

## Метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності

Нехай дано диференціальне рівняння  $y' = f(x, y)$  з початковою умовою  $y(x_0) = y_0$ . Виберемо крок  $h$ , позначивши  $x_i = x_0 + ih$  і  $y_i = y(x_i)$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Розглянемо числа:

$$k_1^i = hf(x_i; y_i);$$

$$k_2^i = hf\left(x_i + h/2; y_i + k_1^i/2\right);$$

$$k_3^i = hf\left(x_i + h/2; y_i + k_2^i/2\right);$$

$$k_4^i = hf\left(x_i + h; y_i + k_3^i\right).$$

Тоді значення шуканої функції  $y$  визначається за формулою

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

де  $\Delta y_i = (k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i)/6$ ; ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ).

Похибка цього методу – величина порядку  $O(h^4)$ .

**Приклад.** Розв'яжемо методом Рунге-Кутта задачу Коші:  $y' = x + y$ ;  $y(0) = 1$ ;  $h = 0,1$  на інтервалі  $(0; 0,4)$ .

**Розв'язок.** Покажемо початок процесу. Для  $y_1$  обчислюємо послідовно

$$k_1^0 = (0 + 1)0,1 = 0,1,$$

$$k_2^0 = (0,05 + (1 + 0,05))0,1 = 0,11,$$

$$k_3^0 = (0,05 + (1 + 0,055))0,1 = 0,1105,$$

$$k_4^0 = (0,01 + (1 + 0,1105))0,1 = 0,12105.$$

Звідси  $\Delta y_0 = (0,1 + 2(0,1105 + 0,11) + 0,12105) = 0,1103$ .

Отже  $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,1103 = 1,1103$ .

Аналогічно обчислюються подальші наближення.

Отримані значення занесені в таблицю

$x_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4
$y_i$	1	1,1103	1,2427	1,3996	1,5836
$y$ аналіт.	1	1,1103	1,2428	1,3997	1,5836

## Індивідуальне завдання № 3

Розв'яжіть рівняння  $y' = f(x, y)$  методом Рунге-Кутта:

Шифр по вертикалі	A
0	1
1	0,4
2	-0,3
3	2
4	0,3
5	1
6	-1
7	0,3
8	2
9	-1

	Права частина $f(x, y)$
0	$\frac{(Ax + 0,3y)(1 - xy)}{-x - 0,2y}$
1	$\frac{0,3A - x}{0,3y}$
2	$Ax^3 - \frac{2}{y^2}$
3	$\frac{A}{y^2} + \frac{0,2}{x^2}$
4	$\frac{Ax^2 - 1}{y^3 + x^2 + 0,3}$
5	$\frac{A}{x^2} - \frac{0,3}{x} + \frac{1}{y^2}$
6	$-\frac{A}{y^2} - \frac{0,4x}{0,8 + x}$
7	$\frac{A}{0,4y^2 + 2x}$
8	$\frac{Ax}{y^3} + y$
9	$\frac{Ay}{2x + 0,7} + \frac{3}{y^2}$

шифр по горизонталі

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Номер правої частини	2	4	5	8	1	3	9	0	7	6
$y_0$	1	-2	1	-2	2	2	-1	1,05	-2	0,5
$h$	0,2	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,05	0,1	0,4	0,2
Інтервал	[0;2]	[0;2]	[1;2]	[1;3]	[0;1]	[1;3]	[1;1,5]	[0;1]	[0;4]	[1;3]