2 = 0.$

Завдання 6. Знайти загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1. $y'' - 7y' + 10y = 0.$
2. $y'' + 3y' = 0.$
3. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0.$
4. $y''' - 2y'' = 0.$
5. $y'' - 4y = 0.$
6. $y''' + 27y = 0.$
7. $y'' + 4y' + 13y = 0.$
8. $y'' + y = 0.$
9. $y'' + 2y' + y = 0.$
10. $y'' - 5y' + 6y = 0.$
11. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0.$
12. $y^{IV} - 3y''' = 0.$
13. $y'' + y' - 2y = 0.$
14. $y'' + 4y' + 3y = 0.$
15. $2y'' - 5y' + 2y = 0.$
16. $y'' - 4y' + 5y = 0.$
17. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
18. $y'' + 4y = 0.$
19. $y''' - 8y = 0.$
20. $y^{IV} - y = 0.$

21. $y'' - 2y' + y = 0.$

22. $4y'' + 4y' + y = 0.$

23. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

24. $y''' - y'' - y' + y = 0.$

25. $y'' + y' - 2y = 0.$

26. $y'' - 4y' + 8y = 0.$

27. $y'' + 4y' + 4y = 0.$

28. $y'' + 4y' + 13y = 0.$

29. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

30. $y'' - 4y' + 2y = 0.$

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1. $y'' - 4y' + 4y = x^2.$
2. $y'' - 8y' + 7y = 14.$
3. $y'' - 2y' = x^2 - 1.$
4. $y'' - y' + y = x^3 + 6.$
5. $y'' + 8y' = 8x.$
6. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x.$
7. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$
8. $y''' - y' = x^2 + x.$
9. $3y' + y''' = 6x - 1.$
10. $y''' + y'' = 5x^2 - 1.$
11. $7y''' - y'' = 12x.$
12. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1.$
13. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1.$
14. $y''' - y'' = 6x + 5.$
15. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2.$
16. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39.$
17. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5.$
18. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x.$
19. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$
20. $y^{V} - y^{IV} = 2x + 3.$
21. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x.$
22. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2.$
23. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x.$
24. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4.$
25. $y^{IV} + y''' = x.$
26. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2.$
27. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3.$
28. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1.$
29. $y^{IV} + y''' = 12x + 6.$
30. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1.$

Завдання 8. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1. $y'' - 3y' + 2y = (15 - 12x)e^{-x}.$
2. $y'' - 2y' = (1 - 2x)e^{x}.$
3. $y'' - 2y' + y = (3x + 7)e^{2x}.$
4. $y'' - y' = (2x + 5)e^{2x}.$
5. $y'' - 4y' + 4y = (18x - 21)e^{-x}.$
6. $y'' + 3y' + 2y = (2x - 5)e^{x}.$
7. $y'' - 4y' + 4y = (x - 1)e^{x}.$
8. $y'' + 2y' + y = (18x + 21)e^{2x}.$
9. $y'' + 2y + 5y = (8x + 4)e^{x}.$
10. $y'' + 6y' + 13y = -4xe^{x}.$

11. $y'' + y = (4x+9)e^{2x}$.
12. $y'' + 2y' = (12x+16)e^{x}$.
13. $y'' - 4y' + 8y = (6x-11)e^{-x}$.
14. $y'' + 2y' + y = (6x+5)e^{x}$.
15. $y'' + 4y' + 3y = (9x+15)e^{x}$.
16. $y'' + 2y' + 10y = (4-8x)e^{x}$.
17. $y'' + 4y = (7-6x)e^{x}$.
18. $y'' - 7y' + 10y = (1-2x)e^{-x}$.
19. $y'' - 5y' + 6y = (20-16x)e^{-x}$.
20. $y'' + 5y' + 6y = -4xe^{x}$.
21. $y'' - 4y' + 2y = e^{-x}(32x-32)$.
22. $y'' + y = 4xe^{x}$.
23. $y'' + 2y' = (8x-12)e^{x}$.
24. $y'' - 4y' + 4y = -(8x+4)e^{x}$.
25. $y'' + 6y' + 13y = (16x+20)e^{x}$.
26. $y'' + 2y' + 5y = (8x-14)e^{-x}$.
27. $y'' - 5y' = (8x+6)e^{x}$.
28. $y'' - 6y' = (16x+24)e^{x}$.
29. $y'' - 6y' + 9y = 4(1-x)e^{-x}$.
30. $y'' + y' - 6y = (20x+14)e^{-2x}$.

Завдання 9. Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

1. $y'' + 2y' = 4e^{x}\,(\sin x + \cos x)$.
2. $y'' - 4y' + 4y = -e^{-2x}\sin 6x$.
3. $y'' + 2y' = -2e^{x}\,(\sin x + \cos x)$.
4. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.
5. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.
6. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}\,(5\sin x - 3\cos x)$.
7. $y'' + 2y' = e^{x}\,(\sin x + \cos x)$.
8. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x$.
9. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$.
10. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.
11. $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.
12. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}\,(-3\sin x + 4\cos x)$.
13. $y'' + 2y' = 10e^{x}\,(\sin x + \cos x)$.
14. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$.
15. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.
16. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$.
17. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$.
18. $y'' - 4y' + 8y = e^{x}\,(3\sin x + 5\cos x)$.

19. $y'' + 2y' = 6e^x\ (\sin x + \cos x).$

20. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x.$

21. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x.$

22. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x.$

23. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x.$

24. $y'' - 4y' + 8y = e^x\ (2\sin x - \cos x).$

25. $y'' + 2y' = 3e^x\ (\sin x + \cos x).$

26. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x.$

27. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x.$

28. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x.$

29. $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x.$

30. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x.$

Завдання 10. Знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, що задовольняє задані початкові умови (задача Коші).

1. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
2. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
3. $y'' + y = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
4. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\cos x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
5. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
6. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x \sin^2 x}{\cos x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
7. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
8. $y'' - 5y' + 6y = e^{4x} \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
9. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x} \sin^2 x}{\cos x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
10. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$
11. $y'' + y' = e^x \cos e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

12. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}\sin^2 x}{\cos x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

13. $y'' + 4y' + 5y = \dfrac{e^{-2x}}{\cos x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

14. $y'' + 3y' + 2y = \cos e^{x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

15. $y'' + 4y' + 5y = \dfrac{e^{-2x}\sin^2 x}{\cos x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

16. $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

17. $y'' - 2y' = 4e^{4x}\cos e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

18. $y'' + 4y = \dfrac{4\sin^2 2x}{\cos 2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

19. $y'' - 4y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{\cos 2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

20. $y'' - 6y' + 8y = 4e^{6x}\cos e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

21. $y'' - 4y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}\sin^2 2x}{\cos 2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

22. $y'' + 4y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{\cos 2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

23. $y'' - 10y' + 24y = 4e^{8x}\cos e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

24. $y'' + 4y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}\sin^2 2x}{\cos 2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

25. $y'' - 8y' + 20y = \dfrac{4e^{4x}}{\cos 2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

26. $y'' + 2y' = 4e^{2x}\cos e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

27. $y'' - 8y' + 20y = \dfrac{4e^{4x}\sin^2 2x}{\cos 2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

28. $y'' + 8y' + 20y = \dfrac{4e^{-4x}}{\cos 2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

29. $y'' + 6y' + 8y = 4\cos e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

30. $y'' + 8y' + 20y = \dfrac{4e^{-4x}\sin^2 2x}{\cos 2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: уч. пособие. – 22-е изд., перераб. /Г.Н. Берман. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2005. – 432 с.
2. Герасимчук В.С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невласні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі. Навч. посіб. / Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. – К.: Книги України ЛТД, 2010. – 470 с. – ISBN 978-966-2331-05-9.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х частях / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. – М.: Высш. школа, 1980. – Ч. 2. – 365 с.
4. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ: Ігнатекс – Україна, 2011. - 648 с. – 500 пр. – ISBN 978-966-97049-3-1.
5. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. / Г.И. Запорожец. – М.: Высш. шк., 1966. – 460 с.
6. Івасишен С.Д. Диференціальні рівняння: методи та застосування: навч. посіб. / С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, П.П. Настасієв, І.І. Дрінь. – Чернівці: Чернівецький нац.. ун-т, 2010. – 288 с. – 300 пр. – ISBN 978-966-423-135-7.
7. Краснов М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям: учеб. пособие для втузов. / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко – М.: Высш. Шк., 1978. – 287 с.
8. Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: АСТ, Астрель, 2001. – 656 с. – 10000 экз. – ISBN 5-17004601-4.

9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. – СПб.: Мифрил. Гл.ред. физ. мат. лит., 1996. – Т. 1. – 416 с. – 6000 экз. – ISBN 5-86457-020-6.
10. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк. – К.: Вища шк., 1994. – 454 с.