КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Л.Г.Лелевкина, Р.Р.Рафатов

Вариационное исчисление и основы математической теории управления

Учебное пособие

Бишкек 1999

УДК 517

Л 33

Л.Г.Лелевкина, Р.Р.Рафатов

Вариационное исчисление и основы математической теории управления. Учебное пособие /Кыргызско-Российский Славянский университет. - Бишкек, 1999 г. - 48 с.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей: прикладная математика, программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем, физика, динамика и прочность машин, физические процессы горного производства, нетрадиционные и возобновляемые источники энергии, микроэлектроника, механика.

Рекомендовано кафедрой математики
КРСУ и утверждено решением РИСО КРСУ.

Рецензент: д. ф.-м. н., проф. С.Н.Алексеенко

© КРСУ, Бишкек, 1999 г.

© Л.Г.Лелевкина, Р.Р.Рафатов

ВВЕДЕНИЕ

Наряду с общими разделами курса высшей математики в программу подготовки физиков, механиков, информатиков, математиков, микроэлектронщиков, экономистов введены курсы “Математическое моделирование физических процессов”, “Математическое моделирование на ЭВМ”, “Вариационное исчисление и интегральные уравнения”, “Методы оптимизации и теория управления”, “Теория игр и исследование операций”, “Математические методы оптимального управления”, “Динамическое программирование и оптимальное управление” и др.

При математическом моделировании и исследовании физических, механических и экономических процессов возникают задачи оптимизации. Это может быть выбор оптимальных параметров любой природы, либо минимизация расходов энергетических или материальных ресурсов, либо получение максимальной прибыли при минимальных потерях и т. д. Для грамотного решения такого типа задач необходимо знание, по крайней мере, основных методов теории оптимального управления: классического вариационного исчисления, принципа максимума Понтрягина и метода динамического программирования Беллмана.

Простейшие задачи оптимизации связаны с поиском экстремума функций конечного числа переменных. Интерес к этим задачам сильно возрос с появлением линейного, выпуклого и нелинейного программирования.

Этот интерес еще более усилился в связи с разработкой новых вычислительных алгоритмов.

Задачами, в которых при выборе наилучшего решения уже недостаточно оперировать с конечным числом параметров, стали интересоваться давно. Например, знаменитая задача Дироны. В этой задаче нужно выбрать не конечномерный вектор, а некоторую линию (функцию), т.е. элемент, описываемый бесконечным числом параметров. Скалярные функции, определенные на таких объектах, называются функционалами. Простейший пример функционала - определенный интеграл.

Исследованием функционалов на экстремум занимается вариационное исчисление - бесконечномерный аналог дифференциального исчисления. С момента возникновения (1696 г. И.Бернулли) и до наших дней оно прошло большой путь развития.

Второе рождение вариационного исчисления произошло в 50-х годах XX века. Оно было связано с разработкой методов принципа максимума Понтрягина и метода динамического программирования Беллмана, заложивших основу новой теории оптимальных процессов.

© Л.Г.Лелевкина, Р.Р.Рафатов

Принцип максимума Л.С.Понтрягина - это группа теорем о необходимых условиях оптимальности для различного типа задач оптимизации, дающая методику решения этих задач [1].

Другое направление исследований развивалось американским ученым Р.Беллманом и его сотрудниками. В его основе лежит принцип оптимальности и связанный с ним метод динамического программирования [2].

Непрерывное усложнение энергетических систем, повышение их мощности делают актуальным всемерное использование методов оптимизации таких систем и их звеньев.

Цель данного методического пособия состоит в конкретном, лаконичном, доступном для понимания студентов изложении основных понятий современной теории оптимизации процессов; рассмотрении простейших примеров, иллюстрирующих методику их применения; составлении упражнений для самостоятельного выполнения и привитии навыков использования методов оптимизации.

Авторы считают, что простота и доступность изложения обеспечиваются в том случае, если сначала рассматривать методы классического вариационного исчисления, а потом уже, опираясь на них, переходить к принципу максимума и динамическому программированию. Этот порядок изложения и принят в данном учебном пособии.

Часть 1

ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Основные понятия вариационного исчисления

Вариационное исчисление является частью математического анализа. Задачи, решаемые в вариационном исчислении применяются в решении многих физических и инженерных проблем. Рассмотрим один простой пример, а именно проблему существования кратчайшего пути, соединяющего две данные точки на данной плоскости. Геометрически решение этой задачи очевидно. Рассмотрим эту задачу как проблему вариационного исчисления.

Пусть на плоскости xy заданы две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Если $y = y(x)$ - уравнение кривой, проходящей через эти две точки, то

$$y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2) \qquad (*)$$

и длина дуги AB равна интегралу

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx \,. \qquad (**)$$

Здесь через $I[y(x)]$ обозначено значение интеграла, соответствующее кривой $y = y(x)$. Каждой кривой $y = y(x)$, проходящей через точки А и В соответствует длина I. Здесь $I[y(x)]$ является функционалом, соответствующим переменной функции $y = y(x)$. Проблема вариационного исчисления для данного примера формулируется так: найти функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую условиям (*) и доставляющую минимальное возможное значение функционалу (**).

Решение проблемы дается в виде $y = mx + n$ прямой, соединяющей две данные точки.

Нельзя путать задачи экстремума в дифференциальном исчислении с задачами вариационного исчисления. Они резко различаются. Отыскание экстремумов функций одной или многих переменных является задачей дифференциального исчисления. В вариационном исчислении ищутся функции, доставляющие экстремум функционалам.

Задача о брахистохроне и изопериметрическая задача, решением которых занимались Ньютон (1687) и братья Бернулли (1696), по-видимому, являются первыми задачами вариационного исчисления. Позднее благодаря работам Эйлера (1707-1783) вариационное исчисление превратилось в самостоятельную математическую дисциплину со своими, принадлежащими только этой дисциплине, методами исследования.

© Л.Г.Лелевкина, Р.Р.Рафатов

1.1. Функционал

Пусть $\{\varphi\}$ множество функций, удовлетворяющих некоторым условиям. Закон или правило, по которому каждой ***функции*** из данного множества ставится в соответствие вполне определенное ***числовое*** значение, называется ***функционалом***, определенным на данном множестве функций $\{\varphi\}$.

Функционал, определенный на множестве функций $\{y(x)\}$, обозначается через $I[y(x)]$.

Пример 1. Допустим, что $\{y(x)\}$ - множество функций, непрерывных на интервале (0,1). $I[y(x)] = \int\limits_0^1 y(x)dx$ является функционалом, определенным на множестве $\{y(x)\}$. Каждой функции $y(x)$ из этого множества соответствует вполне определенное числовое значение:

Для $y(x) = 1$ $\quad I[1] = \int\limits_0^1 1 \cdot dx = 1$;

Если $y(x) = e^x$, то $I[e^x] = \int\limits_0^1 e^x dx = e - 1$;

При $y(x) = \cos \pi x$ имеем $I[\cos \pi x] = \int\limits_0^1 \cos \pi x dx = \frac{\sin \pi x}{\pi} \Big|_0^1 = 0$.

Пример 2. Пусть $\{y(x)\}$ - множество функций, имеющих непрерывные производные 1-го порядка на интервале (a,b) и $x_0 \in (a,b)$. Тогда $I[y(x)] = y'(x_0)$ будет функционалом, определенным на множестве $\{y(x)\}$. Если положить, что $a = 1,\ b = 3,\ x_0 = 2$, то для функций $y(x) = x^2$, $y(x) = x^2 + x$, $y(x) = \ln(x+1)$ получим $I[x^2] = 4; I[x^2 + x] = 5; I[\ln(x+1)] = \frac{1}{3}$ соответственно.

Пример 3. Допустим, что $\{y(x)\}$ - множество функций, непрерывных на отрезке (-1,+1), а функция $\varphi(x, y)$ определена и непрерывна для всех действительных значений y и $-1 < x < +1$. Тогда

$$I[y(x)] = \int\limits_{-1}^{+1} \varphi[x, y(x)]dx$$

является функционалом, определенным на множестве $\{y(x)\}$. Если в этом примере положить $\varphi(x, y) = \frac{x}{1+y^2}$, то будем иметь

$$I[y(x)] = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{xdx}{1+y^2}$$

и, следовательно,

$$I[y(x)] = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{xdx}{1+x^2} = ln\sqrt{1+x^2}\ \Big|_{-1}^{+1} = 0 \quad \text{для} \quad y(x) = x,$$

$$I[y(x)] = \int\limits_{-1}^{1} \frac{xdx}{1+(x+1)^2} = ln\sqrt{5} - arctg\, 2 \quad \text{для} \quad y(x) = x+1.$$

Пример 4. Площадь поверхности, ограниченной некоторой замкнутой линией C, является функционалом. Этот функционал вполне может быть определен выбором уравнения данной поверхности $z = z(x, y)$, ограниченной данной линией C.

Если через D обозначить область на плоскости Oxy, в которую проектируется поверхность с границей C, то

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \cdot$$

1.2. Понятие вариации функции

Если дана функция $y = f(x)$, то через $\Delta x = x - x_1$ обозначается приращение независимой переменной x.

А в функционале $I[y(x)]$ приращение аргумента $y(x)$ называется ***вариацией функции*** $y(x)$ и обозначается через δy : $\delta y = y(x) - y_1(x)$.

Чем ближе кривая $y_1(x)$ к кривой $y(x)$, тем меньше δy.

Но это определение не всегда достаточно ясно. Необходимо уточнить, в каких случаях кривые $y_1(x)$ и $y(x)$ считаются близкими.

Кривые $y(x)$ и $y_1(x)$ называются ***близкими в смысле близости нулевого порядка,*** если модуль разности $y(x) - y_1(x)$ мал.

Кривые $y(x)$ и $y_1(x)$ называются ***близкими в смысле близости первого порядка***, если модули разностей $y(x) - y_1(x)$ и $y'(x) - y_1'(x)$ малы.

Кривые $y(x)$ и $y_1(x)$ называются ***близкими в смысле близости n-го порядка***, если модули разностей $y(x) - y_1(x)$, $y'(x) - y_1'(x)$, ... , $y^{(n)}(x) - y_1^{(n)}(x)$ малы.

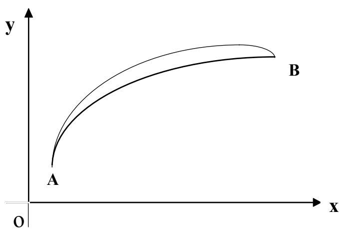

Рис. 1

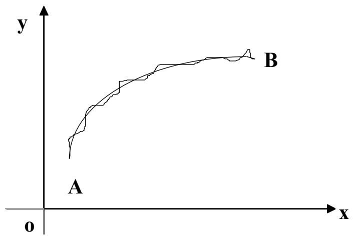

Рис. 2

На рис. 1 изображены кривые, близкие в смысле близости первого порядка.

На рис. 2 изображены кривые, близкие в смысле близости нулевого порядка, но не близкие в смысле близости первого порядка.

Из этих определений следует, что если кривые близки в смысле близости n-го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

Пример 1. На отрезке $[0; \pi]$ кривые $y(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}$ (n достаточно большое число) и $y_1(x) \equiv 0$ близки в смысле близости нулевого порядка, т.к.

$$|y(x) - y_1(x)| = \left|\frac{\sin n^2 x}{n}\right| < \frac{1}{n},$$

© Л.Г.Лелевкина, Р.Р.Рафатов

но не близки в смысле близости 1-го порядка, ибо $|y'(x)-y_1'(x)| = n|\cos n^2 x|$.

В частности при $x=\dfrac{2\pi}{n^2}$ имеем $|y'(x)-y_1'(x)| = n$.

Пример 2. На отрезке $[0;\pi]$ кривые $y(x)=\dfrac{\sin nx}{n^2}$ (n достаточно большое) и $y_1(x)\equiv 0$ близки в смысле близости первого порядка, ибо

$$|y(x)-y_1(x)| \le \frac{1}{n^2} \quad ,$$

$$|y'(x)-y_1'(x)| \le \frac{1}{n} \quad .$$

1.3. Непрерывность

Если малым изменениям аргумента x соответствуют малые изменения функции $f(x)$, то $f(x)$ называется ***непрерывной***, точнее, функция $f(x)$ называется ***непрерывной*** в точке x_0, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \ \eta>0$ такое, что $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ как только $|x-x_0|<\eta$.

Если малым изменениям функции $y(x)$ соответствуют малые изменения функционала $I[y(x)]$, то функционал $I[y(x)]$ называется ***непрерывным***, точнее, функционал $I[y(x)]$ называется ***непрерывным*** в смысле близости к-го порядка по кривой $y_0(x)$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \ \eta>0$ такое, что

$$|I[y(x)]-I[y_0(x)]|<\varepsilon$$

как только

$$|y(x)-y_0(x)|<\eta,\quad |y'(x)-y_0'(x)|<\eta,\ \ldots,\ |y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)|<\eta.$$

1.4. Линейные функционалы

Если функция $I(x)$ удовлетворяет условиям $I(cx)=cI(x)$, $I(x_1+x_2)=I(x_1)+I(x_2)$, $\forall c=const$ и $\forall x_1,x_2$ из области определения функций $I(x)$, то последняя называется ***линейной функцией***.

Линейная функция, зависящая от одной независимой переменной, имеет вид:

$$I(x)=kx \qquad\qquad (k \text{ - любая постоянная}).$$

Если функционал $L[y(x)]$ удовлетворяет условиям $L[y(x)]=cL[y(x)]$ и $L[y_1(x)+y_2(x)]=L[y_1(x)]+L[y_2(x)]$ $\forall c=const$ и $\forall y_1(x), y_2(x)$ из области определения $L[y(x)]$, то ***функционал*** $L[y(x)]$ называется ***линейным***.

Функционал

$$L[y(x)]=\int_a^b [p(x)y+q(x)y'(x)]dx$$

является линейным функционалом.

© Л.Г.Лелевкина, Р.Р.Рафатов

1.5. Вариация функционала

Приращение функции $f(x)$, соответствующее приращению аргумента Δx, дается в виде $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ или в виде $\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x,\Delta x)\Delta x$, где $A(x)$ не зависит от Δx.

Если $\beta(x,\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то выражение $A(x)\Delta x$, линейное относительно Δx, называется ***дифференциалом*** функции $f(x)$ и обозначается через df.

Из соотношения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A(x) = f'(x)$$

находим

$$df = f'(x)dx .$$

Аналогично приращение функционала $I[y(x)]$ дается в виде

$$\Delta I = I[y(x) + \delta y] - I[y(x)]$$

или в виде

$$\Delta I = L[y(x), \delta y] + \beta[y(x), \delta y]\max|\delta y| .$$

$L[y(x), \delta y]$ является линейным относительно δy функционалом.

Если $\beta[y(x), \delta y] \to 0$ при $\max|\delta y| \to 0$, то $L[y(x), \delta y]$, линейная относительно δy часть приращения ΔI, называется ***первой вариацией*** функционала $I[y(x)]$ и обозначается δI.

Часто вместо ***первая вариация***, применяется термин ***вариация функционала***.

Пример 1. Рассмотрим функционал $I[y(x)] = \int\limits_a^b y(x)dx$.

$$\Delta I = I[y(x) + \delta y(x)] - I[y(x)] = \int\limits_a^b [y(x) + \delta y(x)]dx - \int\limits_a^b y(x)dx = \int\limits_a^b \delta y(x)dx .$$

Функционал ΔI линеен относительно δy: $\delta I = \int\limits_a^b \delta y(x)dx$.

Пример 2. $I[y(x)] = \int\limits_a^b y^2(x)dx$.

Вычислим ΔI:

$$\Delta I = \int\limits_a^b [y(x) + \delta y(x)]^2 dx - \int\limits_a^b y^2(x)dx = \int\limits_a^b 2y(x)\delta y(x)dx + \int\limits_a^b [\delta y(x)]^2 dx \cdot$$

Первый интеграл в правой части этого равенства линеен относительно δy.

А второй интеграл:

$$\int\limits_a^b (\delta y)^2 dx = \int\limits_a^b |\delta y(x)|^2 dx < \left(\max_{a \le x \le b} |\delta y(x)|\right)^2 \int\limits_a^b dx = (b-a)\|\delta y\| \cdot \|\delta y\| \cdot$$

Так как $(b-a)\|\delta y\| \to 0$ при $\delta y \to 0$, то

$$\delta I = 2\int\limits_a^b y(x)\delta y(x)dx .$$

П р и м е р 3. Рассмотрим функционал $I[y(x)]=\int\limits_a^b f(x,y,y')dx$ и вычислим ΔI:

$$\Delta I=\int\limits_a^b [f(x,y+\delta y,y'+\delta y')-f(x,y,y')]dx\,. \qquad (1.1)$$

По формуле Тейлора имеем

$$f(x,y+\delta y,y'+\delta y')-f(x,y,y')=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'+R(x,y,y',\delta y,\delta y')\,. \qquad (1.2)$$

Здесь $R(x,y,y',\delta y,\delta y')$ остаток в формуле Тейлора. Подставив (1.2) в (1.1.), получим

$$\Delta I[y(x)]=\int\limits_a^b (\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y')dx+\int\limits_a^b R(x,y,y',\delta y,\delta y')dx\,. \qquad (1.3)$$

Если допустим, что вторые производные по y и y' функции $f(x,y,y')$ в их области определения ограничены числом $M>0$, учитывая $\|\delta y\|=\max\limits_{a\le x\le b}(\delta y,\delta y')$, имеем

$$\int\limits_a^b R(x,y,y',\delta y,\delta y')dx\le 2M\int\limits_a^b \|\delta y\|^2dx=2M(b-a)\|\delta y\|^2\,.$$

Поэтому

$$\delta I[y(x)]=\int\limits_a^b (\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y')dx\,. \qquad (1.4)$$

П р и м е р 4. Функционал $I[y(x)]=\int\limits_a^b f[x,y(x)]dx$, как частный случай функционала, рассмотренного в примере 3, имеет следующую вариацию:

$$\delta I=\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\delta y(x)dx\,. \qquad (1.5)$$

П р и м е р 5. Функционал $I[y(x)]=\int\limits_{-1}^{\pi}(y'e^y+xy^2)dx$ также является частным случаем функционала примера 3, где

$$f(x,y,y')=y'e^y+xy^2\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}=y'e^y+2xy\,,\ \frac{\partial f}{\partial y'}=e^y\,.$$

Поэтому в силу (1.4.), имеем

$$\delta I=\int\limits_{-1}^{+1}\left[(y'e^y+2xy)\delta y+e^y\delta y'\right]dx\,.$$

П р и м е р 6. Для функционала $I[y(x)]=\int\limits_0^{\pi} y'\sin y dx$ имеем

$$f(x,y,y')=y'\sin y\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}=y'\cos y\,,\ \frac{\partial f}{\partial y'}=\sin y\,,$$

и, следовательно,

$$\delta I=\int\limits_0^{\pi}(y'\cos y\delta y+\sin y\delta y')dx\,.$$

П р и м е р 7. Пусть $I[y(x)]=\int\limits_a^b (x+y)dx$.

Тогда

$$f(x,y,y')=x+y\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=1\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y'}=0\ .$$

И поэтому

$$\delta I=\int_a^b \delta y(x)dx\ .$$

1.6. Другое определение вариации функционала

Так же, как дифференциал функции $f(x)$, можно найти производную функции $f(x+\alpha\Delta x)$ по параметру α в точке $\alpha=0$:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)\,\big|_{\alpha=0}=f'(x+\alpha\Delta x)\,\big|_{\alpha=0}=f'(x)\Delta x=df(x)\,.$$

Дифференциал функции $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ можно найти по формуле

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x_1+\alpha\Delta x_1,x_2+\alpha\Delta x_2,...,x_n+\alpha\Delta x_n)\,\big|_{\alpha=0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i=df\ .$$

Аналогичные рассуждения можно применять для определения вариации функционала $I[y(x)]$. Имеем

$$\Delta I=I[y(x)+\alpha\delta y]-I[y(x)]=$$
$$=L[y(x),\alpha\delta y]+\beta[y(x),\alpha\delta y]\alpha|\max|\delta y|$$
$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta I}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{L[y(x),\alpha\delta y]}{\alpha}+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta[y(x),\alpha\delta y]\alpha|\max|\delta y|}{\alpha}\ .$$

Так как

$$L[y(x),\alpha\delta y]=\alpha L[y(x),\delta y]\ \text{и}\quad \beta[y(x),\alpha\delta y]\max|\delta y|=0\ ,$$

то

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta I}{\alpha}=\alpha L[y(x),\delta y],$$

т.е.

$$\delta I=\frac{\partial}{\partial\alpha}I[y(x)+\alpha\delta y]\,\big|_{\alpha=0}\ .$$

Пример. Известно, что вариация функционала

$$I[y(x)]=\int_a^b y^2(x)dx$$

равна

$$\delta I=2\int_a^b y(x)\delta y(x)dx\ .$$

Из предыдущего имеем

$$\delta I=\frac{\partial}{\partial\alpha}I[y(x)+\alpha\delta y]\,\big|_{\alpha=0}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b(y(x)+\alpha\delta y)^2dx\ \big|_{\alpha=0}=2\int_a^b y(x)\delta y dx\ .$$

1.7. Правила вычисления вариации

Допустим, что $F_1[y(x)]$ и $F_2[y(x)]$ функционалы, определенные на множестве функций $\{y(x)\}$. Легко проверить следующие соотношения:

$$(\delta y)' = \delta y', \text{ т.е. } \frac{d}{dx}(\delta y) = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

$$\delta[F_1 \pm F_2] = \delta F_1 \pm \delta F_2;$$

$$\delta[F_1 \cdot F_2] = F_1 \cdot \delta F_2 + F_2 \cdot \delta F_1; \quad \delta\left[\frac{F_1}{F_2}\right] = \frac{F_2 \cdot \delta F_1 - F_1 \cdot \delta F_2}{F_2^2};$$

$$\delta\left[F^n\right] = nF^{n-1} \cdot \delta F .$$

1.8. Вторая вариация функционала

Если функционал $I[x,y]$ двух переменных x и y линеен относительно y при фиксированной x и линеен относительно x при фиксированной y, то $I[x,y]$ называется ***билинейным функционалом.***

Таким образом, если $I[x,y]$ билинейный функционал, то $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ имеют место

$$I[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y] = \alpha_1 I[x_1, y] + \alpha_2 I[x_2, y],$$
$$I[x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2] = \beta_1 I[x, y_1] + \beta_2 I[x, y_2].$$

Билинейный функционал $I[x,y]$ при $x = y$ превращается в квадратичный функционал $I[x,x]$.

Если $I[x,x] > 0$ и $I[x,x] \neq 0$ $\forall x$, то $I[x,x]$ называется ***положительным квадратичным функционалом.***

Пример 1. Функционал

$$I[x,y] = \int_a^b A(t)x(t)y(t)dt$$

при непрерывной $A(t)$ является билинейным функционалом.

Если $A(t) > 0$ $\forall t \in (a,b)$, то функционал

$$I[x,x] = \int_a^b A(t)x^2(t)dt$$

является ***положительным квадратичным функционалом***.

Пример 2. $I = \int_a^b \left[A(t)x^2(t) + 2B(t)x(t)y(t) + C(t)y^2(t)\right]dt$

является примером квадратичного функционала.

Если функционал $I[y(x)]$ имеет вторую вариацию, то имеет место равенство $\Delta I = I[y + \delta y] - I[y] = L_1[\delta y] + \frac{1}{2}L_2[\delta y] + \beta\|\delta y\|^2$, где $\beta \to 0$ при $\delta y \to 0$, $L_1[\delta y]$ - линейный функционал, а $L_2[\delta y]$ - квадратичный функционал.

Квадратичный функционал $L_2[\delta y]$ называется *второй вариацией* функционала $I[y(x)]$ и обозначается $\delta^2 I$.

Пример 1. Допустим, что ищется вторая вариация функционала $I[y(x)] = \int_0^1 \left(xy^2 + y'^3\right)dx$.

Имеем

$$\Delta I=\int_0^1\left[x(y+\delta y)^2+(y'+\delta y')^3-xy^2-y'^3\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left(2xy\delta y+3y'^2\delta y'\right)dx+\int_0^1\left[x(\delta y)^2+3y'(\delta y')^2\right]dx+\int_0^1(\delta y')^3\,dx\,.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства является линейным относительно функционалом, второе слагаемое - квадратичным функционалом, а третье слагаемое удовлетворяет неравенству

$$\left|\int_0^1(\delta y')^3\,dx\right|\le\left(\max|\delta y'|\right)^2\int_0^1|\delta y'|dx\le\int_0^1|\delta y'|dx\|\delta y\|^2\,.$$

Таким образом, третье слагаемое может быть представлено в виде $\beta\|\delta y\|^2$, где $\beta\to 0$ при $\delta y\to 0$, и поэтому вторая вариация данного в этом примере функционала равна

$$\delta^2 I=2\int_0^1\left[x(\delta y)^2+3y'(\delta y')^2\right]dx\,.$$

П р и м е р 2. Требуется найти вторую вариацию

$$I[y(x)]=\int_a^b f(x,y,y')dx\,.$$

Первую вариацию функционала $I[y(x)]$ мы находим как $\varphi'(\alpha)\,|_{\alpha=0}$, где $\varphi(\alpha)=I[y(x)+\alpha\delta y]$. Вторую вариацию функционала $I[y(x)]$ будем искать в виде второй производной $\varphi(\alpha)$ в точке $\alpha=0$:

$$\delta^2 I=\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}\,\Big|_{\alpha=0}\,.$$

Из выражения

$$\varphi(\alpha)=\int_a^b f(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')dx$$

находим

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right]dx$$

$$\delta^2 I=\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\,\Big|_{\alpha=0}=\int_a^b\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\delta y^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\delta y'^2\right]dx\,.$$

1.9. Максимум и минимум

Если значения функционала $I[y(x)]$ на всех кривых, достаточно близких к кривой $y=y_0(x)$, меньше, чем $I[y_0(x)]$, то говорят, что функционал $I[y(x)]$ достигает своего ***максимума*** на кривой $y=y_0(x)$.

В этом случае имеет место неравенство

$$\Delta I=I[y(x)]-I[y_0(x)]\le 0\,.$$

Если $\Delta I=0$ только на кривой $y=y_0(x)$, то говорят, что функционал $I[y(x)]$ на кривой $y=y_0(x)$ достигает ***абсолютного максимума***.

Если функционал $I[y(x)]$ на всех кривых, достаточно близких к кривой $y = y_0(x)$, имеет значения большие, чем $I[y_0(x)]$, то говорят, что функционал $I[y(x)]$ достигает своего ***минимума*** на кривой $y = y_0(x)$.

В последнем случае имеет место неравенство:

$$\Delta I = I[y(x)] - I[y_0(x)] \geq 0 .$$

И если $\Delta I = 0$ только на кривой $y = y_0(x)$, то говорят, что функционал $I[y(x)]$ на кривой $y = y_0(x)$ достигает своего ***абсолютного минимума***.

Если все кривые, соседние к кривой $y = y_0(x)$, близки к последней в смысле близости нулевого порядка, то такой максимум - минимум называется ***сильным.***

Если же все кривые, соседние к кривой $y = y_0(x)$, близки к последней в смысле близости первого порядка, то в этом случае максимум - минимум называется ***слабым.***

Понятие сильного или слабого экстремума не имеет значения при доказательстве необходимого условия существования экстремума. Но они необходимы, если исследуется достаточное условие существования экстремума функционала.

1.10. Теорема о функционалах

Если существует вариация функционала $I[y(x)]$ ***и на кривой*** $y = y_0(x)$ ***данный функционал достигает максимума или минимума, то на кривой*** $y = y_0(x)$ $\delta I = 0$**.**

Доказательство теоремы следует из того, что

$$\varphi(\alpha) = I[y_0(x) + \alpha \delta y]$$

достигает своего экстремума при $\alpha = 0$, и поэтому $\delta I = \varphi'(0) = 0$.

Аналогично, если существует δI вариация функционала $I[z(x,y)]$ и он достигает своего экстремума на поверхности $z = z_0(x,y)$, то на ней $\delta I = 0$.

1.11. Основная лемма вариационного исчисления

Если функция $\varphi(x)$ ***непрерывна и дифференцируема на отрезке*** $[x_0, x_1]$ ***и для любой непрерывной и непрерывно дифференцируемой на том отрезке*** δy***, удовлетворяющей условиям*** $\delta y \,\big|_{x=x_0} = \delta y \,\big|_{x=x_1} = 0,\ |\delta y| < \varepsilon$ ***выполняется равенство***

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x) \delta y dx = 0 \ ,$$

то

$$\varphi(x) \equiv 0 \ \textbf{\textit{на}} \ x_0 \leq x \leq x_1 .$$

2. Необходимое условие экстремума

2.1. Простейший случай

Рассмотрим функционал

$$I[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx . \qquad (2.1)$$

Будем искать среди дважды дифференцируемых и удовлетворяющих условиям $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ функцию $y=y(x)$, такую, которая доставляет максимум или минимум функционалу (2.1).

2.1.1. Уравнение Эйлера

Точки (x_0,y_0) и (x_1,y_1) - назовем ***концевыми***.

Рассмотрим вариацию

$$\delta y=y^*(x)-y(x).$$

Здесь $y=y(x)$ функция, доставляющая экстремум функционалу (2.1), а $y=y^*(x)$ любая соседняя к $y=y(x)$ кривая, проходящая через концевые точки. Ясно, что $\delta y\,|_{x=x_0}=\delta y\,|_{x=x_1}=0$. Введем функцию $y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\delta y$, зависящую от произвольного числового параметра α. Очевидно, что $y(x,0)=y(x)$, а $y(x,1)=y^*(x)$.

Подставив $y(x,\alpha)$ в (2.1) вместо y, получим

$$\varphi(\alpha)=\int_{x_0}^{x_1} F[x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha)]dx .$$

Отсюда

$$\delta I=\varphi'(0)=\int_{x_0}^{x_1} \{F_y[x,y(x),y'(x)]\delta y+F'_{y'}[x,y(x),y'(x)]\delta y'\}dx . \qquad (2.2)$$

Проинтегрировав второе слагаемое (2.2) по частям и используя условия прохождения через концевые точки, получим

$$\delta I=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx=0 . \qquad (2.3)$$

Здесь $\delta y=y^*(x)-y(x)$ произвольна, т.к. $y^*(x)$ выбрана произвольно, в то же время непрерывна, в концевых точках обращается в нуль и $|\delta y|$, $|\delta y'|$ достаточно малы. По этой причине в силу основной леммы вариационного исчисления имеем

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 . \qquad (2.4)$$

Это есть необходимое условие существования экстремума функционала (2.1) и называется ***уравнением Эйлера***.

© Л.Г.Лелевкина, Р.Р.Рафатов

Уравнение Эйлера в развернутом виде выглядит так:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 . \qquad (2.5)$$

П р и м е р 1. Найти функцию, удовлетворяющую условиям $y(0)=1$, $y(2)=3$ и доставляющую экстремум функционалу

$$I[y(x)] = \int_0^2 \left(y'^2 + 32xy + 6y\right)dx .$$

Имеем $F(x, y, y') = y'^2 + 32xy + 6y$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 6 + 32x; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y''.$$

Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид

$$y'' - 16x - 3 = 0 .$$

Найдем общее решение этого уравнения

$$y = \frac{8}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C_1 x + C_2 .$$

Применив граничные условия $y(0)=1, y(2)=3$, получим

$$y = \frac{8}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{38}{3}x + 1.$$

Поскольку найдена единственная кривая, удовлетворяющая и граничным условиям, и уравнению Эйлера, то, очевидно, она и есть экстремальная кривая.

П р и м е р 2. Найти экстремум функционала

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} \left(y^2 - y'^2 - 2y\sin x\right)dx$$

при условиях $y(0)=0$ и $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Поскольку

$$F(x, y, y') = y^2 - y'^2 - 2y\sin x ,$$

$$F'_y = 2y - 2\sin x, F'_{y'} = -2y', \frac{d}{dx}F'_{y'} = -2y'' ,$$

то уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид

$$y'' + y = \sin x .$$

А общее решение выглядит так:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x .$$

Здесь C_1, C_2 - произвольные постоянные. Применив граничные условия, найдем $0 = C_1$, $2=C_2$. Следовательно,

$$y = 2\sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

есть экстремальная кривая.

У п р а ж н е н и я. требуется найти экстремальные кривые.

1. $I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2 dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$

2. $I[y(x)]=\int_{1}^{3}(3x-y)y\,dx, \quad y(1)=1, \quad y(3)=4.$

3. $I[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(y^2+2xyy'\right)dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

4. $I[y(x)]=\int_{0}^{1}\left(xy+y^2-y^2y'\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=a.$

5. Задача о существовании кратчайшей кривой, соединяющей две данные точки на плоскости.

6. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

7. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

8. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(y^2+8xyy'\right)dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

9. $v[y(x)]=\int_{1}^{2}\left(xy+y^2-2y'y^2\right)dx, \quad y(0)=1, \quad y(1)=2.$

10. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}y'\left(1+x^2y'\right)dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

11. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(y'^2+2yy'-16y^2\right)dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

12. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(xy'+y'^2\right)dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

13. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1+y^2}{y'^2}dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

14. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(y^2+y'^2-2y\sin x\right)dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

15. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(16y^2-y'^2+x^2\right)dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

16. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(2xy+y'^4\right)dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

17. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{y'^2}{x^3}dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

18. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(y^2+y'^2+2ye^x\right)dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

19. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left(y^2+y'^2-2y\sin x\right)dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

20. $v[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\left[y^2+(y')^2+\frac{2y}{chx}\right]dx, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1.$

21. $v[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[x^2 (y')^2 + 2y^2 + 2xy\right] dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$

22. Задача о брахистохроне (о существовании кривой, соединяющей две данные точки за кратчайшее время).

23. Задача о минимуме площади поверхности вращения.

2.2. Экстремум функционала, зависящего от нескольких функций

Для функционала

$$I[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)] = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')dx$$

и граничных условий

$$y_1(x_0) = y_{10}, \ldots, \quad y_2(x_0) = y_{20}, \quad y_n(x_0) = y_{n0},$$
$$y_1(x_1) = y_{11}, \quad y_2(x_1) = y_{21}, \ldots, \quad y_n(x_1) = y_{n1}$$

можно построить систему уравнений Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

дающих необходимые условия экстремума. Решив эту систему, найдем 2n параметрическое семейство кривых. Затем можно воспользоваться граничными условиями, число которых тоже 2n.

Пример. Пусть даны функционал

$$I[y(x), z(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} \left(y'^2 + z'^2 + 2yz\right)dx$$

и граничные условия

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Имеем

$$F = y'^2 + z'^2 + 2yz,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2z; \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2y'',$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = 2z'; \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 2z''.$$

Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} y'' - z = 0 \\ z'' - y = 0 \end{cases}$$

Отсюда получим уравнение

$$y^{(4)} - y = 0,$$

общее решение которого

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Следовательно,

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Из граничных условий найдем $C_1 = C_2 = C_3 = 0, \quad C_4 = 1.$

Экстремальная кривая дается уравнениями

$$y = \sin x, \quad z = -\sin x.$$

Упражнения. Найти экстремали функционалов

1. $I[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \left(y'^2 + z'^2 + y'z'\right) dx.$

2. $I[y(x), z(x)] = \int_{1}^{2} \left(y'^2 + z^2 + z'^2\right) dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2, \quad z(1) = 0, \quad z(2) = 1.$

3. $I[y(x), z(x)] = \int_{0}^{\pi} \left(2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2\right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad z(0) = 0,$ $z(\pi) = -1.$

4. $I[y(x), z(x)] = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2\right) dx, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$ $z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

5. $I[y(x), z(x)] = \int_{0}^{\pi/2} \left[y'^2 + z'^2 + 2yz\right] dx, \quad y(0) = 2, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4, \quad z(0) = 0,$ $z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3.$

6. $I[y(x), z(x)] = \int_{0}^{\pi/2} \left[y'^2 + z'^2 - 8yz\right] dx, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, \quad z(0) = 3,$ $z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.$

7. $I[y(x), z(x)] = \int_{0}^{\pi/2} \left[y'^2 + z'^2 + 2yz - 2y^2\right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z(0) = 2,$ $z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$

8. $I[y(x), z(x)] = \int_{0}^{\pi} \left[y'^2 + z'^2 + 2y^2 - 2z^2\right] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0, \quad z(0) = 0,$ $z(\pi) = -1.$

9. $I[y(x), z(x)] = \int_{0}^{\pi/2} \left[y'^2 + z'^2 + y\sin x + z\cos x\right] dx, \quad y(0) = -1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$ $z(0) = 1, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

10. $I[y(x), z(x)] = \int_{0}^{\pi} \left[y'^2 + z'^2 + y(\sin^2 x) - z(\cos^2 x) + 5\right] dx, \quad y(0) = 0,$ $y(\pi) = 1, \quad z(0) = 2, \quad z(\pi) = 3.$

2.3. Функционалы, содержащие производные высших порядков

Рассуждения, аналогичные вышеприведенным, показывают, что если даны функционалы

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) dx$$

и граничные условия

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$
$$y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = y'_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)},$$

то уравнение Эйлера, дающее необходимое условие существования экстремума, имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0\,. \quad (2.12)$$

П р и м е р 1. Найти экстремали функционала

$$I[y(x)] = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}\mu y''^2 + \rho y\right) dx$$

при граничных условиях

$$y(-1) = 0, \quad y'(-1) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Имеем

$$F = \frac{1}{2}\mu y''^2 + \rho y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \rho, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y''} = \mu y''.$$

Если эти величины подставить в уравнение Эйлера (2.12):

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0\,,$$

получим

$$\rho + \frac{d^2}{dx^2}(\mu y'') = 0 \text{ или } \quad y^{(4)} = -\frac{\rho}{\mu}\,.$$

Отсюда

$$y = -\frac{\rho}{\mu}\cdot\frac{x^4}{24} + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4\,.$$

Используя граничные условия, имеем

$$y = -\frac{\rho}{\mu}\cdot\frac{x^4}{24}\left(x^2 - 1\right)^2.$$

П р и м е р 2. Найти экстремали функционала

$$I[y(x)] = \int_{0}^{\pi/2} \left(y''^2 - y^2 + x^2\right) dx$$

при условиях

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Имеем

$$F = y''^2 - y^2 + x^2\,, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$$

и уравнение Эйлера для данного случая выглядит так:

$$y^{(4)} - y = 0.$$

Отсюда

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Экстремаль имеет вид

$$y = \cos x\,.$$

2.4. Функционалы, зависящие от функций двух переменных

Уравнение Эйлера (точнее, Эйлера-Лагранжа-Остроградского) для функционала

$$I[z(x,y)] = \iint\limits_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy$$

имеет вид

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\left(F_p\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(F_q\right) = 0, \qquad (2.13)$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Пример 1. Найти необходимое условие существования экстремума функционала $I[z(x,y)] = \iint\limits_D F\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dxdy.$

Имеем

$$F(x, y, z, p, q) = p^2 + q^2; \;\; F_z = 0, \;\; F_p = 2p, \;\; F_q = 2q$$

и уравнение (2.13) принимает вид

$$-\frac{\partial z}{\partial x}(2p) - \frac{\partial z}{\partial y}(2q) = 0\,,$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^{2z}}{\partial y^2} - 0 \;\text{ или }\; \Delta z = 0\,.$$

Пример 2. Легко показать, что экстремали функционала

$$I[z(x,y)] = \iint\limits_D F\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 2zf(x,y)\right] dxdy$$

должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^{2z}}{\partial y^2} = f(x,y).$$

Пример 3. Написать уравнение Эйлера-Остроградского для функционала $I[z(x,y)] = \iint\limits_D F\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dxdy.$

Решение. Уравнение (2.13) в этом случае имеет вид

$$0 - \frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-2\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

это и есть искомое уравнение.

© Л.Г.Лелевкина, Р.Р.Рафатов

3. Контрольные задания

Найти экстремали функционалов:

1. $I[y]=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(y^2+y'^2\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

Отв.: $y=\sin x.$

2. $I[y]=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(y'^2-y^2+2y\sin x\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

Отв.: $y=\sin x-\frac{x}{2}\cos x.$

3. $I[y]=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(y'^2-y^2+2ya\cos x\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

Отв.: $y=\left[1+\frac{a}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin x.$

4. $I[y]=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(y'^2-y^2+2y\sin^2\frac{x}{2}\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

Отв.: $y=\sin^2\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{8}(4+\pi-2x).$

5. $I[y]=\frac{1}{2}\int_0^{1}\left(y^2+y'^2\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=1.$

Отв.: $y=\frac{shx}{sh1}.$

6. $I[y]=\int_0^{\sqrt{2}}\left(y^2+4yx^2e^{x^2}+\frac{1}{2}y'^2\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y\left(\sqrt{2}\right)=1.$

Отв.: $y=e^{x^2}-e^{x\sqrt{2}}+\frac{sh\sqrt{2}x}{sh2}.$

7. $I[y]=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(y'^2-y^2+2yctgx\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

Отв.: $y=\sin x\left(1+\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\right).$

8. $I[y]=\int_0^{1}\left(8x^2y+2y^2+\frac{1}{2}y'^2\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y(1)=-4.$

Отв.: $y=\frac{sh2x}{sh2}-2x^3-3x.$

9. $I[y]=\int_0^{\pi/2}\left(xy+2ye^x+\frac{1}{2}y'^2-\frac{1}{2}y^2\right)dx, \quad y(0)=0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}.$

Отв.: $y=-\cos x-\frac{\pi}{2}\sin x+x+e^x.$

10. $I[y]=\frac{1}{2}\int_0^{1}\left(2xye^x+2y^2+y'^2\right)dx, \quad y(0)=2, \quad y\left(\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}.$

Отв.: $y=(2-x)e^{-x}-2e^{-\sqrt{2}}\frac{shx\sqrt{2}}{sh2}.$

11. $I[y]=\int\limits_{0}^{\pi/3}\left(27ye^{-3x}+\frac{81}{2}y^2-\frac{1}{2}y''^2\right)dx,\quad y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{12e^{\pi}},$

$y'(0)=-\frac{1}{4},\quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{4e^{\pi}}-\frac{1}{4e^{\pi}}.$

Отв.: $y(x)=-\frac{1}{4}xe^{-3x}.$

12. $I[y]=\int\limits_{\pi/12}^{\pi/4}\left(\frac{y}{\sin 2x}-2y^2+\frac{y'^2}{2}\right)dx,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0,\ y\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{48}\left(\pi\sqrt{3}+6\ln 2\right).$

Отв. $y(x)=-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\cdot in\sin 2x$

13. $I[y]=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(y'^2-y^2+2ytgx\right)dx,\quad y(0)=1,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

Отв.: $y(x)=\cos x\cdot\ln\frac{e}{tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.$

14. $I[y]=\int\limits_{0}^{2}\left(x^3y-24xy+\frac{y^2}{2}+2y'^2\right)dx,\quad y(0)=y(2)=0.$

Отв.: $y(x)=8\frac{sh\frac{x}{2}}{sh1}-x^3.$

15. $I[y]=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/3}\left(y'^2-y^2+\frac{2y}{\cos^3 x}\right)dx,\quad y(0)=\frac{1}{2},\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right)=0.$

Отв.: $y(x)=\frac{1}{2\cos x}-\frac{2\sin x}{\sqrt{3}}.$

16. $I[y]=\int\limits_{1}^{2}\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y'^2}{2}\right)dx,\quad y(1)=1,\quad y(2)=2.$

Отв.: $y(x)=\frac{4}{5}x^{-2}+\frac{1}{5}x^2.$

17. $I[y]=\int\limits_{1}^{2}\left(12y\frac{\ln x}{x^2}+\frac{3y^2}{x^2}+\frac{y'^2}{2}\right)dx,\quad y(1)=\frac{1}{3},\quad y(2)=-2\ln 2.$

Отв.: $y(x)=\frac{4}{93}\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right)+\frac{1}{3}-2\ln x.$

18. $I[y]=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\frac{y}{\sin^2 x}-2y^2-\frac{y'^2}{2}\right)dx,\quad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi\sqrt{3}}{12}-\frac{3}{4},\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

Отв.: $y(x)=-\cos 2x\cdot\ln|\sin x|-\left(x+\frac{1}{2}ctgx\right)\sin 2x.$

19. $I[y]=\int\limits_{0}^{1}\left(ye^{-mx}+m^2\frac{y^2}{2}+\frac{y'^2}{2}\right)dx,\quad y(0)=y(1)=0.$

Отв.: $y(x)=\frac{e^{-m}\cdot shmx}{2m\cdot shm}-\frac{x}{2m}e^{-mx}.$

20. $I[y]=\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(ye^{-2x}-2y^2+\frac{y'^2}{2}\right)dx,\quad y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{8}e^{-\frac{\pi}{2}}.$

Отв.: $y(x)=-\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{8}e^{-2x}.$

Часть 2

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

1. Основные понятия математической теории оптимального управления

1.1. Понятия об управляемых объектах

При прямолинейном движении автомобиля в каждый момент времени состояние автомобиля можно характеризовать двумя числами: пройденным расстоянием S и скоростью движения V. Эти две величины меняются с течением времени, но не самопроизвольно, а сообразно воле водителя, который может по своему желанию управлять работой двигателя, увеличивая или уменьшая развиваемую этим двигателем силу F. Таким образом, мы имеем три связанных между собой параметра: S,V,F. Величины S,V, характеризующие состояние автомобиля, называют его фазовыми координатами, а величину F - управляющим параметром.

При движении автомобиля по плоскости (а не по прямой) фазовых координат будет четыре (две “географические” координаты и две компоненты скорости), а управляющих параметров - два (например, сила тяги двигателя и угол поворота руля). У летящего самолета можно рассматривать шесть фазовых координат (три пространственных координаты и три компоненты скорости) и несколько управляющих параметров (тяга двигателя, величины, характеризующие положения рулей высоты и направления).

В электрическом утюге с терморегулятором, фазовыми координатами будут сила тока и температура нагрева, а управляющим параметром - положение регулятора.

Таким образом, можно провести следующее математическое описание управляемого объекта.

Состояние объекта задается (в каждый момент времени) n числами $x^1, x^2,..., x^n$, которые называются фазовыми координатами объекта. Движение объекта заключается с математической точки зрения в том, что его состояние с течением времени изменяется, т.е. $x^1, x^2,..., x^n$ являются переменными величинами (функциями времени). Движение объекта происходит не самопроизвольно, им можно управлять; для этого объект снабжен “рулями”, положение которых характеризуется (в каждый момент времени) r числами $u^1, u^2,..., u^r$, эти числа называются управляющими параметрами. Рулями можно “манипулировать”, т.е. по своему желанию можно менять (конечно, в допустимых пределах) управляющие параметры $u^1, u^2, ..., u^r$, которые являются координатами вектора управления $u = (u^1, u^2, ..., u^r)$.

Фазовые координаты $x^1, x^2, ..., x^n$ являются координатами вектора точки фазового состояния $x = (x^1, x^2, ..., x^n)$, которые образуют фазовое пространство.

Если объект таков, что фазовое состояние характеризуется двумя фазовыми координатами x^1, x^2, то они образуют фазовую плоскость. Вектор фазового состояния $\bar{x}$ и вектор управления $\bar{u}$ меняются в каждый момент времени, поэтому они являются векторными функциями, зависящими от времени t, т.е.

$$\bar{x}(t) = \left(x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)\right),$$
$$\bar{u}(t) = \left(u^1(t), u^2(t), ..., u^r(t)\right).$$

Движение объекта заключается в том, что фазовая точка $x(t) = \left(x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)\right)$, изображающая состояние объекта, с течением времени перемещается, описывая в фазовом пространстве некоторую линию, называемую фазовой траекторией рассматриваемого движения объекта.

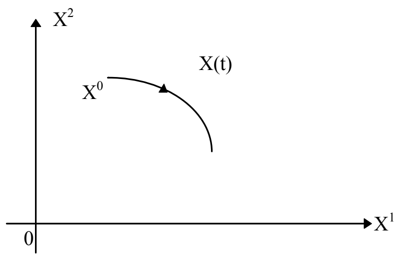

Рис. 1

При n=2 (рис. 1) пару векторных функций $(u(t), x(t))$, т.е. управление $u(t)$ и соответствующую фазовую траекторию $x(t)$, называют процессом управления или просто процессом. Процесс полностью определяется, если задано управление $u(t)$ (при $t > t_0$) и начальное фазовое состояние $x_0 = x(t_0)$.

1.2. Допустимые управления

Обычно управляющие параметры $u^1, ..., u^r$ не могут принимать совершенно произвольные значения, а подчинены некоторым ограничениям. Так, при движении автомобиля сила u, развиваемая двигателем, не может быть как угодно большой по величине, а подчинена ограничениям $\alpha \le u \le \beta$, где α и β - некоторые постоянные, характеризующие двигатель. В частности, при $\alpha = -1, \beta = 1 \quad -1 \le u \le 1$.

Это ограничение означает, что двигатель может развивать силу, направленную вдоль оси, как в положительном, так и в отрицательном направлении, но не превосходящую единицы по абсолютной величине. Аналогичный смысл имеют ограничения, когда управляющими параметрами являются количество подаваемого в двигатель топлива, температура, сила тока, направление.

Для объекта, содержащего r управляющих параметров, каждый из которых меняется произвольно, ограничение имеет вид $\alpha^i \le u^i \le \beta^i, i = 1,2,...,r$, геометрически это означает: при $r = 2$ - прямоугольник на плоскости, при $r = 3$ - прямоугольный параллелепипед, при r- произвольном неравенства определяют r-мерный параллелепипед. В общем случае считают, что в соответствии с конструкцией объекта и условиями его эксплуатации задано в пространстве переменных $u^1,...,u^r$ некоторое множество U (при $r = 2$ рис. 2) и управляющие параметры $u^1,...,u^r$ должны принимать значения, принадлежащие этому множеству, которое называется множеством допустимых управлений.

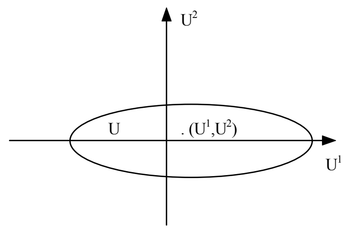

Рис. 2

Рассмотрим прямоугольное движение автомобиля, принимая его за материальную точку с постоянной массой m. Положение автомобиля на трассе будем характеризовать координатой x^1, которая меняется со временем, а потому $x^1 = x^1(t)$, скорость обозначим $\dot{x}^1 = \dot{x}^1(t)$. Будем предполагать, что на движение автомобиля влияют две силы: сила трения - $b\dot{x}^1$ и упругая сила - kx^1. Развиваемую двигателем силу обозначим через u. Таким образом, по второму закону Ньютона движение автомобиля будет описываться дифференциальным уравнением $m\ddot{x}^1 = -b\dot{x}^1 - kx^1 + u$. Положив $\dot{x}^1 = x^2$, т.е. обозначив скорость движения через новую переменную x^2, закон движения автомобиля можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = -\dfrac{k}{m}x^1 - \dfrac{b}{m}x^2 + \dfrac{1}{m}u \end{cases}.$$

Здесь x^1, x^2 являются фазовыми координатами, а величина u - управляющим параметром.

1.3. Уравнения движения объекта

Закон движения объекта записывается в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i\left(x^1, x^2, ..., x^n, u^1, ..., u^r\right) = f^i(x,u) \qquad i = 1,2,...,n \quad (1)$$

или, в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \qquad (2)$$

где $f(x,u)$ - вектор с координатами $f^1(x,u), f^2(x,u), ..., f^{(n)}(x,u)$.

Функции f^i определены для любых значений векторной переменной $x \in X$ и для значений u, принадлежащих области управления U. Они предполагаются непрерывными по совокупности переменных $x^i(t), u(t)$ и непрерывно дифференцируемыми по $x^i(t)$.

© Л.Г.Лелевкина, Р.Р.Рафатов

Допустимое управление $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ переводит фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, если соответствующее ему решение $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, определено на всем отрезке $t_0 \le t \le t_1$ и проходит в момент t_1 через точку x_1, т.е. удовлетворяет конечному условию $x(t_1) = x_1$.

Пусть задана еще одна функция

$$f^0\left(x^1, x^2, ..., x^n, u\right) = f^0(x, u),$$

определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial f^0}{\partial x^i}$, $i = 1,2,...,n$, на всем пространстве $X \times U$.

Основная задача отыскания оптимального управления формулируется следующим образом:

В фазовом пространстве X даны две точки x_0 и x_1. Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, переводящих фазовую точку из положения x_0 в x_1(если такие управления существуют), найти такое, для которого функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt$$

принимает ***наименьшее возможное значение***.

Здесь $x(t)$ - решение управления (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, соответствующее управлению $u(t)$, а t_1 - момент прохождения этого решения через точку x_1.

Управление $u(t)$, дающее решение поставленной задачи, называется ***оптимальным управлением,*** соответствующим переходу из положения x_0 в положение x_1, а соответствующая траектория $x(t)$ - ***оптимальной траекторией***.

Таким образом, основная задача заключается в отыскании оптимальных управлений (и соответствующих оптимальных траекторий).

Важным частным случаем этой задачи является случай, когда

$$f^0(x, u) \equiv 1. \qquad (3)$$

В этом случае функционал (3) принимает вид

$$J = t_1 - t_0 \qquad (4)$$

и оптимальность управления $u(t)$ ***означает минимальность времени перехода из положения*** x_0 ***в положение*** x_1.

Задача отыскания оптимальных управлений (и траекторий) в этом случае называется ***задачей оптимального быстродействия***.

Пример. Пусть управляемый процесс описывается векторным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad (5)$$

в котором x - вектор с координатами $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ удовлетворяющими условию $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$.

Координаты $u_1, ..., u_n, ...$ вектора u пусть также удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 < \infty .$$

Допустимыми управлениями считаются функции $u = u(t)$, принимающие в каждый момент времени значения из области управления

$$U = \left(\{u = u_1, ..., u_n, ...\} \left| u_n \right| \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, n = 1,2,... \right). \qquad (6)$$

Задача состоит в том, чтобы найти допустимое управление $u^0(t)$ такое, что соответствующее ему решение $x^0(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = u^0(t) \qquad (7)$$

с начальным условием

$$x(0) = \{0,0,...,0,...\} \qquad (8)$$

удовлетворяло бы условию

$$x(T) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\} \qquad (9)$$

при минимальном положительном T.

Уравнение (5) с условием (8) можно записать в виде

$$x_n(t) = \int_0^t u_n(\tau) d\tau, n = 1,2,...$$

Отсюда с учетом (6) находим, что минимальное время перехода от значения $x_n(0) = 0$ к значению

$$x_n(T) = \frac{1}{n}$$

получается при выборе

$$u_n(t) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

и это минимальное время равно $n(n+1)^{-1}$. Эта величина стремится к 1 при $n \to \infty$.Таким образом, время T оптимального быстродействия для этой задачи не может быть меньше 1. С другой стороны, ***управление***

$$u^0(t) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\} \qquad (10)$$

является ***допустимым***, а соответствующая ему ***траектория*** $x(t)$, определяемая соотношениями (7)-(8) удовлетворяет условию (9) при $T = 1$. Следовательно, ***управление*** (10) является ***оптимальным.***

Принцип максимума

Для формулировки принципа максимума наряду с основной системой (1) $\frac{dx^i}{dt} = f^i(x,u), i = 0,1,2,...,n$ вводится дополнительно система относительно новых вспомогательных переменных

$$\psi_0, \psi_1, ..., \psi_n: \ \frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^{\alpha}(x,u)}{\partial x^i} \psi_{\alpha}, i = 0,1,...,n .$$

При конкретном выбранном управлении $u(t)$, $t_0 \le t \le t_1$ и соответствующей фазовой траектории $x(t)$, получаемой как решение системы (1) при этом управлении и заданном начальном условии $x(t_0) = x_0$, вспомогательная система принимает вид

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^{\alpha}(x(t),u(t))}{\partial x^i} \psi_{\alpha}, i = 0,1,...,n . \qquad (11)$$

Эта система линейна и однородна; поэтому при любых начальных условиях для ψ_i она допускает единственное решение $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$, определенное на всем отрезке $t_0 \le t \le t_1$, на котором определены управление $u(t)$ и траектория $x(t)$. Как и решение $x(t)$ системы (1), решение системы (11) состоит из непрерывных функций $\psi_i(t)$, имеющих всюду, кроме конечного числа точек (а именно, точек разрыва управления $u(t)$), непрерывные производные по t. Всякое решение системы (11) (при любых начальных условиях) называется решением системы (11), соответствующим выбранному управлению $u(t)$ и фазовой траектории $x(t)$.

Системы (1) и (11) можно объединить одной записью, если ввести функцию $\mathrm{H}(\psi, x, u) = (\psi, f(x,u)) = \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_n f^n(x,u)$.

Здесь $(\psi, f(x,u))$ - скалярное произведение векторных функций $\psi(t)$ и $f(x,u(t)), \sum_{\alpha=0}^{n} \psi_n f^n$ - скалярное произведение этих функций в координатной форме. Тогда системы (1) и (11) можно записать в виде следующей гамильтоновой системы:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \psi_i}, i = 0,1,2,...,n \qquad (12)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x^i}, i = 0,1,2,...,n \qquad (13)$$

Таким образом, последовательность решения такова: при произвольном допустимом управлении $u(t)$ и заданном начальном условии $x(t_0) = x_0$ находится удовлетворяющая уравнению (12) траектория $x(t)$, после этого находятся соответствующие функциям $u(t)$ и $x(t)$ решения $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), ..., \psi_n(t))$ системы (13).

При фиксированных значениях ψ и x функция H становится функцией параметра $u \in U$; точную верхнюю грань значений этой функции обозначим через $M(\psi, x)$: $M(\psi, x) = \sup_{u \in U} \mathrm{H}(\psi, x, u)$. Если точная верхняя грань значений непрерывной функции H достигается в некоторой точке области управления U, то $M(\psi, x)$ есть максимум значений функции H при фиксированных ψ и x. ***Поэтому основная теорема дающая необходимое условие оптимальности, называется принципом максимума Понтрягина или просто принципом максимума.***

Теорема. Пусть $u(t), t_0 \le t \le t_1$ - такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $x(t)$, исходящая в момент t_0 из точки x_0, удовлетворяет условию $x(t_1) = x_1$. Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t), ..., \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$, что:

1^0. При любом t, $t_0 \le t \le t_1$ функция $\mathrm{H}(\psi(t), x(t), u)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$\mathrm{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = M(\psi(t), x(t)). \qquad (14)$$

2^0. В конечный момент t_1 выполнены соотношения

$$\psi_0(t) \le 0,\ M(\psi(t_1), x(t_1)) = 0. \qquad (15)$$

Оказывается, далее, что если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (12), (13) и условию 1^0, то функции $\psi_0(t)$ и $M(\psi(t), x(t))$ переменного t являются постоянными, так что проверку соотношений условия 2^0 можно проводить не обязательно в момент t_1, а в любой момент $t,\ t_0 \le t \le t_1$.

Из этой теоремы выводится необходимое условие для оптимальности по быстродействию. Для этого в теореме следует положить $f^0(x,u) = 1$.

Функция H принимает в этом случае вид $\mathrm{H} = \psi_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu f^\nu(x,u)$. Вводя n-мерный вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$ и функцию $H(\psi, x, u) = \sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu f^\nu(x,u)$, мы можем записать уравнения (1) и (11) в виде гамильтоновой системы

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, i = 1,2,,...,n; \qquad (16)$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, i = 1,2,,...,n. \qquad (17)$$

При фиксированных значениях ψ и x функция H становится функцией параметра u; верхнюю грань значений этой функции обозначим через $\mathrm{M}(\psi, x) = \sup_{u \in U} H(\psi, x, u)$. В силу соотношения $H(\psi, x, u) = \mathrm{H}(\psi, x, u) - \psi_0$ получаем $\mathrm{M}(\psi, x) = M(\psi, x) - \psi_0$ и поэтому условия (14), (15) принимают вид $H(\psi(t), x(t), u(t)) = \mathrm{M}(\psi(t), x(t)) = -\psi_0 \ge 0$.

Для задачи быстродействия принцип максимума формулируется следующим образом:

Теорема. Пусть $u(t), t_0 \le t \le t_1$ - допустимое управление, переводящее фазовую точку из положения x_0 в положение x_1, а $x(t)$- соответствующая траектория, так что $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$. Для оптимальности (по быстродействию) управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной векторной функции $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), ..., \psi_n(t))$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$, что:

1^0. Для всех $t, t_0 \le t \le t_1$, функция $H(\psi(t), x(t), u)$ является переменною $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \mathrm{M}(\psi(t), x(t)). \qquad (18)$$

2^0. В конечный момент t_1 выполнено соотношение

$$\mathrm{M}(\psi(t_1), x(t_1)) \geq 0. \qquad (19)$$

Оказывается, далее, что если величины $\psi(t)$, $x(t)$, $u(t)$ удовлетворяют системе (16), (17) и условию 1^0, то функция $\mathrm{M}(\psi(t), x(t))$ переменного t постоянна, так что проверку соотношения (19) можно проводить не обязательно в момент t_1, а в любой момент $t, t_0 \leq t \leq t_1$.

Пример на применение принципа максимума

Уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} = u$ описывает некоторый управляемый процесс. u - вещественный управляющий параметр, подчиненный условию $|u| \leq 1$. Введем фазовые координаты $\begin{cases} x^1 = x \\ x^2 = \frac{dx}{dt} \end{cases}$, тогда уравнение запишется в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = x^2, \\ \frac{dx^2}{dt} = u. \end{cases} \qquad (20)$$

Фазовую точку, движущуюся по закону (20) требуется за минимальное время перевести из начального состояния x_0 в начало координат (0,0). Это задача об оптимальном быстродействии в случае, когда конечным положением служит начало координат: $x_1 = (0,0)$.

Функция H для этой задачи имеет вид $\mathrm{H} = \psi_1 x^2 + \psi_2 u$. Для вспомогательных переменных ψ_1, ψ_2 получаем систему уравнений $\frac{d\psi_1}{dt} = 0$, $\frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1$ откуда $\psi_1 = c_1$, $\psi_2 = c_2 - c_1 t$, где c_1, c_2 - постоянные.

Так как максимальное значение $u(t) = 1$, а минимальное $u(t) = -1$, то если знак $u(t)$ совпадает со знаком $\psi_2(t)$, функция H примет максимальное значение по u, поэтому

$$u(t) = sign\psi_{2(t)} = sign(c_2 - c_1 t) \qquad (21)$$

$sign$ - означает знак функции. Из (21) следует, что каждое управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения ± 1 и имеющей не более двух интервалов постоянства (так как функция $c_2 - c_1 t$ не более одного раза меняет знак на отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$), т.е.

$$u(t) = +1, \text{ если } \psi_{2(t)} = c_2 - c_1 t > 0;$$

$$u(t) = -1, \text{ если } \psi_{2(t)} = c_2 - c_1 t < 0.$$

Для отрезка времени, на котором $u \equiv 1$, $\begin{matrix} \frac{dx^1}{dt} = x^2 \\ \frac{dx^2}{dt} = 1 \end{matrix}$,

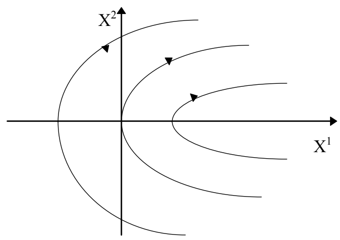

Рис. 3

откуда $\frac{dx^1}{dx^2} = x^2$, $dx^1 = x^2 dx^2$. Интегрируя, находим

$$x^1 = \frac{(x^2)^2}{2} + c. \qquad (22)$$

Таким образом, кусок фазовой траектории, для которого $u \equiv 1$, представляет собой дугу параболы. (22) - семейство парабол, получающихся друг из друга сдвигом в направлении оси x^1 (рис. 3). По этим параболам фазовые точки движутся снизу вверх, т.к. $\dot{x}^2 = u = 1$, т.е. $\dot{x}^2 > 0$.

Аналогично для отрезка времени, на котором $u \equiv -1$, имеем

$\frac{dx^1}{dx^2} = -x^2$, $dx^1 = -x^2 dx^2$. Интегрируя, находим

$$x^1 = -\frac{(x^2)^2}{2} + c. \qquad (23)$$

Это семейство парабол имеет вид

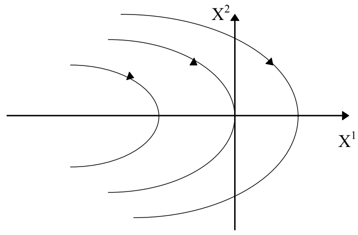

Рис. 4

По этим параболам фазовые точки движутся сверху вниз, т.к. $\dot{x}^2 = u = -1$, т.е. $\dot{x}^2 < 0$ (рис. 4).

Каждое оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения ±1 и имеющей не более двух интервалов

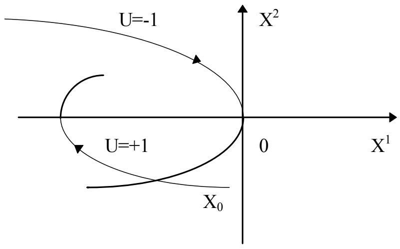

Рис. 5

постоянства. Если управление $u(t)$ сначала, в течение некоторого времени, равно +1, а затем равно -1, то фазовая траектория состоит из двух кусков парабол, примыкающих друг к другу, причем второй из этих кусков лежит на той из парабол (23), которая проходит через начало координат, т.к. искомая траектория должна вести в начало координат (рис.5).

Если же, наоборот, сначала $u(t) = -1$, а затем $u(t) = +1$, то мы получаем фазовую траекторию вида (рис. 6):

Все семейство полученных таким образом фазовых траекторий будет иметь вид (рис. 7):

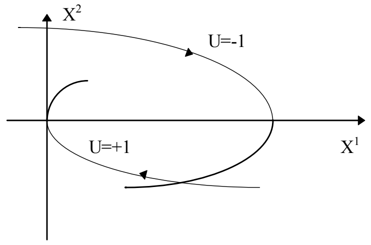

Рис. 6

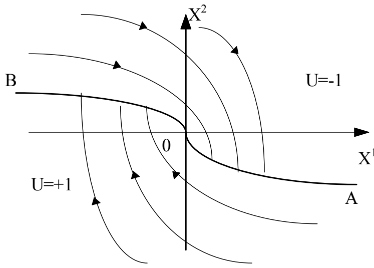

Рис. 7

Здесь АО - дуга параболы $x^1 = \frac{1}{2}\left(x^2\right)^2$, расположенная в нижней полуплоскости, ВО - дуга параболы $x^1 = -\frac{1}{2}\left(x^2\right)^2$, расположенная в верхней полуплоскости.

Если начальная точка x_0 расположена выше линии АОВ, то фазовая точка начинает двигаться по дуге параболы (23), проходящей через x_0; если же точка x_0 расположена ниже линии АОВ, то фазовая точка движется по дуге параболы (22), проходящей через x_0.

Следовательно, если начальное положение x_0 находится выше линии АОВ, то фазовая точка должна двигаться под воздействием управления $u \equiv -1$ до тех пор, пока она не попадет на дугу АО; в момент попадания на дугу АО значение u переключается и становится равным +1 вплоть до момента попадания в начало координат.

Если же начальное положение x_0 находится ниже линии АОВ, то u должно быть равно +1 до момента попадания на дугу ВО, а в момент попадания на дугу ВО значение u переключается и становится равным -1 вплоть до момента попадания в начало координат.

Согласно принципу максимума, только изображенные на рис. 7 траектории могут быть оптимальными, причем из вышесказанного следует, что из каждой точки фазовой плоскости исходит только одна траектория, ведущая в начало координат, которая может быть оптимальной, т.е. задание начальной точки x_0 однозначно определяет соответствующую траекторию.

2. Задания для самостоятельного выполнения

1. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \pi \sin t dt \to min, \quad |\dot{x}| \le 1, \quad x(\pi) = 0, \quad x(-\pi) = 0.$

2. $\int\limits_{0}^{\frac{7\pi}{4}} x \sin t dt \to min, \quad |\dot{x}| \le 1, \quad x(0) = 0.$

3. $\int\limits_{0}^{4} \left(\dot{x}^2 + x\right) dt \to min, \quad |\dot{x}| \le 1, \quad x(4) = 0.$

4. $\int\limits_{0}^{T_0} \left(\dot{x}^2 + x\right) dt \to min, \quad |\dot{x}| \le 1, \quad x(0) = 0.$

© Л.Г.Лелевкина, Р.Р.Рафатов

5. $\int_0^{T_0}\left(\dot{x}^2+x\right)dt\to min,\ \ |\dot{x}|\le 1,\ \ x(0)=\zeta.$

6. $\int_0^{T}\left(\dot{x}^2+x\right)dt\to min,\ \ |\dot{x}|\le 1,\ \ x(0)=\zeta.$

7. $\int_0^{T_0}\left(\dot{x}^2+x\right)dt\to min,\ \ |\dot{x}|\le 1,\ \ x(T_0)=\zeta.$

8. $\int_0^{T}\left(\dot{x}^2+x\right)dt\to min,\ \ |\dot{x}|\le 1,\ \ x(0)=\zeta.$

9. $\int_0^{T_0}\left(\dot{x}^2+x\right)dt\to min,\ \ |\dot{x}|\le 1,\ \ x(0)=0,\ \ x(T_0)=0.$

10. $\int_0^{T}\left(\dot{x}^2+x\right)dt\to min,\ \ |\dot{x}|\le 1,\ \ x(0)=0,\ \ x(T)=\zeta.$

11. $\int_0^{T_0}\left(\dot{x}^2+x^2\right)dt\to min,\ \ |\dot{x}|\le 1,\ \ x(0)=\zeta.$

12. $\int_0^{1}xdt\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ x(0)=\dot{x}(0)=0.$

13. $\int_0^{1}xdt\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ x(1)=\dot{x}(1)=0.$

14. $\int_0^{1}xdt\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ x(0)=\dot{x}(1)=0.$

15. $\int_0^{2}xdt\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ x(0)+x(2)=0,\ \ \dot{x}(2)=0.$

16. $\int_0^{2}xdt\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ x(0)+x(2)=0,\ \ \dot{x}(0)=0.$

17. $\int_0^{1}xdt\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ x(0)+x(1)=0,\ \ \dot{x}(0)+\dot{x}(1)=0$

18. $\int_0^{2}xdt\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ x(0)=\dot{x}(0)=x(2)=0.$

19. $\int_0^{2}xdt\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ \dot{x}(0)=\dot{x}(2)=x(2)=0.$

20. $\int_0^{2}xdt\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ x(0)=\dot{x}(0)=\dot{x}(2)=0.$

21. $\int_0^{4}xdt\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ x(0)+x(4)=0,\ \ \dot{x}(0)=\dot{x}(4)=0.$

22. $T\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ x(-1)=1,\ \ x(T)=-1,\ \ \dot{x}(-1)=\dot{x}(T)=0.$

23. $T\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ x(-1)=1,\ \ x(T)=1,\ \ \dot{x}(-1)=\dot{x}(T)=0.$

24. $T\to min,\ \ |\ddot{x}|\le 2,\ \ x(0)=1,\ \ x(T)=3,\ \ \dot{x}(0)=\dot{x}(T)=0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. - М.: Наука, 1969. – 307 с.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. - М.: ИЛ, 1960. - 400 с.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.: Наука, 1969. – 424 с.

© Л.Г.Лелевкина, Р.Р.Рафатов