Інтегральний метод найменших квадратів

Нехай дана крайова задача

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases}$$

Аналогічно схемі, наведеній для методу Гальоркіна, будуємо відхил $R(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, але суть інтегрального методу найменших квадратів в тому, щоб інтеграл

$$I = \int_a^b R^2(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)dx$$

був мінімальним. Для мінімуму інтеграла I необхідне виконання умов:

$$\frac{\partial I}{\partial c_k} = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

тобто

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial I}{\partial c_1} = \displaystyle\int_a^b \dfrac{\partial R}{\partial c_1} R dx = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial I}{\partial c_2} = \displaystyle\int_a^b \dfrac{\partial R}{\partial c_2} R dx = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial I}{\partial c_n} = \displaystyle\int_a^b \dfrac{\partial R}{\partial c_n} R dx = 0 \end{cases}.$$

Одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів $c_1, c_2, ..., c_n$, з якої й визначаються ці коефіцієнти.

Приклад. Інтегральним методом найменших квадратів розв'язати крайову задачу

$$y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0; \; y(-1) = 0; \; y(1) = 0.$$

Розв'язок. Поклавши $u_1 = 1 - x^2$; $u_2 = x^2 - x^4$, будемо мати

$$y_2 = c_1(1 - x^2) + c_2(x^2 - x^4).$$

Підставивши цей вираз у вихідне рівняння, одержимо відхил

$$R(x) = 1 - (1 + x^4)c_1 + (2 - 11x^2 - x^6)c_2.$$

Відповідно до наведеного вище принципу інтегрального методу найменших квадратів, складемо вираз

$$I = \int_{-1}^{1} R^2(x)dx = \int_{-1}^{1} (1-(1+x^4)c_1 + (2-11x^2 - x^6)c_2)^2 dx$$

і підберемо коефіцієнти c_1 і c_2 так, щоб інтеграл I мав найменше значення. Це дає систему рівнянь

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial c_1} = -\int_{-1}^{1}(1+x^4)(1-(1+x^4)c_1 + (2-11x^2 - x^6)c_2)^2 dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial c_2} = \int_{-1}^{1}(2-11x^2 - x^6)(1-(1+x^4)c_1 + (2-11x^2 - x^6)c_2)^2 dx = 0$$

чи

$$\frac{68}{45}c_1 + \frac{3548}{1155}c_2 = \frac{5}{4}; \quad \frac{3548}{1155}c_1 + \frac{63404}{4095}c_2 = \frac{38}{21},$$

звідси $c_1 = 0{,}985$; $c_2 = -0{,}078$.

Отже, $y_2 = 0{,}985\left(1-x^2\right) - 0{,}078\left(x^2 - x^4\right)$.

Індивідуальне завдання № 4

Розв’язати крайову задачу інтегральним методом найменших квадратів.

Завдання вибираються з наведеної нижче таблиці варіантів.

Таблиця варіантів

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_1	-1	2	-3	-1	-2	-4	-3	-4	2	-2,7
k_2	-4,8	-3,1	2,5	1,7	2	1,2	2	3,2	3	-1,3

Шифр по горизон-талі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,5	1,3	2,4	-1	0	1	0	0,8	-4	0
B	0,5	0,7	0	1	-2	0,5	0	0,3	-0,6	2
a	1	-1	-1	0,5	0	2	-1	-0,5	-1	0
b	2	0	1,4	1,5	1	3	0	1,5	1	1
α_1	2	0	0	-3	2	0	0	-1	0	0
α_0	0	2	-1	0	0	5	-4	0	1	-1
β_0	-1	0	0	3	-2	0	0	-1	0	0
β_1	0	-1	2	0	0	-5	4	0	1	-1
h	0,1	0,1	0,25	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1
$p(x)$	$k_1 x$	$\frac{k_1}{x+k_2}$	$k_1 x + k_2$	$k_2 x$	$k_2 x^2 - k_1$	$k_1 - x$	$k_2 + x^2$	$k_1 x^3$	$k_2 x^3 - k_1$	$x^2 k_1^2$
$q(x)$	$\frac{k_1 x}{x^2 + k_2^2}$	$k_2 x$	$k_1 x^2$	$k_2 x^3 + k_1$	$k_2 - x$	$k_2 + x^3$	$k_2 x$	$k_2 x - k_1$	$k_1 x + k_2$	$\frac{k_2}{x+1}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + k_1^2}}$	$k_2 + x^3$	$\frac{k_2 + x}{x^2 - k_1}$	$\frac{x^2 + k_2}{x}$	$\frac{1}{k_1 x - k_2}$	$\sqrt{x^2 + k_2^2}$	$\frac{k_1 x^2}{k_2 + x}$	$\frac{1}{k_2 x^2 - k_1}$	$k_2 x^2 + k_1 x$	$\frac{k_1 x + k_2}{(k_1 - x)^3}$