МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова

Інститут математики, економіки і механіки

Кафедра диференціальних рівнянь

Г. Є. Самкова, О. А. Тінгаєв, Н. В. Шарай

Диференціальні рівняння

Частина 2

Навчальний посібник для студентів 2 курсу

Одеса
2007

ГЛАВА І . ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

§1. Основні поняття і визначення

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку

$$F(x, y, y', \dots , y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

де $F\colon \mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ — відома функція своїх аргументів.

Якщо виконуються умови існування неявної функції відносно старшої похідної $y^{(n)}$, то рівняння (1) може бути розв'язано відносно n-ї похідної (узагалі говорячи, локально). Рівняння n-го порядку, розв'язане відносно старшої похідної, має вигляд

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots , y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Визначення. Нехай функція f визначена в області $D \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$. Функція $y = \varphi(x)$, $\varphi \in \mathbf{C}^{(n)}(I)$ називається *розв'язком* рівняння (2) на I, якщо:

1)$\forall\, x \in I : (x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \dots ,\ \varphi^{(n-1)}(x)) \in D$;
2) $\forall\, x \in I : \varphi^{(n)} = f(x,\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \dots ,\ \varphi^{(n-1)}(x))$.

Задача Коші для рівняння (2) ставиться так: серед усіх розв'язків рівняння (2) знайти ті, які задовольняють початковим умовам: при $x = x_0$: $y = y_0$, $y' = y_0'$, $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, де x_0, y_0, y_0', $y_0^{(n-1)}$ — задані числа з $\mathbf{R}$. Задача Коші записується так:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \\ y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, k = \overline{1, n-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Визначення. Нехай у кожній точці $(x,\ y,\ y',\ \dots\ ,\ y^{(n-1)})$ області $D = D_1\times D_2 \subseteq \mathbf{R}^1\times \mathbf{R}^n$ має місце існування й єдність розв'язку задачі Коші для рівняння (2). Тоді n-параметричне сімейство функцій

$$y = \varphi(x,\ c_1, \dots, c_n) \;\Leftrightarrow\; y = \varphi(x, C),\ C\in E\subseteq \mathbf{R}^n \tag{4}$$

(E — множина припустимих значень параметрів) називається *загальним розв'язком* рівняння (2) в області D, якщо $\varphi \in C^{n,0}_{x,c}(D_1 \times E)$ і:

1. при будь-якім фіксованому значенні $C \in E$ функція (4) є розв'язком диференціального рівняння (2);
2. $\forall (x_0, y_0, y_0', y_0^{(n-1)}) \in D$ існує таке значення параметрів $(c^0{}_1, \ldots, c^0{}_n) = C^0 \in E$, що функція (4) при $C = C^0$ є розв'язком задачі Коші (3).

Якщо ж загальний розв'язок рівняння (2) знайдений неявно у вигляді

$$\Phi(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0, \tag{5}$$

то його називають *загальним інтегралом* цього рівняння.

§2. Рівняння вищого порядку, що інтегруються в квадратурах

У загальному випадку нелінійні диференціальні рівняння n-го порядку не інтегруються в квадратурах.

До нелінійних рівнянь n-го порядку, що інтегруються в квадратурах відносяться наступні види рівнянь:

а) $F(x, y^{(n)}) = 0$; б) $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$; в) $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$.

Зупинимося на питанні інтегрування зазначених рівнянь у випадку, коли їх можна представити у вигляді (2):

а) $$y^{(n)} = f(x). \tag{6}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \ldots \int f(x)}_{n \text{ разів}} dx + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n.$$

б) $$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}). \tag{7}$$

Виконаємо заміну $y^{(n-1)} = z(x)$, тоді $y^{(n)} = z'(x)$ і рівняння (7) перепишемо у вигляді:

$$z' = f(z).$$

Це — рівняння зі змінними, що розділяються. Нехай його загальний розв'язок має вигляд: $z = \varphi(x, c)$.

Але тому що $z(x) = y^{(n-1)}$, то $y^{(n-1)} = \varphi(x, c_1)$, тобто ми отримаємо рівняння виду (6), що відомо як вирішується.

в) $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$. (8)

Виконаємо заміну $y^{(n-2)} = z(x)$, тоді $y^{(n-1)} = z'(x)$, а $y^{(n)} = z''(x)$. Після заміни рівняння (8) перепишеться у вигляді:

$$z''(x) = f(z). \tag{9}$$

Один з методів інтегрування рівняння (9) такий: помножимо обидві частини рівняння на $2z'(x)dx$, тоді одержуємо

$$d(z')^2 = 2f(z)dz,$$

звідкіля $(z')^2 = 2\int f(z)dz + c_1$. Розв'яжемо останнє рівняння відносно похідної і розділимо змінні:

$$\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + c_1}} = \pm dx,$$

звідкіля знаходимо загальний інтеграл рівняння (9):

$$\int\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)dz + c_1}} = \pm x + c_2.$$

Цей загальний інтеграл при заміні z на $y^{(n-2)}$ приймає вигляд:

$$\Phi(x, y^{(n-2)}, c_1, c_2) = 0.$$

Припустимо, що це рівняння удалося розв'язати відносно похідної, тоді $y^{(n-2)} = \varphi(x, c_1, c_2)$, тобто знову отримане рівняння вигляду (6), що інтегрується в квадратурах.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y''' = \sqrt{1-(y'')^2}$.

Розв'язок. Це — рівняння вигляду (7). Виконаємо заміну: $y'' = z(x)$, тоді $z' = \sqrt{1-(z)^2}$ – рівняння першого порядку зі змінними, що розділяються. Після розділу змінних (при $z \neq \pm 1$):

$$\frac{dz}{\sqrt{1-(z)^2}} = dx$$

і інтегрування одержуємо: $\arcsin z = x + c_1$, звідки $z = \sin(x + c_1)$, тобто $y'' = \sin(x + c_1)$, а це вже рівняння вигляду (6). Послідовно інтегруючи його обидві частини два рази по dx, одержуємо:

$$y' = -\cos(x + c_1) + c_2,$$
$$y = -\sin(x + c_1) + c_2 x + c_3,$$

де остання рівність являє собою загальний розв'язок заданого в умові рівняння.

Перевіримо, чи не втратили ми розв'язок, наклавши умову $z \neq \pm 1$.

Нехай $z = \pm 1$, тобто $y'' = 1$. Тоді, після дворазового інтегрування його обох частин по dx одержуємо:

$$y = \pm\frac{x^2}{2} + c_4 x + c_5 \; .$$

Легко перевірити, що отримані сімейства — теж розв'язки нашого рівняння. Остаточно, відповіддю є сукупність співвідношень:

$$\left[\begin{array}{l} y = -\sin(x + c_1) + c_2 x + c_3, \\ y = \pm\dfrac{x^2}{2} + c_4 x + c_5. \end{array}\right.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y^{(4)} = y''$.

Розв'язок. Це – рівняння вигляду (8). Покладемо $y'' = z(x)$, тоді задане рівняння перепишеться так: $z'' = z$. Помножимо обидві частини отриманого рівняння на $2z'(x)dx$, одержимо $d(z')^2 = 2zdz$, звідки $(z')^2 = z^2 + c_1$, тобто $z' = \pm\sqrt{z^2 + c_1}$. Розділимо змінні:

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + c_1}} = \pm dx, \text{ тоді } \ln\left|z + \sqrt{z^2 + c_1}\right| = \pm x + c_2,$$

або, розв'язуючи відносно z, одержуємо:

$$z = \frac{c_2}{2}e^{\pm x} - \frac{c_1}{2c_2}e^{\mp x},$$

але $y'' = z(x)$, тому $y'' = \dfrac{c_2}{2}e^{\pm x} - \dfrac{c_1}{2c_2}e^{\mp x}$, а загальний розв'язок рівняння буде мати вигляд: $y = Ae^{\pm x} + Be^{\mp x} + Cx + D$, де A, B, C, D – довільні дійсні сталі.

§3. Рівняння n-го порядку, що допускають зниження порядку

Деякі рівняння удається розв'язати, попередньо понизивши їхній порядок. Розглянемо кілька випадків, коли порядок рівняння можна понизити:

а) рівняння явно не містить шуканої функції y і декілька її похідних підряд, починаючи з першої, тобто має вигляд

$$F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{10}$$

де $k \geq 1$, $k \in \mathbf{N}$.

б) рівняння не містить явно незалежної змінної x, тобто має вигляд

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{11}$$

в) рівняння (1) — однорідне щодо функції y і всіх її похідних (однорідність за незалежній змінній x не потрібна), тобто функція F така, що $\exists m \in \mathbf{R}, \forall k > 0$:

$$F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$

Число m називають ступенем однорідності функції F.

г) ліва частина рівняння (1) є повною похідною по x від деякого диференціального виразу (n–1)-го порядку. Таке рівняння називається рівнянням у повних (або точних) похідних.

У кожному із зазначених випадків вивчимо способи зниження порядку рівнянь.

а) Порядок такого рівняння завжди може бути знижений на k одиниць. Покладемо в (10) $y^{(k)} = z(x)$, тоді, відповідно $y^{(k+1)} = z'(x)$, ... $y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$. Одержимо рівняння порядку $n - k$, тобто

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0, \tag{12}$$

Припустимо тепер, що нам удалося знайти загальний розв'язок рівняння (12): $z(x) = \varphi(x, c_1, \dots, c_{n-k})$. Оскільки $y^{(k)} = z(x)$, одержуємо рівняння

$$y^{(k)} = \varphi(x, c_1, \dots, c_{n-k})$$

– вигляду (6), що інтегрується в квадратурах.

б) Порядок такого рівняння завжди можна понизити на одиницю. Для цього покладемо в (11) $y' = z(y)$, де z – нова шукана функція, y – нова незалежна змінна (тобто виходить, $y \neq \text{const.}$). Тоді

$$y'' = z'_x = z'_y y' = z'_y z, \ y''' = z^2 z'' + z(z')^2 \text{ і т.д.}$$

Підставляючи вирази y', y'', ..., $y^{(n)}$ у нових змінних у рівняння (11), одержуємо диференціальне рівняння порядку $n - 1$:

$$\Phi(y, z, \frac{dz}{dy}, ..., \frac{d^{(n-1)}z}{dy^{n-1}}) = 0 . \quad (13)$$

Припустивши тепер, що удалося знайти загальний розв'язок рівняння (13) $z(y) = \psi(y, c_1, \ldots, c_{n-1})$ одержимо диференціальне рівняння першого порядку зі змінними, що розділяються (тому що $z(y) = y'$):

$$y' = \psi(y, c_1, \ldots, c_{n-1}).$$

Помітимо, що, вирішуючи рівняння (11) таким методом, можна втратити розв'язок вигляду $y = c$, де $c = \text{const}$.

в) Порядок однорідного рівняння завжди може бути знижений на одиницю. Справді, покладемо в однорідному рівнянні n-го порядку $y' = y \cdot z(x)$. Тоді $y'' = y \cdot (z' + z^2), \ldots, y^{(n)} = y \cdot \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})$.

Однорідне рівняння прийме вид

$$F(x, y, y \cdot z, y \cdot (z' + z^2), \ldots, y \cdot \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0,$$

або, з урахуванням однорідності функції F:

$$y^m \cdot F(x, 1, z, z' + z^2, \ldots, \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})) = 0.$$

Отже, однорідне рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} y^m = 0 \\ F(x, 1, z, ..., \omega) = 0. \end{array}\right. \quad (14)$$

Друге зі співвідношень (14) – звичайне диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку щодо невідомої функції $z = z(x)$.

Подальші міркування є такими ж, як у випадках а) і б).

г) У цьому випадку порядок рівняння завжди може бути знижений на одиницю.

Дійсно, якщо

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \text{ то}$$

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0, \text{ і}$$

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c_1$$

- рівняння (n–1)-го порядку.

Рівняння (1) може не бути рівнянням у повних похідних, але після деяких перетворень зводитися до нього.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші

$$2y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, \quad y(1) = \frac{\sqrt{2}}{5}, \quad y'(1) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

Розв'язок. У рівнянні явно відсутня шукана функція y. Отже, воно є рівнянням вигляду (10). Покладемо $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$. Тоді

$$2z' = \frac{z}{x} + \frac{x^2}{z},$$

а це рівняння є рівнянням Бернуллі, де $n = -1$. Помножимо обидві частини рівняння на z:

$$2zz' = \frac{z^2}{x} + x^2,$$

покладемо $z^2 = t(x)$, $2zz' = t'(x)$, тоді $t' - \dfrac{t}{x} = x^2$ — лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'яжемо відповідне йому лінійне однорідне рівняння: $t' - \dfrac{t}{x} = 0$, $\dfrac{dt}{t} = \dfrac{dx}{x}$, звідки $\ln|t| = \ln|x| + \ln|c|$, чи $t = cx$ — загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо методом варіації сталої у вигляді $t = c(x)x$, тоді $t' = c'(x)\cdot x + c(x)$ і після підстановки t і t' у лінійне неоднорідне рівняння, одержуємо $c'(x) = x$, або $c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$, тобто $t = (\frac{x^2}{2} + c_1)x$ — загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння. Оскільки $t = z^2$, то $z = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2}+c_1\right)x}$, або $y' = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2}+c_1\right)x}$. Для зручності інтегрування отриманого рівняння першого порядку визначимо c_1, використовуючи другу початкову умову: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}+c_1}$ чи $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c_1$, звідки $c_1 = 0$. Тоді з урахуванням значення c_1 рівняння перепишеться у вигляді:

$$y' = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2}}, \text{ звідки одержуємо } y = \frac{\sqrt{2}}{5}x^{5/2} + c_2 .$$

Використовуючи тепер першу початкову умову, знаходимо c_2: $\frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5} + c_2$, $c_2 = 0$, тобто, остаточно, розв'язком задачі Коші є функція $y = \frac{\sqrt{2}}{5}x^{5/2}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^2yy' - (y - xy')^2 = 0$.

Розв'язок. Дане рівняння — повне. Перевіримо, чи не є воно однорічним? Тут $F(x, y, y', y'') = x^2yy'' - (y - xy')^2$. Тоді

$$F(x, ky, ky', ky'') = k^2[x^2yy'' - (y - xy')^2].$$

Отже, дане рівняння є однорідним. Покладемо в ньому $y' = z(x)y$, $y'' = (z' + z^2)\cdot y$. Тоді $x^2y^2(z' + z^2) - (y - xzy)^2$, $x^2z' + 2xz = 1$, $y \neq 0$ – одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку, яке можна розв'язати, наприклад, методом варіації сталих Лагранжа. Його загальний розв'язок є функція $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{c_1}{x^2}$. Тому що $z = \dfrac{y'}{y}$, то $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{c_1}{x^2}$, або $\dfrac{dy}{y} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{c_1}{x^2}\right)dx$. Інтегруючи обидві частини отриманої рівності, знаходимо $\ln|y| = \ln|x| - \dfrac{c_1}{x} + \ln|c_2|$, $c_2 \neq 0$, звідки $y = c_2 x e^{-\frac{c_1}{x}}$. Тут $c_1 \in \mathbf{R}$, тому що розв'язок $y = 0$ відповідає значенню постійної $c_2 = 0$.

Приклад 3. Вирішити рівняння $1 + (y')^2 + yy'' = 0$.

Розв'язок. Це — рівняння вигляду (11), тому що в ньому відсутня явно незалежна змінна x. Таким чином, варто покласти: y — нова незалежна змінна ($y \neq \text{const.}$), $y' = z(y)$, $y'' = zz'$, і тоді одержуємо рівняння Бернуллі:

$$1 + z^2 + yzz' = 0.$$

Його загальний розв'язок: $z = \sqrt{\dfrac{c_1}{y^2} - 1}$. Тоді $y' = \dfrac{\sqrt{c_1 - y^2}}{y}$. Розділяючи змінні, одержуємо по черзі $\dfrac{ydy}{\sqrt{c_1 - y^2}} = dx$, $-\sqrt{c_1 - y^2} = x + c_2$, або, остаточно, $x = x = c_2 - \sqrt{c_1 - y^2}$ — загальний інтеграл рівняння.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y \cdot y'' = 2(y')^2$.

Розв'язок. Легко перевірити, що дане рівняння є однорідним, крім того, у ньому явно відсутня незалежна змінна x, тобто два способи розв'язку ми вже вказали. Але простіше всього це рівняння інтегрується шляхом виділення точної похідної. Для цього розділимо обидві його частини на $y \cdot y' \neq 0$, одержимо $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{2y'}{y}$ — в обох частинах точні похідні:

$$(\ln|y'|)' = 2(\ln|y|)',$$

інтегруючи, знаходимо

$$\ln|y'| = 2\ln|y| + \ln|c_1|,\ \frac{dy}{dx} = c_1 y^2,\ \frac{dy}{y^2} = c_1 dx\ ,\ \text{нарешті,}\ y = -\frac{1}{c_1 x + c_2}$$

— загальний розв’язок вихідного рівняння. Розглядаючи рівняння $y \cdot y' = 0$, одержуємо, крім того, розв’язок $y = 0$ заданого рівняння.

§4. *Лінійні однорідні рівняння n-го порядку*

Визначення. *Лінійним рівнянням n-го порядку* називається рівняння вигляду

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x), \tag{15}$$

де $p_i(x)$ і $f(x)$ – відомі функції, y – невідома функція незалежної змінної x.

Визначення. Якщо $f(x) \equiv 0$ при $x \in \Im$ то на $\Im$ (15) — *лінійне однорідне* рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0, \tag{16}$$

у противному випадку, (15) — *лінійне неоднорідне* рівняння.

Визначення. n функцій $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ називаються *лінійно незалежними* (ЛНЗ) на $\Im$, якщо тотожність

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) \equiv 0 \text{ на } \Im$$

с постійними числами α_i виконується тільки тоді, коли всі $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Визначення. *Фундаментальною системою розв’язків* (ФСР) чи *базисом* лінійного однорідного рівняння (16) на $\Im$ називається n ЛНЗ на $\Im$ розв’язків цього рівняння.

Теорема (про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння). Нехай $y_1(x)$, ... , $y_n(x)$ — ФСР лінійного однорідного рівняння (16) на $\mathfrak{I}$. Тоді загальний розв'язок рівняння (16) дорівнює лінійної комбінації цієї ФСР із довільними постійними:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

де c_i — довільні сталі, $i = \overline{1, n}.$

Визначення. Лінійне однорідне рівняння (16) називається *рівнянням, що відповідає лінійному неоднорідному рівнянню* (15).

Одним з класів лінійних рівнянь, що інтегруються в квадратурах і часто зустрічаються на практиці, є лінійні диференціальні рівняння *n-го* порядку з постійними коефіцієнтами.

§5. *Лінійні рівняння з постійними коефіцієнтами*

Розглянемо лінійне однорідне рівняння *n-го* порядку

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{17}$$

де a_i — постійні дійсні числа. Рівнянню (17) поставимо у відповідність алгебраїчне рівняння виду

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \ , \tag{18}$$

яке називається *характеристичним* рівнянням, а його корені – *характеристичними числами* рівняння (17).

Структура ФСР (а, виходить, і загального розв'язку) рівняння (17) залежить від значень коренів характеристичного рівняння (18). Розрізняють чотири випадки.

1) Число λ_1 — простий дійсний корінь характеристичного рівняння (18). Йому у ФСР рівняння (17) відповідає розв'язок

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} .$$

2) Число $\lambda_1 = a + i \cdot b$ — простий комплексний корінь характеристичного рівняння. Тоді $\lambda_2 = a - i \cdot b$ — теж простий корінь характеристичного рівняння (18). Парі простих комплексно сполучених коренів $a \pm i \cdot b$ відповідають два дійсних лінійно незалежних розв'язки

$$y_1 = e^{ax} \cos bx \ , \ \ y_2 = e^{ax} \sin bx$$

3) Число λ_1 — дійсний корінь кратності k. Йому відповідає k дійсних лінійно незалежних розв'язків рівняння (17):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \ , \ y_2 = x e^{\lambda_1 x} , \ \ldots \ , \ y_k = x^{k-1} e^{\lambda_1 x} \ ...$$

4) Кожне з чисел $a \pm i \cdot b$ є коренем кратності k. Їм відповідають $2k$ базисних розв'язків вигляду

$$y_1 = e^{ax} \cos bx \ , \ y_3 = x e^{ax} \cos bx \ , \ \ldots \ , \ y_{2k-1} = x^{k-1} e^{ax} \cos bx \ ,$$

$$y_2 = e^{ax} \sin bx \ , \ y_4 = x e^{ax} \sin bx \ , \ \ldots \ , \ y_{2k} = x^{k-1} e^{ax} \sin bx \ ...$$

Доведено, що розв'язки, що відповідають різним кореням характеристичного рівняння (16), є лінійно незалежними. Тоді, після знаходження всіх розв'язків, що відповідають усім кореням характеристичного рівняння, для знаходження загального розв'язку рівняння (17) залишилося скористатися теоремою про його загальний розв'язок.

Приклад 1. Вирішити рівняння

$$y''' - y'' - 6y' = 0 . \tag{19}$$

Розв'язок. Дане рівняння (19) — лінійне однорідне рівняння 3-го порядку з постійними коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = 0$$

має корені: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$. ФСР рівняння (19) складається з розв'язків

$$y_1 = 1,\ y_2 = e^{2x},\ y_3 = e^{-3x}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (19) має вид:

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}.$$

Приклад 2. Вирішити рівняння

$$y''' + 5y'' + 33y' + 29y = 0. \tag{20}$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 33\lambda + 29 = 0$$

має корені $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2+5i$, $\lambda_3 = -2-5i$. ФСР така:

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{-2x}\cos 5x,\ y_3 = e^{-2x}\sin 5x.$$

Загальний розв'язок рівняння (20) запишеться так:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}\cos 5x + c_3 e^{-2x}\sin 5x.$$

Приклад 3. Вирішити рівняння

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$$

Розв'язок.

Маємо $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$, або $(\lambda^2 + 4)^2 = 0$, звідки $\lambda_1 = \lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -2i$.

ФСР: $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$, $y_3 = x\cos 2x$, $y_4 = x\sin 2x$.

Загальний розв'язок рівняння –

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x\cos 2x + c_4 x\sin 2x.$$

Приклад 4. Вирішити рівняння

$$y''' + 3y'' - 4y = 0 .$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$ має простий корінь $\lambda_1 = 1$ і корінь 2-й кратності $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Тому ФСР має вигляд

$$y_1 = e^x \ , \ y_2 = e^{-2x}, \ y_3 = xe^{-2x}.$$

Звідси загальний розв'язок наданого рівняння:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x} .$$

Приклад 5. Вирішити задачу Коші

$$\begin{cases} y''' - 5y'' + 6y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1. \end{cases}$$

Розв'язок. Загальний розв'язок заданого лінійного однорідного рівняння має вигляд:

$$y = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} .$$

Знайдемо частинний розв'язок, що задовольняє заданим початковим умовам. Оскільки $y(0) = 0$, то підставляючи значення $x = 0$ і $y = 0$ у формулу загального розв'язку, одержуємо $0 = c_1 + c_2 + c_3$. Знайдемо першу і другу похідні загального розв'язку. Аналогічно попередньому, враховуючи інші початкові умови маємо

$$y' = 2c_2e^{2x} + 3c_3e^{3x}, \quad y'(0) = 0 \Rightarrow 0 = 2c_2 + 3c_3;$$

$$y'' = 4c_2e^{2x} + 9c_3e^{3x}, \quad y''(0) = 1 \Rightarrow 1 = 4c_2 + 9c_3.$$

Таким чином, ми одержали лінійну систему алгебраїчних рівнянь відносно c_i:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ 4c_2 + 9c_3 = 1. \end{cases}$$

Вирішивши її, одержуємо $c_1 = \frac{1}{6}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{3}$. Отже, розв'язок поставленої задачі Коші має вигляд

$$y = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{3} e^{3x}.$$

§6. *Лінійні неоднорідні рівняння*

Теорема (про загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння). Нехай $y_1(x)$, ... , $y_n(x)$ — ФСР рівняння (16), $z(x)$ — довільний частинний розв'язок рівняння (15). Тоді загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (15) дорівнює сумі загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (16), що відповідає рівнянню (15), і любого частинного розв'язку лінійного однорідного рівняння (15), тобто

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k + z(x).$$

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (21)$$

Якщо $f(x)$ — елементарна функція, то рівняння (21) інтегрується в квадратурах за допомогою методу варіації постійних Лагранжа, тому що рівняння (17) має ФСР, що складається з елементарних функцій (метод Лагранжа вивчите самостійно).

Розглянемо випадок лінійних неоднорідних рівнянь з постійними коефіцієнтами і спеціальним видом правої частини. Якщо права частина рівняння (21) має так називаний спеціальний вигляд, то воно може бути вирішено (крім методу варіації постійних Лагранжа) також методом невизначених коефіцієнтів. Зупинимося на цьому питанні. Укажемо спеціальні види правих частин і відповідні їм окремі розв'язки:

1. $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, (22)

   де $P_m(x)$ — поліном від x ступеня m. Тоді частинний розв'язок $z(x)$ рівняння (21) із правою частиною (22) має вигляд

$$z(x) = x^s e^{\alpha x} Q_m(x),$$

   де число α є коренем кратності s характеристичного рівняння (18), $Q_m(x)$ — поліном від x того ж ступеня m з невизначеними коефіцієнтами.

2. $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x)$ (23)

   де $P_m(x)$ і $Q_l(x)$ — поліноми від x ступенів m і l відповідно. Тоді частинний розв'язок рівняння (21) варто шукати в такому вигляді:

$$z(x) = x^s e^{\alpha x}(R_q(x)\cos\beta x + T_q(x)\sin\beta x),$$

   де $\alpha + i\beta$ — корінь характеристичного рівняння кратності s, $R_q(x)$ і $T_q(x)$ — поліноми ступеня q з невизначеними коефіцієнтами, $q = \max\{m, l\}$.

Теорема. Якщо $z_k(x)$, $k = \overline{1,l}$ — розв'язки відповідно рівнянь $Ly = f_k(x)$, $k = \overline{1,l}$, то функція $z(x) = z_1(x) + \ldots + z_l(x)$ є розв'язком рівняння

$$Ly = f_1(x) + \ldots + f_l(x).$$

Приклад 1. Указати вид загального розв'язок з невизначеними коефіцієнтами рівняння

$$y^{(5)} + 2y''' + y' = 4x^2 - \sin x + 3x\cos x - e^{-3x}\sin 2x + (3x-2)e^{-4x} + 1 \tag{24}$$

Числових значень коефіцієнтів не знаходити.

Розв'язок. (24) — лінійне неоднорідне рівняння 5-го порядку з постійними коефіцієнтами. Його права частина є сума доданків, кожний з яких має спеціальний вигляд. Відповідне лінійне однорідне рівняння

$$y^{(5)} + 2y''' + y' = 0 \qquad (25)$$

має характеристичне рівняння $\lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda = 0$. Його корені $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = i$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -i$. Отже, загальний розв'язок y_0 рівняння (25) має вигляд:

$$y_0 = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x + c_5 x \cos x.$$

Тому що права частина $f(x) = \sum_{i=1}^{4} f_i(x)$ рівняння (24) – сума доданків спеціального виду, то відповідно до теореми знайдемо частинні розв'язки рівнянь

$$y^{(5)} + 2y''' + y' = f_i(x) \;, \quad i = \overline{1,4}\,.$$

Отже, $f_1(x) = 4x^2 + 1$ – права частина спеціального вигляду (22), де $\alpha = 0$, $s = 1$, $m = 2$, тобто

$$z_1 = x(A_1 x^2 + B_1 x + D_1).$$

$f_2(x) = -3x\cos x - \sin x$ — права частина спеціального вигляду (23), де $\alpha + i\beta = i$, $s = 2$, $m = 1$, $l = 0$, $q = 1$, отже,

$$z_2(x) = x^2((A_2 x + B_2)\cos x + (D_2 x + E_2)\sin x).$$

Аналогічно, $f_3(x) = -e^{3x}\sin 2x$, $\alpha + i\beta = -3+2i$, $s = 0$, $m = l = 0$, $q = 0$.

Тоді $z_3(x) = e^{-3x}(A_3 \cos 2x + B_3 \sin 2x)$. Далі,

$f_4(x) = (3x-2)e^{-4x}$, $\alpha + i\beta = -4$, $s = 0$, $m = 1$, $q = 0$. Тоді $z_4(x) = e^{-4x}(A_4 x + B_4)$.

Отже, загальний розв'язок рівняння (24) має вигляд $y = y_0 + z(x)$, тобто

$$y = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + c_4 x\sin x + c_5 x\cos x + x(A_1x^2 + B_1x + D_1) +$$
$$+ x^2((A_2x + B_2)\cos x + (D_2x + E_2)\sin x) + e^{-3x}(A_3\cos 2x + B_3\sin 2x) + e^{-4x}(A_4x + B_4)\ ,$$

де c_i — довільні постійні, A_i , B_i , D_i , E_i — невизначені коефіцієнти.

Приклад 2. Розв’язати рівняння

$$y'' - y' - 12y = 7e^{-3x} + (8x+7)e^{-4x} \tag{26}$$

Розв’язок. Спочатку розв’яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння

$$y'' - y' - 12y = 0\,.$$

Його характеристичне рівняння $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ має два корені $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4$. Загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння має вигляд: $y_0 = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x}$.

Знайдемо частинний розв’язок рівняння (26). Для цього будемо шукати частинний розв’язок кожного з двох рівнянь

$$y'' - y' - 12y = 7e^{-3x} \tag{27}$$

та

$$y'' - y' - 12y = (8x+7)e^{-4x} \tag{28}$$

Рівняння (27) має спеціальний вигляд (22), де $\alpha = -3, s = 1, m = 0$. Таким чином, його частинний розв’язок

$$z_1(x) = Axe^{-3x} \tag{29}$$

Підставимо розв’язок (29) у рівняння (27), а для цього будемо користуватись схемою:

$$\begin{array}{r|l} -12 & z_1(x) = Axe^{-3x} \\ -1 & z_1'(x) = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x} \\ 1 & z_1''(x) = -6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} \end{array}$$

$$-7Ae^{-3x} = 7e^{-3x} \qquad \Rightarrow A = -1$$

Таким чином, $z_1(x) = -xe^{-3x}$.

Рівняння (28) також має спеціальний погляд (22), де $\alpha = -4, s = 0, m = 1$.

Таким чином, воно має частковий розв'язок

$$z_2(x) = (Ax + B)e^{-4x}. \tag{30}$$

Підставляючи (30) у (28), одержуємо :

$$\begin{array}{l} z_2(x) = (Ax+B)e^{-4x} \\ z_2'(x) = Ae^{-4x} - 4(Ax+B)e^{-4x} \\ \underline{z''_2(x) = -Ae^{-4x} + 16(ax+B)e^{-4x}} \\ 8(Ax+B)e^{-4x} - 9Ae^{-4x} = (8x+7)e^{-4x}, \\ 8(Ax+B) - 9A = 8x+7. \end{array}$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однаковими ступенями x, одержуємо :

$$\begin{array}{l|l} x^1 & 8A = 8 \qquad \Rightarrow A = 1 \\ x^0 & 8B - 9A = 7 \Rightarrow B = 2 \end{array},$$

звідки $z_2(x) = (x+2)e^{-4x}$.

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (26):

$$y = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x} + (x+2)e^{-4x} - xe^{-3x}.$$

Приклад 3. *Розв'язати рівняння* $y'' + 4y = 6\cos x + 4\sin 2x$.

Розв'язок. Будемо шукати розв'язок відповідного ЛОР:

$$y_0 = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y = 6\cos x \quad (\alpha + i\beta, s = 0, m = l = q = 0) \tag{31}$$

треба шукати у вигляді $z_1(x) = A\cos x + B\sin x$. Підставляючи $z_1(x)$ у рівняння (31), одержуємо

$$\begin{array}{c|l} 4 & z_1(x) = A\cos x + B\sin x \\ 0 & z_1'(x) = -A\sin x + B\cos x \\ 1 & z_1''(x) = -A\cos x - B\sin x \end{array}$$

$$3A\cos x + 3B\sin x = 6\cos x$$

Прирівнюючи коефіцієнти за $\cos x$ та $\sin x$, одержуємо: $A = 2$, $B = 0$. Отже, $z_1(x) = 2\cos x$.

Частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y = 4\sin 2x(\alpha + i\beta = 2i, s = 1, m = l = q = 0)$$

треба шукати у вигляді $z_2(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Підставляючи у рівняння, дістаємо:

$$\begin{array}{c|l} 4 & z_2(x) = x(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ 0 & z_2'(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2ASin2x + 2BCos2x) \\ 1 & z_2''(x) = 4(-A\sin 2x + BCos2x) + x(-4ACos2x - 4B\sin 2x) \end{array}$$

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\sin 2x \quad \Rightarrow A = 1, B = 0, \qquad z_2(x) = -x\cos 2x.$$

Загальний розв'язок початкового рівняння є

$$y = y_0 + z(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + 2\cos x - x\cos 2x,$$

де $c_1, c_2 -$ довільні сталі.

§7. *Рівняння Ейлера.*

Означення. *Лінійним неоднорідним рівнянням Ейлера називається рівняння вигляду*

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)\,. \tag{32}$$

Якщо $f(x) \equiv 0$, то (32) — лінійне однорідне рівняння Ейлера.

Рівняння Ейлера можливо привести до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Дійсно, нехай $x > 0$. Зробимо перетворення незалежної змінної

$$x = e^t, t \in R, \tag{33}$$

$$y(x) = y(e^t),\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}e^{-t},$$

тоді

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t})e^{-t} = (\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt})e^{-2t}.$$

За методом індукції можливо показати, що k-я похідна $\frac{d^ky}{dx^k}$ дорівнює лінійній комбінації похідних від першого до k-того порядку зі сталими коефіцієнтами, до яких входить множник e^{-kt}. Таким чином, підставляючи (33) до рівняння (32), коефіцієнти стають сталими в залік того, що

$$\forall k = \overline{0,n}\colon a_{n-k}x^k e^{-kt} = a_{n-k}e^{kt}e^{-kt} = a_{n-k} = const.$$

Якщо $x < 0$, то зробимо перетворення $x = -e^t, t \in R$. Це доведе до розв'язку того ж вигляду, що у випадку $x > 0$ (з перетворенням x на $-x$).

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$x^2y'' + 3xy' + y = \frac{1}{x\ln x}.$$

Розв'язок. Це — ЛНР Ейлера. Так як у правій частині є функція $\ln x$, то $x > 0$. Зробимо перетворення (33). Відносно $y(t)$ одержуємо

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{te^t}.$$

Одержане рівняння — ЛНР зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо його методом варіації сталих Лагранжа. Розглянемо відповідне ЛОР:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Таким чином, $y_0 = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$ — загальний розв'язок ЛОР. Будемо шукати загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді

$$y = c_1(t)e^{-t} + c_2(t)te^{-t}.$$

Функції $c_1(t)$ та $c_2(t)$ повинні відповідати системі рівнянь:

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{-t} + c_2'(t)te^{-t} = 0 \\ -c_1'(t)e^{-t} + c_2'(t)(e^{-t} - te^{-t}) = \dfrac{1}{t}e^{-t} \end{cases}.$$

Одержана система — лінійна неоднорідна система алгебраїчних рівнянь відносно $c'_1(t)$ та $c'_2(t)$. Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t)t = 0 \\ -c_1'(t) + c_2'(t)(1 - t) = \dfrac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow c_1'(t) = -1, c_2'(t) = \frac{1}{t}.$$

Проінтегруємо останні два рівняння: $c_1(t) = -t + c_1$ та $c_2(t) = \ln |t| + c_2$. Тобто

$$y = (c_1 - t)e^{-t} + (\ln|t| + c_2)te^{-t}$$

— загальний розв'язок ЛНР зі сталими коефіцієнтами. Для того, щоб одержати загальний розв'язок рівняння Ейлера, достатньо змінити t на $\ln x$; тобто

$$y(x) = \frac{(c_1 - \ln x)}{x} + \frac{(\ln|\ln x| + c_2)}{x}\ln x.$$

Зауваження. До рівняння Ейлера можна привести рівняння вигляду

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0$$

перетворенням $ax + b = t$.

ГЛАВА 2. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

§1. *Метод виключення (зведення нормальної системи до рівняння n-го порядку)*

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь, яка задана в нормальній формі Коші:

$$\begin{cases} y_i' = f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \tag{34}$$

або у векторній формі

$$y' = f\left(x, y\right), \quad f : R \times R^n \to R^n. \tag{35}$$

Нехай функції f_i визначені в області $D \subseteq R^{n+1}$.

***<u>Означення</u>**. Сукупність n функцій $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, $\varphi_i \in C^1(J)$, $\varphi_i : J \to R$, $J \subseteq R$, називається розв'язком системи (34) на J, якщо*

$$\forall x \in J: \ \left(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right) \in D,$$

$$\forall x \in J: \ \begin{cases} \varphi_i'(x) = f_i\left(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right) \\ i = \overline{1, n} \end{cases},$$

або у векторній формі:

***<u>Означення</u>**. Функція $y = \varphi(x)$, $\varphi \in C^1(J)$, $\varphi : J \to R$, $J \subseteq R$, називається розв'язком системи (35), якщо*

1) $\forall x \in J: \ \left(x, \varphi(x)\right) \in D$,

2) $\forall x \in J: \ \varphi'(x) = f\left(x, \varphi(x)\right)$.

Часто нормальну систему розв'язати простіше, якщо її попередньо звести до рівняння n-го порядку. Цей метод називається методом виключення.

Припустимо, що функції f_i — диференційовані n–1 разів. Диференціюємо по x перше (взагалі кажучи, можна будь-яке) рівняння системи (34) n–1 разів, змінюючи після кожного диференціювання похідні y_i' їх значеннями з системи (34). Тобто

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} y_n' \overset{(34)}{=} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n \equiv \Phi_2(x, y_1, \ldots, y_n);$$

$$y_1''' = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} \cdot y_1' + \ldots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \cdot y_n' \overset{(34)}{=}$$

$$= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} \cdot f_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \cdot f_n \equiv \Phi_3(x, y_1, \ldots, y_n)$$

. . . .

По аналогії

$$y_1^{(n)} = \Phi_n(x, y_1, \ldots, y_n). \tag{36}$$

Припустимо, що якобіан $\dfrac{D(f_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1})}{D(y_2, y_3, \ldots, y_n)} \neq 0$. Тоді, згідно теоремі про існування неявних функцій система рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_1^{(k)} = \Phi_k(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}, \quad k = \overline{2, n-1} \tag{37}$$

розв'язна відносно $y_2, \ldots, y_n$ (в околі кожної точці, де якобіан відмінний від нуля). При цьому $y_2, \ldots, y_n$ виразяться через $x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$, тобто

$$\begin{cases} y_i = \omega_i\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right) \\ i = \overline{2, n}. \end{cases} \tag{38}$$

З урахуванням системи (37) та співвідношення (38) дістанемо рівняння *n*-го порядку

$$y_1^{(n)} = \Phi_n\left(x, y_1, \omega_2\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right), ..., \omega_n\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right)\right) \equiv f\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right),$$

тобто

$$y_1^{(n)} = f\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}\right). \qquad (39)$$

В теорії звичайних диференціальних рівнянь доведено, що розв'язок $y_1 = \varphi(x)$ рівняння (39) і функції $y_2, ..., y_n$, знайдені при $y_1 = \varphi(x)$ з (38), складають розв'язок системи (34). Та навпаки, якщо $y_1, ..., y_n$ — розв'язок системи (34), то y_1 - розв'язок рівняння (39).

Рівняння (39) називається рівнянням *n*-го порядку, рівносильним до системи (34) у тому розумінні, що задача інтегрування системи (34) рівносильна до задачі інтегрування рівняння (39).

<u>Приклад 1</u>. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} z' = \dfrac{(z+1)^2}{y} \\ y' = z + 1. \end{cases} \qquad (40)$$

<u>Розв'язок</u>. Продиференціюємо по *x* друге рівняння системи (40): $y'' = z'$. З урахуванням першого рівняння маємо $y'' = \dfrac{(z+1)^2}{y}$. Ясно, що ми будемо одержувати диференціальне рівняння другого порядку з невідомою функцією $y(x)$. Це означає, що з останнього рівняння треба виключити *z*. З другого рівняння системи (40) (воно тут являє собою систему (37)) знайдемо значення *z* як функції від *x*, *y*, y', а саме

$$z = y' - 1. \qquad (41)$$

Дістанемо рівняння другого порядку відносно $y(x)$:

$$y'' = \frac{(y')^2}{y}\ . \tag{42}$$

Розв'яжемо рівняння (42). Це рівняння в точних похідних.

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}\ (y' \neq 0), \quad \left(\ln|y'|\right)' = \left(\ln|y|\right)' \Rightarrow y' = c_1 y\,.$$

звідки $\frac{y'}{y} = c_1\ (y \neq 0), \quad \left(\ln|y|\right)' = c_1, \ \ y = c_2 e^{c_1 x}$.

З (41) $z = \left(c_2 e^{c_1 x}\right)' - 1$, або $z = c_1 c_2 e^{c_1 x} - 1$. Остаточно,

$\begin{cases} y = c_2 e^{c_1 x} \\ z = c_1 c_2 e^{c_1 x} - 1 \end{cases}$ — загальний розв'язок системи (40).

При розв'язуванні рівняння (42) ми могли загубити розв'язки, для яких $y' = 0$, тобто $y = c$. Для вихідної системи це рівнозначно утраті сукупності розв'язків $y = c,\ z = -1$. Ці розв'язки – частинні, вони містяться у загальному при $c_1 = 0, c_2 = c$.

Зауваження. Іноді зручніше виключати з системи не невідомі функції, а деякі вирази від них. Наприклад, у прикладі 1 зручніше виключити не z, а $z + 1$, тоді рівність (41) набирає вигляду $z + 1 = y'$.

Приклад 2. *Розв'язати систему рівнянь методом виключення.*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 3y - z \\ \dot{z} = x + 2y + 3z \end{cases}. \tag{43}$$

Розвязок. Продиференціюємо 2 рази перше рівняння системи (43) по незалежній змінній t, враховуючи кожного разу значення $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ з системи (43). Після першого диференціювання маємо: $\ddot{x} = 2\dot{x} + \dot{y}$, або

$\ddot{x} = 2(2x + y) + (x + 3y - z)$, або $\ddot{x} = 5x + 5y - z$. Після другого диференціювання $\dddot{x} = 5\dot{x} + 5\dot{y} - \dot{z}$ або

$$\dddot{x} = 16x + 18y - 8z. \qquad (44)$$

Складемо систему вигляду (37):

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \ddot{x} = 5x + 5y - z \end{cases}. \qquad (45)$$

Оскільки якобіан $\dfrac{D(f_1, \Phi_2)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, то система розв'язна відносно y і z. З першого рівняння системи (45)

$$y = \dot{x} - 2x. \qquad (46)$$

З урахуванням і другого рівняння

$$z = -\ddot{x} + 5\dot{x} - 5x. \qquad (47)$$

Співвідношення (46) та (47) складають співвідношення (38).

Підставляючи (46)і (47) в (44), дістанемо рівняння 3-го порядку відносно $x(t)$: $\dddot{x} - 8\ddot{x} + 22\dot{x} - 20x = 0$. Це ЛОР другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Відповідне до нього рівняння

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 22\lambda - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10) = 0$$

має корені $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 + i, \lambda_3 = 3 - i$. Звідси

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \cos t + c_3 e^{3t} \sin t$$

— загальний розв'язок рівняння. З (46) і (47) знайдемо функції $z(t)$ і $y(t)$:

$$y = \left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \cos t + c_3 e^{3t} \sin t\right)' - 2\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \cos t + c_3 e^{3t} \sin t\right) \equiv$$
$$\equiv e^{3t}\left((c_2 + c_3)\cos t + (c_2 - c_3)\sin t\right)$$

$$z = -\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \cos t + c_3 e^{3t} \sin t\right)'' + 5\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \cos t + c_3 e^{3t} \sin t\right)' -$$
$$- 5\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \cos t + c_3 e^{3t} \sin t\right) \equiv$$
$$\equiv c_1 e^{2t} + \left(2c_2 - c_3\right) e^{3t} \cos t + \left(c_2 + 2c_3\right) e^{3t} \sin t \, .$$

Отже,

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \cos t + c_3 e^{3t} \sin t \\ y = e^{3t} \left(\left(c_2 + c_3\right)\cos t + \left(c_3 - c_2\right)\sin t\right) \\ z = c_1 e^{2t} + \left(2c_2 - c_3\right) e^{3t} \cos t + \left(c_2 + 2c_3\right) e^{3t} \sin t \end{cases}$$

- загальний розв'язок вихідної системи.

§2. *Лінійні системи диференціальних рівнянь*

а) Загальна теорія.

Лінійна однорідна система звичайних диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_k}{dx} = \sum\limits_{l=1}^{n} P_{kl}(x) y_l + f_k(x), \\ k = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{48}$$

або у векторному вигляді:

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y + f(x), \tag{49}$$

де $Y = col\left(y_1, ..., y_n\right)$, $P(x) = \left(P_{kl}(x)\right)_1^n$, $f(x) = col\left(f_1(x), ..., f_n(x)\right)$.

Якщо в (49) $f(x) \equiv 0$, то

$$\frac{dY}{dx} = P(x)Y \tag{50}$$

— лінійна однорідна система.

Припустимо, що функції P_{kl}, $f_k \in C(J)$, $k, l = \overline{1, n}$.

***<u>Означення</u>**. Фундаментальною системою розв'язків* (ФСР) *або базисом системи* (50) *на J називається n* ЛНЗ *на J її розв'язків $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{pmatrix}$, ..., $Y_n = \begin{pmatrix} y_{n1} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$, тобто таких розв'язків, для яких тотожності*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{ik} \equiv 0,\ k = \overline{1, n},\ x \in J.$$

(α_i - сталі числа), виконуються тільки при $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

<u>Теорема</u> (про загальний розв'язок ЛОСР). *Якщо $Y_1, \ldots, Y_n$ — ФСР лінійної однорідної системи (50), то її загальний розв'язок має вигляд:*

$$Y = c_1 Y_1 + \ldots + c_n Y_n,$$

де c_i — довільні сталі, або у скалярному вигляді

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} c_i y_{ki},\ k = \overline{1, n}.$$

<u>Теорема</u> (про загальний розв'язок ЛНСР). *Загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь дорівнює сумі загального розв'язку відповідної лінійної однорідної системи*

$$Y_0 = c_1 Y_1 + \ldots + c_n Y_n$$

та деякого частинного розв'язку $Y = z(x) = col(z_1(x), \ldots, z_n(x))$ лінійної неоднорідної системи, тобто

$$Y = Y_0 + z(x) \equiv c_1 Y_1 + \ldots + c_n Y_n + z(x),$$

або у скалярному вигляді

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} c_i y_{k\,i} + z_k(x),\ k = \overline{1,n}.$$

Знаючи ФСР лінійної однорідної системи, відповідної даній лінійній системі, завжди можна знайти загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи методом варіацій сталих Лагранжа (метод варіацій Лагранжа вивчить самостійно).

Одним з класів лінійних систем, які інтегруються квадратурами, є системи зі сталими коефіцієнтами.

б) Методи розв'язання ЛОСР зі сталими коефіцієнтами.

Лінійна однорідна система рівнянь

$$\frac{dY}{dx} = AY\,, \tag{51}$$

де $A = (a_{kl})_{k,l=1}^{n}$ — стала дійсна матриця, завжди інтегруєма квадратурами. Одним з методів будування ФСР є метод Ейлера.

Лінійній системі (51) ставиться у відповідність характеристичне рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0\,, \qquad \left(\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \right) \tag{52}$$

Його корені називаються характеристичними числами системи (51). Структура ФСР системи (51) залежить від значінь її характеристичних чисел. Розрізняють такі випадки:

I. $\lambda = \lambda_1$ — простий дійсний корінь характеристичного рівняння. Йому відповідає частинний розв'язок системи (51) вигляду

$$y = \gamma\, e^{\lambda_1 x}, \tag{53}$$

де γ — властивий вектор матриці *A*, що відповідає власному значенню λ_1 цієї матриці. Вектор $\gamma = col(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ означається з системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь

$$(A - \lambda E)\gamma = 0. \tag{54}$$

Очевидно, що γ — дійсний вектор.

2. $\lambda_1 = a + b\,i$, $b \neq 0$ - простий корінь характеристичного рівняння (52). Тоді $\lambda_2 = a - b\,i$ також простий корінь рівняння (52). Аналогічним чином, як у п.1 побудуємо частинний розв'язок системи (51) у вигляді (53), відповідне корінню $\lambda_1 = a + b\,i$ (або $\lambda_2 = a - b\,i$). Власний вектор γ також визначається з системи (54). Відокремлюючи у цьому рівнянні дійсну та умовну частини, дістаємо два дійсних лінійно незалежних розв'язка системи (54). Дійсні розв'язки, відповідні кореневі $\lambda_2 = a - b\,i$ (або $\lambda_1 = a + b\,i$) будуть лінійно залежними з знайденими.

Отже, двом простим комплексно спряженим корінням $\lambda_{1,2} = a \pm b\,i$ відповідають два дійсних лінійно незалежних розв'язки системи (51).

3. Якщо $\lambda = \lambda_1$ - дійсний корінь характеристичного рівняння кратності $k > 1$, то розглянемо матрицю $A - \lambda_1 E$. Знайдемо її порядок *n*, ранг *r* та дефект $def = m = n - r$. Можливі два випадки:

3а) якщо $def(A - \lambda_1 E) = k$, то *k* ЛНЗ розв'язки мають вигляд

$$y_1 = \gamma_1\, e^{\lambda_1 x}, ..., y_k = \gamma_k\, e^{\lambda_1 x},$$

де γ_i — ЛНЗ власні вектори матриці *A*, відповідні власному значенню λ_1, що визначаємо з системи (54).

3б) якщо $def\left(A-\lambda_1 E\right)<k$, то при знаходженні k відповідних ЛНЗ розв'язків використовують метод невизначених коефіцієнтів. Суть його застосування у даному випадку полягає в наступному.

k ЛНЗ розв'язків шукаються не явно, а знаходиться *k*-параметрична сукупність функцій, яка потім і входить до загального розв'язку як блок, що відповідає кореню кратності *k*. Цей блок шукається у вигляді

$$Y=P_{k-m}(x)e^{\lambda_1 x}, \tag{55}$$

де $P_{k-m}(x)=col\left(P_{i,k-m}(x)\right)$, $P_{i,k-m}(x)$ - поліном степеня *k-m* з невизначеними коефіцієнтами. Підставляючи розв'язок (55) в систему (51), *k* коефіцієнтів покладемо довільними параметрами, а решті виражаємо через них.

<u>Примітка</u>. Якщо $\lambda_1=a+bi$, то $\lambda_2=a-bi$ - також буде коренем характеристичного рівняння та притому ж тієї ж кратності *k*. Знайшовши зазначеним у п.3 методом *k* ЛНЗ комплексних розв'язків, що відповідають кореневі $a+bi$ та відокремлюючи в них дійсні та умовні частини, дістаємо 2*k* ЛНЗ дійсних частинні розв'язки. Розв'язки, відповідні до кореня $a-bi$, будуть ЛЗ з розв'язками, що відповідають кореневі $a+bi$.

Відомо, що різним кореням характеристичного рівняння відповідають ЛНЗ розв'язки системи (51). Отже знайшовши розв'язки, відповідні до всіх коренів характеристичного рівняння (52) з урахуванням кратності, дістаємо ФСР системи (51). Загальний розв'язок знайдемо, використовуючи теорему про загальний розв'язок ЛНСР.

Лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами завжди інтегруються квадратурами, якщо вільний член $f_i(x)$, при $i=\overline{1,n}$, є елементарними функціями. Для цього можна використовувати метод варіації сталих Лагранжа.

<u>Приклад 3</u>. Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + 4y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases}.$$

Розв'язання. Це — ЛОСР зі сталими коефіцієнтами. Укладемо та розв'яжемо характеристичне рівняння.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Його корені $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ - прості.

Знайдемо власний вектор матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, відповідний до власного значення $\lambda = -2$, тобто розв'яжемо систему (54).

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\gamma = 0, \quad \gamma_1 + 4\gamma_2 = 0.$$

Власний вектор $\gamma = \begin{pmatrix} -4\gamma_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$. Оберемо $\gamma_2 = 1$, тоді $\gamma = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отже, знайдений розв'язок $y_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x}$ або в скалярній формі

$$\begin{cases} y_{11} = -4e^{-2x}, \\ y_{12} = e^{-2x}. \end{cases}$$

Аналогічно для $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\gamma = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ та } y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}.$$

або в скалярній формі $\begin{cases} y_{21} = e^{3x} \\ y_{22} = e^{3x} \end{cases}.$

Загальний розв'язок початкової системи має вигляд

$$Y = c_1\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}e^{-2x} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{3x}$$ або в скалярній формі

$$\begin{cases} y_1 = -4c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}, \\ y_2 = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}. \end{cases}$$

<u>Приклад 4</u>. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = -7y_1 - 8y_2 \\ y_2' = 4y_1 + y_2. \end{cases}$$

<u>Розв'язання.</u> Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix}-7-\lambda & -8\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$ має прості корені $\lambda_1 = -3 + 4i$ та $\lambda_2 = -3 - 4i$. Знайдемо власний вектор матриці A, відповідний до власного значення $\lambda_2 = -3 - 4i$.

$$\begin{pmatrix}-4+4i & -8\\ 4 & 4+4i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} = 0,\ \ (i-1)\gamma_1 = 2\gamma_2,\ \text{звідки}\ \gamma = \begin{pmatrix}2\\ -1+i\end{pmatrix}.$$

Дістали комплексновизначний розв'язок

$$\begin{cases} y_1 = 2e^{(-3-4i)x} \equiv 2e^{-3x}(\cos 4x - i\sin 4x) \\ y_2 = (-1+i)e^{(-3-4i)x} \equiv e^{-3x}(-1+i)(\cos 4x - i\sin 4x) \end{cases}. \qquad (56)$$

Виділимо у розв'язку (56) дійсну та умовну частини:

$$\text{Re}: \begin{cases} y_{11} = 2e^{-3x}\cos 4x \\ y_{12} = e^{-3x}(-\cos 4x + \sin 4x), \end{cases} \qquad \text{Im}: \begin{cases} y_{21} = -2e^{-3x}\sin 4x \\ y_{22} = e^{-3x}(\cos 4x + \sin 4x). \end{cases} \qquad (57)$$

(57) – два дійсних ЛНЗ розв'язки, відповідні кореням $\lambda_1 = -3 + 4i$ та $\lambda_2 = -3 - 4i$. Отже, загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = 2e^{-3x}(c_1\cos 4x - c_2\sin 4x) \\ y_2 = e^{-3x}[(c_2 - c_1)\cos 4x + (c_1 + c_2)\sin 4x]. \end{cases}$$

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Це - ЛОСР 3-го порядку. Характеристичне рівняння має корені $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. $\lambda_1 = 2$ — простий корінь. Відповідний до нього власний вектор знайдемо з системи (54):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ тобто } \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_3 \\ \gamma_1 = \gamma_2 \end{cases}, \text{ звідки } \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдено розв'язок $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ або $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{2t} \\ z = e^{2t} \end{cases}$.

$\lambda_2 = 3$ - корінь характеристичного рівняння кратності $k = 2$. Укладемо матрицю $(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, її порядок $n=3$, ранг $r=1$ та дефект $def = n - r = 2 = k$. Отже, має місце випадок 3а). Система (54) приймає вигляд $\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0$, або

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3. \tag{58}$$

Побудуємо, враховуючи (58), два ЛНЗ власних вектори $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, два ЛНЗ розв'язки вихідної системи $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$, $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$. Загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

або у скалярній формі

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3) e^{3t} \\ y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ z = c_1 e^{2t} + c_3 e^{3t} \end{cases}.$$

<u>Приклад 6.</u> *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - 4y_2. \end{cases}$$

<u>Розв'язок</u>. Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ має корінь $\lambda_1 = -3$ кратності $k = 2$. Матриця $(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ має порядок $n = 2$, ранг $r = 1$ та дефект $def = 1 < 2 = k$ (випадок 3б)). Для знаходження загального розв'язку вихідної системи скористуємося методом невизначених коефіцієнтів. Знайдемо блок, відповідний до кореня $\lambda_1 = -3$ кратності 2 у вигляді:

$$\begin{cases} y_1 = (Ax + B) e^{-3x} \\ y_2 = (Cx + D) e^{-3x} \end{cases}. \tag{59}$$

Підставимо розв'язок (59) в вихідну систему:

$$\left.\begin{cases} (A - 3Ax - 3B) e^{-3x} = (-2Ax - 2B - Cx - D) e^{-3x} \\ (C - 3Cx - 3D) e^{-3x} = (Ax + B - 4Cx - 4D) e^{-3x} \end{cases} \right| : e^{-3x}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|l}
x^1 & \left.\begin{array}{r} -3A=-2A-C \\ -3C=A-4C \end{array}\right\} \qquad A=C \\
x^0 & \left.\begin{array}{r} A-3B=-2B-D \\ C-3D=B-4D \end{array}\right\} \qquad B=D+C
\end{array}$$

Два коефіцієнти укладемо довільними параметрами: $C = c_1$, $D = c_2$. Інші виразимо через них: $A = c_1$, $B = c_1 + c_2$. Отже, загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$\begin{cases} y_1 = (c_1 x + c_1 + c_2)e^{-3x} \\ y_2 = (c_1 x + c_2)e^{-3x} \end{cases}.$$

***<u>Приклад 7</u>**. Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + \dfrac{2}{\sin t} \\ \dot{y} = 5x - 2y \end{cases}.$$

<u>Розв'язок</u>. Це — ЛНСР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо її методом Лагранжа. Для цього спочатку розв'яжемо відповідну ЛОСР: $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 5x - 2y. \end{cases}$

Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 + 1 = 0$ має корені $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

$\lambda_1 = i$:

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix}\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}.$$

Комплексновизначний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{it}, \qquad \begin{cases} x = \cos t + i \sin t \\ y = (2-i)(\cos t + i\sin t) \end{cases}$$

$$\mathrm{Re}: \begin{cases} x_1 = \cos t \\ y_1 = 2\cos t + \sin t, \end{cases} \qquad \mathrm{Im}: \begin{cases} x_2 = \sin t \\ y_2 = 2\sin t - \cos t. \end{cases}$$

Загальний розв'язок ЛОСР має вигляд:

$$\begin{cases} x_0 = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y_0 = c_1 (2\cos t + \sin t) + c_2 (2\sin t - \cos t) \end{cases}$$

Тоді загальний розв'язок ЛНСР, згідно до методу Лагранжа, шукається у вигляді:

$$\begin{cases} x = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t \\ y = c_1(t)(2\cos t + \sin t) + c_2(t)(2\sin t - \cos t) \end{cases}.$$

При цьому функції $c_i'(t)$ повинні відповідати системі

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = \dfrac{2}{\sin t} \\ c_1'(t)(2\cos t + \sin t) + c_2'(t)(2\sin t - \cos t) = 0, \end{cases}$$

Остання система – лінійна неоднорідна алгебраїчна система відносно невідомих функцій $c_i'(t)$. Розв'яжемо її, користуючись правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ 2\cos t + \sin t & 2\sin t - \cos t \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{\sin t} & \sin t \\ 0 & 2\sin t - \cos t \end{vmatrix} = 4 - 2\frac{\cos t}{\sin t},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos t & \dfrac{2}{\sin t} \\ 2\cos t + \sin t & 0 \end{vmatrix} = -4\frac{\cos t}{\sin t} - 2.$$

Звідки

$$c_1'(t) = 2\frac{\cos t}{\sin t} - 4, \qquad c_2'(t) = 2 + 4\frac{\cos t}{\sin t},$$

та $c_1(t) = 2\ln|\sin t| - 4t + c_1$, $c_2(t) = 2t + 4\ln|\sin t| + c_2$.

Отже, загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 2(\cos t + 2\sin t)\cdot \ln|\sin t| + 2t\cdot(\sin t - 2\cos t),$$

$$y = c_1(2\cos t + \sin t) + c_2(2\sin t - 2\cos t) + 10\sin t \cdot \ln|\sin t| - 10t\cos t .$$

§3. Системи у симетричній формі

Системою звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі називається система рівнянь вигляду

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,...,x_n)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x_1,...,x_n)} . \tag{60}$$

Ця система рівносильна системі $n-1$ рівнянь в нормальній формі

$$\frac{dx_i}{dx_n} = ... = \frac{X_i(x_1,...,x_n)}{X_n(x_1,...,x_n)},\ i = \overline{1,n-1} . \tag{61}$$

<u>Визначення</u>. *Неперервно-диференційована в області визначення системи (60) функція $\psi(x_1,...,x_n)$ називається першим інтегралом цієї системи, якщо: 1) $\psi(x_1,...,x_n) \neq const$ в цієї області, та 2) $\psi(x_1,...,x_n) \equiv const$, коли точка $(x_1,...,x_n)$ пробігає інтегральну криву системи (60).*

Якщо відомо *n-1* незалежних перших інтегралів системи (60) (тобто таких $\psi_i(x_1,...,x_n)$, $i = \overline{1,n-1}$, що якобіан

$$\frac{D(\psi_1,...,\psi_{n-1})}{D(x_1,...,x_{n-1})} \neq 0,$$

то сукупність рівностей

$$\psi_i(x_1,...,x_n) = c_i, \quad i = \overline{1,n-1}, \tag{62}$$

де c_i - довільні сталі, визначає загальний інтеграл цієї системи.

Систему рівнянь (60) можна розв’язати методом знаходження інтегруємих комбінацій. Його суть у тому, що за допомогою арифметичних операцій з рівняння даної системи утворюють інтегруємі комбінації, тобто легко інтегруємі рівняння відносно нової невідомої функції $u(x_1,...,x_n)$.

При цьому часто зручно застосовувати властивість рівних дробів: якщо маємо рівні дробі

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n},$$

то $\forall k_1,...,k_n$:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_1a_1+...+k_na_n}{k_1b_1+...+k_nb_n}.$$

Приклади розв'язування системи в симетричній формі розглянемо в наступній главі при розв'язуванні рівнянь у частинних похідних 1-го порядку.

ГЛАВА 3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ 1-ГО ПОРЯДКУ В ЧАСТИНИХ ПОХІДНИХ

§1. Однорідне рівняння. Задача Коші

Визначення. *Лінійним однорідним рівнянням 1-го порядку в частинних похідних називається рівняння вигляду*

$$X_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+X_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \tag{63}$$

де u - невідома функція від $x_1,...,x_n$; $X_1,...,X_n$ - задані функції своїх аргументів.

Припустимо, що $X_i \in C_U^1$, де U — окіл точки $x^0=\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$, та $\sum_{i=1}^{n} X_i^2\left(x^0\right)>0$.

Визначення. *Система звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі (60) називається симетричною системою, відповідної до рівняння (63).*

***Теорема* (про загальний розв'язок рівняння (63)).** *Загальний розв'язок рівняння (63) має вигляд*

$$u = \Phi(\psi_1, ..., \psi_{n-1}), \tag{64}$$

де Φ *- довільна диференційована функція своїх аргументів;* ψ_i, $i = \overline{1, n-1}$ *- незалежні перші інтеграли відповідної симетричної системи (60).*

Таким чином, задача розв'язування рівняння (63) звелася до побудови загального інтегралу симетричної системи (60).

Приклад 1. *Розв'язати рівняння*

$$e^{-2z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{e^{-2z}}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{65}$$

Розв'язок. (65) – це лінійне однорідне рівняння 1-го порядку в частинних похідних. Укладемо відповідну симетричну систему

$$\frac{dx}{e^{-2z}} = \frac{dy}{y^2} = \frac{xdz}{e^{-2z}}. \tag{66}$$

Треба знайти 2 незалежних перших інтеграли системи (66). Один з них знайдемо з рівняння

$$\frac{dx}{e^{-2z}} = \frac{xdz}{e^{-2z}}, \qquad \frac{dx}{x} = dz, \qquad x = c_1 e^z, \qquad c_1 = \frac{x}{e^z}. \tag{67}$$

(67) – перший інтеграл системи (66). Ще один перший інтеграл знайдемо з рівняння $\frac{dy}{y^2} = \frac{xdz}{e^{-2z}}$, де з врахуванням (67) $x = c_1 e^z$. Тоді $\frac{dy}{y^2} = c_1 e^{3z} dz$,

$-\frac{1}{y} = \frac{c_1}{3} e^{3z} - c_2$.

Замінюючи c_1 значенням з (67), дістаємо $c_2 = \frac{1}{y} + \frac{x}{3}e^{2z}$ — перший інтеграл системи (66).

Покажемо, що знайдені перші інтеграли $c_1 = \frac{x}{e^z}$ і $c_2 = \frac{1}{y} + \frac{x}{3}e^{2z}$ — функціонально незалежні. Оскільки якобіан

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{e^z}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y} + \frac{x}{3}e^{2z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{e^z}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} + \frac{x}{3}e^{2z}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{e^z} & \frac{e^{2z}}{3} \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^2 e^z} \neq 0, \text{ то}$$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{x}{e^z} \\ c_2 = \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{3}e^{2z} \end{cases}$$ — загальний інтеграл системи (66).

$$u = f\left(\frac{x}{e^z}, \frac{1}{y} + \frac{x}{3}e^{2z}\right)$$ — загальний розв’язок рівняння (65),

де f — довільна диференційована функція своїх аргументів.

Приклад 2. *Розв’язати симетричну систему*

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x + 3y}. \tag{68}$$

Розв’язок. Знайдемо два незалежних перших інтеграли системи.

I. $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad y = c_1 x$ і $c_1 = \frac{y}{x}$ - перший інтеграл.

II. Ще один перший інтеграл знайдемо, побудував інтегровану комбінацію, використовуючи властивість рівних дробів. Уклавши $k_1 = 1$ і $k_2 = 3$, дістанемо рівняння

$$\frac{dx+3dy}{x+3y}=\frac{dz}{x+3y} \qquad \text{або} \qquad d(x+3y)=dz\,.$$

Звідси $x+3y-z=c_2$ — перший інтеграл симетричної системи. Оскільки (перевірити самостійно) знайдені перші інтеграли незалежні, то

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}=c_1 \\ x+3y-z=c_2 \end{cases} \text{— загальний інтеграл системи.}$$

<u>Приклад 3.</u> *Розв'язати рівняння*

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(z-xy)\frac{\partial u}{\partial z}=0\,. \tag{69}$$

<u>Розв'язок</u>. Відповідна лінійному однорідному рівнянню (69) симетрична система

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-xy}$$

має перший інтеграл $c_1=\dfrac{y}{x}$ (з $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$). Для того, щоб знайти ще один перший інтеграл, використаємо властивість рівних дробів, поклавши $k_1=y$, $k_2=x$, $k_3=1$:

$$\frac{ydx+xdy+dz}{yx+xy+(z-xy)}=\frac{dx}{x},$$

$\dfrac{d(xy+z)}{xy+z}=\dfrac{dx}{x}$ звідки $\ln|xy+z|=\ln|x|+\ln|c_2|$ і $c_2=\dfrac{xy+z}{x}$ - перший інтеграл симетричної системи. Загальний розв'язок рівняння (69)

$$u=f\left(\frac{y}{x},\frac{xy+z}{x}\right),$$

де f – довільна диференційована функція.

§2. Задача Коші

Задача Коші для лінійного однорідного рівняння 1-го порядку в частинних похідних ставиться так:

знайти такий розв’язок $u(x_1,...,x_n)$ рівняння (63), що

$$u=\varphi(x_1,...,x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n=x_n^0, \tag{70}$$

де x_n^0 — задане число, $\varphi(x_1,...,x_{n-1})$ — задана диференційована функція своїх аргументів.

У випадку, коли шукана функція залежить від двох незалежних змінних, тобто коли ми маємо рівняння

$$X(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

задача Коші полягає в тому, щоб знайти розв’язок $z=f(x,y)$, що задовольняє початковим умовам $z=\varphi(y)$ при $x=x_0$. Геометрично це означає, що серед всіх інтегральних поверхонь, визначаємих даним рівнянням, шукається інтегральна поверхня $z=f(x,y)$, яка проходить через криву $z=\varphi(y)$, що лежить у площині $x=x_0$.

Задача Коші розв’язується так: в загальному інтегралі (62) покладемо $x_n=x_n^0$:

$$\begin{cases}\psi_i\left(x_1,...,x_{n-1},x_n^0\right)=\overline{c_i}\\ i=\overline{1,n-1}\end{cases}. \tag{71}$$

Так як ψ_i — незалежні інтеграли системи (60), то система (71) однозначно розв’язана відносно $x_1,...,x_{n-1}$ в околі точки x^0, тобто

$$\begin{cases}x_i=\omega_i(\overline{c}_1,...,\overline{c}_{n-1})\\ i=\overline{1,n-1}\end{cases}.$$

Тоді шуканий розв'язок задачі Коші (63), (70) є

$$u = \varphi\left(\omega_1\left(\psi_1,...,\psi_{n-1}\right),...,\omega_{n-1}\left(\psi_1,...,\psi_{n-1}\right)\right).$$

З побудови розв'язку очевидно, що він однозначно визначається початковими даними.

Приклад 4. *Розв'язати задачу Коші*

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} + (x-y)\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ u = x^2 - 2e^z \quad \text{при} \quad y = 0. \end{cases} \tag{72}$$

Розв'язок. Відповідна до рівняння (72) симетрична система має вигляд

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x-y}.$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},\ \ xdx = ydy,\ x^2 - y^2 = c_1$$

$$\frac{d(x-y)}{y-x} = \frac{dz}{x-y}\ ,\ -x+y = z - c_2,\ x - y + z = c_2$$

Загальний розв'язок рівняння (72) - $u = f\left(x^2 - y^2, x - y + z\right)$, де f – довільна диференційована функція. Знайдемо розв'язки задачі Коші. В загальному інтегралі симетричної системи

$\begin{cases} x^2 - y^2 = c_1 \\ x - y + z = c_2 \end{cases}$ покладемо $y=0$, та розв'яжемо систему $\begin{cases} x^2 = \bar{c}_1 \\ x + z = \bar{c}_2 \end{cases}$

відносно x і z. $x = \sqrt{\bar{c}_1}$, $z = \bar{c}_2 - \sqrt{\bar{c}_1}$. Тоді шуканий розв'язок задачі Коші дорівнює

$u = \bar{c}_1 - 2e^{c_2 - \sqrt{|c_1|}}$, тобто $u = x^2 - y^2 - 2e^{x-y+z-\sqrt{\left|x^2-y^2\right|}}$.

Зауважимо, що в даному випадку

$$f = \psi_1 - 2e^{\psi_2 - \sqrt{|\psi_1|}} .$$

§3. Неоднорідне рівняння

Означення. *Лінійним неоднорідним рівнянням* 1-*го порядку в частинних похідних називається рівняння вигляду*

$$X_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + X_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1,...,x_n,u). \qquad (73)$$

Припустимо, що $X_i, R \in C_U^1$, $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + R^2 > 0$.

Доведено, що якщо шукати розв'язок рівняння у неявному вигляді

$$z(x_1,...,x_n,u) = 0, \qquad (74)$$

то z є невідомою функцією своїх аргументів та задовольняє лінійному однорідному рівнянню

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + ... + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} + R\frac{\partial z}{\partial u} = 0. \qquad (75)$$

Як відомо, рівнянню (75) відповідає симетрична система

$$\frac{dx_1}{X_1} = ... = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{R}. \qquad (76)$$

Теорема (про загальний розв'язок рівняння (73)). *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд*

$$\Phi(\psi_1,...,\psi_n) = 0,$$

де $\begin{cases} \psi_1(x_1,\dots,x_n,u)=c_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi_n(x_1,\dots,x_n,u)=c_n \end{cases}$ — *загальний інтеграл системи (76), а* Φ *— довільна диференційована функція своїх аргументів.*

Приклад 1. *Розв'язати рівняння*

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u-x^2-y^2. \tag{77}$$

Розв'язок. Лінійне неоднорідне рівняння 1-го порядку вигляду (77) приводиться до лінійного однорідного рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+\left(u-x^2-y^2\right)\frac{\partial z}{\partial u}=0$$

з новою невідомою функцією $z(x,y,u)$. Відповідна однорідному рівнянню симетрична система

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{u-x^2-y^2}$$

має перший інтеграл $c_1=\frac{y}{x}$. Знайдемо ще один перший інтеграл: $k_1=2x$,

$$k_2=2y,\ k_3=1$$

$$\frac{2xdx+2ydy+du}{2x^2+2y^2+u-x^2-y^2}=\frac{dy}{y}, \qquad \frac{d\left(x^2+y^2+u\right)}{x^2+y^2+u}=\frac{dy}{y}.$$

Звідси

$$\frac{x^2+y^2+u}{y}=c_2.$$

Оскільки знайдені перші інтеграли незалежні (перевірити самостійно), то

$$\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{x^2+y^2+u}{y}\right)=0$$

— загальний розв’язок рівняння (77) у неявному вигляді, де Ф — довільна диференційована функція.

Зміст

ГЛАВА І . ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ 2
§1. Основні поняття і визначення 2
§2. Рівняння вищого порядку, що інтегруються в квадратурах 3
§3. Рівняння n-го порядку, що допускають зниження порядку 6
§4. Лінійні однорідні рівняння n-го порядку 12
§5. Лінійні рівняння з постійними коефіцієнтами 13
§6. Лінійні неоднорідні рівняння 17
§7. Рівняння Ейлера. 22
ГЛАВА 2. СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 25
§1. Метод виключення (зведення нормальної системи до рівняння n-го порядку) 25
§2. Лінійні системи диференціальних рівнянь 30
а) Загальна теорія. 30
б) Методи розв'язання ЛОСР зі сталими коефіцієнтами. 32
§3. Системи у симетричній формі 41
ГЛАВА 3. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ 1-ГО ПОРЯДКУ В ЧАСТИНИХ ПОХІДНИХ 42
§1. Однорідне рівняння. Задача Коші 42
§2. Задача Коші 46
§3. Неоднорідне рівняння 48