Проблема власних значень

При розв'язанні теоретичних і практичних задач часто виникає потреба визначити власні значення матриці A.

Нехай дана квадратна матриця $A=[a_{ij}]$. Розглянемо лінійне перетворення

$$\bar{y} = A\bar{x} \tag{1}$$

де $\bar{x}$ і $\bar{y}$ – n-мірні вектори якогось n-мірного простору.

Вектор $\bar{x} \neq \bar{0}$ називається власним вектором матриці A, якщо

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \ . \tag{2}$$

Число λ називається власним значенням чи характеристичним числом матриці A, що відповідає даному власному вектору $\bar{x}$. Власні вектори матриці A є ненульовими розв'язками матричного рівняння

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \text{ чи } (A-\lambda E)\bar{x} = \bar{0}, \tag{3}$$

де матриця $(A-\lambda E)$ називається характеристичною матрицею. Рівняння (3) являє собою однорідну систему, що має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю, тобто

$$\det(A-\lambda E) = 0. \tag{4}$$

Визначник (4) називається характеристичним (віковим) визначником матриці A, а рівняння (4) називається характеристичним (віковим) рівнянням матриці A.

Для знаходження власних значень і власних векторів можна розгорнути характеристичний визначник (4) у рівняння n-го ступеня й розв'язати це рівняння одним із чисельних методів, або використати ітераційний метод для обчислення коренів характеристичного рівняння і власних векторів без попереднього розгортання характеристичного визначника.

Завдання до лабораторної роботи №6

Знайти власні числа і власні вектори матриці шляхом розкриття характеристичного визначника:

№ 1.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

№ 2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

№ 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

№ 4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 5.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

№ 6.

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 7.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 8.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

№ 9.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

№ 10.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

№ 11.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 12.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

№ 13.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

№ 14.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

№ 15.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

№ 16.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

№ 17.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

№ 18.

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

№ 19.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

№ 20.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

№ 21.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

№ 22.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 23.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 24.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

№ 25.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

№ 26.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

№ 27.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

№ 28.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 29.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

№ 30.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$