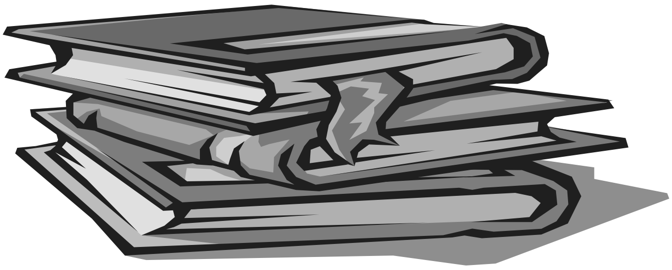
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ



Авдєєва Т. В., Качаєнко О. Б.

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів

для студентів ФБТ
денної форми навчання всіх напрямів підготовки

Київ
Політехніка
2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

Авдєєва Т. В., Качаєнко О. Б.

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Практикум

для студентів
Факультету біотехнології і біотехніки
денної та заочної форми навчання всіх напрямів підготовки

Рекомендовано Методичною радою ФМФ НТУУ «КПІ»

Київ
НТУУ «КПІ»
2016

УДК 514.912
ББК 22.16

Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків: Практикум / Т.В. Авдєєва, О.Б. Качаєнко **.-** К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 67 с. – Бібліогр.: с. 66.

Гриф надано методичною радою ФМФ НТУУ «КПІ»
(протокол № 4 від 27 квітня 2016 р.)

Навчальне видання

Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків

Практикум

Відповідальний редактор: **Вірченко Ніна Опанасівна,**
доктор фіз.-мат. наук, професор
кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
ФМФ НТУУ "КПІ",

Рецензенти: **Дудкін Микола Євгенович**
доктор фіз.–мат. наук, професор,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь,
ФМФ НТУУ "КПІ",
Дюженкова Ольга Юріївна,
канд. фіз.-мат. наук, доцент
кафедри вищої та прикладної математики
НУБіП України,
Іллічеві Людмила Максимівна,
канд. фіз.-мат. наук, старший викладач
Київської держ. акад. водн. транспорту
ім.. гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного

Автори: Авдєєва Т. В., Качаєнко О. Б.

В навчальному посібнику викладено короткі теоретичні відомості з звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків, даються приклади розв'язування задач з відповідних розділів. Наводяться варіанти індивідуальних завдань для студентів.

Призначений для студентів інженерних спеціальностей НТУУ " КПІ " денної та заочної форми навчання всіх напрямів підготовки, але може бути використаний також в інших університетах при вивчені курсу "Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків".

За редакцією укладачів
Надруковано з оригінал-макета замовника

Зміст

Вступ

При розв'язуванні багатьох різноманітних задач математики, фізики, механіки, хімії, біології, економіки використовують математичні моделі, в основі яких лежать диференціальні рівняння. Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, шукану функцію та похідні або диференціали різних порядків від цієї функції. При цьому рівняння може не містити незалежну змінну та шукану функцію, але обов'язково містить одну або декілька похідних (диференціалів) від шуканої функції.

Якщо шукана функція залежить від однієї змінної, то диференціальне рівняння називається звичайним, якщо ж від декількох змінних – рівняння з частинними похідними. Ми розглядаємо звичайні диференціальні рівняння.

В загальному випадку звичайне диференціальне рівняння n-го порядку можна записати у вигляді $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$, де функція F – відома функція від $n+2$ змінних, $n \in N$. Порядок старшої похідної визначає порядок диференціального рівняння. Наприклад, рівняння $y''' = 24x + 12$ є диференціальним рівнянням третього порядку, а рівняння $y'' - 2y^5 = \cos x$ – це диференціальне рівняння другого порядку. Розв'язком диференціального рівняння на множині X називається функція $y = y(x)$, яка на множині X визначена та неперервна разом зі своїми похідними до n-го порядку включно, причому при підстановці функції та всіх потрібних похідних у рівняння перетворює його у тотожність. Задача про знаходження розв'язку диференціального рівняння називається задачею інтегрування диференціального рівняння. При інтегруванні диференціального рівняння ми отримуємо сімью інтегральних кривих на площині. Загальний розв'язок диференціального рівняння $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ має вигляд $y = \varphi\left(x, C_1, C_2, C_3, ..., C_n\right)$, тобто залежить від x та n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$. Причому при відповідному наборі цих сталих ми одержуємо довільний розв'язок диференціального рівняння, який називається частинним розв'язком. Наша робота присвячена звичайним диференціальним рівнянням вищих порядків. Велика увага приділяється лінійним диференціальним рівнянням вищих порядків.

§ 1. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

Серед диференціальних рівнянь n-го порядку $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ можна виділити рівняння, порядок яких певними прийомами можна знизити. Відомо, що зниження порядку можливе лише у тих випадках, коли диференціальне рівняння є неповним, тобто не містить або незалежної змінної x, або шуканої функції $y(x)$, або молодших за n похідних (при цьому саму функцію $y(x)$ вважаємо похідною нульового порядку). Нас буде цікавити найскладніший серед цих варіантів – варіант коли диференціальне рівняння не містить x.

Диференціальне рівняння $F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ не містить явно незалежної змінної x та допускає зниження порядку на одиницю, якщо покласти $y' = p(y)$. Звернемо увагу, що аргументом функції p є функція y. Похідну другого порядку y'' отримаємо за правилом диференціювання складної функції

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = p \cdot \frac{dp}{dy} = p \cdot p'.$$

Старші похідні знаходимо за правилом диференціювання добутку та пам’ятаючи, що функція $p(y)$ є складною функцією. Наприклад,

$$y''' = y^{(3)} = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \left(p'' p + (p')^2\right) \cdot p.$$

Підставивши всі похідні в рівняння, отримаємо зниження порядку диференціального рівняння на одиницю, тобто $F\left(p, p', p'', ..., p^{(n-1)}\right) = 0$. Аналізуємо, до якого типу відноситься нове рівняння та вибираємо метод його розв’язування. Після отримання загального розв’язку диференціального рівняння першого порядку поступово (в зворотному порядку) повертаємося до функції $y(x)$. Зауважимо, що використання додаткових умов в процесі зниження порядку диференціального рівняння, суттєво полегшує знаходження розв'язку диференціального рівняння. Розглянемо випадок $F\left(y, y', y'',..., y^{(n)}\right) = 0$ більш детально на прикладах.

Приклад 1.1. Знайти розв'язок диференціального рівняння
$y''+18\sin y \cdot \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Розв'язування. Задане диференціальне рівняння відноситься до рівнянь вищих порядків, що допускають зниження порядку – не містить x.
Заміна $y' = p(y)$. Тоді $y'' = p' \cdot y' = p' \cdot p$. Підставляючи в початкове рівняння, отримаємо $p' p = -18\sin y \cdot \cos^3 y$. Це вже диференціальне рівняння першого порядку, змінні якого можна відокремити.

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = -18\sin y \cos^3 y \;\Rightarrow\; p \cdot dp = -18\sin y \cdot \cos^3 y \cdot dy.$$

$$\int pdp = -18\int \sin y \cdot \cos^3 y \cdot dy = 18\int \cos^3 y \cdot d(\cos y)$$

$$\frac{p^2}{2} = 18\frac{\cos^4 y}{4} + C \quad \text{або} \quad p^2 = 9\cos^4 y + 2C.$$

Згадуючи, що $y' = p(y)$, маємо $(y')^2 = 9\cos^4 y + 2C$.

Визначимо значення параметра C, використовуючи додаткові умови. Згідно умовам задачі $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. Маємо $(3)^2 = 9\cos^4 0 + 2C$. Звідки $C = 0$. Підставляючи значення C у рівняння, отримаємо $(y')^2 = 9\cos^4 y$. Добуваючи корінь квадратний з двох частин рівняння, отримаємо $y' = \pm 3\cos^2 y$. Це вже диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його: $\frac{dy}{dx} = \pm 3\cos^2 y$, або $\frac{dy}{\cos^2 y} = \pm 3dx$. Інтегруючи $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \pm 3\int dx$ обидві частини рівняння за відповідними змінними, отримаємо $\mathrm{tg}y = \pm 3x + C$. Згідно умові $y(0) = 0$, маємо $\mathrm{tg}0 = \pm 3 \cdot 0 + C$, тобто $C = 0$. Тоді $\mathrm{tg}y = \pm 3x$.

Відповідь. $\mathrm{tg}y = \pm 3x$.

Приклад 1.2. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' = 50\sin^3 y \cdot \cos y,\ y(1) = \frac{\pi}{2},\ y'(1) = 5.$$

Розв'язування. Задане диференціальне рівняння відноситься до рівнянь вищих порядків, що допускають зниження порядку, рівняння не містить x. Заміна $y' = p(y)$. Тоді $y'' = p' \cdot y' = p' \cdot p$. Підставляючи у рівняння $y'' = 50\sin^3 y \cdot \cos y$, отримаємо $p' p = 50\sin^3 y \cdot \cos y$. Це диференціальне рівняння першого порядку, змінні якого можна відокремити. Маємо

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = 50\sin^3 y \cdot \cos y \ \Rightarrow\ p \cdot dp = 50\sin^3 y \cdot \cos y \cdot dy.$$

$$\int pdp = 50\int \sin^3 y \cdot \cos y \cdot dy = 50\int \sin^3 y \cdot d(\sin y).$$

Інтегруючи, отримаємо $\frac{p^2}{2} = 50\frac{\sin^4 y}{4} + C \ \Rightarrow\ p^2 = 25\sin^4 y + 2C$, тобто

$$(y')^2 = 25\sin^4 y + 2C.$$

Визначимо значення C, використавши додаткові умови $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 5$:

$(5)^2 = 25\sin^4 \frac{\pi}{2} + 2C$. Звідки $C = 0$.

$$(y')^2 = 25\sin^4 y \ \Rightarrow\ y' = \pm 5\sin^2 y \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \pm 5\sin^2 y \ \Rightarrow\ \frac{dy}{\sin^2 y} = \pm 5dx \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int \frac{dy}{\sin^2 y} = \pm 5\int dx \ \Rightarrow\ -\mathrm{ctg}y = \pm 5x + C.$$

Згідно умові $y(1) = \frac{\pi}{2}$, маємо $-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2} = \pm 5 \cdot 1 + C$, тобто $C = \mp 5$.

Тоді $-\mathrm{ctg}y = \pm 5x \mp 5$.

Відповідь. $\mathrm{ctg}y = \pm 5(x - 1)$.

Приклад 1.3. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$y''\cdot y^3+9=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=-1$.

Розв'язування. Диференціальне рівняння $y''=-\dfrac{9}{y^3}$ відноситься до рівнянь вищих порядків, що допускають зниження порядку, рівняння не містить змінної x. Заміна $y'=p(y)$. Тоді $y''=p'\cdot y'=p'\cdot p$. Підставляючи в рівняння $y''\cdot y^3+9=0$, отримаємо $p'\,p=\dfrac{-9}{y^3}$. Це диференціальне рівняння першого порядку, змінні якого можна відокремити.

$$p\cdot\frac{dp}{dy}=\frac{-9}{y^3}\ \Rightarrow\ p\cdot dp=\frac{-9}{y^3}\cdot dy.$$

Про інтегрувавши обидві частини

$$\int pdp=-9\int\frac{dy}{y^3}=-9\int y^{-3}\cdot d(y),$$

отримаємо

$$\frac{p^2}{2}=\frac{9}{2y^2}+C\ \Rightarrow\ p^2=\frac{9}{y^2}+2C\ \Rightarrow\ (y')^2=\frac{9}{y^2}+2C.$$

Для визначення параметра C, використаємо додаткові умови, а саме $y(0)=3$, $y'(0)=-1$: $(-1)^2=\dfrac{9}{3^2}+2C$. Звідки $C=0$.

$$(y')^2=\frac{9}{y^2}\ \Rightarrow\ y'=\pm\frac{3}{y}\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\pm\frac{3}{y}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ ydy=\pm3dx\ \Rightarrow\ \int ydy=\pm3\int dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{y^2}{2}=\pm3x+C\ \text{ або }\ y^2=\pm6x+2C.$$

Згідно умові $y(0)=3$, маємо $9=\pm3\cdot0+C$, тобто $C=9$. Тоді $y^2=\pm6x+9$.

Відповідь. $y^2=\pm6x+9$.

Приклад 1.4. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''=50y^3$, $y(1)=1$, $y'(1)=5$.

Розв'язування. Дане диференціальне рівняння відноситься до рівнянь вищих порядків, що допускають зниження порядку, рівняння не містить x. Заміна $y'=p(y)$. Тоді $y''=p'\cdot y'=p'\cdot p$. Підставляючи в рівняння $y''=50y^3$, отримаємо $p'p=50y^3$. Це диференціальне рівняння першого порядку, змінні якого можна відокремити.

$$p\cdot\frac{dp}{dy}=50y^3 \Rightarrow p\cdot dp=50y^3\cdot dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int pdp=50\int y^3dy.$$

Після інтегрування, отримаємо

$$\frac{p^2}{2}=\frac{50y^4}{4}+C \Rightarrow p^2=25y^4+2C.$$

Згадуючи заміну, отримаємо $(y')^2=25y^4+2C$.

Визначимо значення параметра C, використавши додаткові умови $y(1)=1$, $y'(1)=5$: $(5)^2=25+2C$. Звідки $C=0$.

Тоді $(y')^2=25y^4 \Rightarrow y'=\pm5y^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\pm5y^2$.

Відокремлюючи змінні, отримаємо $\dfrac{dy}{y^2}=\pm5dx$.

Тоді $\displaystyle\int\frac{dy}{y^2}=\pm5\int dx \Rightarrow \frac{-1}{y}=\pm5x+C$ або $y=\dfrac{-1}{\pm5x+C}$.

Нам залишилося знайти значення параметра C.

Згідно умові $y(0)=1$, маємо $-1=\pm5\cdot1+C$, тобто $C=-6$ або $C=4$.

Тоді $y=\dfrac{-1}{5x-6}$ або $y=\dfrac{-1}{-5x+4}$.

Відповідь. $y=\dfrac{-1}{5x-6}$ або $y=\dfrac{-1}{-5x+4}$.

§ 2. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Серед диференціальних рівнянь вищих порядків найчастіше зустрічаються лінійні диференціальні рівняння.

Диференціальне рівняння

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

яке лінійне відносно невідомої функції y та всіх її похідних $y^{(k)}$ ($k = 1..n$) називається **лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку** (при $a_n(x) \neq 0$). Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння називається **лінійним однорідним диференціальним рівнянням** (ЛОДР). У випадку $f(x) \neq 0$ таке рівняння називають **лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням** (ЛНДР). Якщо всі функції $a_k(x)$ є константами, то задане диференціальне рівняння називають **з постійними коефіцієнтами**.

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами та спеціальною правою частиною, тобто

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

де $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_k(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x\right)$.

Однорідне диференціальне рівняння

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

називається **однорідним, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню**. Зрозуміло, що розв'язки лінійного неоднорідного та лінійного однорідного, що йому відповідає, різні.

Нехай $y_{одн}$– розв'язок однорідного рівняння, $y_{ч.н.}$– частинний розв'язок неоднорідного рівняння, тоді загальний розв'язок y лінійного неоднорідного рівняння можна представити у вигляді суми $y = y_{одн} + y_{ч.н.}$.

Справедлива більш загальна теорема

Теорема (про загальний розв'язок ЛНДР). Загальний розв'язок рівняння $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ з неперервними на множині X коефіцієнтами $a_i(x)$ $i \in \{1, \ldots, n\}$, і правою частиною $f(x)$ дорівнює сумі розв'язків однорідного рівняння, що відповідає цьому лінійному неоднорідному, та довільному частковому розв'язку заданого неоднорідного рівняння.

Якщо права частина ЛНДР є сумою неперервних функцій, тобто $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, та функції $y_{част}^{(k)}$ $(k = 1,2)$ є розв'язком рівняння

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_k(x),$$

то функція $y = y_{част}^{(1)} + y_{част}^{(2)}$ є розв'язком рівняння

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

Остання властивість називається **принципом суперпозиції розв'язків ЛНДР**.

Приклад 2.1. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y''' + 2y'' = 12x - 2 + 9e^x - 32\sin 2x$.

Розв'язування. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння третього порядку з постійними коефіцієнтами та спеціальною правою частиною (многочлен $f_1(x) = 12x - 2$, показникова функція $f_2(x) = 9e^x$ та тригонометрична функція $f_3(x) = -32\sin 2x$).

Для однорідного рівняння $y''' + 2y'' = 0$, що відповідає заданому неоднорідному, складаємо характеристичне рівняння $k^3 + 2k^2 = 0$. Останнє рівняння має два дійсні корені, причому одне має кратність два, а саме $k_1 = k_2 = 0$ та $k_3 = -2$. Загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо у вигляді $y_{одн} = e^{0x}(C_1 + C_2x) + C_3e^{-2x}$, тобто $y_{одн} = C_1 + C_2x + C_3e^{-2x}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати згідно принципу суперпозиції розв'язків $y = y_{одн} + y_{ч.н.}^{(1)} + y_{ч.н.}^{(2)} + y_{ч.н.}^{(3)}$.

Спочатку знайдемо частинний розв'язок рівняння $y'''+2y''=12x-2$. Оскільки права частина неоднорідного рівняння є многочленом першого степеня $f_1(x)=12x-2$, то подібний до нього вираз також буде многочленом степеня один $\widetilde{f}_1(x)=Ax+B$. Коренем подібності буде число $\lambda=0$, що співпадає з коренем однорідного рівняння, який має кратність 2 (тобто $r=2$). Оскільки $y_{част}=\widetilde{f}_1(x)\cdot x^r$, тому $y_{част}=(Ax+B)\cdot x^2$ або ж $y_{част}=Ax^3+Bx^2$.

Оскільки частинний розв'язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, то знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо все в неоднорідне рівняння. Маємо $y=Ax^3+Bx^2$. Тоді $y'=3Ax^2+2Bx$, $y''=6Ax+2B$, $y'''=6A$ та маємо $6A+2(6Ax+2B)=12x-2$. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x маємо систему $\begin{cases} x^1: & 12A=12, \\ x^0: & 6A+4B=-2, \end{cases}$ з якої отримаємо $A=1$, $B=-2$. Тобто $y_1=x^3-2x^2$.

Тепер знаходимо частинний розв'язок рівняння $y'''+2y''=9e^x$. Оскільки права частина неоднорідного рівняння є показниковою функцією $f_2(x)=9e^x$, то подібною до нього також буде показникова функція $\widetilde{f}_2(x)=Ae^x$. Коренем подібності буде число $\lambda=1$, що не співпадає з коренем однорідного рівняння, тобто $r=0$, тому $y_{част}=\widetilde{f}_2(x)\cdot x^r$ представляє собою $y_{част}=Ae^x\cdot x^0$ або $y_{част}=Ae^x$. Оскільки частинний розв'язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, то знову знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо все в неоднорідне рівняння. Маємо $y=Ae^x$. Тоді $y'=Ae^x$, $y''=Ae^x$, $y'''=Ae^x$ та маємо $Ae^x+2Ae^x=9e^x$. Отримаємо $A=3$. Тобто $y_2=3e^x$.

Нарешті знайдемо частинний розв'язок рівняння $y'''+2y''=-32\sin 2x$. Оскільки правою частиною неоднорідного рівняння є тригонометрична функція $f_3(x) = -32\sin 2x$, то подібною до нього буде тригонометричний вираз $\widetilde{f}_3(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$. Коренем подібності буде число $\lambda = 0 \pm 2i$, що не співпадає з коренем однорідного рівняння, тому $r = 0$. Тоді з виразу $y_{част} = \widetilde{f}_3(x)\cdot x^r$ враховуючи, що $x^0 = 1$ отримаємо $y_{част} = A\sin 2x + B\cos 2x$. Частинний розв'язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, тому знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо все в неоднорідне рівняння. Маємо $y = A\sin 2x + B\cos 2x$.

Тоді $\quad y' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$,

$$y'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x,$$

$$y''' = -8A\cos 2x + 8B\sin 2x.$$

Підставляючи знайдені похідні в рівняння $y''' + 2y'' = -32\sin 2x$, отримаємо

$$-8A\cos 2x + 8B\sin 2x + 2(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) = -32\sin 2x.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях, отримаємо систему $\begin{cases} \cos 2x: & -8A - 8B = 0, \\ \sin 2x: & 8B - 8A = -32, \end{cases}$ з якої знаходимо $A = 2$, $B = -2$. Тобто $y_3 = 2\sin 2x - 2\cos 2x$.

Згідно принципу суперпозиції розв'язків, запишемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{част} = x^3 - 2x^2 + 3e^x + 2\sin 2x - 2\cos 2x$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння можна записати у вигляді

$$y = y_{одн} + y_{част} = \left(C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x}\right) + \left(x - 2 + 3e^x + 2\sin 2x - 2\cos 2x\right).$$

Відповідь. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} + x - 2 + 3e^x + 2\sin 2x - 2\cos 2x$.

Приклад 2.2. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y''' + 2y'' + y' = 1 + 100\sin 2x - 150\cos 3x$.

Розв'язування. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння третього порядку з постійними коефіцієнтами та спеціальною правою частиною (многочлен нульового степеня $f_1(x)=1$ та тригонометричні функції різних аргументів $f_2(x)=100\sin 2x$, $f_3(x)=-150\cos 3x$).

Для однорідного рівняння $y'''+2y''+y'=0$, що відповідає заданому неоднорідному, складаємо характеристичне рівняння $k^3+2k^2+k=0$. Рівняння $k(k+1)^2=0$ має два дійсні корені, причому одне має кратність два, а саме $k_1=k_2=-1$ та $k_3=0$. Загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо у вигляді $y_{одн}=e^{-x}(C_1+C_2x)+C_3e^{0x}$, тобто $y_{одн}=(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати згідно принципу суперпозиції розв'язків $y=y_{одн}+y^{(1)}_{ч.н.}+y^{(2)}_{ч.н.}+y^{(3)}_{ч.н.}$.

Спочатку знайдемо частинний розв'язок рівняння $y'''+2y''+y'=1$. Оскільки права частина неоднорідного рівняння є многочленом нульового степеня $f_1(x)=1$, то подібний до нього вираз буде многочленом також нульового степеня один $\widetilde{f}_1(x)=A$. Коренем подібності буде число $\lambda=0$, що співпадає з коренем характеристичного рівняння, який має кратність 1 (тобто $r=1$). Оскільки $y_{част}=\widetilde{f}_1(x)\cdot x^r$, тому $y_{част}=A\cdot x$.

Оскільки частинний розв'язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, то знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо все в неоднорідне рівняння. Маємо $y=Ax$. Тоді $y'=A$, $y''=0$, $y'''=0$ та маємо $0+2\cdot 0+A=1$. Порівнюючи коефіцієнти, отримаємо $A=1$. Тобто $y_1=1x$.

Тепер знаходимо частинний розв'язок рівняння $y'''+2y''+y'=100\sin 2x$. Оскільки права частина неоднорідного рівняння є тригонометричною функцією $f_2(x)=100\sin 2x$, то подібною до неї також буде тригонометрична функція $\widetilde{f}_2(x)=A\sin 2x+B\cos 2x$. Коренем подібності буде число $\lambda=0\pm 2i$, що не співпадає з коренем характеристичного рівняння, тобто $r=0$, тому з $y_{част}=\widetilde{f}_2(x)\cdot x^r$ маємо

$y_{част} = \left(A\sin 2x + B\cos 2x\right)\cdot x^0$ або $y_{част} = A\sin 2x + B\cos 2x$. Оскільки частинний розв'язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, то знову знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо їх в неоднорідне рівняння. Маємо $y = A\sin 2x + B\cos 2x$. Тоді $y' = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$, $y'' = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$, $y''' = -8A\cos 2x + 8B\sin 2x$ та маємо

$$-8A\cos 2x + 8B\sin 2x + 2\left(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x\right) + 2A\cos 2x - 2B\sin 2x = \\ = 100\sin 2x.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях, отримаємо систему $\begin{cases} \cos 2x: & -8A - 8B + 2A = 0, \\ \sin 2x: & 8B - 8A - 2B = 100, \end{cases}$ з якої знаходимо $A = -8$, $B = 6$. Тобто $y_2 = 6\sin 2x - 8\cos 2x$.

Нарешті знайдемо частинний розв'язок рівняння $y''' + 2y'' + y' = -150\cos 3x$. Оскільки правою частиною неоднорідного рівняння є тригонометрична функція $f_3(x) = -150\cos 3x$, то подібною до неї буде тригонометрична функція $\widetilde{f}_3(x) = A\sin 3x + B\cos 3x$. Коренем подібності буде число $\lambda = 0 \pm 3i$, що не співпадає з коренем характеристичного рівняння, тому $r = 0$. Тоді з виразу $y_{част} = \widetilde{f}_3(x)\cdot x^r$ враховуючи, що $x^0 = 1$ отримаємо $y_{част} = A\sin 3x + B\cos 3x$. Частинний розв'язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, тому знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо їх в неоднорідне рівняння. Маємо $y_3 = A\sin 3x + B\cos 3x$. Тоді $y' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x$,

$$y'' = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x,$$

$$y''' = -27A\cos 3x + 27B\sin 3x.$$

Підставляючи знайдені похідні в рівняння $y''' + 2y'' + y' = -150\cos 3x$, отримаємо

$$-27A\cos 3x + 27B\sin 3x + 2\left(-9A\sin 3x - 9B\cos 3x\right) + \\ + 3A\cos 3x - 3B\sin 3x = -150\cos 2x.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях, отримаємо систему $\begin{cases} \cos 2x: \quad -27A - 18B + 3A = -150, \\ \sin 2x: \quad 27B - 18A + 3B = 0, \end{cases}$ з якої знаходимо $A = 4$, $B = 3$. Тобто $y_3 = 4\sin 3x + 3\cos 3x$.

Згідно принципу суперпозиції розв'язків, запишемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{част} = 4x + 3\sin 2x - 4\cos 2x + 4\sin 3x + 3\cos 3x.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння можна записати у вигляді $y = y_{одн} + y_{част}$, тобто

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + C_3 + (4x + 3\sin 2x - 4\cos 2x + 4\sin 3x + 3\cos 3x).$$

Відповідь.

$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + C_3 + (4x + 3\sin 2x - 4\cos 2x + 4\sin 3x + 3\cos 3x).$

Приклад 2.3. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y''' + 2y'' = x^2 + 3 + 9\mathrm{ch}3x$.

Розв'язування. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння третього порядку з постійними коефіцієнтами та спеціальною правою частиною (многочлен $f_1(x) = x^2 + 3$ та гіперболічна функція $f_2(x) = 9\mathrm{ch}3x$).

Для однорідного рівняння $y''' + 2y'' = 0$, що відповідає заданому неоднорідному, складаємо характеристичне рівняння $k^3 + 2k^2 = 0$. Останнє рівняння має два дійсні корені, причому одне має кратність два, а саме $k_1 = k_2 = 0$ та $k_3 = -2$. Загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо у вигляді $y_{одн} = e^{0x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{-2x}$, тобто $y_{одн} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x}$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати згідно принципу суперпозиції розв'язків $y = y_{одн} + y_{ч.н.}^{(1)} + y_{ч.н.}^{(2)}$.

Спочатку знайдемо частинний розв'язок рівняння $y''' + 2y'' = x^2 + 3$. Оскільки права частина неоднорідного рівняння є многочленом другого степеня $f_1(x)=x^2+3$, то подібний до нього вираз також буде многочленом другого степеня $\widetilde{f}_1(x)=Ax^2+Bx+C$. Коренем подібності буде число $\lambda=0$, що співпадає з коренем характеристичного рівняння, який має кратність 2 (тобто $r=2$). Оскільки $y_{част}=\widetilde{f}_1(x)\cdot x^r$, тому $y_{част}=\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot x^2$ або $y_{част}=Ax^4+Bx^3+Cx^2$.

Оскільки частинний розв'язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, то знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо їх у неоднорідне рівняння. Маємо $y=Ax^4+Bx^3+Cx^2$. Тоді

$$y'=4Ax^3+3Bx^2+2Cx,$$

$$y''=12Ax^2+6Bx+2C,$$

$$y'''=24Ax+6B$$

та отримаємо $24Ax+6B+2\left(12Ax^2+6Bx+2C\right)=x^2+3$. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x маємо систему

$$\begin{cases} x^2: & 24A=1, \\ x^1: & 24A+12B=0, \\ x^0: & 6B+4C=3, \end{cases} \text{ з якої отримаємо } \begin{cases} A=\dfrac{1}{24}, \\ B=\dfrac{-1}{12}, \\ C=\dfrac{13}{24}. \end{cases}$$

Тобто $y_1=\dfrac{1}{24}x^4-\dfrac{1}{12}x^3+\dfrac{13}{24}x^2=\dfrac{1}{24}\left(x^4-2x^3+13x^2\right)$.

Тепер знаходимо частинний розв'язок рівняння $y'''+2y''=9\operatorname{ch}3x$. Оскільки права частина неоднорідного рівняння є гіперболічною функцією $f_2(x)=9\operatorname{ch}3x$, то подібною до неї також буде гіперболічна функція $\widetilde{f}_2(x)=A\operatorname{ch}3x+B\operatorname{sh}3x$. Оскільки $\operatorname{ch}3x=\dfrac{1}{2}\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)$, то коренем подібності будуть числа $\lambda=\pm3$, які не співпадають з жодним коренем характеристичного рівняння, тобто $r=0$, тому $y_{част}=\widetilde{f}_2(x)\cdot x^r$ і тоді $y_{част}=\left(A\operatorname{ch}3x+B\operatorname{sh}3x\right)\cdot x^0$ або $y_{част}=A\operatorname{ch}3x+B\operatorname{sh}3x$. Оскільки частинний розв'язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, то знову знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо їх в неоднорідне рівняння. Маємо $y = A\mathrm{ch}3x + B\mathrm{sh}3x$. Тоді

$$y' = 3A\mathrm{sh}3x + 3B\mathrm{ch}3x,$$

$$y'' = 9A\mathrm{ch}3x + 9B\mathrm{sh}3x,$$

$$y''' = 27A\mathrm{sh}3x + 27B\mathrm{ch}3x$$

та отримаємо $27A\mathrm{sh}3x + 27B\mathrm{ch}3x + 2(9A\mathrm{ch}3x + 9B\mathrm{sh}3x) = 9\mathrm{ch}3x$.

Порівнюючи коефіцієнти при однакових гіперболічних функціях, отримаємо систему $\begin{cases} \mathrm{ch}3x: & 27B + 18A = 9, \\ \mathrm{sh}3x: & 27A + 18B = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B + 2A = 1, \\ 3A + 2B = 0, \end{cases}$ з якої знаходимо $A = \frac{-2}{7}$, $B = \frac{3}{7}$. Тобто $y_2 = \frac{-2}{7}\mathrm{ch}3x + \frac{3}{7}\mathrm{sh}3x = \frac{1}{7}(3\mathrm{sh}3x - 2\mathrm{ch}3x)$.

Згідно принципу суперпозиції розв'язків, запишемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{част} = \frac{1}{24}\left(x^4 - 2x^3 + 13x^2\right) + \frac{1}{7}(3\mathrm{sh}3x - 2\mathrm{ch}3x).$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння можна записати у вигляді $y = y_{одн} + y_{част}$, тобто

$$y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x}\right) + \left(\frac{1}{24}\left(x^4 - 2x^3 + 13x^2\right) + \frac{1}{7}(3\mathrm{sh}3x - 2\mathrm{ch}3x)\right).$$

Відповідь. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{24}\left(x^4 - 2x^3 + 13x^2\right) + \frac{1}{7}(3\mathrm{sh}3x - 2\mathrm{ch}3x)$.

Приклад 2.4. Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y''' - y'' = 3x + 2\mathrm{sh}^2 x$.

Розв'язування. Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння третього порядку з постійними коефіцієнтами та спеціальною правою частиною. Відразу зауважимо, що $f(x) = 3x + 2\mathrm{sh}^2 x = 3x + (1 - \mathrm{ch}2x)$, тому в неоднорідності маємо многочлен $f_1(x)=3x+1$ та гіперболічну функцію $f_2(x)=-\mathrm{ch}2x$.

Для однорідного рівняння $y'''-y''=0$, що відповідає заданому неоднорідному, складаємо характеристичне рівняння $k^3-k^2=0$. Останнє рівняння має два дійсні корені, причому одне має кратність два, а саме $k_1=k_2=0$ та $k_3=1$. Загальний розв'язок однорідного рівняння запишемо у вигляді $y_{одн}=e^{0x}(C_1+C_2x)+C_3e^x$, тобто $y_{одн}=C_1+C_2x+C_3e^x$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати згідно принципу суперпозиції розв'язків $y=y_{одн}+y_{ч.н.}^{(1)}+y_{ч.н.}^{(2)}$.

Спочатку знайдемо частинний розв'язок рівняння $y'''-y''=3x+1$. Оскільки права частина неоднорідного рівняння є многочленом першого степеня $f_1(x)=3x+1$, то подібний до нього вираз також буде многочленом степеня один $\widetilde{f}_1(x)=Ax+B$. Коренем подібності буде число $\lambda=0$, що співпадає з коренем характеристичного рівняння, який має кратність 2 (тобто $r=2$). Оскільки $y_{част}=\widetilde{f}_1(x)\cdot x^r$, тому $y_{част}=(Ax+B)\cdot x^2$ або ж $y_{част}=Ax^3+Bx^2$.

Оскільки частинний розв'язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, то знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо їх в неоднорідне рівняння. Маємо $y=Ax^3+Bx^2$. Тоді $y'=3Ax^2+2Bx$, $y''=6Ax+2B$, $y'''=6A$ та маємо $6A-(6Ax+2B)=3x+1$. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x маємо систему $\begin{cases} x^1: & -6A=3, \\ x^0: & 6A-2B=1, \end{cases}$ з якої отримаємо $A=\frac{-1}{2}$, $B=-2$. Тобто $y_1=\frac{-1}{2}x^3-2x^2$.

Тепер знаходимо частинний розв'язок рівняння $y'''-y''=-\mathrm{ch}2x$. Оскільки права частина неоднорідного рівняння є гіперболічною функцією $f_2(x)=-\mathrm{ch}2x$, то подібною до неї також буде гіперболічна функція

$\widetilde{f}_2(x) = A\text{ch}2x + B\text{sh}2x$. Оскільки $ch2x = \frac{1}{2}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$, то коренем подібності будуть числа $\lambda = \pm 2$, які не співпадають з коренем характеристичного рівняння, тобто $r = 0$, тому $y_{част} = \widetilde{f}_2(x) \cdot x^r$ і тоді $y_{част} = (A\text{ch}2x + B\text{sh}2x) \cdot x^0$ або $y_{част} = A\text{ch}2x + B\text{sh}2x$. Оскільки частинний розв'язок повинен задовольняти неоднорідне рівняння, то знову знаходимо всі потрібні нам похідні та підставляємо їх в неоднорідне рівняння. Маємо $y = A\text{ch}2x + B\text{sh}2x$. Тоді $y' = 2A\text{sh}2x + 2B\text{ch}2x$,

$$y'' = 4A\text{ch}2x + 4B\text{sh}2x,$$

$$y''' = 8A\text{sh}2x + 8B\text{ch}2x,$$

та отримаємо $8A\text{sh}2x + 8B\text{ch}2x - (4A\text{ch}2x + 4B\text{sh}2x) = -\text{ch}2x$.

Порівнюючи коефіцієнти при однакових гіперболічних функціях, отримаємо систему $\begin{cases} \text{ch}2x: & 8B - 4A = -1, \\ \text{sh}2x: & 8A - 4B = 0, \end{cases}$ з якої знаходимо $A = \frac{-1}{12}$, $B = 2A = \frac{-1}{6}$. Тобто $y_2 = \frac{-1}{12}\text{ch}2x + \frac{-1}{6}\text{sh}2x$.

Згідно принципу суперпозиції розв'язків, запишемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{част} = \frac{-1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{-1}{12}\text{ch}2x + \frac{-1}{6}\text{sh}2x$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння можна записати у вигляді $y = y_{одн} + y_{част} = \left(C_1 + C_2 x + C_3 e^x\right) - \frac{1}{2}\left(x^3 + 4x^2\right) - \frac{1}{12}(\text{ch}2x + 2\text{sh}2x)$.

Відповідь. $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 e^x\right) - \frac{1}{2}\left(x^3 + 4x^2\right) - \frac{1}{12}(\text{ch}2x + 2\text{sh}2x)$.

§ 3. Знаходження диференціального рівняння за відомою фундаментальною системою розв'язків

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку з функціональними коефіцієнтами $y''+a(x)y'+b(x)y=0$, де функції $a(x)$, $b(x)$– неперервні функції на множині X. Це саме рівняння можна переписати у операторному вигляді $L(y)=0$ через диференціальний оператор L, який має такі властивості:

1. $L(C\cdot y)=C\cdot L(y)$ (постійний множник можна виносити за знак оператора),
2. $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)$ (диференціальний оператор від суми двох неперервно-диференційованих функцій дорівнює сумі диференціальних операторів від цих функцій),
3. властивість лінійності $L(C_1y_1+C_2y_2)=C_1\cdot L(y_1)+C_2\cdot L(y_2)$.

Справедлива теорема:

Теорема 3.1. Якщо функції y_1 та y_2 є розв'язками одного диференціального рівняння $y''+a(x)y'+b(x)y=0$, то лінійна комбінація $y=C_1y_1+C_2y_2$ цих розв'язків також є розв'язком цього рівняння.

Зауважимо, що для того, щоб функція $y=C_1y_1+C_2y_2$ давала загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y''+a(x)y'+b(x)y=0$, необхідно щоб частинні розв'язки y_1 та y_2 були лінійно незалежними на множині X.

Найпростіше з'ясувати лінійну незалежність функцій y_1 та y_2 можна за допомогою визначника Вронського (вранцкіана) $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Справедливі такі теореми:

Теорема 3.2. Якщо функції y_1, y_2 лінійно залежні на множині X, то визначник Вронського для цієї системи тотожно дорівнює нулю на множині X.

Теорема 3.3. Якщо лінійно незалежні функції y_1, y_2 є розв'язками лінійного однорідного рівняння $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ з неперервними на множині X функціями $a(x)$, $b(x)$, то їхній визначник Вронського відмінний від нуля на всій множині X.

Вище розглянуту теорію можна легко узагальнити на випадок лінійного однорідного рівняння n-го порядку. Визначник Вронського у випадку n функцій y_1, $y_2,\ldots,y_m$ буде розмірності n:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

де всі функції y_i визначені на множині X та мають неперервні похідні до $(n-1)$-го порядку включно.

Довільна система n лінійно незалежних частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку з неперервними на множині X функціональними коефіцієнтами називається **фундаментальною системою розв'язків**. Справедлива така теорема:

Теорема 3.4. Якщо функції $y_1,...,y_n$ утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку з неперервними на множині X функціональними коефіцієнтами, то загальний розв'язок цього рівняння запишеться у вигляді $y_{одн}=C_1y_1+...+C_ny_n$, де $C_1,...,C_n$ – довільні сталі.

Розглянемо застосування цієї теорії на прикладах.

Приклад 3.1. Відомо, що при $x\neq 0$ функції $y_1=\dfrac{1}{x}$ та $y_2=x^6$ є частинними розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння з функціональними коефіцієнтами. Переконатися, що ці розв'язки утворюють фундаментальну систему та вказати один з виглядів можливого диференціального рівняння.

Розв'язування. Запишемо визначник Вронського даної системи розв'язків. Якщо визначник Вронського скрізь в області X відмінний від нуля, то дані функції лінійно незалежні, тобто будуть утворювати фундаментальну систему розв'язків.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \Rightarrow W = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x^6 \\ \frac{-1}{x^2} & 6x^5 \end{vmatrix} = 6x^4 - \left(-x^4\right) = 7x^4 \neq 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Розв'яжемо задачу про відновлення диференціального рівняння

$$y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = 0$$

за відомою його фундаментальною системою розв'язків. Нехай задано лінійно незалежну систему функцій y_1, y_2.

І спосіб. Функція y_1 є частинним розв'язком, тому задовольняє заданому диференціальному рівнянню. Одночасно, функція y_2 є частинним розв'язком, тому також задовольняє цьому диференціальному рівнянню. Отримаємо систему $\begin{cases} y_1'' + a(x)\cdot y_1' + b(x)\cdot y_1 = 0, \\ y_2'' + a(x)\cdot y_2' + b(x)\cdot y_2 = 0. \end{cases}$ Знаходимо всі потрібні похідні $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_1' = \frac{-1}{x^2}$, $y_1'' = \frac{2}{x^3}$,

$y_2 = x^6$, $y_2' = 6x^5$, $y_2'' = 30x^4$,

та підставляємо в останню систему: $\begin{cases} \frac{2}{x^3} + a(x)\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right) + b(x)\cdot\frac{1}{x} = 0, \\ 30x^4 + a(x)\cdot 6x^5 + b(x)\cdot x^6 = 0. \end{cases}$

Ця система є лінійною відносно невідомих функцій $a(x)$ та $b(x)$. Для її розв'язування використаємо метод Крамера.

§3. Знаходження диференціального рівняння за відомою фундаментальною системою розв'язків

Розширена матриця системи набуває вигляду $\left(\begin{array}{cc|c} a(x) & b(x) & \\ \frac{-1}{x^2} & \frac{1}{x} & \frac{-2}{x^3} \\ 6x^5 & x^6 & -30x^4 \end{array}\right)$.

Обчислюємо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{-1}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 6x^5 & x^6 \end{vmatrix} = -x^4 - 6x^4 = -7x^4,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{-2}{x^3} & \frac{1}{x} \\ -30x^4 & x^6 \end{vmatrix} = -2x^3 + 30x^3 = 28x^3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{-1}{x^2} & \frac{-2}{x^3} \\ 6x^5 & -30x^4 \end{vmatrix} = 30x^2 + 12x^2 = 42x^2.$$

Тепер запишімо розв'язок системи:

$$a(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{28x^3}{-7x^4} = \frac{-4}{x},$$

$$b(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{42x^2}{-7x^4} = \frac{-6}{x^2}.$$

Підставляючи знайдені функції у рівняння $y'' + a(x)\cdot y' + b(x)\cdot y = 0$,

отримаємо $y'' - \frac{4}{x}\cdot y' - \frac{6}{x^2}\cdot y = 0$.

II спосіб. Система функцій y_1, y_2 є фундаментальною системою розв'язків. Тоді загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де C_1, C_2 довільні сталі. Система функцій y_1, y_2, y є лінійно залежною. Тоді

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = x^6$, то $\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x^6 & y \\ \frac{-1}{x^2} & 6x^5 & y' \\ \frac{2}{x^3} & 30x^4 & y'' \end{vmatrix} = 0$, або $\frac{1}{x} \cdot x^4 \begin{vmatrix} 1 & x^2 & y \\ \frac{-1}{x} & 6x & y' \\ \frac{2}{x^2} & 30 & y'' \end{vmatrix} = 0$.

Якщо розкласти визначник за елементами третього стовпчика, то одержимо

$$x^3 \left(y \begin{vmatrix} \frac{-1}{x} & 6x \\ \frac{2}{x^2} & 30 \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ \frac{2}{x^2} & 30 \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ \frac{-1}{x} & 6x \end{vmatrix} \right) = 0.$$

Оскільки $x \neq 0$, то

$$y\left(\frac{-30}{x} - \frac{12}{x} \right) - y'(30-2) + y''(6x + x) = 0.$$

$7xy'' - 28y' - \frac{42}{x} y = 0$. Після скорочення на 7, отримаємо $xy'' - 4y' - \frac{6}{x} y = 0$,

тобто $x^2 y'' - 4xy' - 6y = 0$ або $y'' - \frac{4}{x} y' - \frac{6}{x^2} y = 0$.

Відповідь. Розв'язки утворюють фундаментальну систему.

$y'' - \frac{4}{x} y' - \frac{6}{x^2} y = 0$ – один з виглядів можливого диференціального рівняння.

Приклад 3.2. Відомо, що при $x \neq 0$, $x \neq \frac{-1}{2}$ функції $y_1 = \frac{1}{x}$ та $y_2 = e^{2x}$ є частинними розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння з функціональними коефіцієнтами. Переконатися, що ці розв'язки утворюють фундаментальну систему та вказати один з виглядів можливого диференціального рівняння.

Розв'язування. Запишемо визначник Вронського даної системи розв'язків. Якщо визначник Вронського скрізь в області X відмінний від нуля, то дані функції лінійно незалежні, тобто будуть утворювати фундаментальну систему розв'язків.

§3. Знаходження диференціального рівняння за відомою фундаментальною системою розв'язків

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \Rightarrow W=\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & e^{2x} \\ \frac{-1}{x^2} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{2e^{2x}}{x} - \left(-\frac{e^{2x}}{x^2}\right) = \frac{e^{2x}}{x^2}(2x+1) \neq 0 \text{ при}$$

$x \neq 0$, $x \neq \frac{-1}{2}$.

Отже, система функцій y_1, y_2 є фундаментальною системою розв'язків. Тоді загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння має вигляд $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де C_1, C_2 довільні сталі. Система функцій y_1, y_2, y є лінійно залежною. Тоді

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = e^{2x}$, тоді $\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & e^{2x} & y \\ \frac{-1}{x^2} & 2e^{2x} & y' \\ \frac{2}{x^3} & 4e^{2x} & y'' \end{vmatrix} = 0$, або $\frac{1}{x} \cdot e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ \frac{-1}{x} & 2 & y' \\ \frac{2}{x^2} & 4 & y'' \end{vmatrix} = 0$.

Розкладаючи визначник за елементами третього стовпчика, одержимо

$$\frac{e^{2x}}{x}\left(y\begin{vmatrix} \frac{-1}{x} & 2 \\ \frac{2}{x^2} & 4 \end{vmatrix} - y'\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{x^2} & 4 \end{vmatrix} + y''\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1}{x} & 2 \end{vmatrix} \right) = 0.$$

Оскільки $x \neq 0$, $e^x \neq 0$ то

$$y\left(\frac{-4}{x} - \frac{4}{x^2}\right) - y'\left(4 - \frac{2}{x^2}\right) + y''\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\left(\frac{-4x-4}{x^2}\right) - y'\left(\frac{4x^2-2}{x^2}\right) + y''\left(\frac{2x+1}{x}\right) = 0.$$

$$\left(\frac{2x+1}{x}\right)y'' - \left(\frac{4x^2-2}{x^2}\right)y' - 4\left(\frac{x+1}{x^2}\right)y = 0.$$

Після скорочення на $\frac{2x+1}{x}$, отримаємо $y''-\frac{4x^2-2}{x(2x+1)}y'-\frac{4(x+1)}{x(2x+1)}y=0$.

Відповідь. Розв'язки утворюють фундаментальну систему.

$y''-\frac{4x^2-2}{x(2x+1)}y'-\frac{4(x+1)}{x(2x+1)}y=0$ – один з виглядів можливого диференціального рівняння.

Приклад 3.3. Відомо, що при $x>0$ функції $y_1=\ln(x+1)$ та $y_2=(x+1)^4$ є частинними розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння з функціональними коефіцієнтами. Переконатися, що ці розв'язки утворюють фундаментальну систему та вказати один з виглядів можливого диференціального рівняння.

Розв'язування. Запишемо визначник Вронського даної системи розв'язків. Якщо визначник Вронського скрізь в області X відмінний від нуля, то дані функції лінійно незалежні, тобто будуть утворювати фундаментальну систему розв'язків.

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$W=\begin{vmatrix} \ln(x+1) & (x+1)^4 \\ \frac{1}{x+1} & 4(x+1)^3 \end{vmatrix}=4(x+1)^3\ln(x+1)-\frac{(x+1)^4}{(x+1)}=(x+1)^3(4\ln(x+1)-1)\neq 0$$

при $x>0$.

Розв'яжемо задачу про відновлення диференціального рівняння

$$y''+a(x)\cdot y'+b(x)\cdot y=0$$

за відомою його фундаментальною системою розв'язків. Функція y_1 є частинним розв'язком, тому задовольняє заданому диференціальному рівнянню. Одночасно, функція y_2 є частинним розв'язком, тому також задовольняє цьому диференціальному рівнянню. Отримаємо систему

$$\begin{cases} y_1''+a(x)\cdot y_1'+b(x)\cdot y_1=0, \\ y_2''+a(x)\cdot y_2'+b(x)\cdot y_2=0. \end{cases}$$

Знаходимо всі потрібні похідні

§3. Знаходження диференціального рівняння за відомою фундаментальною системою розв'язків

$$y_1 = \ln(x+1),\ y_1' = \frac{1}{x+1},\ y_1'' = \frac{-1}{(x+1)^2},$$

$$y_2 = (x+1)^4,\ y_2' = 4(x+1)^3,\ y_2'' = 12(x+1)^2,$$

та підставляємо в останню систему:

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{(x+1)^2} + a(x)\cdot\left(\dfrac{1}{x+1}\right) + b(x)\cdot\ln(x+1) = 0, \\ 12(x+1)^2 + a(x)\cdot 4(x+1)^3 + b(x)\cdot(x+1)^4 = 0. \end{cases}$$

Ця система є лінійною відносно невідомих функцій $a(x)$ та $b(x)$. Для її розв'язування використаємо метод Крамера.

Розширена матриця системи набуває вигляду

$$\left(\begin{array}{cc|c} a(x) & b(x) & \\ \dfrac{1}{x+1} & \ln(x+1) & \dfrac{1}{(x+1)^2} \\ 4(x+1)^3 & (x+1)^4 & -12(x+1)^2 \end{array}\right).$$

Обчислюємо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x+1} & \ln(x+1) \\ 4(x+1)^3 & (x+1)^4 \end{vmatrix} = (x+1)^3 - 4(x+1)^3\ln(x+1) = (x+1)^3(1-4\ln(x+1)) \neq 0$$

при $x > 0$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \ln(x+1) \\ -12(x+1)^2 & (x+1)^4 \end{vmatrix} = (x+1)^2 + 12(x+1)^2\ln(x+1) =$$

$$= (x+1)^2(1+12\ln(x+1)),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{(x+1)} & \dfrac{1}{(x+1)^2} \\ 4(x+1)^3 & -12(x+1)^2 \end{vmatrix} = -12(x+1) - 4(x+1) = -16(x+1).$$

Тепер запишімо розв'язок системи:

$$a(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(x+1)^2(1+12\ln(x+1))}{(x+1)^3(1-4\ln(x+1))} = \frac{1+12\ln(x+1)}{(x+1)(1-4\ln(x+1))},$$

$$b(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-16(x+1)}{(x+1)^3(1-4\ln(x+1))}=\frac{-16}{(x+1)^2(1-4\ln(x+1))}.$$

Підставляючи знайдені функції у рівняння $y''+a(x)\cdot y'+b(x)\cdot y=0$,

отримаємо $y''+\frac{1+12\ln(x+1)}{(x+1)(1-4\ln(x+1))}\cdot y'-\frac{16}{(x+1)^2(1-4\ln(x+1))}\cdot y=0$.

Відповідь. Розв'язки $y_1=\ln(x+1)$, $y_2=(x+1)^4$ утворюють фундаментальну систему. $y''+\frac{1+12\ln(x+1)}{(x+1)(1-4\ln(x+1))}\cdot y'-\frac{16}{(x+1)^2(1-4\ln(x+1))}\cdot y=0$ – один з виглядів можливого диференціального рівняння.

§ 4. Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа) для ЛНДР

Метод варіації довільних сталих є загальним методом знаходження загального розв'язку лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння n-го порядку

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

де всі $a_i(x)$ та $f(x) \neq 0$ неперервні функції на множині X.

Якщо підібрати частинний розв'язок неоднорідного рівняння складно, але знайдено $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, ($y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальна система розв'язків), то можна знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння **методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа)**.

Ідея методу полягає у тому, що невідомі сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ми варіюємо, тобто дивимося на них як на невідомі функції $C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x), \ldots, C_n = C_n(x)$ від змінної x. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння при цьому набуває вигляду

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n.$$

Зрозуміло, що цей розв'язок задовольняє неоднорідне рівняння. Виберемо тепер функції $C_i(x)$ так, щоб остання функція була розв'язком неоднорідного рівняння. Диференціюючи $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n$, одержимо

$$y' = (C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n) + (C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n')$$

(звернемо увагу, що в перших дужках зібрано доданки з похідною від функції $C_i(x)$, а в других – з похідною від функції $y_i(x)$). Оскільки вибір функції $C_i(x)$ в певному сенсі довільний, то накладемо умову, що вираз у перших дужках дорівнює нулю, тобто $C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0$. Тоді

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n'.$$

Диференціюючи другий раз, одержуємо

$$y''=\left(C_1'y_1'+C_2'y_2'+\ldots+C_n'y_n'\right)+\left(C_1y_1''+C_2y_2''+\ldots+C_ny_n''\right).$$

Знову приймаємо значення першої дужки за нуль, тобто покладаємо

$$C_1'y_1'+C_2'y_2'+\ldots+C_n'y_n'=0.$$

Тоді $y''=C_1y_1''+C_2y_2''+\ldots+C_ny_n''$.

Продовжуючи диференціювати до n – го порядку вибираємо функції $C_i(x)$ таким чином, щоб $C_1'y_1^{(k)}+C_2'y_2^{(k)}+\ldots+C_n'y_n^{(k)}=0$ та одержувати $y^{(k+1)}=C_1y_1^{(k)}+C_2y_2^{(k)}+\ldots+C_ny_n^{(k)}$. Нарешті

$$y^{(n)}=C_1y_1^{(n)}+C_2y_2^{(n)}+\ldots+C_ny_n^{(n)}+C_1'y_1^{(n-1)}+C_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}.$$

Підставляючи функцію y та всі знайдені похідні в неоднорідне рівняння, після групування відносно C_i, отримаємо

$$\begin{aligned}&C_1\left(y_1^{(n)}+a_{n-1}y_1^{(n-1)}+\ldots+a_1y_1'+a_0y_1\right)+\\&+C_2\left(y_2^{(n)}+a_{n-1}y_2^{(n-1)}+\ldots+a_1y_2'+a_0y_2\right)+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+C_n\left(y_n^{(n)}+a_{n-1}y_n^{(n-1)}+\ldots+a_1y_n'+a_0y_n\right)+\\&+C_1'y_1^{(n-1)}+C_{n-1}'y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x).\end{aligned}$$

Оскільки функції $y_i(x)$ є частинними розв'язками неоднорідного рівняння, то множники в дужках дорівнюють нулю. Тому ми можемо записати

$$C_1'y_1^{(n-1)}+C_{n-1}'y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x).$$

Таким чином шукані функції $C_i(x)$ повинні задовольняти такій системі умов:

$$\begin{cases}C_1'y_1+C_2'y_2+\ldots+C_n'y_n=0,\\C_1'y_1'+C_2'y_2'+\ldots+C_n'y_n'=0,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\C_1'y_1^{(n-1)}+C_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x).\end{cases}$$

Ця система є лінійною відносно C_i', неоднорідною ($f(x)\neq 0$). Оскільки визначником цієї системи є визначник Вронського

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

який для незалежної системи функції $y_1, y_2, ..., y_n$ (ці функції утворюють фундаментальну систему розв'язків) не дорівнює нулю. Отже, наша система має єдиний розв'язок відносно C_i'. Після розв'язування системи вибраним методом (метод Гаусса, метод Крамера, матричний метод, метод підстановки тощо) потрібно інтегруванням функції C_i' знайти невідомі функції $C_i(x) = \int C_i'(x)dx + C_i$, де C_i – невідомі сталі. На останок залишиться підставити знайдені функції $C_1(x),\ C_2(x), ..., C_n(x)$ у загальний розв'язок $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n$.

У випадку диференціального рівняння другого порядку $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ при $a_2(x) \neq 0$ та $f(x) \neq 0$, причому загальний розв'язок однорідного рівняння $y = C_1 y_1 + C_2 y_{2n}$, частинний розв'язок неоднорідного рівняння можемо записати у вигляді $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$. Виберемо тепер функції $C_i(x)$ так, щоб остання функція була розв'язком неоднорідного рівняння. Диференціюючи $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, одержимо $y' = (C_1' y_1 + C_2' y_2) + (C_1 y_1' + C_2 y_2')$ (в перших дужках зібрано доданки з похідною від функції $C_i(x)$, а в других – з похідною від функції $y_i(x)$). Оскільки вибір функції $C_i(x)$ в певному сенсі довільний, то накладемо умову, що вираз у перших дужках дорівнює нулю, тобто $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$. Тоді $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$. Диференціюючи другий раз, одержуємо $y'' = (C_1' y_1' + C_2' y_2') + (C_1 y_1'' + C_2 y_2'')$.

Підставляючи функцію y, знайдені похідні y' та y'' в неоднорідне рівняння, після групування відносно C_i, отримаємо

$$C_1\left(a_1 y_1' + a_0 y_1\right) + C_2\left(a_1 y_2' + a_0 y_2\right) +$$
$$+ C_1' y_1^{(n-1)} + C_{n-1}' y_2^{(n-1)} + ... + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Оскільки функції $y_i(x)$ є частинними розв'язками неоднорідного рівняння, то множники в дужках дорівнюють нулю. Тому ми можемо записати

$$C_1' y_1' + C_{n-1}' y_2' = f(x).$$

Таким чином шукані функції $C_i(x)$ повинні задовольняти системі:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

Ця система є лінійною відносно C_i', неоднорідною ($f(x) \neq 0$). Оскільки визначником цієї системи є визначник Вронського $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, який для незалежної системи функцій y_1, y_2 не дорівнює нулю (ці функції утворюють фундаментальну систему розв'язків). Отже, наша система має єдиний розв'язок відносно C_i'. Після розв'язування системи вибраним методом (метод Гаусса, метод формул Крамера, матричний метод, метод підстановки тощо) потрібно інтегруванням функції C_i' знайти невідомі функції $C_i(x) = \int C_i'(x)dx + C_i$, де C_i – невідомі сталі. На останок залишиться підставити знайдені функції $C_1(x), C_2(x)$ в загальний розв'язок $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$.

Проілюструємо метод варіації довільної сталої на прикладах.

Приклад 4.1. Знайти розв'язок задачі Коші $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$.

Розв'язування. Запишемо відповідне однорідне рівняння $y'' + 16y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 + 16 = 0$ має тільки комплексні корені $k = \pm 4i$. Отже, розв'язок однорідного рівняння $y_{одн} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$.

Проваріюємо довільні сталі. Тоді $y = C_1(x)\cos 4x + C_2(x)\sin 4x$, де

$$y_1 = \cos 4x, \ y_2 = \sin 4x.$$

Тоді $y_1' = -4\sin 4x$, $y_2' = 4\cos 4x$.

З неоднорідного рівняння маємо $f(x)=\dfrac{16}{\cos 4x}$.

Система $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$ набуває вигляду

$$\begin{cases} C_1'\cos 4x + C_2'\sin 4x = 0, \\ -4C_1'\sin 4x + 4C_2'\cos 4x = \dfrac{16}{\cos 4x} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} C_1' = -\dfrac{C_2'\sin 4x}{\cos 4x}, \\ 4C_2'\left(\dfrac{\sin^2 4x}{\cos 4x} + \cos 4x\right) = \dfrac{16}{\cos 4x}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо $\begin{cases} C_2' = 4, \\ C_1' = -4\dfrac{\sin 4x}{\cos 4x} \end{cases}$. Тоді зінтегрувавши функції $C_1(x), C_2(x)$, отримаємо $\begin{cases} C_2(x) = 4x + C_2, \\ C_1(x) = \ln|\cos 4x| + C_1 \end{cases}$, де C_1, C_2 – дійсні невідомі сталі. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишемо у вигляді $y = (\ln|\cos 4x| + C_1)\cos 4x + (4x + C_2)\sin 4x$.

Для знаходження невідомих C_1, C_2 використаємо умови $y(0)=3$, $y'(0)=-2$. Для цього спочатку знайдемо y':

$$y' = \frac{-4\sin 4x}{\cos 4x}\cos 4x + (\ln|\cos 4x| + C_1)(-4\sin 4x) + 4\sin 4x + (4x + C_2)4\cos 4x.$$

Отже, з умови $y(0)=3$ маємо $3 = (\ln|1| + C_1) + C_2 \cdot 0$, $C_1 = 3$.

З умови $y'(0)=-2$ отримаємо $y' = -2 = 4C_2 \Rightarrow C_2 = \dfrac{-1}{2}$.

Підставляючи значення C_1, C_2 у загальний розв'язок неоднорідного рівняння, отримаємо розв'язок задачі Коші

$$y = (\ln|\cos 4x| + 3)\cos 4x + \left(4x - \frac{1}{2}\right)\sin 4x.$$

Відповідь. $y = (\ln|\cos 4x| + 3)\cos 4x + \left(4x - \dfrac{1}{2}\right)\sin 4x$.

Приклад 4.2. Розв'язати задачу Коші $y''+4y=\frac{4}{\sin 2x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4$,

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$.

Розв'язування. Запишемо відповідне однорідне рівняння $y''+4y=0$.

Характеристичне рівняння $k^2+4=0$ має комплексні корені $k=\pm 2i$. Тому

$$y_{одн}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

Проварюємо довільні сталі. Тоді $y\ =C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x$, де

$$y_1=\cos 2x,\ y_2=\sin 2x.$$

Оскільки, $y_1'=-2\sin 2x$, $y_2'=2\cos 2x$ та $f(x)=\frac{4}{\sin 2x}$, то система

$\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2=0, \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f(x) \end{cases}$ набуває вигляду $\begin{cases} C_1'\cos 2x+C_2'\sin 2x=0, \\ -2C_1'\sin 2x+2C_2'\cos 2x=\frac{4}{\sin 2x}. \end{cases}$

Розв'язуючи систему $\begin{cases} C_1'=-\frac{C_2'\sin 2x}{\cos 2x}, \\ 2C_2'\left(\frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}+\cos 2x\right)=\frac{4}{\sin 2x}, \end{cases}$ отримаємо

$\begin{cases} C_1'=-2, \\ C_2'=2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}. \end{cases}$ Тоді зінтегрувавши функції $C_1(x), C_2(x)$, отримаємо

$\begin{cases} C_1(x)=-2x+C_1, \\ C_2(x)=\ln|\sin 2x|+C_2 \end{cases}$, де C_1, C_2- невідомі дійсні сталі. Загальний

розв'язок неоднорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y=(-2x+C_1)\cos 2x+(\ln|\sin 2x|+C_2)\sin 2x.$$

Для знаходження невідомих C_1, C_2 використаємо умови $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4$,

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$. Для цього знайдемо y':

$$y' = -2\cos 2x - \left(-2x + C_1\right)2\sin 2x + \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}\sin 2x + \left(\ln\left|\sin 2x\right| + C_2\right)2\cos 2x .$$

Отже, з $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4$, маємо $-4 = C_1 \cos\frac{\pi}{2} + \left(\ln|1| + C_2\right)\cdot 1$, тобто $C_2 = -4$.

З умови $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \Rightarrow 2 = -2\cos\frac{\pi}{2} - 2\left(-\frac{\pi}{2} + C_1\right)$, тобто $y' = \left(\frac{\pi}{2} - C_1\right)2 = 2$,

отримаємо $C_1 = \frac{\pi}{2} - 1$. Підставляючи значення C_1, C_2 у загальний розв'язок неоднорідного рівняння , отримаємо розв'язок задачі Коші

$$y = \left(-2x + \frac{\pi}{2} - 1\right)\cos 2x + \left(\ln\left|\sin 2x\right| - 4\right)\sin 2x .$$

Відповідь. $y = \left(-2x + \frac{\pi}{2} - 1\right)\cos 2x + \left(\ln\left|\sin 2x\right| - 4\right)\sin 2x$.

Приклад 4.3. Знайти розв'язок задачі Коші $y'' + 25y = 25\operatorname{ctg}5x$, $y\left(\frac{\pi}{10}\right) = 5$, $y'\left(\frac{\pi}{10}\right) = -5$.

Розв'язування. Запишемо відповідне однорідне рівняння $y'' + 25y = 0$. Характеристичне рівняння $k^2 + 25 = 0$ має тільки комплексні корені $k = \pm 5i$. Отже, розв'язок однорідного рівняння $y_{одн} = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x$.

Проварюємо довільні сталі. Тоді $y = C_1(x)\cos 5x + C_2(x)\sin 5x$, де

$$y_1 = \cos 5x,\ y_2 = \sin 5x .$$

Тоді $y_1' = -5\sin 5x$, $y_2' = 5\cos 5x$.

З неоднорідного рівняння маємо $f(x) = 25\operatorname{ctg}5x$.

Система $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$ набуває вигляду

$$\begin{cases} C_1'\cos 5x + C_2'\sin 5x = 0, \\ -5C_1'\sin 5x + 5C_2'\cos 5x = 25\operatorname{ctg}5x \end{cases} \text{ або } \begin{cases} C_1' = -\dfrac{C_2'\sin 5x}{\cos 5x}, \\ 5C_2'\left(\dfrac{\sin^2 5x}{\cos 5x} + \cos 5x\right) = 25\dfrac{\cos 5x}{\sin 5x} \end{cases}.$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо

$$C_2' = 5\frac{\cos^2 5x}{\sin 5x} = 5\frac{1-\sin^2 5x}{\sin 5x},\ C_1' = -\frac{5\cos^2 5x}{\sin 5x}\cdot\frac{\sin 5x}{\cos 5x} = -5\cos 5x .$$

Тоді зінтегрувавши функції $C_1(x), C_2(x)$, отримаємо

$$\begin{cases} C_1(x) = -\sin 5x + C_1 , \\ C_2(x) = 5\left(\frac{1}{5}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{5x}{2}\right| + \frac{1}{5}\cos 5x\right) + C_2 = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{5x}{2}\right| + \cos 5x + C_2 , \end{cases}$$

де C_1 , C_2 – невідомі дійсні сталі. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y = \left(C_1 - \sin 5x\right)\cos 5x + \left(\ln\left|\mathrm{tg}\frac{5x}{2}\right| + \cos 5x + C_2\right)\sin 5x .$$

Для знаходження невідомих C_1 , C_2 використаємо умови $y\left(\frac{\pi}{10}\right) = 5$, $y'\left(\frac{\pi}{10}\right) = -5$. Для цього знайдемо y':

$$y' = -5\cos 5x\cos 5x - 5\sin 5x\left(C_1 - \sin 5x\right) +$$

$$+\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{5x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{5x}{2}\right)}\cdot\frac{5}{2} - 5\sin 5x\right)\sin 5x + \left(\ln\left|\mathrm{tg}\frac{5x}{2}\right| + \cos 5x + C_2\right)5\cos 5x.$$

Отже, з $y\left(\frac{\pi}{10}\right) = 5$ маємо $5 = \left(C_1 - 1\right)\cdot 0 + \left(0 + 0 + C_2\right)\cdot 1,\ C_2 = 5$.

З умови $y'\left(\frac{\pi}{10}\right) = -5$ отримаємо $-5 = -5C_1 + 5 + 5 - 5$, тобто $C_1 = 2$.

Підставляючи в загальний розв'язок знайдені значення C_1, C_2, отримаємо розвязок задачі Коші (частинний розв'язок)

$$y = \left(2 - \sin 5x\right)\cos 5x + \left(\ln\left|\mathrm{tg}\frac{5x}{2}\right| + \cos 5x + 5\right)\sin 5x .$$

Відповідь. $y = \left(2 - \sin 5x\right)\cos 5x + \left(\ln\left|\mathrm{tg}\frac{5x}{2}\right| + \cos 5x + 5\right)\sin 5x$.

§ 5. Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного та неоднорідного рівняння за відомим частинним розв'язком

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку з функціональними коефіцієнтами $y''+a(x)y'+b(x)y=0$, де функції $a(x)$, $b(x)$– неперервні функції на множині X. Нехай функції y_1 та y_2 є розв'язками даного диференціального рівняння. Тоді

$$W(y_1, y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Визначник Вронського можна переписати через формулу Ліувілля $W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$, $\{x_0, x\} \subset X$, яка дозволяє знайти загальний розв'язок цього рівняння, знаючи один ненульовий частинний розв'язок.

Нехай y – довільний розв'язок рівняння $y''+a(x)y'+b(x)y=0$, відмінний від відомого частинного розв'язку y_1. Покладаючи $W(x_0)=C$, можемо записати $W=\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix}=Ce^{-\int a(x)dx}$. Тоді $y_1 \cdot y' - y \cdot y_1' = Ce^{-\int a(x)dx}$ або $\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)=\frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a(x)dx}$. Інтегруючи обидві частини, отримаємо загальний розв'язок $y=y_1\left(\int \frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a(x)dx}dx+C_1\right)$ рівняння $y''+a(x)y'+b(x)y=0$, де $\{C, C_1\} \subset R$.

Зауважимо, що $y=y_1\left(\int \frac{1}{y_1^2}Ce^{-\int a(x)dx}dx+C_1\right)$ часто називають формулою Абеля.

§ 5. Знаходження загального розв'язку лінійного однорідного рівняння за відомим частинним розв'язком

Приклад 5.1. Відомо, що при $x \neq 0$ функція $y_1 = x$ є частинним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння $y'' + \frac{3}{x} y' - \frac{3}{x^2} y = 0$. Знайти загальний розв'язок цього диференціального рівняння.

Розв'язування. Скористаємося формулою Абеля $y = y_1 \left(\int \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a(x)dx} dx + C_1 \right)$, де $a(x) = \frac{3}{x}$, $y_1 = x$. Тоді враховуючи $\int \frac{3dx}{x} = 3\ln|x|$, отримаємо

$$y = x\left(\int \frac{1}{x^2} Ce^{-3\ln|x|} dx + C_1 \right) = x\left(\int \frac{1}{x^2} C \frac{1}{x^3} dx + C_1 \right) = x\left(C \int \frac{1}{x^5} dx + C_1 \right) =$$

$$= x\left(C \frac{-1}{4x^4} + C_1 \right) = C_1 x + C_2 \frac{1}{x^3}, \text{ де } C_2 = -\frac{C}{4}.$$

Відповідь. $y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x^3}$.

Приклад 5.2. Відомо, що при $x \neq -3$ функція $y_1 = \frac{\sin x}{x+3}$ є частинним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння з функціональними коефіцієнтами $(x+3)y'' + 2y' + (x+3)y = 0$. Знайти загальний розв'язок цього диференціального рівняння.

Розв'язування. Перепишемо диференціальне рівняння у такому вигляді $y'' + \frac{2}{(x+3)} y' + y = 0$ та скористаємося формулою Абеля

$$y = y_1 \left(\int \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a(x)dx} dx + C_1 \right),$$

де $a(x) = \frac{2}{x+3}$, $y_1 = \frac{\sin x}{x+3}$.

Тоді враховуючи $\int \frac{2dx}{x+3} = 2\ln|x+3|$, отримаємо

$$y=\frac{\sin x}{x+3}\left(\int\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x+3}\right)^2}Ce^{-2\ln|x+3|}dx+C_1\right)=\frac{\sin x}{x+3}\left(\int\frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x+3}\right)^2}C\frac{1}{(x+3)^2}dx+C_1\right)=$$

$$=\frac{\sin x}{x+3}\left(C\int\frac{1}{\sin^2 x}dx+C_1\right)=\frac{\sin x}{x+3}\left(-Cctgx+C_1\right)=C_1\frac{\sin x}{x+3}+C_2\frac{\cos x}{x+3},$$

де $C_2=-C$.

Відповідь. $y=C_1\frac{\sin x}{x+3}+C_2\frac{\cos x}{x+3}$.

Приклад 5.3. Відомо, що функція $y_1=x$ є частинним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння з функціональними коефіцієнтами $(1+x^2)y''-2xy'+2y=0$. Знайти загальний розв'язок цього диференціального рівняння.

Розв'язування. Зробимо заміну $y=y_1z(x)$, тобто $y=xz$. Тоді $y'=z+xz'$, $y''=2z'+xz''$ і підставляючи в рівняння, дістанемо

$$(1+x^2)(2z'+xz'')-2x(z+xz')+2xz=0,$$

або після простих перетворень,

$$(x+x^3)z''+2z'=0.$$

Це рівняння не містить шуканої функції; отже поклавши $z'=p(x)$, знизимо порядок його на одиницю, тобто дістанемо лінійне рівняння першого порядку. Справді, якщо $z'=p$, $z''=p'=\frac{dp}{dx}$, і останнє рівняння набуває вигляду:

$$(x+x^3)p'+2p=0.$$

Знайдемо його розв'язок. Оскільки лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку одночасно являється диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, то розділяючи змінні, отримаємо

$$\frac{dp}{p}+\frac{2dx}{\left(x^3+x\right)}=0,$$

$$\int\frac{dp}{p}+\int\frac{2dx}{x\left(x^2+1\right)}=0,$$

$$\ln|p|+\int\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx=\ln|C_1|.$$

Розкладаємо підінтегральний дріб у суму елементарних дробів:

$$\frac{2}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow A\left(x^2+1\right)+\left(Bx+C\right)x=2,$$

$$\begin{array}{l|l} x=0 & A=2, \\ x^2 & A+B=0, \quad B=-2, \\ x & C=0. \end{array}$$

$$\ln|p|+\int\left(\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\ln|C_1|,$$

$$\ln|p|+2\ln|x|-\ln\left|x^2+1\right|=\ln|C_1|,$$

$$\ln|p|=-2\ln|x|+\ln\left|x^2+1\right|+\ln|C_1|,$$

$$\ln|p|=\ln\left|\frac{C_1\left(x^2+1\right)}{x^2}\right|,$$

$$p=C_1\frac{\left(x^2+1\right)}{x^2} \Rightarrow p=C_1\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Оскільки $p=z'$, то маємо

$$z'=C_1\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow z=C_1\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx+C_2 \Rightarrow z=C_1\left(x-\frac{1}{x}\right)+C_2.$$

Отже, $y=y_1z=x\left(C_1\left(x-\frac{1}{x}\right)+C_2\right)$ $y=C_1\left(x^2-x\right)+C_2x$.

Відповідь. $y=C_1\left(x^2-x\right)+C_2x$.

Зауваження 1. Якщо дане лінійне рівняння є рівнянням другого порядку і нам відомий один частинний його розв'язок, то для відшукання загального розв'язку краще скористатися формулою Абеля.

Зауваження 2. Для лінійних неоднорідних рівнянь (ЛНДР з функціональними коефіцієнтами) згідно теореми про загальний розв'язок маємо $y = y_{одн} + y_{ч.н.}$. Використовуючи метод Лагранжа (метод варіації довільної сталої) знаходимо загальний розв'язок для диференціального рівняння, а відповідно і частинний ($y_{ч.н.}$) розв'язок неоднорідного рівняння.

Приклад 5.4. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $x^3 y'' - 3x^2 y' = 12x + 8$, якщо відомо, що при $x \neq 0$ функція $y_1 = x^4$ є частинним розв'язком відповідного йому однорідного диференціального рівняння.

Розв'язування. Згідно теореми нам потрібно, щоб коефіцієнт біля другої похідної дорівнював 1, тому поділимо $x^3 y'' - 3x^2 y' = 12x + 8$ на x^3:

$$y'' - \frac{3}{x} y' = \frac{12x + 8}{x^3}$$

Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y'' - \frac{3}{x} y' = 0$. Скористаємося формулою $y = y_1 \left(\int \frac{1}{y_1^2} C e^{-\int a(x)dx} dx + C_1 \right)$, де $a(x) = \frac{-3}{x}$, $y_1 = x^4$. Тоді

враховуючи $\int \frac{-3dx}{x} = -3\ln|x|$, отримаємо

$a(x) = \frac{3}{x}$, $y_1 = x$. Тоді враховуючи $\int \frac{3dx}{x} = 3\ln|x|$, отримаємо

$$y = x^4 \left(\int \frac{1}{x^8} C e^{3\ln|x|} dx + C_1 \right) = x^4 \left(\int \frac{1}{x^8} C x^3 dx + C_1 \right) = x^4 \left(C \int \frac{1}{x^5} dx + C_1 \right) =$$

$$= x^4 \left(C \frac{-1}{4x^4} + C_1 \right) = C_2 + C_1 x^4, \text{ де } C_2 = -\frac{C}{4}.$$

Тепер знайдемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння використовуючи метод Лагранжа (метод варіації довільної сталої) Тоді розв'язок неоднорідного рівняння запишемо у вигляді $y = C_1(x)x^4 + C_2(x)$,

де $y_1 = x^4$, $y_2 = 1$.

Тоді $y_1' = 4x^3$, $y_2' = 0$.

З неоднорідного рівняння маємо $f(x) = \dfrac{12x+8}{x^3}$.

Система $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$ набуває вигляду

$$\begin{cases} C_1' x^4 + C_2' = 0, \\ 4C_1' x^3 + 0C_2' = \dfrac{12x+8}{x^3} \end{cases} \text{ або } \begin{cases} C_2' = -C_1' x^4, \\ 4C_1' x^3 = \dfrac{12x+8}{x^3}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо $\begin{cases} C_2' = -C_1' x^4, \\ C_1' = \dfrac{12x+8}{4x^6} \end{cases}$ або $\begin{cases} C_2' = -\dfrac{12x+8}{4x^6} x^4, \\ C_1' = \dfrac{3}{x^5} + \dfrac{2}{x^6}. \end{cases}$

Тоді зінтегрувавши рівняння системи $\begin{cases} C_2(x) = -\int \left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} \right) dx + \tilde{C}_2, \\ C_1(x) = \int \left(\dfrac{3}{x^5} + \dfrac{2}{x^6} \right) dx + \tilde{C}_1, \end{cases}$

отримаємо

$$\begin{cases} C_2(x) = -3\ln|x| + \dfrac{2}{x} + \tilde{C}_2, \\ C_1(x) = \dfrac{-3}{4x^4} - \dfrac{2}{5x^5} + \tilde{C}_1, \end{cases}$$

де $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ – дійсні невідомі сталі. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишемо у вигляді $y = \left(\dfrac{-3}{4x^4} - \dfrac{2}{5x^5} + \tilde{C}_1 \right) x^4 + \left(\dfrac{2}{x} - 3\ln|x| + \tilde{C}_2 \right)$ або

$$y = -\frac{3}{4} - \frac{2}{5x} + \tilde{C}_1 x^4 + \frac{2}{x} - 3\ln|x| + \tilde{C}_2 \text{ або } y = -\frac{3}{4} + \frac{8}{5x} + \tilde{C}_1 x^4 - 3\ln|x| + \tilde{C}_2.$$

Зробимо перевірку. Для цього знайдемо похідні

$$y' = \frac{-8}{5x^2} + 4\tilde{C}_1 x^3 - \frac{3}{x}, \; y'' = \frac{16}{5x^3} + 12\tilde{C}_1 x^2 + \frac{3}{x^2},$$

та підставимо їх у початкове рівняння $x^3 y'' - 3x^2 y' = 12x + 8$:

$$x^3\left(\frac{16}{5x^3} + 12\widetilde{C}_1 x^2 + \frac{3}{x^2}\right) - 3x^2\left(\frac{-8}{5x^2} + 4\widetilde{C}_1 x^3 - \frac{3}{x}\right) = 12x + 8,$$

$$\frac{16}{5} + 12\widetilde{C}_1 x^5 + 3x + \frac{24}{5} - 12\widetilde{C}_1 x^5 + 9x = 12x + 8,$$

$$12x + 8 = 12x + 8.$$

Отримали тотожність.

Відповідь. $y = -\frac{3}{4} + \frac{8}{5x} + \widetilde{C}_1 x^4 - 3\ln|x| + \widetilde{C}_2$.

Приклад 5.5. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $(x^2 + x)y'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}$, якщо відомо, що при $x \neq 0$ функція $y_1 = 2 + x$ є частинним розв'язком відповідного йому однорідного диференціального рівняння.

Розв'язування. Перепишемо наше диференціальне рівняння у вигляді

$$y'' + \frac{(x+2)}{x^2 + x}y' - \frac{1}{x^2 + x}y = \frac{x}{x^2 + x} + \frac{1}{x(x^2 + x)}.$$

Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y'' + \frac{(x+2)}{x^2 + x}y' - \frac{1}{x^2 + x}y = 0$.

Скористаємося формулою Абеля $y = y_1\left(\int \frac{1}{y_1^2} Ce^{-\int a(x)dx} dx + C_1\right)$, де

$a(x) = \frac{x+2}{x^2 + x}$, $y_1 = 2 + x$. Тоді враховуючи

$$\int a(x)dx = \int \frac{x+2}{x^2+x}dx = \int \frac{x+1}{x^2+x}dx + \int \frac{1}{x^2+x}dx = \ln|x| + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| = \ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|,$$

отримаємо $y = (2 + x)\left(\int \left(\frac{1}{2+x}\right)^2 Ce^{-\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|} dx + C_1\right)$.

Враховуючи, що $-\ln\frac{a}{b}=\ln\frac{b}{a},\quad e^{\ln f}=f$ отримаємо

$$y=(2+x)\left(\int\frac{1}{(2+x)^2}C\frac{x+1}{x^2}dx+C_1\right)=(2+x)\left(C\int\frac{x+1}{(2+x)^2x^2}dx+C_1\right).$$

Розкладемо підінтегральний дріб у суму елементарних дробів:

$$\frac{x+1}{(2+x)^2x^2}=\frac{A}{(2+x)^2}+\frac{B}{2+x}+\frac{F}{x^2}+\frac{D}{x}.$$

$$x+1=Ax^2+Bx^2(2+x)+F(2+x)^2+Dx(2+x)^2.$$

Нехай $x=-2$, тоді $-2+1=4A+0+0+0$ або $A=\frac{-1}{4}$.

Нехай тепер $x=0$, тоді $0+1=0+0+4F+0$ або $F=\frac{1}{4}$.

Для знаходження коефіцієнтів B та D, порівняємо коефіцієнти при однакових степенях x: $\begin{cases}x^3: & B+D=0,\\ x^1: & 4F+4D=1,\end{cases}$ із цієї системи отримаємо $\begin{cases}D=0,\\ B=0.\end{cases}$

Тобто $\frac{x+1}{(2+x)^2x^2}=\frac{-1/4}{(2+x)^2}+\frac{0}{2+x}+\frac{1/4}{x^2}+\frac{0}{x}=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(2+x)^2}+\frac{1}{x^2}\right).$

Тоді маємо

$$y=(2+x)\left(\frac{C}{4}\left(\int\frac{-1}{(2+x)^2}dx+\int\frac{1}{x^2}dx\right)+C_1\right)=(2+x)\left(\frac{C}{4}\left(\frac{1}{(2+x)}+\frac{-1}{x}\right)+C_1\right)=$$

$$=C_1(2+x)+\left(1-\frac{2+x}{x}\right)C_2=C_1(2+x)+C_2\frac{-1}{x},\ \text{де}\ C_2=\frac{C}{2}.$$

Тепер знайдемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом варіації довільної сталої.

Загальний розв'язок ЛНДР запишемо у вигляді

$$y=C_1(x)(2+x)+C_2(x)\frac{-1}{x},$$

де $C_1(x), C_2(x)$ – невідомі функції, $y_1 = 2 + x$, $y_2 = \frac{-1}{x}$.

Тоді $y_1' = 1$, $y_2' = \frac{1}{x^2}$.

З неоднорідного рівняння маємо $f(x) = \frac{x}{x^2 + x} + \frac{1}{x(x^2 + x)}$.

Система $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$ набуває вигляду

$$\begin{cases} C_1'(2 + x) + C_2' \cdot \frac{-1}{x} = 0, \\ C_1' 1 + C_2' \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2 + x} + \frac{1}{x(x^2 + x)}, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_2' = C_1' x(2 + x), \\ C_1' + C_1' \frac{x(2 + x)}{x^2} = \frac{x}{x^2 + x} + \frac{1}{x(x^2 + x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2' = C_1' x(2 + x), \\ C_1'\left(1 + \frac{2}{x} + 1\right) = \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + x)}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо $\begin{cases} C_1'(x) = \frac{(x^2 + 1)}{2x(x + 1)^2}, \\ C_2'(x) = C_1'(2x + x^2), \end{cases}$ або

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{(x^2 + 1)}{2x(x + 1)^2}, \\ C_2'(x) = \frac{(2x + x^2)(x^2 + 1)}{2x(x + 1)^2}, \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} C_1'(x) = \frac{(x + 1)^2 - 2x}{2x(x + 1)^2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{(x + 1)^2}, \\ C_2'(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x + 2}{2(x + 1)^2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{(x + 1)^2}. \end{cases}$$

Тоді зінтегрувавши рівняння системи

$$\begin{cases} C_1(x) = \int \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{(x + 1)^2} \right) dx + \widetilde{C}_1, \\ C_2(x) = \int \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{(x + 1)^2} \right) dx + \widetilde{C}_2, \end{cases}$$

отримаємо

$$\begin{cases} C_1(x) = \dfrac{1}{2}\left(\ln|x| + \dfrac{2}{1+x}\right) + \widetilde{C}_1\,, \\ C_2(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{x+1}\right) + \widetilde{C}_2\,, \end{cases}$$

де C_1, C_2 – дійсні невідомі сталі. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишемо у вигляді

$$y = \left(\frac{1}{2}\left(\ln|x| + \frac{2}{1+x}\right) + \widetilde{C}_1\right)(2+x) + \left(\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x+1}\right) + \widetilde{C}_2\right)\left(\frac{-1}{x}\right)$$

або $y = \dfrac{1}{2}(2+x)\ln|x| + 1 + \widetilde{C}_1\,(2+x) - \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\widetilde{C}_2}{x}$.

Зробимо перевірку.

$$y' = \frac{1}{2}\left(\ln x + \frac{2}{x} + 1\right) + \widetilde{C}_1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} + \frac{\widetilde{C}_2}{x^2}, \qquad y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) + \frac{2}{x^3} - \frac{2\widetilde{C}_2}{x^3}.$$

$$\left(x^2 + x\right)\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{\widetilde{C}_2}{x^3}\right) + (x+2)\left(\frac{1}{2}\left(\ln x + \frac{2}{x} + 1\right) + \widetilde{C}_1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} + \frac{\widetilde{C}_2}{x^2}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2}(2+x)\ln|x| + 1 + \widetilde{C}_1\,(2+x) - \frac{x}{4} + \frac{1}{x} - \frac{\widetilde{C}_2}{x}\right) =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{2\widetilde{C}_2}{x} - \frac{2\widetilde{C}_2}{x^2} + \frac{1}{2}(2+x)\ln|x| + \frac{(x+2)^2}{2x} + \widetilde{C}_1\,(2+x) - \frac{x+2}{4} -$$

$$-\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{\widetilde{C}_2}{x} + \frac{2\widetilde{C}_2}{x^2} - \frac{1}{2}(2+x)\ln|x| - 1 - \widetilde{C}_1\,(2+x) + \frac{x}{4} - \frac{1}{x} + \frac{\widetilde{C}_2}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

Отримали праву сторону рівняння.

Відповідь. $y = \dfrac{1}{2}(2+x)\ln|x| + 1 + \widetilde{C}_1\,(2+x) - \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\widetilde{C}_2}{x}$.

Індивідуальні завдання

Варіант 1.

1. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''+8\sin y\cdot\cos^3 y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-2$.
2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'''+4y'=8+39e^{3x}-16\sin 2x+8\cos 2x$.
3. Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x^3$, $y_2=x^2$ при $x\neq 0$.
4. Зінтегрувати рівняння $y''-\dfrac{2y}{\cos^2 x}=0$, якщо відомий один його частинний розв'язок $y_1=\operatorname{tg} x$.
5. Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші $y''+9y=\dfrac{9}{\cos 3x}$, $y(0)=7$, $y'(0)=3$.

Варіант 2.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $2y\cdot y''=3+(y')^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y^{IV}-y'''-2y''=48x+80\sin 2x+1170\sin 3x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=\sin 2x$ та $y_2=x$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $y''+\dfrac{5}{x}y'+\dfrac{3}{x^2}y=24x$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=\dfrac{1}{x^3}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші $y''+2y'+y=4e^{-x}\ln x$, $y(1)=0$, $y'(1)=0$.

Індивідуальні завдання

Варіант 3.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y \cdot y'' = y^2 + (y')^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y''' - y'' - 2y' = x^2 + 3e^{-x} + \cos x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1 = \frac{1}{x^3}$ та $y_2 = x^2$ при $x \neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{2}{x^2} y = 10x$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1 = \frac{1}{x^2}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$, $y(1) = -2$, $y'(1) = 1$.

Варіант 4.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y'' \cdot y^3 + 25 = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -2$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y''' + 6y'' + 9y' = 162x^3 + e^{-3x} + 338\sin 2x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1 = x^4$ та $y_2 = x^2$ при $x \neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $y'' - \frac{2}{x} y' - \frac{4}{x^2} y + 5x = 0$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1 = \frac{1}{x}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші $y'' + 9y = 9ctg3x$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3$.

Варіант 5.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y \cdot y'' = (y')^2$, $y(1) = -2$, $y'(1) = 2$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y^{IV} + 9y'' = 270x + 10e^x + 648\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right).$$

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1 = \frac{1}{x^3}$ та $y_2 = x$ при $x \neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$y'' - \frac{1}{x}y' - \frac{8}{x^2}y + 8 + 5x = 0$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1 = \frac{1}{x^2}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x},\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = -6,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3.$$

Варіант 6.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y'' = 18\sin^3 y \cdot \cos y$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = -3$.

2.Знайти загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y''' - y' = 2x + 32\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1 = x - \frac{1}{x}$ та $y_2 = x + \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$y'' - \frac{12}{x^2}y = 6x$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1 = \frac{1}{x^3}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші

$$y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$$

Варіант 7.

1.Знайти розв’язок диференціального рівняння $y''+128\sin y\cdot\cos^3 y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=8$.

2.Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння $y'''+4y''+4y'=128\text{ch}^2 x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв’язків $y_1=\frac{1}{x}$ та $y_2=\frac{1}{x^2}$ при $x\neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $y''+\frac{2}{x}y'-\frac{6}{x^2}y=6x$, якщо відомий один частинний розв’язок $y_1=\frac{1}{x^3}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв’язати задачу Коші $y''+4y=4ctg2x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$.

Варіант 8.

1.Знайти розв’язок диференціального рівняння $2y\cdot y''=(y')^2-8$, $y(0)=1$, $y'(0)=-6$.

2.Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння $y^{IV}-y''=2x+8\text{sh}x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв’язків $y_1=x^2$ та $y_2=\ln x$ при $x>0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2$, якщо відомий один частинний розв’язок $y_1=x$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв’язати задачу Коші $y''-6y'+8y=\frac{4e^{2x}}{1+e^{2x}}$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$.

Варіант 9.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''=y^3$, $y(0)=-2$, $y'(0)=2$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$y'''+y''=e^{-x}+2664\cos^2 3x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x^2$ та $y_2=e^x$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$\left(4x^2-x\right)y''+2(2x-1)y'-4y=12x(2x-1)$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=\dfrac{1}{x}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші

$y''+4y=\dfrac{4}{\sin 2x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\pi$.

Варіант 10.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $98y''=y^3$, $y(0)=1$, $y'(0)=7$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$y^{IV}+4y''=24x+32e^{2x}+288\sin^2 x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x$ та $y_2=e^{2x}$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$y''+\dfrac{4}{x}y'+\dfrac{2}{x^2}y=5x-3$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=\dfrac{1}{x}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші

$y''+6y'+8y=\dfrac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Варіант 11.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''\cdot y^3+16=0$, $y(0)=-4$, $y'(0)=2$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y^{IV}+3y'''=540\,\mathrm{sh}^2 x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x$ та $y_2=\dfrac{1}{x}$ при $x\neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $x^2y''+2xy'-6y=25x^3$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=x^2$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші $y''+16y=\dfrac{16}{\sin 4x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=3$, $y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=2\pi$.

Варіант 12.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $2y\cdot y''=(y')^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

2. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'''-y'=16\mathrm{ch}x+1$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x^3$ та $y_2=x^3\ln x$ при $x>0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $\left(4x^2-x\right)y''+2(2x-1)y'-4y=6x(2x-1)$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=\dfrac{1}{x}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші $y''-4y'+4y=15e^{2x}\sqrt{x}$, $y(0)=-1$, $y'(0)=1$.

Варіант 13.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y \cdot y''-(y')^2 = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння
$y''-4y'+4y = 8x^2 + 2e^{2x} - 3\sin 2x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1 = x^4$ та $y_2 = \dfrac{1}{x^2}$ при $x \neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння
$(x+2)y''+2y'+(x+2)y = 5x$, якщо відомий один частинний розв'язок
$y_1 = \dfrac{\sin x}{x+2}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші
$y''-6y'+8y = \dfrac{4e^{2x}}{e^{2x}+1}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

Варіант 14.

1.Знайти розв'язок. диференціального рівняння $y''=128\sin^3 y \cdot \cos y$,
$y(1) = \dfrac{\pi}{2}$, $y'(1) = 8$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння
$y^{IV} - 4y'''+4y''= 48x + 25\sin x + 32\sin 2x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1 = x+1$ та $y_2 = \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння
$y''+\dfrac{3}{x}y'-\dfrac{3}{x^2}y = 24x-12$, якщо $y_1 = \dfrac{1}{x^3}$ частинний розв'язок відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші
$y''+16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = -8$, $y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 4$.

Варіант 15.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''+32\sin y\cdot\cos^3 y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-4$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'''-3y''=18x+12+20e^{-2x}+10\cos x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=\dfrac{1}{x^4}$ та $y_2=\dfrac{1}{x^5}$ при $x\neq 0$.

4. Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $(2x+1)y''+(2x-1)y'-2y=x(x+1)$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=1-2x$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші $y''+4y=8ctg2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=5$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=4$.

Варіант 16.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $2y\cdot y''=(y')^2-8$, $y(0)=\dfrac{1}{4}$, $y'(0)=-1$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'''-4y'=16x-4+8e^{2x}+16\sin 2x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x^4$ та $y_2=\dfrac{1}{x^5}$ при $x\neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=x-\dfrac{3}{x}$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=\dfrac{\cos x}{x}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Варіант 17.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $2y \cdot y''+2=(y')^2$, $y(0)=\frac{1}{2}$, $y'(0)=2$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'''+y'=3x^2-2x+8e^x+2\sin x+6\cos x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x$ та $y_2=\ln x$ при $x>0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $y''+\frac{2}{x+2}y'+y=\frac{5x}{x+2}$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=\frac{\cos x}{x+2}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші $y''-y'=e^{2x}\cos\left(e^x\right)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Варіант 18.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''=72\sin^3 y\cdot\cos y$, $y(1)=\frac{\pi}{2}$, $y'(1)=6$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'''+y'=3x^2+4x+6e^x+30\sin 2x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x$ та $y_2=e^x$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $\left(4x^2-x\right)y''+2(2x-1)y'-4y=12x(2x-1)$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=1-2x$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші $y''-3y'+2y=\frac{e^x}{1+e^{-x}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Варіант 19.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''+72\sin y\cdot\cos^3 y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=6$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'''-y''=12x^2-30x+2e^x+20\sin 2x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x^2$ та $y_2=x^5$ при $x\neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $y''-\dfrac{x}{x-1}y'+\dfrac{1}{x-1}y=x-1$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=e^x$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші $y''+y=4ctgx$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=4$.

Варіант 20.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''\cdot y^3+4=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $2y'''+8y'=16x-8+32e^{-2x}+6\cos x-3\sin x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x$ та $y_2=x^3$ при $x\neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $y''+\dfrac{4}{x}y'+\dfrac{2}{x^2}y=5x-3$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=\dfrac{1}{x}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші $y''+6y'+8y=\dfrac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$, $y(0)=2$, $y'(0)=4$.

Варіант 21.

1.Знайти розв’язок диференціального рівняння $72y''=y^3$, $y(1)=1$, $y'(1)=6$.

2.Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння $y'''-3y''+2y'=8x-2+24e^{-2x}+10\cos x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв’язків $y_1=\sqrt{x}$ та $y_2=\sqrt{x+1}$ при $x>0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $x^2y''-2xy'-4y=-5x^3$, якщо відомий один частинний розв’язок $y_1=x^4$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв’язати задачу Коші $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$, $y(1)=0$, $y'(1)=0$.

Варіант 22.

1.Знайти розв’язок диференціального рівняння $y''\cdot y^3+49=0$, $y(0)=7$, $y'(0)=1$.

2.Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння $y'''+3y''+2y'=4x+2e^{-2x}+40\cos 2x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв’язків $y_1=x+\dfrac{1}{x}$ та $y_2=x+\dfrac{1}{x^2}$ при $x\neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $(x+1)y''+2y'+(x+1)y=x^2-3$, якщо відомий один частинний розв’язок $y_1=\dfrac{\sin x}{x+1}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв’язати задачу Коші $y''-4y'+4y=\dfrac{3e^{2x}}{\sqrt{x}}$, $y(1)=0$, $y'(1)=0$.

Варіант 23.

1.Знайти розв’язок диференціального рівняння $y \cdot y'' - (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

2.Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння $y''' + 4y' = 8x - 4 + 16e^{-2x} + 6\cos x - 3\sin x$

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв’язків $y_1 = x^4$ та $y_2 = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $4x^2 \cdot y'' + 4xy' - 4y = 12x^2 - 3$, якщо відомий один частинний розв’язок $y_1 = \frac{x^2 - 1}{x}$ відповідного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв’язати задачу Коші $y'' + 4y = 4ctg 2x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$.

Варіант 24.

1.Знайти розв’язок диференціального рівняння $y'' + \frac{2}{1 - y}(y')^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2.Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння $y'' + 2y' + y = 6xe^{-x} + 8e^x \cos 2x + 3 + x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв’язків $y_1 = e^x$ та $y_2 = \frac{1}{1 + x}$ при $x \neq -1$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння $x^2 y'' + 5xy' + 3y = 24x^3$, якщо відомий один частинний розв’язок $y_1 = \frac{1}{x}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв’язати задачу Коші $y'' - 2y' + y = \frac{2e^x}{1 + x^2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Варіант 25.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''+98\sin y\cdot\cos^3 y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=7$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$y'''-4y''=24x+2+8e^{2x}-17\sin x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=\sin 2x$ та $y_2=e^{3x}$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$y''+\dfrac{4}{x+1}y'+\dfrac{2}{(1+x)^2}y=10x+10$, якщо відомий один частинний розв'язок

$y_1=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші

$y''+4y=\dfrac{4}{\cos 2x}$, $y(0)=7$, $y'(0)=6$.

Варіант 26.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''=200y^3$, $y(1)=1$, $y'(1)=-10$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$y^{IV}+y'''-2y''=24x^2+9e^x-60\sin x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x^3$ та $y_2=e^{2x}$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$y''+\dfrac{4}{x}y'+\dfrac{2}{x^2}y=x-\dfrac{3}{x}$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=\dfrac{1}{x^2}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші

$y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

Варіант 27.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''+\dfrac{1}{1-y}(y')^2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$y'''-2y''+y'=x^2+12x-3+8e^x+100\cos 3x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x^3$ та $y_2=\ln x$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$y''+\dfrac{5}{x}y'+\dfrac{3}{x^2}y=20x$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=\dfrac{1}{x^3}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші

$y''-2y'+y=4e^x\ln x$, $y(1)=0$, $y'(1)=0$.

Варіант 28.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''=2\sin^3 y\cdot\cos y$, $y(1)=\dfrac{\pi}{2}$, $y'(1)=-1$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$y'''+2y''+y'=3x^2+12x+5+8e^x+2\sin x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=\dfrac{1}{x^2}$ та $y_2=\dfrac{1}{x^5}$ при $x\neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$xy''+2y'+xy=x^2-3$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші

$y''+25y=\dfrac{25}{\cos 5x}$, $y(0)=-2$, $y'(0)=5$.

Варіант 29.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''=8\sin^3 y\cdot\cos y$, $y(1)=\frac{\pi}{2}$, $y'(1)=-2$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$y''+4y'+8y=8e^{-2x}\sin 2x+20\cos 2x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x+1$ та $y_2=\frac{1}{x+1}$ при $x\neq -1$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$y''+\frac{6}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=20x^2+36$, якщо відомий один частинний розв'язок

$y_1=\frac{1}{x^4}$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші

$y''-y'-2y=\frac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Варіант 30.

1.Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''=y'\cdot e^{2y}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

2.Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$y'''+y''=-12x^2+18+5e^{-x}-90\cos 3x$.

3.Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо задана його фундаментальна система розв'язків $y_1=x$ та $y_2=x^2$ при $x\neq 0$.

4.Зінтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$x^2y''-xy'-8y=-5x^3-8x^2$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1=x^4$ відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

5.Методом варіації довільних сталих розв'язати задачу Коші

$y''+9y=\frac{9}{\sin 3x}$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=4$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\pi}{2}$.

Питання до самоконтролю

1. Яке рівняння називається диференціальним?
2. Як визначається порядок диференціального рівняння?
3. Які задачі математики та фізики приводять до поняття диференціального рівняння?
4. Яку функцію називають розв'язком диференціального рівняння?
5. Що означає розв'язати диференціальне рівняння?
6. Як формулюється задача Коші для диференціального рівняння другого порядку?
7. Які умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші?
8. Який геометричний зміст задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку?
9. Який механічний зміст задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку?
10. Загальний розв'язок та частинний розв'язок диференціального рівняння.
11. Поняття загального інтегралу і частинного інтегралу розв'язку диференціального рівняння.
12. Які розв'язки диференціального рівняння називаються особливими?
13. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням з відокремлю вальними змінними?
14. Яке диференціальне рівняння називається однорідним?
15. Яке диференціальне рівняння називається лінійним?
16. Якими методами розв'язуються лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку?
17. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням Бернуллі?
18. Яке диференціальне рівняння називається рівнянням в повних диференціалах?
19. Яки типи диференціальних рівнянь допускають зниження порядку диференціального рівняння?

20. Яке диференціальне рівняння називається лінійним однорідним?
21. Яке диференціальне рівняння називається лінійним неоднорідним?
22. Яке диференціальне рівняння називається лінійним неоднорідним з постійними коефіцієнтами?
23. Яке диференціальне рівняння n-го порядку називається лінійним неоднорідним з постійними коефіцієнтами?
24. Що називають характеристичним рівнянням?
25. Як називаються корені характеристичного рівняння?
26. Який вигляд має загальний розв'язок однорідного рівняння з постійними коефіцієнтами у випадку
    a. простих дійсних коренів
    b. дійсних коренів кратності n
    c. комплексних коренів?
27. Яке диференціальне рівняння n-го порядку називається лінійним однорідним з функціональними коефіцієнтами?
28. Яке диференціальне рівняння називається лінійним неоднорідним з функціональними коефіцієнтами?
29. Яке диференціальне рівняння називають однорідним, що відповідає неоднорідному ДР?
30. Яку структуру має загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку?
31. Теорема про структуру загального розв'язку ЛОДР n-го порядку.
32. Теорема про структуру загального розв'язку ЛНДР n-го порядку.
33. Який вигляд має спеціальна права частина ЛНДР?
34. Який вигляд має частинний розв'язок ЛНДР зі спеціальною правою частиною?
35. Який вигляд має частинний розв'язок ЛНДР зі спеціальною правою частиною, якщо його права частина є сумою декількох функцій?
36. Теорема про накладання частинних розв'язків ЛНДР.

Питання до самоконтролю

37. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів для знаходження частинних розв'язків ЛНДР зі сталими коефіцієнтами?
38. У чому полягає метод варіації довільних сталих інтегрування ЛНДР?
39. Метод Лагранжа для ЛНДР 2-го порядку.
40. Як формулюється задача Коші для диференціального рівняння n-го порядку?
41. Запишіть Формулу Абеля для ЛОДР 2-го порядку, якщо відомий його один нетривіальний розв'язок y_1.
42. Як можна використати формулу Остроградського–Ліувілля для інтегрування ЛОДР 2-го порядку?
43. Які функції y_1, $y_2,\ldots,y_m$ називають лінійно незалежними?
44. Яка система функцій називається фундаментальною?
45. Які лінійно незалежні функції y_1, $y_2,\ldots,y_m$ утворюють фундаментальну систему розв'язків ЛОДР?
46. Як побудувати загальний розв'язок ЛОДР, знаючи його фундаментальну систему розв'язків?
47. Який визначник називається визначником Вронського?
48. Як записують визначник Вронського для системи y_1, $y_2,\ldots,y_m$?
49. Чому дорівнює визначник Вронського для лінійно залежної системи функцій y_1, $y_2,\ldots,y_m$? (Необхідна умова лінійної залежності n функцій.)
50. Запишіть формулу Остроградського–Ліувілля для диференціального рівняння другого порядку.
51. Де застосовується формула Ліувілля?

Література

1. *Бермант А.Ф., Арамонович И. Г.* Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
2. *Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О.* Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: Вища шк., 1972. –156 с.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. *Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Настасієв П.П., Дрінь І.І.* Диференціальні рівняння: методи та застосування. – Чернівці: ЧНУ, 2010. – 288 с.
5. *Мышкис А.Д.* Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1969. – 640 с.
6. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Год издания: М.: МГУ, 1984. – 296 с.
7. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – Т.2. М.: Наука, 1978. – 576 с.
8. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 331 с.
9. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – К.: Радянська шк., 1953. – 444 с.
10. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979. – 129 с.
11. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.

Правила оформлення титульної сторінки

НТУУ “ К П І ”

Ф Б Т

Індивідуальна робота

з вищої математики

студента І курсу групи БІ –51

Антонова Сергія Івановича

Тема: **ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ**

Варіант № 12

Протокол виконання роботи

1	2	3	4	5

Роботу перевірив викладач

кафедри математичної фізики

ФМФ НТУУ « КПІ» доцент

Вован Іван Сергійович

Київ 2025