Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Національний університет “Львівська політехніка”

О. М. Бугрій, Н. В. Бугрій

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчально-методичний посібник

Львів – 2018

УДК 517.95(075.8)

Рецензент:
Г. П. Лопушанська д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Львів, Львівський національний університет
імені Івана Франка);

Рекомендовано
кафедрою диференціальних рівнянь
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету імені Івана Франка
(протокол №4 від 21.10.2016)

Бугрій О.М., Бугрій Н.В. Диференціальні рівняння: Навчально-методичний посібник. – Львів, 2018. – 40 с.

Посібник присвячено розділам теорії звичайних диференціальних рівнянь, які входять у програму курсу “Диференціальні рівняння”.

Посібник розраховано на студентів та науковців, які хочуть ознайомитись з класичними розділами сучасної теорії звичайних диференціальних рівнянь.

УДК 517.9(075.8)

Зміст

Вступ

Посібник призначено для проведення практичних занять з курсу “Диференціальні рівняння” протягом 32 академічних годин. У них подано практичні завдання, які рекомендовано розв’язувати студентам протягом семестру. Курс складається з 17 занять, серед яких – три контрольні роботи. Матеріал заняття 8 студентам пропонуємо опрацювати самостійно. На першу контрольну роботу виносимо матеріал занять 1-4, на другу – занять 6, 7, 9-11, на третю – занять 13-16. Приклади з теми 8 пропонуємо не включати в завдання на контрольних роботах, а винести на екзамен.

Кожне заняття складається з теоретичної та практичної частин. В теоретичній частині стисло подано матеріал, який студенти повинні опрацювати вдома. Практична частина поділена на дві майже однакові за складністю та змістом групи прикладів, одну з яких пропонуємо розглянути зі студентами в аудиторії, а друга група – домашнє завдання.

Для написання посібника використано праці [1]-[4]. Приклади мають потрійну нумерацію. Перші два номери означають підрозділ книги [1] з якої взято приклад, останній – порядковий номер цього прикладу в підрозділі. Приклади, що позначаються *, автори скомпонували окремо від [1].

Посібник розраховано на студентів та науковців, які хочуть ознайомитись з класичними розділами сучасної теорії звичайних диференціальних рівнянь.

§1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них

1. *Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним стосовно похідної*, називатимемо рівняння в нормальній формі

$$y' = f(x, y), \tag{1.1}$$

або рівняння в симетричній формі

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{1.2}$$

Зрозуміло, що (1.1) можна так записати у вигляді (1.2):

$$f(x, y)\,dx - dy = 0. \tag{1.1$'$}$$

Тут і далі вважатимемо, що f, M, N – неперервні на деякій відкритій зв'язній множині $D \subset \mathbb{R}^2$ функції.

Розв'язком диференціального рівняння (1.1) або (1.2) називатимемо неперервно диференційовну функцію, яка при підстановці в рівняння перетворює його в тотожність.

Інтегралом диференціального рівняння (1.1) або (1.2) називатимемо таку функцію $U = U(x, y)$, що рівність

$$U(x, y) = C, \tag{1.3}$$

неявно задає розв'язок рівняння (1.1) або (1.2) відповідно. Тут C – деяка стала з області значень U.

Задача Коші для (1.1) або (1.2) полягає в знаходженні такого розв'язку цього рівняння, який задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.4}$$

де (x_0, y_0) – деяка точка з D.

2. Диференціальне рівняння першого порядку називатимемо *рівнянням з відокремлюваними змінними*, якщо його можна записати у вигляді

$$y' = h(x)\,g(y) \tag{1.5}$$

або

$$M_1(x)M_2(y)\,dx + N_1(x)N_2(y)\,dy = 0. \tag{1.6}$$

Для того щоб розв'язати рівняння (1.5), його треба записати у вигляді (1.6), тобто (1.1'). Для розв'язування (1.6) розділимо це рівняння на $M_2(y)N_1(x)$ і зінтегруємо отриману рівність

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = 0. \tag{1.7}$$

Зауважимо, що розв'язками рівняння (1.6) будуть також функції $x = k_1$ і $y = k_2$, де $N_1(k_1) = 0$ і $M_2(k_2) = 0$ (звісно, якщо такі числа k_1 , k_2 існують).

3. Рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c), \tag{1.8}$$

де a, b, c – числа, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною змінних $y(x) \rightsquigarrow z(x)$, де

$$z = ax + by + c. \tag{1.9}$$

4. Диферeціальне рівняння першого порядку (1.1) називається *однорідним рівнянням*, якщо його можна подати у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.10}$$

Заміна $y(x) \rightsquigarrow z(x)$, де $y = zx$, тобто

$$\frac{y}{x} = z, \tag{1.11}$$

зводить це рівняння до рівняння з відокремлюваними змінними.

Функція $F = F(x, y)$ називається *однорідною функцією виміру* k , якщо $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k F(x, y)$ для всіх $\lambda > 0$.

Рівняння (1.1) є однорідним, якщо $f = f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру. Рівняння (1.2) є однорідним, якщо $M = M(x, y)$ і $N = N(x, y)$ – однорідні функції того самого виміру.

Аудиторні вправи

Перевірити, чи задані функції є розв'язками рівняння:

1.1*. $y = e^{Cx}$, $y = e^{\frac{xy'}{y}}$.

1.2*. $x = ay^2 + by$, $x'''x' = 3x''^2$.

Розв'язати рівняння (чи задачу Коші):

1.2.9. ***1.3*.*** $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$. ***1.2.11.***

1.4*. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$. ***1.3.1.*** ***1.3.13.***

1.5*. $(3y-2x)\,dx + (y-2x)\,dy = 0$.

Домашнє завдання

Перевірити, чи задані функції є розв'язками рівняння:

1.6*. $y = \sin(x + C)$, $y^2 + y'^2 = 1$.

1.7*. $y = ax^2 + bx$, $x(x-2)y'' - (x^2-2)y' + 2(x-1)y = 0$.

Розв'язати рівняння (чи задачу Коші):

1.2.12. ***1.2.13.*** ***1.8*.*** $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0,5$.

1.3.2. ***1.3.14.*** ***1.3.15.*** ***1.3.16.***

§2. Рівняння, звідні до однорідних

1. До однорідних зводяться диференціальні рівняння

$$y' = f\Big(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big) \tag{2.1}$$

за такої умови:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}. \tag{2.2}$$

Це досягається лінійною заміною змінних $(x, y) \rightsquigarrow (\xi, \eta)$, де

$$\begin{cases} x = \xi + x_0, \\ y = \eta + y_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

x_0, y_0 – розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0, \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

У випадку
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \tag{2.5}$$
рівняння (2.1) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни змінних $y(x) \rightsquigarrow z(x)$, де
$$z = a_1 x + b_1 y. \tag{2.6}$$

У випадку $c_1 = c_2 = 0$ рівняння (2.1) вже є однорідним.

2. Звичайне диференціальне рівняння
$$y' = f(x, y) \tag{2.7}$$
або
$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{2.8}$$
називається *узагальнено однорідним рівнянням*, якщо існує таке $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, що заміна змінних $y(x) \rightsquigarrow z(x)$, де
$$y = z^{\alpha}, \tag{2.9}$$
зводить наше рівняння до однорідного рівняння. Параметр α можна знайти з умови, щоб при формальній заміні $x \rightsquigarrow \lambda x$, $y \rightsquigarrow \lambda^{\alpha} y$, $y' \rightsquigarrow \lambda^{\alpha-1} y'$ (або $dx \rightsquigarrow \lambda dx$, $dy \rightsquigarrow \lambda^{\alpha} dy$) вигляд рівняння не змінювався (тобто параметр λ скоротиться).

Аудиторні вправи

Розв'язати рівняння:

1.3.28. ***2.1*.*** $2(y^3 - 2x\sqrt{y^3})\, dx + 3x^2\sqrt{y}\, dy = 0$.

2.2*. $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$. ***2.3*.*** $y^3\, dx + 2(x^2 - xy^2)\, dy = 0$.

2.4*. $4xy^2\, dx + (3x^2 y - 1)\, dy = 0$.

Домашнє завдання

Розв'язати рівняння:

1.3.21. ***1.3.22.*** ***1.3.23.*** ***1.3.24.*** ***1.3.25.*** ***1.3.26.***

§3. Лінійні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

1. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{3.1}$$

де $a \not\equiv 0$, b – неперервні на $(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$ функції, називатимемо *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*. При $b \not\equiv 0$ (3.1) називається *лінійним неоднорідним рівнянням*. Якщо $b \equiv 0$, то рівняння (3.1) називається *лінійним однорідним* диференціальним рівнянням першого порядку.

Для того щоб розв'язати неоднорідне рівняння (3.1), можна використати *метод варіації сталої*:

1) розв'язати відповідне однорідне рівняння, тобто рівняння

$$y' = a(x)y \tag{3.2}$$

(воно є рівнянням з відокремлюваними змінними і його загальний розв'язок має вигляд

$$y(x) = Ce^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}, \tag{3.3}$$

де $x_0 \in (x_1, x_2)$ – фіксована точка);

2) записати загальний розв'язок рівняння (3.1) у вигляді

$$y = \varphi(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}, \tag{3.4}$$

де φ – нова невідома функція;

3) знайти функцію φ, підставивши для цього (3.4) в (3.1).

2. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \tag{3.5}$$

де a і b – неперервні функції на $(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1, \tag{3.6}$$

називається *рівнянням Бернуллі*.

Для того щоб розв'язати рівняння Бернуллі, треба обидві його частини поділити на y^α і зробити заміну $y(x) \rightsquigarrow z(x)$, де

$$z = y^{1-\alpha}. \tag{3.7}$$

Отримаємо рівняння, яке є лінійним стосовно невідомої функції z. При $\alpha > 0$ розв'язком (3.5) буде також функція $y = 0$.

Аудиторні вправи

Розв'язати рівняння:

1.5.4. ***1.5.5.*** ***1.5.6.*** ***1.5.7.*** ***1.5.16.*** ***1.5.17.*** ***1.5.18.***

Домашнє завдання

Розв'язати рівняння:

1.5.2. ***1.5.9.*** ***1.5.12.*** ***1.5.13.*** ***1.5.19.*** ***1.5.27.*** ***1.5.29.***

§4. Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник

1. Диференціальне рівняння

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{4.1}$$

називається *рівнянням в повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $U = U(x,y)$. Щоб розв'язати рівняння (4.1), треба знайти цю функцію U. Тоді загальний інтеграл рівняння (4.1) можна записати у вигляді

$$U(x,y) = C, \tag{4.2}$$

де C – довільна стала з множини значень U.

Якщо функції M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ – неперервні в деякій однозв'язній області D, то тотожність в D

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0 \tag{4.3}$$

є необхідною і достатньою умовою того, щоб рівняння (4.1) було в повних диференціалах. Тоді U шукаємо з системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y), \\ \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y). \end{cases} \tag{4.4}$$

2. Іноді рівняння (4.1), яке не є рівнянням в повних диференціалах, можна звести до рівняння такого типу. *Інтегрувальним множником* для рівняння (4.1) називається функція $\mu = \mu(x,y)$, $\mu \not\equiv 0$, після домноження на яку рівняння (4.1) перетворюється в рівняння в повних диференціалах. Щоб знайти інтегрувальний множник, треба розв'язати рівняння

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} = 0. \tag{4.5}$$

Це зробити можна не завжди. В найпростіших випадках можна вважати, що $\mu = \mu(x)$ або $\mu = \mu(y)$. Не для кожного рівняння існує інтегрувальний множник. Навіть коли він існує, то знайти його буває важко.

Аудиторні вправи

Розв'язати рівняння (або задачу Коші):

1.4.11. ***1.4.5.*** ***4.1*.*** $3x^2(1+\ln y)\,dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy$.

4.2*. $dx + (x + e^{-y}y^2)\,dy = 0$.

4.3*. $\left(\dfrac{y^3}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}\right)dy = \dfrac{y}{x^3}\,dx$. ***1.4.17.*** ***1.4.20.***

Домашнє завдання

Розв'язати рівняння:

1.4.1. ***1.4.12.*** ***1.4.13.*** ***1.4.22.*** ***1.4.27.*** ***1.4.28.***

§5. Контрольна робота 1

На першу контрольну роботу виносимо диференціальні рівняння тих типів, які вивчали на заняттях 1-4.

§6. Неявні диференціальні рівняння першого порядку

Звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0 \tag{6.1}$$

називатимемо *рівнянням, не розв'язаним стосовно похідної*, або *неявним диференціальним рівнянням* першого порядку.

1. Знайти розв'язок рівняння (6.1) можна у таких випадках:

1) алгебрично розв'язати рівняння (6.1) стосовно y'. Отримаємо сукупність рівнянь вигляду

$$\left[\begin{array}{l} y' = f_1(x, y), \\ \vdots \\ y' = f_k(x, y), \end{array}\right. \tag{6.2}$$

де $k \geq 1$. Кожне з цих рівнянь потрібно розв'язати;

2) алгебрично розв'язати рівняння (6.1) стосовно x або y, тобто записати його у вигляді

$$y = g(x, y') \quad (\text{або} \quad x = h(y, y')). \tag{6.3}$$

У цьому випадку розв'язування виконуємо *методом введення параметра*. Він полягає у тому, що розв'язок рівняння (6.1) шукається у параметричному вигляді, де параметром є похідна y'. Отже, вводимо параметр

$$p = \frac{dy}{dx} = y'. \tag{6.4}$$

Тоді матимемо

$$y = g(x, p) \quad (\text{або} \quad x = h(y, p)). \tag{6.5}$$

Якщо тепер взяти повний диференціал від обох частин рівності (6.5) і замінити праві частини отриманих рівностей згідно з формулою

$$dy = p\,dx \quad \left(\text{або} \quad dx = \frac{dy}{p}\right), \tag{6.4'}$$

то одержимо рівняння, яке можна розв'язати стосовно похідної $\dfrac{dx}{dp}$ $\left(\text{або } \dfrac{dy}{dp}\right)$. Розв'яжемо його і запишемо інтеграл цього рівняння у вигляді $\Phi(x,p,C) = 0$, (або $\Psi(y,p,C) = 0$). Тоді розв'язок рівняння (6.1) матиме вигляд

$$\begin{cases} y = g(x,p), \\ \Phi(x,p,C) = 0, \end{cases} \quad \left(\text{або} \quad \begin{cases} x = h(y,p), \\ \Psi(y,p,C) = 0, \end{cases}\right). \tag{6.6}$$

2. Розв'язок $y = y(x)$ рівняння (6.1) називається *особливим розв'язком*, якщо через кожну точку його графіка проходить графік ще одного розв'язку (6.1), який має в цій точці ту саму дотичну, що і розв'язок $y = y(x)$, але не збігається з ним у як завгодно малому околі цієї точки.

Якщо функції F, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial y'}$ – неперервні, то довільний особливий розв'язок рівняння (6.1) задовольняє систему співвідношень

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0. \end{cases} \tag{6.7}$$

Розв'язок цієї системи, який отримуємо формальним вилученням y' з цих двох рівнянь, називатимемо *дискримінантною кривою.* Крім того, особливі розв'язки можуть бути також серед розв'язків системи

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ \dfrac{1}{\dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y}} = 0, \end{cases} \tag{6.8}$$

які також одержуємо формальним вилученням функції y' з цих рівнянь.

Якщо дискримінантна крива є розв'язком рівняння (6.1), то треба перевірити, чи є вона особливим розв'язком рівняння (6.1).

Робимо це так. Нехай $y = y_1(x)$ – дискримінантна крива, а $y=y_2(x,C)$ – однопараметрична сім'я розв'язків (6.1) (явна форма запису розв'язку (6.6)). Якщо з одного рівняння системи

$$\begin{cases} y_1(x) = y_2(x,C), \\ y_1'(x) = \dfrac{\partial y_2(x,C)}{\partial x}, \end{cases} \tag{6.9}$$

можна виключити змінну x чи C, підставити в друге рівняння і отримати тотожність, то y_1 – особливий розв'язок (6.1).

3. Рівняння вигляду

$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y') \tag{6.10}$$

називається *рівнянням Лагранжа.* За допомогою методу введення параметра це рівняння зводиться до лінійного рівняння стосовно функції $x = x(p)$. Крім того, рівняння (6.10) має розв'язки вигляду

$$y = \varphi(q)\,x + \psi(q), \tag{6.11}$$

де q – корінь рівняння $\varphi(q) = q$.

4. Рівняння вигляду

$$y = x\,y' + \psi(y') \tag{6.12}$$

називається *рівнянням Клеро.* Метод введення параметра зводить його до рівності

$$(x + \psi'(p))\,dp = 0. \tag{6.13}$$

Якщо $dp = 0$, то $p = C$ і

$$y = Cx + \psi(C) \tag{6.14}$$

– розв'язок рівняння (6.12). Якщо $x + \psi'(p) = 0$ і $p = \alpha(x)$ – розв'язок цього рівняння, то отримуємо ще один розв'язок (6.12)

$$y = x\,\alpha(x) + \psi(\alpha(x)). \tag{6.15}$$

Цей розв'язок є особливим розв'язком рівняння (6.12).

Аудиторні вправи

Розв'язавши стосовно y', знайти розв'язки рівняння, а також знайти дискримінантні криві:

2.3.2.

Розв'язати рівняння методом введення параметра і знайти дискримінантні криві:

6.1*. $xy' - y = y' \ln(yy')$. ***6.2*.*** $y = xy' - (y'+2)^3$.

2.3.9. ***2.3.10.*** ***2.3.11.*** ***2.3.12.***

Домашнє завдання

Розв'язавши стосовно y', знайти розв'язки рівняння, а також знайти дискримінантні криві:

6.3*. $x\,y'^2 - 2y\,y' + x = 0$.

Розв'язати рівняння методом введення параметра і знайти дискримінантні криві:

2.3.13. ***2.3.14.*** ***2.3.15.*** ***2.3.16.*** ***2.3.17.*** ***2.3.22.***

§7. Рівняння, які дають змогу знизити їхній порядок (I)

Розглянемо *звичайне диференціальне рівняння* n*-го порядку*

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad n \geq 2, \tag{7.1}$$

де F – деяка функція багатьох змінних. Для розв'язування цього рівняння здебільшого треба понизити його порядок, тобто звести його до рівняння меншого за n порядку. Робити так треба доки не отримаємо рівняння першого порядку, методи інтегрування якого ми вже розглянули.

Порядок рівняння (7.1) можна понизити на одиницю у таких випадках:

1) якщо рівняння (7.1) не містить шуканої функції, тобто воно має вигляд

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{7.2}$$

то його порядок понижується при заміні $y(x) \rightsquigarrow z(x)$, де

$$y' = z(x); \tag{7.3}$$

2) якщо рівняння (7.1) не містить незалежної змінної x, тобто має вигляд

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{7.4}$$

то його порядок понижується при заміні $y(x) \rightsquigarrow z(y)$, де

$$y' = z(y). \tag{7.5}$$

При цій заміні іноді можна втратити розв'язки $y = \mathrm{const}$;

3) якщо рівняння (7.1) однорідне стосовно y і його похідних, тобто не змінюється при одночасній заміні

$$y \rightsquigarrow \lambda y, \quad y' \rightsquigarrow \lambda y', \quad \ldots, \quad y^{(n)} \rightsquigarrow \lambda y^{(n)}, \tag{7.6}$$

то його порядок понижується при заміні $y(x) \rightsquigarrow z(x)$, де

$$\frac{y'}{y} = z(x). \tag{7.7}$$

Аудиторні вправи

Розв'язати диференціальні рівняння вищого порядку:

3.2.6. ***7.1*.*** $y'' = 6y^2 y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

7.2*. $xyy'' - xy'^2 = yy'$. ***3.2.13.***

7.3*. $x^4 y''' + 2x^3 y'' - 1 = 0$.

Домашнє завдання

Розв'язати диференціальні рівняння вищого порядку:

3.2.4. ***3.2.9.*** ***3.2.14.*** ***3.2.17.*** ***3.2.29.***

§8. Рівняння, які дають змогу знизити їхній порядок (II)

1. *Узагальнено однорідним* диференціальним рівнянням вищого порядку називається рівняння вигляду

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{8.1}$$

якщо існує таке число α, що для всіх додатних λ

$$F(\lambda x, \lambda^{\alpha} y, \lambda^{\alpha-1} y', \ldots, \lambda^{\alpha-n} y^{(n)}) = \lambda^{m} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}). \quad (8.2)$$

У цьому випадку заміна змінних $y(x) \rightsquigarrow z(t)$, де

$$\begin{cases} x = e^{t}, \\ y = z(t)e^{\alpha t}, \end{cases} \text{для } x > 0 \ \left(\text{або } \begin{cases} x = -e^{t}, \\ y = z(t)e^{\alpha t}, \end{cases} \text{для } x < 0\right), \quad (8.3)$$

зведе наше рівняння до рівняння, яке не містить незалежної змінної t. Його порядок понижуємо заміною $z(t) \rightsquigarrow u(z)$, де

$$z' = u(z). \quad (8.4)$$

При виконанні заміни (8.3) зручно користуватися такою формулою для перерахунку похідних

$$\frac{d}{dx} = e^{-t}\,\frac{d}{dt} \qquad \left(\text{або } \frac{d}{dx} = -e^{-t}\,\frac{d}{dt}\right) \quad (8.5)$$

1. *Лінійним однорідним рівнянням вищого порядку* називається рівняння вигляду

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (8.6)$$

Його порядок можна понизити на одиницю, зробивши заміну змінних $y(x) \rightsquigarrow u(x)$, де

$$y(x) = y_1(x) \int u(x)dx, \quad (8.7)$$

y_1 – який-небудь ненульовий розв'язок рівняння (8.6). Його іноді можна знайти у вигляді

$$y_1(x) = e^{ax}, \quad \text{або} \quad y_1(x) = x^{m} + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad (8.8)$$

де сталі $a, m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ шукаємо, підставляючи (8.8) в (8.6).

Зауважимо, що заміна (8.6) зводить рівняння (8.4) до лінійного однорідного рівняння порядку $n-1$.

Аудиторні вправи

Розв'язати рівняння ***3.2.21.***

Знизивши порядок рівнянь, звести їх до рівнянь першого порядку (розв'язувати отримані рівняння не треба):

3.2.33. ***3.2.34.***

Розв'язати лінійні рівняння вищого порядку:

3.3.17. ***3.3.16.*** ***3.3.18.*** ***3.3.19.***

Домашнє завдання

Розв'язати рівняння:

3.2.22.

Знизивши порядок рівнянь, звести їх до рівнянь першого порядку (розв'язувати отримані рівняння не треба):

3.2.35. ***3.2.36.***

Розв'язати лінійні рівняння вищого порядку:

3.3.11. ***3.3.20.*** ***3.3.21.*** ***3.3.22.***

§9. Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Однорідні рівняння Ейлера

1. *Лінійним однорідним диференціальним рівнянням* n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами* називається рівняння

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{9.1}$$

якщо $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Для отримання загального розв'язку рівняння (9.1) знаходимо всі розв'язки

$$\lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_\ell, \quad \alpha_1 \pm i\beta_1, \quad \ldots, \quad \alpha_s \pm i\beta_s \tag{9.2}$$

так званого *характеристичного рівняння* для (9.1)

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{9.3}$$

Кожному числу з (9.2) ставимо у відповідність певну кількість розв'язків рівняння (9.1) за таким правилом:
1) якщо $\lambda_j \in \mathbb{R}$ – корінь характеристичного рівняння кратності $k_j = 1$, то йому відповідає один розв'язок рівняння (9.1)

$$y_j(x) = e^{\lambda_j x}; \tag{9.4}$$

2) якщо $\lambda_j \in \mathbb{R}$ – корінь характеристичного рівняння кратності $k_j \geq 2$, то йому відповідають k_j розв'язків рівняння (9.1)

$$y_j^1(x) = e^{\lambda_j x}, \quad y_j^2(x) = xe^{\lambda_j x}, \quad \ldots, \quad y_j^{k_j}(x) = x^{k_j-1}e^{\lambda_j x}; \qquad (9.5)$$

3) якщо $\alpha_j \pm i\beta_j \in \mathbb{C}$ – два комплексно спряжені корені характеристичного рівняння (9.3) кратності $k_j = 1$, то їм відповідають два розв'язки рівняння (9.1)

$$y_j^1(x) = e^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x), \quad y_j^2(x) = e^{\alpha_j x}\sin(\beta_j x); \qquad (9.6)$$

4) якщо $\alpha_j \pm i\beta_j \in \mathbb{C}$ – два комплексно спряжені корені характеристичного рівняння (9.3) кратності $k_j \geq 2$, то їм відповідають $2k_j$ розв'язки рівняння (9.1)

$$\begin{gathered} y_j^1(x) = e^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x), \qquad y_j^2(x) = e^{\alpha_j x}\sin(\beta_j x), \\ \vdots \\ y_j^{2k_j-1}(x) = x^{k_j-1}e^{\alpha_j x}\cos(\beta_j x),\ y_j^{2k_j}(x) = x^{k_j-1}e^{\alpha_j x}\sin(\beta_j x). \end{gathered} \qquad (9.7)$$

Зібравши всі знайдені розв'язки y_1, y_2, $\ldots$, y_n рівняння (9.1) (їх має бути точно n), записуємо *загальний дійсний розв'язок* рівняння (9.1)

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x), \qquad (9.8)$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ – довільні сталі.

2. *Однорідним рівнянням Ейлера n-го порядку* називається таке лінійне однорідне рівняння зі змінними коефіцієнтами:

$$a_nx^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1xy' + a_0y = 0, \qquad (9.9)$$

де $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. При $x > 0$ заміною змінних $y(x) \rightsquigarrow u(t)$, де $x = e^t$, рівняння (9.9) зводиться до рівняння (9.1), яке розв'язується методами попереднього пункту.

Другим методом розв'язування рівняння (9.9) є такий метод. Для отримання загального розв'язку рівняння (9.9) знаходимо всі розв'язки

$$\lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_\ell, \quad \alpha_1 \pm i\beta_1, \quad \ldots, \quad \alpha_s \pm i\beta_s \qquad (9.10)$$

так званого *характеристичного рівняння* для (9.9), а саме

$$a_n\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-(n-1))+a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-(n-2))+$$

$$+\ldots+a_2\lambda(\lambda-1)+a_1\lambda+a_0=0. \tag{9.11}$$

Кожному числу з (9.10) ставимо у відповідність певну кількість розв'язків рівняння (9.9) за таким правилом:

1) якщо $\lambda_j\in\mathbb{R}$ – корінь характеристичного рівняння кратності $k_j=1$, то йому відповідає один розв'язок рівняння (9.9)

$$y_j(x)=x^{\lambda_j}; \tag{9.12}$$

2) якщо $\lambda_j\in\mathbb{R}$ – корінь характеристичного рівняння кратності $k_j\geq 2$, то йому відповідають k_j розв'язків рівняння (9.9)

$$y_j^1(x)=x^{\lambda_j},\ \ y_j^2(x)=x^{\lambda_j}\ln x,\ \ldots,\ y_j^{k_j}(x)=x^{\lambda_j}(\ln x)^{k_j-1}; \tag{9.13}$$

3) якщо $\alpha_j\pm i\beta_j\in\mathbb{C}$ – два комплексно спряжені корені характеристичного рівняння (9.11) кратності $k_j=1$, то їм відповідають два розв'язки рівняння (9.9)

$$y_j^1(x)=x^{\alpha_j}\cos(\beta_j\ln x),\quad y_j^2(x)=x^{\alpha_j}\sin(\beta_j\ln x); \tag{9.14}$$

4) якщо $\alpha_j\pm i\beta_j\in\mathbb{C}$ – два комплексно спряжені корені характеристичного рівняння (9.11) кратності $k_j\geq 2$, то їм відповідає $2k_j$ розв'язки рівняння (9.9)

$$y_j^1(x)=x^{\alpha_j}\cos(\beta_j\ln x),\quad y_j^2(x)=x^{\alpha_j}\sin(\beta_j\ln x),$$
$$\vdots$$
$$y_j^{2k_j-1}(x)=(\ln x)^{k_j-1}x^{\alpha_j}\cos(\beta_j\ln x),$$

$$y_j^{2k_j}(x)=(\ln x)^{k_j-1}x^{\alpha_j}\sin(\beta_j\ln x). \tag{9.15}$$

Зібравши всі знайдені розв'язки z_1, z_2, … z_n рівняння (9.9) (їх має бути точно n), записуємо *загальний дійсний розв'язок* рівняння (9.9) у вигляді (9.8).

Аудиторні вправи

Розв'язати лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами:
9.1*. $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$. ***3.4.6.*** ***3.4.7.***
9.2*. $9y'' - 6y' + y = 0$. ***9.3*.*** $y^{(IV)} + y = 0$.
Розв'язати рівняння Ейлера:
3.4.11. ***3.4.12.*** ***3.4.13.*** ***3.4.14.***

Домашнє завдання

Розв'язати лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами:
3.4.1. ***3.4.4.*** ***3.4.9.*** ***3.4.10.***
9.4*. $y^{(IV)} + 16y = 0$.
Розв'язати рівняння Ейлера:
3.4.15. ***3.4.16.*** ***3.4.18.*** ***3.4.20.***

§10. Лінійні неоднорідні рівняння вищого порядку: метод варіації сталих, метод невизначених коефіцієнтів (I)

Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (10.1)$$

якщо $a_n \not\equiv 0$, $f \not\equiv 0$. Загальний розв'язок (10.1) має вигляд

$$y(x) = y_0(x) + z(x), \quad (10.2)$$

де

$$y_0(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) \quad (10.3)$$

– загальний розв'язок відповідного (10.1) *лінійного однорідного рівняння n-го порядку*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (10.4)$$

z – який-небудь частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (10.1). Функцію z можна шукати методом варіації сталих або методом невизначених коефіцієнтів.

1. *Метод варіації сталих* полягає в тому, що z шукаємо у вигляді (10.3), де замість довільних сталих стоять довільні невідомі функції, тобто у вигляді

$$z(x) = \varphi_1(x)y_1(x) + \varphi_2(x)y_2(x) + \ldots + \varphi_n(x)y_n(x). \qquad (10.5)$$

Невідомі функції $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ шукаємо з системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)y_1(x) + \ldots + \varphi_n'(x)y_n(x) = 0, \\ \varphi_1'(x)y_1'(x) + \ldots + \varphi_n'(x)y_n'(x) = 0, \\ \ldots \\ \varphi_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \ldots + \varphi_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ \varphi_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + \varphi_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = \dfrac{f(x)}{a_n(x)}. \end{cases} \qquad (10.6)$$

У частковому випадку рівняння другого порядку

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad (10.1')$$

де $a_2(x) \neq 0$, його частковий розв'язок z шукаємо у вигляді

$$z(x) = \varphi_1(x)y_1(x) + \varphi_2(x)y_2(x), \qquad (10.5')$$

де φ_1, φ_2 – розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)y_1(x) + \varphi_2'(x)y_2(x) = 0, \\ \varphi_1'(x){y_1}'(x) + \varphi_2'(x){y_2}'(x) = \dfrac{f(x)}{a_2(x)}. \end{cases} \qquad (10.6')$$

2. *Метод невизначених коефіцієнтів* можна застосовувати тоді, коли рівняння (10.1) є лінійним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, а права частина f рівняння (10.1) – квазіполіном.

1. Якщо
$$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x), \tag{10.7}$$
де α – фіксоване число, $P_m(x)$ – поліном степеня m, то частковий розв'язок z рівняння (10.1) шукаємо у вигляді
$$z(x) = x^k e^{\alpha x} Q_m(x), \tag{10.8}$$
де $Q_m(x)$ – поліном степеня m з невідомими коефіцієнтами, які знайдемо, підставивши (10.8) в (10.1), $k = 0$ якщо α не є коренем характеристичного рівняння, що відповідає (10.1). Якщо α – корінь характеристичного рівняння, що відповідає (10.1), то k – це кратність цього кореня.

2. Якщо
$$f(x) = e^{\alpha x}(P^1_{m_1}(x)\cos(\beta x) + P^2_{m_2}(x)\sin(\beta x)), \tag{10.9}$$
де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – фіксовані числа, $P^1_{m_1}(x)$, $P^2_{m_2}(x)$ – поліном степеня m_1 та m_2 відповідно, то частковий розв'язок z рівняння (10.1) шукаємо у вигляді
$$z(x) = x^k e^{\alpha x}(Q^1_m(x)\cos(\beta x) + Q^2_m(x)\sin(\beta x)), \tag{10.10}$$
де $m = \max\{m_1, m_2\}$, $Q^1_m(x)$, $Q^2_m(x)$ – два різні поліноми степеня m з невідомими коефіцієнтами, які знайдемо, підставивши (10.10) в (10.1), $k = 0$ якщо $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння, що відповідає (10.1). Якщо $\alpha + i\beta$ – корінь характеристичного рівняння, що відповідає (10.1), то k – це кратність цього кореня.

3. *Лінійним неоднорідним рівнянням Ейлера n-го порядку* називається рівняння
$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = f(x), \tag{10.11}$$
якщо $a_n \neq 0$, $f \not\equiv 0$. Тут $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. При $x > 0$ заміною $y(x) \rightsquigarrow u(t)$, де $x = e^t$, рівняння (10.11) зводиться до лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Застосувавши (якщо це можливо) до нього метод

невизначених коефіцієнтів, знайдемо вигляд його часткового розв'язку $u = z(t)$. Зробивши в цій функції заміну $t = \ln x$, отримаємо вигляд часткового розв'язку рівняння (10.11).

Аудиторні вправи

Розв'язати лінійні неоднорідні рівняння, знаходячи частковий розв'язок неоднорідного рівняння методом варіації сталих:

10.1*. $9y'' + y = \mathrm{ctg}\left(\dfrac{x}{3}\right)$. ***3.4.22.*** ***3.4.24.***

Розв'язати лінійні неоднорідні рівняння, знаходячи частковий розв'язок неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів:

3.4.45. ***10.2*.*** $y'' + 4y = 3\cos x$.

10.3*. $x^2y'' + 3xy' + 2y = 5x^3$.

Домашнє завдання

Розв'язати лінійні неоднорідні рівняння, знаходячи частковий розв'язок неоднорідного рівняння методом варіації сталих:

3.4.25. ***3.4.35.*** ***3.4.36.***

Розв'язати лінійні неоднорідні рівняння, знаходячи частковий розв'язок неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів:

10.4*. $y'' - 9y = 2e^{3x}\cos x$. ***10.5*.*** $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$.

3.4.39.

§11. Лінійні неоднорідні рівняння вищого порядку: метод невизначених коефіцієнтів (II)

Якщо права частина лінійного неоднорідного рівняння має вигляд

$$f = f_1 + f_2, \tag{11.1}$$

то іноді зручніше записати частковий розв'язок цього рівняння у вигляді

$$z = z_1 + z_2, \tag{11.2}$$

де функції z_1 та z_2 знайти окремо, як розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь з правими частинами f_1 та f_2 відповідно.

Аудиторні вправи

Розв'язати рівняння (метод невизначених коефіцієнтів):

3.4.50. ***11.1*.*** $y''' - 2y'' = 2 - 12x$.

3.4.38. ***3.4.56.***

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів записати загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь (значення невідомих коефіцієнтів шукати не треба):

11.2*. $y'' - 9y' = 3x^2 + e^{3x} + x \sin 3x$.

11.3*. $y'' + 4y = \sin 2x - e^{-2x} + 1$.

Домашнє завдання

Розв'язати рівняння (метод невизначених коефіцієнтів):

3.4.53. ***3.4.54.*** ***3.4.57.***

11.4*. $y'' + y = 7 \cos x$.

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів записати загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь (значення невідомих коефіцієнтів шукати не треба):

11.5*. $y'' + y' = 4x^3 + 5e^{-x} + 7 \sin 2x$.

11.6*. $y'' - 2y' = 1 + 6e^{2x} + 5x \sin x$.

§12. Контрольна робота 2

На другу контрольну роботу виносимо приклади з тем, які вивчали на заняттях 6, 7 та 9-11. Приклади з теми 8 переносимо на екзамен.

§13. Системи лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Стійкість

1. Нехай $\overrightarrow{w}$ – розв'язок *лінійної однорідної системи звичайних диференціальних рівнянь*

$$\dot{\overrightarrow{w}}(t) = A\overrightarrow{w}(t), \tag{13.1}$$

де $\dot{\overrightarrow{w}} = \frac{d\overrightarrow{w}}{dt}$, A – числова квадратна матриця розміру $n \times n$. Згідно методу Ейлера, розв'язок цієї системи починаємо шукати у вигляді

$$\overrightarrow{w}(t) = \overrightarrow{\gamma}\, e^{\lambda t}, \tag{13.2}$$

де λ – розв'язок рівняння

$$\det\left(A - \lambda E\right) = 0 \tag{13.3}$$

(E – одинична матриця розміру $n \times n$), вектор $\overrightarrow{\gamma}$ – розв'язок системи алгебричних рівнянь

$$(A - \lambda E)\overrightarrow{\gamma} = 0. \tag{13.4}$$

Отже, λ – власне значення матриці A, γ – відповідний йому власний вектор.

Рівняння (13.3) для знаходження власних значень матриці A називають *характеристичним рівнянням* для системи (13.1). Нагадаємо, що *алгебричною кратністю* власного значення λ матриці A називають число k – кратність λ як кореня характеристичного рівняння. *Геометричною кратністю* власного значення λ матриці A називають число m – кількість лінійно незалежних власних векторів, що відповідають λ.

Вектор-функцію $\overrightarrow{w}$ – дійсний розв'язок системи (13.1) шукаємо так. Знаходимо власні значення A та відповідні їм власні вектори.

1. Якщо $\lambda_j \in \mathbb{R}$ – однократне власне значення матриці A, то йому відповідає розв'язок

$$\overrightarrow{w_j} = C_j \, \overrightarrow{\gamma_j} \, e^{\lambda_j t} \tag{13.5}$$

системи (13.1), де $C_j \in \mathbb{R}$ – довільна стала, $\overrightarrow{\gamma_j}$ – власний вектор матриці A, що відповідає цьому власному значенню λ_j.

2. Якщо $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j \in \mathbb{C}$ – комплексно спряжені власні значення матриці A (обмежимося лише випадком, коли їхня алгебрична кратність дорівнює одиниці), то їм відповідає розв'язок

$$\overrightarrow{w_j} = C_1^j \, \mathtt{Re}(\overrightarrow{\gamma_j} \, e^{(\alpha_j + i\beta_j)t}) + C_2^j \, \mathtt{Im}(\overrightarrow{\gamma_j} \, e^{(\alpha_j + i\beta_j)t}) \tag{13.6}$$

системи (13.1), де $C_1^j, C_2^j \in \mathbb{R}$ – довільні стала, $\overrightarrow{\gamma_j}$ – загалом комплексний власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню $\alpha_j + i\beta_j$.

3. Якщо $\lambda_j \in \mathbb{R}$ – власне значення матриці A з алгебричною кратністю k та геометричною кратністю m, то у випадку $k = m$ йому відповідає розв'язок

$$\overrightarrow{w_j} = C_1^j \, \overrightarrow{\gamma_{j,1}} \, e^{\lambda_j t} + \ldots + C_k^j \, \overrightarrow{\gamma_{j,k}} \, e^{\lambda_j t} \tag{13.7}$$

системи (13.1), де $C_1^j, C_2^j \in \mathbb{R}$ – довільні сталі, $\overrightarrow{\gamma_{1,j}}, \ldots, \overrightarrow{\gamma_{k,j}}$ – лінійно незалежні власні вектори матриці A, що відповідають цьому λ_j.

4. У випадку $k > m$ розв'язок $\overrightarrow{w_j}$, що відповідає цьому λ, шукаємо *методом невизначених коефіцієнтів* у вигляді

$$\overrightarrow{w_j} = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} t^{k-m} + \ldots + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \right] e^{\lambda_j t}. \tag{13.8}$$

Невідомі коефіцієнти шукаємо, підставивши (13.8) в (13.1). Саме k коефіцієнтів у формулі (13.8) будуть довільними.

Знайшовши для кожного власного значення A розв'язок системи (13.1) у зазначеному вигляді та підсумувавши отримані розв'язки, одержимо загальний дійсний розв'язок (13.1).

2. Розглянемо (13.1) при $t \geq t_0$, де $t_0 \in \mathbb{R}$ – фіксоване число. Тривіальний розв'язок $w_0(t) \equiv 0$ системи (13.1) на проміжку $[t_0, +\infty)$ називається *стійким за Ляпуновим* при $t \to +\infty$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для довільного іншого розв'язку w цієї системи на проміжку $[t_0, +\infty)$ з виконання умови $|w(t_0)| < \delta$ випливає, що $|w(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$. Якщо така властивість не виконується, то розв'язок w_0 називається *нестійким* (при $t \to +\infty$).

Тривіальний розв'язок називається *асимптотично стійким за Ляпуновим* при $t \to +\infty$, якщо він стійкий і для кожного $t_1 \geq t_0$ існує таке $\sigma = \sigma(t_1) > 0$, що для довільного іншого розв'язку w системи (13.1) на проміжку $[t_1, +\infty)$ при виконанні умови $|w(t_1)| \leq \sigma$ маємо таке: $\lim\limits_{t \to +\infty} |w(t)| = 0$.

Аналогічні поняття вводяться і для загальних систем.

Відомо таке (див. [3, с. 433]):

1) тривіальний розв'язок є стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли дійсні частини всіх власних значень матриці A є недодатними, причому для кожного власного значення з нульовою дійсною частиною алгебрична і геометрична кратності співпадають;
2) тривіальний розв'язок є асимптотично стійким за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли дійсні частини всіх власних значень матриці A є від'ємними;
3) якщо хоча б одне власне значення матриці A має додатну дійсну частину, то тривіальний розв'язок є нестійким.

Іноді дослідження стійкості нульового розв'язку нелінійної системи можна звести до дослідження стійкості розв'язку деякої лінійної системи. Розглянемо при $t \geq t_0$ систему

$$\dot{w}(t) = Aw(t) + g(w(t), t), \tag{13.9}$$

де A – числова квадратна матриця розміру $n \times n$, g – неперервна функція, яка задовольняє умову

$$\lim_{|w|\to+0} \frac{|g(w,t)|}{|w|} = 0 \quad \text{рівномірно за} \quad t \geq t_0. \tag{13.10}$$

Система лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (13.1) називається *системою першого наближення* для, взагалі кажучи, нелінійної системи (13.9). Умова (13.10) виконується, якщо $g(0,t) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial w}(0,t) = 0$.

Відомо (див. [4]) таке:

1) якщо дійсні частини всіх власних значень матриці A від'ємні, то тривіальний розв'язок системи (13.9) є асимптотично стійким;
2) якщо серед власних значень матриці A є хоча б одне власне значення з додатною дійсною частиною, то тривіальний розв'язок системи (13.9) є нестійким;
3) якщо серед власних значень матриці A є хоча б одне власне значення з нульовою дійсною частиною, а інші мають від'ємні дійсні частини, то зі стійкості системи першого наближення (13.1) не можна зробити висновок про стійкість повної системи (13.9).

Для загальної системи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x,y,t), \\ \dot{y}(t) = f_2(x,y,t), \end{cases} \tag{13.11}$$

де f_1, f_2 – досить гладкі функції, $f_1(0,0) = 0$, $f_2(0,0) = 0$, системою першого наближення є

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(0,0,t)\, x(t) + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(0,0,t)\, y(t), \\[2ex] \dot{y}(t) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(0,0,t)\, x(t) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(0,0,t)\, y(t). \end{cases} \tag{13.12}$$

Аудиторні вправи

Знайшовши власні значення та власні вектори відповідної матриці, розв'язати системи рівнянь та дослідити на стійкість їхній тривіальний розв'язок:

4.3.1. ***4.3.2.***

Використавши метод невизначених коефіцієнтів, розв'язати системи та дослідити на стійкість їхній тривіальний розв'язок:

4.3.3. ***4.3.15.*** ***4.3.4.***

Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок систем:

13.1*. $\begin{cases} \dot{x}(t) = -\sin(x+y), \\ \dot{y}(t) = 2x + \ln(1-y). \end{cases}$

Домашнє завдання

Знайшовши власні значення та власні вектори відповідної матриці, розв'язати системи рівнянь та дослідити на стійкість їхній тривіальний розв'язок:

4.3.6. ***4.3.7.*** ***4.3.8.***

Використавши метод невизначених коефіцієнтів, розв'язати системи та дослідити на стійкість їхній тривіальний розв'язок:

4.3.9. ***4.3.10.***

Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок систем:

13.2*. $\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x - \ln(1+y) + \sin x, \\ \dot{y}(t) = e^x + \sin(x+y) - \cos^2 y. \end{cases}$

§14. Системи лінійних неоднорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Методику розв'язування лінійних неоднорідних систем звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами проілюструємо на прикладі системи другого порядку.

Нехай $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ – розв'язок *лінійної неоднорідної системи звичайних диференціальних рівнянь*

$$\dot{\overrightarrow{w}}(t) = A\overrightarrow{w}(t) + \overrightarrow{f}(t), \tag{14.1}$$

де A – квадратна матриця розміру 2×2, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ – вектор-функція, $f \not\equiv 0$.

Загальний розв'язок системи (14.1) має вигляд

$$\overrightarrow{w}(t) = \overrightarrow{w_0}(t) + \overrightarrow{z}(t), \tag{14.2}$$

де

$$\overrightarrow{w_0}(x) = C_1 \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \tag{14.3}$$

– загальний розв'язок відповідної (14.1) системи лінійний однорідних рівнянь

$$\dot{\overrightarrow{w}}(t) = A\overrightarrow{w}(t), \tag{14.4}$$

$\overrightarrow{z}$ – який-небудь частковий розв'язок системи неоднорідних рівнянь (14.1), який можна шукати методом варіації сталих, або методом невизначених коефіцієнтів.

1. *Метод варіації сталих* полягає в тому, що $\widetilde{w}$ шукаємо у вигляді (14.3), де замість довільних сталих стоять довільні невідомі функції, тобто у вигляді

$$\overrightarrow{z}(t) = \varphi_1(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + \varphi_2(t) \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}. \tag{14.5}$$

Невідомі функції φ_1, φ_2 шукаємо з системи рівнянь

$$\left\{ \varphi_1'(t) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} + \varphi_2'(t) \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \right. . \tag{14.6}$$

2. *Метод невизначених коефіцієнтів* можна застосовувати тоді, коли вільний член f системи є векторним квазіполіномом.

1. Якщо

$$\vec{f}(t) = e^{\alpha t}\overrightarrow{P_m}(t), \tag{14.7}$$

де α – фіксоване число, $\overrightarrow{P_m}(t)$ – вектор-поліном степеня m, то частковий розв'язок $\vec{z}$ системи (14.1) шукаємо у вигляді

$$\vec{z}(t) = e^{\alpha t}\overrightarrow{Q_{m+k}}(t), \tag{14.8}$$

де $\overrightarrow{Q_{m+k}}(x)$ – вектор-поліном степеня $m+k$ з невідомими коефіцієнтами, які знайдемо, підставивши (14.8) в (14.1), $k=0$, якщо α не є власним значенням матриці A. Якщо α – власне значення A, то k – це алгебрична кратність цього власного значення.

2. Якщо

$$\vec{f}(t) = e^{\alpha t}(\overrightarrow{P^1_{m_1}}(t)\cos(\beta t) + \overrightarrow{P^2_{m_2}}(t)\sin(\beta t)), \tag{14.9}$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – фіксовані числа, $\overrightarrow{P^1_{m_1}}(t)$, $\overrightarrow{P^2_{m_2}}(t)$ – вектор-поліноми степеня m_1 та m_2 відповідно, то частковий розв'язок $\vec{z}$ системи (14.1) шукаємо у вигляді

$$\vec{z}(t) = e^{\alpha t}(\overrightarrow{Q^1_{m+k}}(t)\cos(\beta t) + \overrightarrow{Q^2_{m+k}}(t)\sin(\beta t)), \tag{14.10}$$

де $m = \max\{m_1, m_2\}$, $\overrightarrow{Q^1_{m+k}}(x)$, $\overrightarrow{Q^2_{m+k}}(x)$ – два різні вектор-поліноми степеня m з невідомими коефіцієнтами, які знайдемо, підставивши (14.10) в (14.1), $k=0$, якщо $\alpha + i\beta$ не є власним значенням матриці A. Якщо α – власне значення матриці A, то k – це алгебрична кратність цього власного значення.

3. Частковий розв'язок системи

$$\dot{\vec{w}}(t) = A\vec{w}(t) + \vec{f_1}(t) + \vec{f_2}(t) \tag{14.11}$$

має вигляд

$$\vec{z} = \vec{z_1} + \vec{z_2}, \tag{14.12}$$

де $\vec{z_1}$, $\vec{z_2}$ – часткові розв'язки відповідно систем

$$\dot{\vec{w}}(t) = A\vec{w}(t) + \vec{f_1}(t) \quad \text{та} \quad \dot{\vec{w}}(t) = A\vec{w}(t) + \vec{f_2}(t). \tag{14.13}$$

Аудиторні вправи

За допомогою методу варіації сталих розв'язати системи лінійних неоднорідних рівнянь:

4.3.16. ***4.3.17.***

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів розв'язати системи лінійних неоднорідних рівнянь:

14.1*. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$ ***4.3.22.*** ***4.3.23.***

Домашнє завдання

За допомогою методу варіації сталих розв'язати системи лінійних неоднорідних рівнянь:

4.3.18. ***4.3.21.***

За допомогою методу невизначених коефіцієнтів розв'язати системи лінійних неоднорідних рівнянь:

4.3.24. ***4.3.25.*** ***4.3.26.***

§15. Загальні системи диференціальних рівнянь

Для того щоб розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь в симетричній формі

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1,\ldots,x_n)}, \tag{15.1}$$

треба знайти $n-1$ незалежних перших інтегралів u_1, u_2, …, u_{n-1} системи (15.1). Нагадаємо, що функція $u = u(x_1,\ldots,x_n)$ є першим інтегралом системи (15.1) тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} f_1(x_1,\ldots,x_n) + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} f_n(x_1,\ldots,x_n) \equiv 0. \tag{15.2}$$

Для незалежності перших інтегралів $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ системи рівнянь (15.1) достатньо, щоб

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix} = n-1. \tag{15.3}$$

За допомогою $n-1$ незалежного першого інтегралу системи рівнянь (15.1)

$$\begin{cases} u_1(x_1,\dots,x_n) = C_1, \\ \vdots \\ u_{n-1}(x_1,\dots,x_n) = C_{n-1}, \end{cases} \tag{15.4}$$

де $C_1,\dots,C_{n-1}$ – довільні сталі, систему (15.1) можна звести до рівняння першого порядку, а отже, розв'язати. Для цього робимо заміну змінних $x \rightsquigarrow z$, де

$$z_1 = u_1(x), \quad \dots, \quad z_{n-1} = u_{n-1}(x), \quad z_n = x_n. \tag{15.5}$$

Отримаємо систему

$$z_1' = 0, \quad \dots, \quad z_{n-1}' = 0, \quad z_n' = g(z_1,\dots,z_n), \tag{15.6}$$

яка зведеться до звичайного диференціального рівняння на z_n.

Для відшукання перших інтегралів системи (15.1) треба знайти *інтегровну комбінацію* – це звичайне диференціальне рівняння, можливо, утворене з (15.1) рівністю

$$\frac{dx_i}{f_i(x_1,\dots,x_n)} = \frac{dx_j}{f_j(x_1,\dots,x_n)}. \tag{15.7}$$

Якщо (15.7) можна перетворити так, щоб інших, крім змінних x_i, x_j, не було і записати інтеграл (15.7) у вигляді

$$w(x_i, x_j) = C, \tag{15.8}$$

то функція w є першим інтегралом системи (15.1).

При відшуканні інтегровних комбінацій можна користуватися такою властивістю рівних дробів: якщо

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_k}{b_k} = t, \tag{15.9}$$

то для довільних $c_1, c_2, \ldots, c_k$ виконується рівність

$$\frac{c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_k a_k}{c_1 b_1 + c_2 b_2 + \ldots + c_k b_k} = t. \tag{15.10}$$

Аудиторні вправи

Звести систему до симетричної форми і розв'язати:

5.2.1. ***15.1*.*** $\begin{cases} y' = y/(2y - z), \\ z' = z/(2y - z). \end{cases}$

Знайти повний набір перших інтегралів системи рівнянь:

5.1.2. ***5.1.4.*** ***5.1.3.*** ***5.1.5.***

Домашнє завдання

Звести систему до симетричної форми і розв'язати:

5.2.3. ***15.2*.*** $\begin{cases} y' = x/y, \\ z' = z/y. \end{cases}$

Знайти повний набір перших інтегралів системи рівнянь:

5.1.7. ***5.1.8.*** ***5.1.9.*** ***5.1.10.***

§16. Рівняння з частинними похідними

1. *Лінійним однорідним рівнянням з частинними похідними першого порядку* називається рівняння

$$a_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{16.1}$$

Щоб знайти загальний розв'язок (16.1), треба відшукати $n-1$ незалежних перших інтегралів

$$\begin{cases} u_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \vdots \\ u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1} \end{cases} \tag{16.2}$$

системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1,\ldots,x_n)}. \tag{16.3}$$

Загальний розв'язок рівняння (16.1) задається формулою

$$u = \Phi(u_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,u_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)), \tag{16.4}$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція.

2. *Квазілінійним рівнянням з частинними похідними першого порядку* називається рівняння

$$b_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + b_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b_{n+1}(x,u). \tag{16.5}$$

Щоб знайти загальний розв'язок рівняння (16.5), треба відшукати n незалежних перших інтегралів

$$\begin{cases} u_1(x_1,\ldots,x_n,u) = C_1, \\ \vdots \\ u_n(x_1,\ldots,x_n,u) = C_n \end{cases} \tag{16.6}$$

системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{b_1(x,u)} = \ldots = \frac{dx_n}{b_n(x,u)} = \frac{du}{b_{n+1}(x,u)}. \tag{16.7}$$

Загальний розв'язок рівняння (16.5) в неявному вигляді задається формулою

$$\Phi(u_1(x_1,\ldots,x_n,u),\ldots,u_n(x_1,\ldots,x_n,u)) = 0, \tag{16.8}$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція.

Якщо функція u входить тільки в один з перших інтегралів системи (16.7), наприклад, в u_n, то загальний розв'язок (16.5) можна записати так:

$$u_n(x_1,\ldots,x_n,u) = \Psi(u_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,u_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)), \tag{16.8$'$}$$

де Ψ – довільна неперервно диференційовна функція. Розв'язавши рівняння (16.8') стосовно u, одержимо загальний розв'язок рівняння (16.5) у явному вигляді

$$u = \Theta(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)), \tag{16.8''}$$

де Θ – довільна неперервно диференційовна функція.

3. *Задача Коші* для лінійного однорідного рівняння у частинних похідних першого порядку (16.1) полягає у відшуканні розв'язку рівняння (16.1), який задовольняє початкову умову

$$u|_{x_n=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{16.9}$$

Щоб розв'язати цю систему треба:
1) знайти $n-1$ лінійно незалежних перших інтегралів (16.2) системи звичайних диференціальних рівнянь (16.3);
2) взявши в (16.2) $x_n = 0$, розв'язати цю систему стосовно змінних $x_1, \ldots, x_{n-1}$

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ \vdots \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(C_1, \ldots, C_{n-1}); \end{cases} \tag{16.10}$$

3) записати відповідь у вигляді

$$u = \varphi(\omega_1(C_1, \ldots, C_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(C_1, \ldots, C_{n-1})), \tag{16.11}$$

а потім замість $C_1, \ldots, C_{n-1}$ підставити відповідні перші інтеграли з рівностей (16.2).

4. *Задача Коші в узагальненому формулюванні* для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку (16.5), наприклад, у випадку $n = 2$ полягає у відшуканні такого розв'язку рівняння:

$$b_1(x_1, x_2, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} = b_3(x_1, x_2, u), \tag{16.5'}$$

який проходить через криву в $\mathbb{R}^3$

$$x_1 = \varphi(t), \quad x_2 = \psi(t), \quad u = \chi(t). \tag{16.12}$$

Щоб розв'язати цю задачу Коші треба:
1) знайти два лінійно незалежних перших інтеграла

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2, u) = C_1, \\ u_2(x_1, x_2, u) = C_2 \end{cases} \tag{16.6$'$}$$

системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{b_1(x_1, x_2, u)} = \frac{dx_2}{b_2(x_1, x_2, u)} = \frac{du}{b_3(x_1, x_2, u)}; \tag{16.7$'$}$$

2) підставити криву (16.12) в систему (16.6'), виключити з отриманих співвідношень параметр t і одержати вираз вигляду

$$\Phi(C_1, C_2) = 0; \tag{16.13}$$

3) підставивши в (16.13) замість C_1, C_2 відповідні перші інтеграли з (16.6'), отримати розв'язок задачі Коші в неявному вигляді.

Аудиторні вправи

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

6.1.1. ***6.1.2.***

Розв'язати задачі Коші:

6.1.7. ***6.1.8.*** ***6.1.9.*** ***6.1.10.***

Домашнє завдання

Знайти загальний розв'язок рівнянь:

6.1.3. ***6.1.4.***

Розв'язати задачі Коші:

6.1.11. ***6.1.12.*** ***6.1.13.*** ***6.1.14.***

§17. Контрольна робота 3

На третю контрольну роботу виносимо приклади з тем 13-15.

Додаток

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$, де $a \neq -1$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, де $a > 0$, $a \neq 1$.

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$, де $a \neq 0$.

9. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$, де $a > 0$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, де $a > 0$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$, де $a > 0$.

12. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$, де $a > 0$.

13. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, $a > 0$.

Список літератури

1. *Бугрій О.М., Процах Н.П., Бугрій Н.В.* Основи диференціальних рівнянь: теорія приклади та задачі: Навчальний посібник. – Львів: Видавець І. Чижиков, 2011. – 348 с.
2. *Лопушанська Г.П., Бугрій О.М., Лопушанський А.О.* Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики: Підручник. – Львів: Видавець І. Чижиков (1-е видання: 2012. – 362 с. 2-е видання: 2017. – 372 с.).
3. *Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О.* Диференціальні рівняння: Підручник. – 2-е вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – 600 с.
4. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Диференціальні рівняння: приклади й задачі – К.: Вища школа, 1994. – 454 с.