Метод пропорційних частин (хорд)

Розрахункові формули цього методу отримані з таких міркувань. Інтервал $[\alpha, \beta]$, усередині якого розташований корінь рівняння

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

ділимо у відношенні $f(\alpha)/f(\beta)$. Це дасть нам наближене значення кореня $x_i = \alpha + h_i$, де

$$h_i = -\frac{f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}(\beta - \alpha), \ (i = 0,1,\ldots). \tag{2}$$

Далі, застосовуючи цей прийом до одного з відрізків $[\alpha, x_1]$ чи $[x_1, \beta]$, на кінцях якого функція $f(x)$ має протилежні знаки, одержимо друге наближення x_2 і т.д.

Геометрично спосіб пропорційних частин еквівалентний заміні рівнянь кривої $y = f(x)$ рівнянням хорди, що проходить через точки $A[\alpha, f(\alpha)]$ і $B[\beta, f(\beta)]$. За наближене значення кореня приймається абсциса точки перетину хорди з віссю Ox.

Уточнення кореня варто проводити доти, поки не буде досягнута задана точність. Для оцінки точності наближення можна скористатися формулою

$$|x_i - \xi| \le \frac{|f(x_i)|}{m_1},$$

де $|f'(x)| \ge m_1 > 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$, (3)

ξ – точне значення кореня.

Наприклад, знайдемо з точністю до $\varepsilon = 0{,}01$ корені рівняння $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$. Виконавши процедуру відділення коренів так, як описано вище (див. Розділ 3. Загальні положення) одержимо три інтервали $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$, що містять корінь. Знайдемо корінь, розташований в інтервалі $(-\infty;0)$.

Маємо $f(0) = 3 > 0$, $f'(x) = 3x(x-2)$, $f''(x) = 6x - 6$.

Від нескінченного інтервалу перейдемо до скінченого, замінивши його ліву границю скінченим числом менше нуля, але таким, щоб значення функції в ньому було від'ємним. Інтервал $[-1{,}0]$ задовольняє цим вимогам: $f(-1) = -1 < 0$. Крім того, $f''(x)$ на цьому інтервалі знакопостійна і, отже, $f'(x)$ – монотонна й досягає найбільшого й найменшого значення на кінцях інтервалу. Використовуючи метод бісекції, зменшимо цей інтервал так, щоб його довжина була $\le 0{,}1$.

Маємо:

$$x_1 = \frac{-1+0}{2} = -0{,}5, \quad f(x_1) \approx 2{,}125 > 0 \Rightarrow \text{ корінь } \in [-1; -0{,}5];$$

$$x_2 = \frac{-1-0{,}5}{2} = -0{,}75, \quad f(x_2) \approx 0{,}89 > 0 \Rightarrow \text{ корінь } \in [-1; -0{,}75];$$

$$x_3 = \frac{-1-0{,}75}{2} = -0{,}875, \quad f(x_3) \approx 0{,}033 > 0 \Rightarrow \text{ корінь } \in [-1; -0{,}875];$$

$$x_4 = \frac{-1-0{,}875}{2} = -0{,}9375, \quad f(x_4) \approx -0{,}46 < 0 \Rightarrow \text{ корінь } \in [-09375; -0{,}875];$$

Довжина отриманого інтервалу $|-0{,}875 + 0{,}9375| = 0{,}0625 < 0{,}1$, тому надалі будемо працювати з цим інтервалом.

Обчислюючи значення першої похідної $f'(x)$ на кінцях інтервалу, одержуємо $f'(-0{,}9375) \approx 8{,}26$; $f'(-0{,}875) \approx 7{,}547$. Отже, у формулі для оцінки похибки як m_1 можна прийняти $m_1 = 7{,}547$.

Оскільки друга похідна на обраному інтервалі від'ємна, то як нерухомий кінець у формулі для обчислення кореня за методом хорд варто взяти лівий кінець інтервалу, тобто розрахункова формула набуде вигляду:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(\alpha)}(x_i - \alpha)\,,\ (i = 0{,}1{,}2{,}...),$$

де $\alpha = -0{,}9375$, $x_0 = \beta = -0{,}875$.

Виконуючи розрахунок за цією формулою при $i = 0$, одержимо $x_1 \approx -0{,}87514$, $f(x_1) \approx 0{,}03215$.

Обчислимо похибку

$$|x_1 - \xi| \le \frac{|f(x_1)|}{m_1} = \frac{0{,}03215}{7{,}547} \approx 0{,}00426 < 0{,}01\ .$$

Таким чином, уже перше наближення дає значення кореня з потрібною точністю.

Корені, розташовані в двох інших інтервалах $(0;2)$, $(2;+\infty)$ знаходяться аналогічно.

Індивідуальне завдання № 1

Методом хорд із точністю до $\varepsilon = 0{,}001$ знайдіть всі дійсні корені рівняння $a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$.

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_1	1,6	-2,4	0,8	3,6	-1,2	6,4	-2,8	1,2	-0,4	5,2

Кое-фіцієнт a	Шифр по горизонталі									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_2	5,1	3,3	-6,3	-1,5	5,7	6,3	1,2	-6,9	5,4	-2,1
a_3	0,2	0	0,8	0	-1,2	0,4	0	-0,6	1,0	0
a_4	-2	3	7	-1	-4	6	-3	8	9	-5