МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

ПРИНЦИП МАКСИМУМА В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

А.А. Милютин, А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский

Москва 2004

А.А. Милютин, А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский

Принцип максимума в оптимальном управлении

Книга посвящена доказательству принципа максимума в классической понтрягинской задаче оптимального управления и в общей задаче с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями, наложенными на фазовые и управляющие переменные. Регулярность означает линейно-позитивную независимость градиентов по управлению от смешанных ограничений равенства и неравенства. Доказательство в первом случае сравнительно простое, оно основано на приеме замены времени и использует правило множителей Лагранжа для конечномерных гладких задач. Во втором случае доказательство проводится по схеме Дубовицкого–Милютина. В книге дается изложение этой схемы для абстрактных задач на экстремум в банаховых пространствах, а также всех необходимых сведений из функционального, выпуклого и нелинейного анализа. Как этап реализации схемы в общей задаче оптимального управления выводится уравнение Эйлера–Лагранжа — необходимое условие слабого минимума, а затем с помощью т.н. вариаций скольжения устанавливается принцип максимума.

Книга написана на основе лекций, которые авторы читали на механико-математическом факультете МГУ.

Для студентов, аспирантов и научных работников, интересующихся вопросами функционального анализа, вариационного исчисления и оптимального управления.

Библ. 24 назв.

Рецензенты:

профессор *М.С. Никольский, МИРАН*

профессор *В.М. Тихомиров, мехмат МГУ*

Замечания и предложения по содержанию книги, а также указания на возможные неточности и опечатки просим направлять по адресам

vraimax@mail.ru, dmitruk@member.ams.org, nikolai@osmolovskii.msk.ru.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Книга посвящена основному результату теории оптимального управления — принципу максимума (ПМ). Принцип максимума был получен более полувека лет назад Л.С.Понтрягиным и его сотрудниками и послужил основой для создания новой математической дисциплины – теории оптимального управления. Появление книги [1] стало мощным толчком к пересмотру базовых понятий теории экстремума, к ее развитию, и вызвало громадное количество исследований и публикаций. Наибольший вклад в развитие теории принципа максимума был сделан А.Я.Дубовицким и А.А.Милютиным. Анализируя доказательство ПМ, изложенное в книге [1], и осмысливая связь ПМ с классическим вариационным исчислением, они предложили новый метод получения необходимых условий в задачах на экстремум с ограничениями — так называемую схему Дубовицкого–Милютина, которая сразу завоевала широкое признание своей неожиданной ясностью, универсальностью и эффективностью. Она позволила установить идейную связь оптимального управления с классическим вариационным исчислением и распространить ПМ на более общие классы задач оптимального управления – задачи с фазовыми и смешанными ограничениями. Построенная Дубовицким и Милютиным теория ПМ представляет собой замечательное математическое достижение, потребовавшее филигранной техники исследования, использования известных и разработки новых нетривиальных результатов из теории функций действительного переменного и функционального анализа. Общая теория ПМ оказалась очень сложна; она была впоследствии несколько усовершенствована Милютиным и изложена им в его последней книге "Принцип максимума в общей задаче оптимального управления" (Москва, Физматлит, 2001), выход которой в свет автору не суждено было увидеть. Эти результаты, как и многое из того, что сделано Милютиным, намного опередили время. Однако и эта книга написана весьма жестко и лаконично; ее чтение требует большой и напряженной работы, и рассчитана она главным образом на специалистов, хорошо знакомых с предметом.

В то же время имеются важные классы задач оптимального управления, в которых формулировки и доказательства ПМ доступны студентам мехмата, прослушавшим курс анализа-III. Это, во-первых, классические задачи понтрягинского типа, а во-вторых, задачи с фазовыми и так называемыми *регулярными* смешанными ограничениями. Огромное количество специальной литературы, посвященной исследованию и применению тех и других задач, не оставляет сомнений в их практической значимости. Что же касается учебной литературы, то она, как правило, ограничивается рассмотрением лишь задач первого типа и почти не рассматривает вторых. Пионерские работы Дубовицкого и Милютина, позволившие исследовать задачи с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями, до сих пор не нашли должного отражения ни в учебной литературе, ни в учебных курсах или спецкурсах мехмата, несмотря на их несомненную теоретическую и практическую ценность. [1] Цель предлагаемого учебного пособия – восполнить этот пробел.

В главе 1 рассматривается относительно простой с точки зрения доказательства ПМ, но весьма общий с точки зрения приложений класс задач *понтрягинского типа:* с произвольными концевыми ограничениями равенства и неравенства, но без фазовых и смешанных ограничений. Он включает в себя все задачи, обычно рассматриваемые в учебной литературе, в частности, задачи на фиксированном и нефиксированном отрезках времени, задачи с интегральными ограничениями и с произвольным множеством допустимых управлений, задачи оптимального быстродействия и др. Этот класс мы назвали для краткости *задачей* A. Мы приводим доказательство ПМ в задаче A с помощью приема замены времени (так называемой v-замены, введенной Дубовицким и Милютиным) в простейшей его модификации, позволяющей пройти доказательство кратчайшим путем, опираясь лишь на правило множителей Лагранжа в конечномерных задачах с ограничениями типа равенства и неравенства. По конструкции доказательство весьма близко к доказательствам, использующим конечные наборы игольчатых вариаций (пакеты иголок) с последующей "организацией" полученных "частичных" ПМ, но в техническом отношении использование замены времени представляется нам наиболее удобной реализацией идеи пакета иголок. Приведенное в главе 1 доказательство принадлежит А.А.Милютину и было рассказано им на одном из последних заседаний его семинара по теории оптимального управления. Нам представляется, что это доказательство может быть включено в семестровый учебный курс вариационного исчисления и оптимального управления; более того, такой опыт уже имеется. Оно может сыграть роль сравнительно простого "канонического" доказательства ПМ для понтрягинского класса задач.

После того как ПМ в задаче A получен, рассматриваются те формы, которые он принимает в некоторых более узких классах задач, а также в некоторых задачах, по форме не похожих на задачу A, но сводящихся к ней после некоторой переписки. Кроме того, вводятся важные понятия понтрягинского минимума и понтрягинской экстремали управляемой системы, и уточняется зависимость одного из условий ПМ ("закона сохранения энергии") от остальных.

В главе 2 дается изложение схемы Дубовицкого–Милютина для абстрактных задач на экстремум с ограничениями в банаховых пространствах. Здесь же собраны все необходимые сведений из функционального анализа. В первую очередь, это элементы выпуклого анализа: теорема об отделимости двух выпуклых множеств и ее обобщение на случай произвольного конечного числа множеств, теоремы о сублинейных функционалах и их опорных. Кроме того, при работе с ограничениями типа равенства важную роль играет классическая теорема Люстерника о касательном подпространстве к множеству нулей нелинейного оператора и ее обобщения – теоремы о накрывании и об оценке расстояния до множества нулей оператора (с ними связано недавно появившееся понятие метрической регулярности оператора). Завершается глава 2 получением правила множителей Лагранжа для абстрактной задачи с гладкими ограничениями типа равенства и негладкими ограничениями типа неравенства в банаховом пространстве. (Необходимость включения негладких неравенств в общую схему обусловлена тем, что в задачах оптимального управления фазовые и смешанные ограничения неравенства по существу

---

[1] Исключение составляет курс лекций Гирсанова [7], в котором в ясной и доступной форме изложены идеи первых работ Дубовицкого и Милютина. Из научной литературы отметим хорошо известную монографию Иоффе и Тихомирова [15], в которой результаты работ Дубовицкого и Милютина по ПМ нашли частичное отражение. Задачи со смешанными ограничениями в обеих книгах отсутствуют.

задаются негладкими функционалами в соответствующих пространствах.) Доказательство проводится по схеме Дубовицкого–Милютина.

В целом содержание глав 1 и 2 представляет собой введение в предмет "Оптимальное управление (Теория экстремума)", и может послужить основой для односеместрового учебного курса.

Далее, в главе 3, мы переходим к изучению *общей регулярной задачи* — задачи с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями. Смешанным называется поточечное ограничение на фазовую переменную и управление. Под регулярными смешанными ограничениями мы понимаем такие, у которых в каждой точке градиенты по управлению ограничений равенства и активных ограничений неравенства (то есть тех, на границе которых находится данная точка) линейно-позитивно независимы (независимы с неотрицательными коэффициентами при градиентах неравенств). Начинается глава с рассмотрения специальных вопросов функционального анализа в пространствах C и L_∞, которые необходимы для исследования общей регулярной задачи: приводятся некоторые свойства самих этих пространств (в том числе дается формулировка теоремы Иосиды–Хьюитта о разложении линейного непрерывного функционала над L_∞ в сумму абсолютно непрерывного и сингулярного функционалов), изучается оператор равенств задачи и производные по направлению функционалов, задающих фазовые и смешанные ограничения неравенства, а также вводится понятие линейно-позитивно независимой системы вектор-функций в пространстве L_∞ и изучаются свойства таких систем. Устанавливается ключевой для дальнейшего факт, что уравнение Эйлера–Лагранжа для таких систем не содержит сингулярных составляющих.

Затем рассматриваются необходимые условия слабого минимума в регулярной задаче с гладкими ограничениями, а именно, доказывается так называемый локальный ПМ (или уравнение Эйлера–Лагранжа) — необходимое условие первого порядка для слабого минимума. Получение локального ПМ есть реализация общей схемы Дубовицкого–Милютина для данного класса задач. В доказательстве используются как абстрактные результаты и теоремы главы 2, так и специальные результаты главы 3, установленные ранее.

Глава 4 посвящена доказательству ПМ в общей регулярной задаче как необходимого условия первого порядка для сильного (а точнее, для понтрягинского) минимума. Доказательство проводится на основе результатов третьей главы и использует "вариации скольжения", соответствующие овыпуклению множества скоростей управляемой системы. Этот прием (также предложенный Милютиным), довольно естественный и простой на первый взгляд, нуждается в серьезном обосновании — а именно, он существенно опирается на специальную аппроксимационную теорему о корректности расширения исходной управляемой системы при переходе к скользящим режимам. Доказательство этой теоремы, весьма непростое, отнесено в главу 5 (Приложение); оно основывается в свою очередь на одном нелокальном варианте теоремы об оценке расстояния до множества нулей нелинейного оператора, представляющем и самостоятельный интерес.

Все содержание книги построено на записях лекций и семинаров нашего учителя Алексея Алексеевича Милютина, на его собственных публикациях и совместных публикациях с А.Я.Дубовицким. В книге частично использованы и наши совместные публикации с А.А.Милютиным. Главы 1, 2 и отчасти глава 3 представляют собой переработанные и дополненные материалы курсов лекций, прочитанных Осмоловским на мехмате МГУ в 2000 и 2001 годах. Главы 1, 2 написаны в основном Осмоловским, а глава 3 — нами совместно. Главы 4, 5 написаны Дмитруком; а главы 3, 4 и частично глава 2 читались им на мехмате в 2004 году в качестве полугодового спецкурса.

Список литературы, приведенный в конце книги, ни в коей мере не претендует на полноту, а лишь отражает круг публикаций, в той или иной степени близких к идеям настоящей книги и использовавшихся нами в процессе изучения принципа максимума и работы с ним. Мы также не приводим практически никаких исторических комментариев, которые сами по себе могли бы представлять интерес; это обусловлено ограниченностью объема данной книги и ее учебным характером.

Мы выражаем искреннюю благодарность Г.Ю. Данкову, который был связан с А.А. Милютиным многолетними дружескими отношениями, и по инициативе которого была написана эта книга.

Мы также благодарим студентов мехмата Михаила Шеблаева, Анну Фещук, Юрия Титова, Алексея Купавского и Олега Малько за помощь в оформлении первых двух глав рукописи.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ, проект 04-01-00482, и Программы по ведущим научным школам, проект НШ-304.2003.1.

А.В. Дмитрук, Н.П. Осмоловский

Июль 2004 г.

Глава 1

Принцип максимума Понтрягина в классических задачах оптимального управления

1.1 Задачи A и B

1. Пример задачи оптимального управления Материальная точка движется по плоскости под воздействием силы. Сила может иметь любое направление, но ограничена по величине. Какую силу надо приложить к точке в каждый момент времени, чтобы за кратчайшее время точка перешла бы из состояния A в состояние B? Под состоянием точки понимается ее положение и вектор скорости.

Формализуем задачу. Положение точки характеризуется ее координатами (x_1, x_2). Действующую в данный момент силу обозначим через $(u_1, u_2)(t)$. Массу точки считаем равной единице. Если $u_1 = u_1(t)$ и $u_2 = u_2(t)$ заданы, то перемещение точки на плоскости подчинено системе дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x}_1 = u_1(t), \qquad \ddot{x}_2 = u_2(t).$$

При этом $u_1^2 + u_2^2 \leqslant \mathrm{const}$. Здесь t — независимая переменная — время, $t \in [t_0, t_1]$. Отрезок $[t_0, t_1]$ не фиксирован. Требуется минимизировать $t_1 - t_0$.

Мы всегда будем представлять систему дифференциальных уравнений в виде системы *первого порядка*, вводя, если потребуется, дополнительные переменные. Нашу систему запишем в виде $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u(t)$, где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $u = (u_1, u_2)$. Новая переменная y есть скорость точки. Итак, задача имеет вид

$$t_1 - t_0 \to \min; \qquad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u(t), \quad u_1^2 + u_2^2 \leqslant \mathrm{const},$$

$$x(t_0) = a^0, \quad y(t_0) = b^0, \quad x(t_1) = a^1, \quad y(t_1) = b^1.$$

Если векторы b^0 и b^1 (начальная и конечная скорости точки) коллинеарны отрезку $[a^0, a^1]$, соединяющему начальное и конечное положения точки, то задача имеет простое решение, и для ее решения не нужно знать теорию оптимального управления. [1] Однако

[1] В этом случае силу надо выбирать коллинеарной отрезку $[a^0, a^1]$, то есть по сути переменные x, y и u оказываются одномерными. Одномерный случай для x, y и u (при условии что конечное состояние $(x(t_1), y(t_1))$ — нулевое) был впервые рассмотрен в качестве примера в книге Понтрягина и др. [1], и затем стал популярной иллюстрацией для применения принципа максимума.

в общем случае решение оказывается неочевидным. Еще более неочевидным оно становится, если в задачу ввести дополнительное ограничение: препятствие (например, круг), которое при движении точки требуется обойти, или ограничить по величине скорость точки. Подобные ограничения мы будем называть фазовыми. Наша цель - дать единый алгоритм, с помощью которого можно решать (но не обязательно решить!) любую задачу оптимального управления.

2. Управляемая система. Управляемой системой будем называть пару соотношений

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U. \tag{1.1}$$

Здесь $U \subset \mathbb{R}^m$ — произвольное множество, которому должно принадлежать *управление* $u = u(t)$ в каждый момент времени t. Таким образом, U задает *ограничение на управление.* Компоненты вектора $u = (u_1, \ldots, u_m)$ также называют *управлениями* или *управляющими параметрами.* Вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ характеризует *состояние* управляемого объекта. Его также называют *фазовой переменной*, или *фазой.* Уравнение $\dot{x} = f(t, x, u)$ описывает движение объекта управления при выбранном управлении $u = u(t)$.

Если в момент t_0 задано начальное состояние $x(t_0) = a$ и задано управление $u(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$, то $x(t)$ однозначно определяется (при некоторых естественных условиях на функцию f) как решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \qquad x(t_0) = a.$$

Относительно функции f мы будем предполагать, что *она сама и ее частные производные* f_x *и* f_t *непрерывны по совокупности переменных.*

Пару функций $x(t), u(t)$ определенных на отрезке $[t_0, t_1]$, будем называеть *траекторией управляемой системы* (1.1) (или *управляемым процессом*), если $x(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция, $u(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ — ограниченная измеримая функция, и при этом почти всюду (п.в.) на $[t_0, t_1]$ выполнены условия

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad u(t) \in U.$$

Заметим, что данное определение позволяет менять $u(t)$ на множестве меры нуль. (Называя функцию $u(t)$ ограниченной измеримой, мы имели в виду измеримость ее по Лебегу и существенную ограниченность). Для краткости мы будем полагать $w = (x, u)$.

С траекторией $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ мы будем связывать набор концевых значений $p = (t_0, x_0, t_1, x_1)$, где $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$.

Удобно ввести открытое множество $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{1+n+m}$ и предполагать, что f задана и непрерывна вместе с производными f_x и f_t не во всем пространстве, а лишь на множестве $\mathcal{Q}$, а в определении управляемой системы добавить условие

$$(t, x, u) \in \mathcal{Q}. \tag{1.2}$$

Предполагается, что это условие выполнено для траектории $(x(t), u(t))$ п.в. на $[t_0, t_1]$. Более того, будем предполагать, что для каждой траектории существует компакт $\Omega \subset \mathcal{Q}$ (зависящий от траектории) такой, что

$$(t, x(t), u(t)) \in \Omega \qquad \text{п.в. на } [t_0, t_1].$$

Это означает, что траектория проходит в $\mathcal{Q}$ на положительном расстоянии от границы $\partial\mathcal{Q}$. Множество $\mathcal{Q}$ следует понимать не как ограничение, а как область определения ("жизненное пространство") управляемой системы; вне этого множества управляемая система не рассматривается. Введение $\mathcal{Q}$ не вносит никаких дополнительных трудностей при получении условий оптимальности. Чтобы избежать лишних оговорок, мы полагаем ниже $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^{1+m+n}$.

3. Каноническая задача оптимального управления понтрягинского типа: задача A **.** Эта задача ставится следующим образом: минимизировать функцию начального и конечного состояний, а также начального и конечного моментов времени

$$J = F_0(t_0, x_0, t_1, x_1) \to \min,$$

где по определению

$$x_0 = x(t_0), \qquad x_1 = x(t_1),$$

при ограничениях на t_0, x_0, t_1, x_1 заданных в виде неравенств и равенств

$$F(t_0, x_0, t_1, x_1) \leqslant 0, \qquad K(t_0, x_0, t_1, x_1) = 0,$$

которым должна удовлетворять траектория $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U.$$

Отрезок $[t_0, t_1]$ *á priori* не фиксирован. Здесь $F_0 : \mathbb{R}^{2+2n} \to \mathbb{R}$,

$$F : \mathbb{R}^{2+2n} \to \mathbb{R}^k, \qquad F = (F_1, \ldots, F_k),$$

$$K : \mathbb{R}^{2+2n} \to \mathbb{R}^q, \qquad K = (K_1, \ldots, K_q),$$

$$f : \mathbb{R}^{1+n+m} \to \mathbb{R}^n, \qquad f = (f_1, \ldots, f_n).$$

Снова полагая для краткости $p = (t_0, x_0, t_1, x_1)$, перепишем задачу в виде:

$$J = F_0(p) \to min, \;\; F(p) \leqslant 0, \;\; K(p) = 0, \tag{1.3}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad u \in U. \tag{1.4}$$

Предполагается, что F_0, F, K — *функции класса* $\mathcal{C}^1$, и, как было сказано, f *непрерывна вместе с производными* f_x *и* f_t . Никаких предположений относительно множества $U \subset \mathbb{R}^m$ не делается. [2]

Функцию F_0 называют *целевой функцией*, или *функционалом задачи*, или просто *функционалом*. Функционал и ограничения (1.3) будем называть *концевым блоком задачи*. Таким образом, все поточечные ограничения задачи образуют управляемую систему (1.4), а кроме них имеется еще концевой блок.

Мы уже отметили, что свойства f можно было бы предполагать выполненными на некотором открытом множестве $\mathcal{Q}$, соответственно уточнив понятие допустимой траектории. Аналогично можно было бы считать, что F_0, F, K определены и непрерывно

[2]Более того, можно считать (как это делается в книге [1]), что U не подмножество в $\mathbb{R}^n$, а произвольное хаусдорфово топологическое пространство. Однако нам не известны случаи, когда бы это предположение использовалось на практике.

дифференцируемы на некотором открытом множестве $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{2+2n}$. Мы этого не делаем, чтобы не отвлекаться на несущественные детали.

Если $F_0(p) = t_1 - t_0$, то есть требуется минимизировать время, то задача называется задачей *быстродействия*; при этом часто t_0 фиксируют, полагая $t_0 = 0$ (то есть $K_i(p) = t_0$ при некотором i). Может оказаться, что в задаче фиксирован левый конец $x(t_0) = a$ или правый $x(t_1) = b$, или оба. Такие условия задаются с помощью концевого ограничения: $K_i = x_0 - a = 0$ или $K_j = x_1 - b = 0$ при некоторых i, j . С помощью равенства $K = 0$ можно фиксировать как t_0 , так и t_1 , или t_0 и t_1 , одновременно. В последнем случае имеем задачу на фиксированном отрезке времени. Бывают постановки, когда из точки $x(t_0) = a$ надо попасть на многообразие $\varphi(x(t_1)) = 0$ или наоборот, или с многообразия на многообразие. Все эти постановки охватываются равенством $K(p) = 0$.

Наконец, пусть в функционале задачи присутствует также интегральный член

$$J_\Phi = F_0(p) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, x, u)dt,$$

где Φ непрерывна вместе со своими производными Φ_t и Φ_x . Тогда его можно переписать как концевой с помощью введения дополнительной фазовой переменой y :

$$\dot{y} = \Phi(t, x, u) \Rightarrow J_\Phi = F_0(p) + y_1 - y_0,$$

где $y_1 = y(t_1)$, $y_0 = y(t_0)$. Заметим, что при этом меняется и управляемая система, приобретая вид:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad \dot{y} = \Phi(t, x, u), \qquad u \in U.$$

Указаный прием существенно расширяет круг задач, охватываемый канонической задачей. Некоторые другие задачи, также сводящиеся к задаче A , будут рассмотрены в дальнейшем.

Траектория $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ называется *допустимой в задаче* A , если $x(t)$ абсолютно непрерывна на $[t_0, t_1]$, $u(t)$ ограничена и измерима на $[t_0, t_1]$ и выполнены все ограничения задачи. Допустимая траектория называется *оптимальной*, если среди всех допусимых траекторий она доставляет наименьшее значение функционалу. Таким образом, траектория оптимальна, если она доставляет абсолютный (глобальный) минимум. Более или менее ясно, что таким понятием не всегда удобно пользоваться. Поэтому в дальнейшем мы введем понятие оптимальности в более узком смысле. По аналогии с классическим вариационным исчислением будут определены понятия слабого и сильного минимума, а затем сравнительно новое понятие понтрягинского минимума, занимающего промежуточное положение между сильным и слабым.

Наша цель сейчас — исследовать каноническую задачу A и получить в ней необходимое условие оптимальности (понимаемой пока в глобальном смысле) — принцип максимума Понтрягина. Задачу A часто называют также задачей *понтрягинского типа*, поскольку именно такие задачи (хотя и не в той общности, что у нас) привели Л.С.Понтрягина и его учеников к разработке и доказательству принципа максимума (см. [1]).

Главное, что отличает задачи оптимального управления от задач вариационного исчисления – это присутствие ограничения $u \in U.$ Как уже подчеркивалось, в качестве U может выступать *любое* множество, например, состоящее из конечного числа точек. Это ограничение является, как говорят, "негладким". Стандартные методы классического вариационного исчисления для таках задач не проходят. Поэтому нужны новые специальные приемы для исследования задач оптимального управления. Таких приемов имеется несколько, и они приводят к различным доказательствам принципа максимума. В этой главе мы будем следовать приему и доказательству, рассказанному А.А.Милютиным на его семинаре по оптимальному управлению. Это доказательство представляется нам одним из наиболее простых.

4. Задача B **.** Оказывается, вовсе не обязательно рассматривать задачу A в полной общности, ибо имеется прием сведения ее к более простой задаче — задаче B . Последняя имеет вид :

$$J = F_0(x_0, x_1) \to min, \quad F(x_0, x_1) \leqslant 0, \quad K(x_0, x_1) = 0,$$

$$\dot{x} = f(x, u), \qquad u \in U,$$

где, как и прежде, $x_0 = x(t_0), \quad x_1 = x(t_1)$.

Фунции F_0, F, K непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R}^{2n}$, f непрерывна вместе с производной f_u в $\mathbb{R}^{n+m}$.

Отрезок $[t_0, t_1]$ по-прежнему *не фиксирован.* Таким образом, задача B отличается от задачи A лишь тем, что теперь f не зависит от t явно, т.е. система $\dot{x} = f$ является *автономной* и, кроме того, F_0, F, K не зависят от t_0, t_1 .

В задаче B траектории допускают сдвиг по времени. Действительно, если $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ — допустимая траектория задачи B , то при любом вещественном θ траектория

$$(x(t-\theta), u(t-\theta) \mid \ t \in [t_0+\theta, t_1+\theta])$$

— допустимая траектория той же задачи с теми же концами x_0, x_1 . Это касается и оптимальных траекторий задачи B .

Хотя задача B и является частным случаем задачи A, любую задачу A можно привести к виду B. Это достигается с помощью следующего приема. К системе $\dot{x} = f(t, x, u)$ добавим уравнение $\frac{dt}{d\tau} = 1$, считая, что $t = t(\tau)$ - новая фазовая переменая. Функции $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$ также считаем зависящими от τ : $x = x(\tau), u = u(\tau)$. Положим

$$t_0 = t(\tau_0), \quad x_0 = x(\tau_0), \quad t_1 = t(\tau_1), \quad x_1 = x(\tau_1). \tag{1.5}$$

В результате приходим к следующей задаче:

Задача A'

$$J = F_0(t_0, x_0, t_1, x_1) \to min, \quad F(t_0, x_0, t_1, x_1) \leqslant 0, \quad K(t_0, x_0, t_1, x_1) = 0,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = f(t, x, u), \quad \frac{dt}{d\tau} = 1, \quad u \in U,$$

где $t(\tau), x(\tau)$ — фазовые переменные, $u(\tau)$ — управление, $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ — нефиксированный отрезок, концы t_0, x_0, t_1, x_1 определены условиями (1.5).

Ясно, что задача A' - того же типа, что и задача B .

Какова связь между задачами A и A' ? Пусть $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1]) -$ допустимая траектория задачи A. Ее концы – это набор (t_0, x_0, t_1, x_1) , где $x_0 = x(t_0), \ \ x_1 = x(t_1)$. Положим $\tau_0 = t_0, \ \ \tau_1 = t_1, \ \ t(\tau) = \tau$. Тогда $(t(\tau), x(\tau), u(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1]) -$ допустимая траектория задачи A' с теми же концами (t_0, x_0, t_1, x_1) , определенными условиями (1.5).

Обратно, пусть имеется допустимая траектория $(t(\tau), x(\tau), u(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$ в задаче A' с концами (t_0, x_0, t_1, x_1) . Тогда $t(\tau) = \tau + \mathrm{const}$. Сделав, если надо, сдвиг по τ, константу можно занулить, т.е. перейти к новой допустимой траектории в задаче A' с теми же концами, но с функцией $t(\tau) = \tau$. Для этой траектории положим $t_0 = \tau_0$, $t_1 = \tau_1$. Тогда $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ — допустимая траектории задачи A с теми же концами (t_0, x_0, t_1, x_1) , где $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$.

Указаное соответствие между допустимыми траекториями задач A и A' имеется и для оптимальных траекторий. Поэтому, получив необходимое условие оптимальности в задаче B , мы легко перепишем его и как необходимое условие в задаче A .

Переписка задач с помощью замены переменных (возможно, необратимой!) таит в себе большие возможности, часто неожиданные. Уже столь простой прием замены независимой переменной t принес заметную пользу: мы получили автономную задачу. Более серьезная замена времени $t = t(\tau)$ позволит свести задачу B к конечномерной задаче с неравенствами и равенствами, а затем воспользоваться правилом множителей Лагранжа. В конечном итоге это приведет к доказательству принципа максимума. Замена будет связана с уравнением $\frac{dt}{d\tau} = v$, где $v(\tau) -$ неотрицательная (но не всюду положительная) функция и, следовательно, $t = t(\tau)$ – монотонно неубывающая (но не строго возрастающая) функция. Подобная необратимая замена, превращающая время t в фазовую переменную, была предложена А.Я.Дубовицким и использовалась в его совместных работах с А.А.Милютиным; она была названа ими v -заменой. (Нетривиальный момент здесь в том, что малые вариации нового управления $v(\tau)$ приводят к вариациям типа игольчатых для исходного управления $u(t)$.) Простейший вариант такой v -замены мы сейчас рассмотрим.

1.2 Расширение управляемой системы задачи B

1. v -замена. Рассмотрим управляемую систему задачи B :

$$\dot{x} = f(x, u), \qquad u \in U, \tag{1.6}$$

траекторией которой является пара $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$, где $t_0 < t_1$ — произвольны; $x(t)$ абсолютно непрерывна, а $u(t)$ ограничена и измерима.

Определим теперь *расширенную управляемую систему* задачи B :

$$\frac{dx}{d\tau} = v f(x, u), \quad \frac{dt}{d\tau} = v, \quad u \in U, \quad v \geq 0. \tag{1.7}$$

Здесь τ — новая независимая переменная. Траекторией системы (1.7) по определению является набор функций

$$(t(\tau), x(\tau), u(\tau), v(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$$

таких, что $t(\tau), x(\tau)$ — абсолютно непрерывны, $u(\tau)$, $v(\tau)$ — ограничены и измеримы, условия (1.7) выполнены почти всюду на $[\tau_0, \tau_1]$, $\tau_0 < \tau_1$ - произвольны.

Концы траектории системы (1.6) - это t_0, t_1 и значения $x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1)$. Концы траектории системы (1.7) — это τ_0, τ_1 и значения $x_0 = x(\tau_0)$, $x_1 = x(\tau_1)$, $t_0 = t(\tau_0)$, $t_1 = t(\tau_1)$.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь таких траекторий расширенной системы, у которых $v(\tau)$ — *кусочно постоянна*, т.е. имеется разбиение $[\tau_0, \tau_1]$ на конечное число интервалов, примыкающих друг к другу, на каждом из которых $v(\tau)$ постоянна. Связь между такими траекториями расширенной системы и траекториями исходной управляемой системы задачи B устанавливает следующая лемма.

Лемма 1. *Для любой траектории системы (1.7) с кусочно постоянной v существует траектория системы (1.6) с теми же x_0, x_1 .*

Для доказательства леммы нам потребуются два предложения.

Пусть функция $\tilde{v}(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}$ — кусочно постоянна и неотрицательна, t_0 — число, и функция $\tilde{t}(\tau)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{d\tilde{t}(\tau)}{d\tau} = \tilde{v}(\tau), \quad \tilde{t}(\tau_0) = t_0,$$

то есть

$$\tilde{t}(\tau) = t_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \tilde{v}(s)ds.$$

Таким образом,

$$\tilde{t}(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \overset{\text{на}}{\to} [t_0, t_1]$$

— кусочно-линейная неубывающая функция. Пусть $\Delta^1, \Delta^2, \ldots, \Delta^s$ — набор всех отрезков постоянства функции $\tilde{t}(\tau)$, расположенных в естественном порядке. Обозначим

$$\mathcal{M}_0 = \bigcup_1^s \Delta^k, \qquad \mathcal{M}_+ = [\tau_0, \tau_1] \backslash \mathcal{M}_0.$$

Очевидно, $\mathcal{M}_+$ состоит из конечного числа интервалов и (или) полуинтервалов.

Пусть $\tilde{t}(\Delta^k) = \{t^k\}, \quad k = 1, \ldots, s$ — значения функции $\tilde{t}$ на отрезках постоянства. Положим

$$\mathcal{N}_0 = \{t^1, \ldots, t^s\}, \qquad \mathcal{N}_+ = [t_0, t_1] \backslash \mathcal{N}_0.$$

Ясно, что

$$\mathcal{N}_0 = \tilde{t}(\mathcal{M}_0), \qquad \mathcal{N}_+ = \tilde{t}(\mathcal{M}_+).$$

Далее, пусть $\tilde{\tau}(t) : [t_0, t_1] \to [\tau_0, \tau_1]$, такова, что $\tilde{t}(\tilde{\tau}(t)) = t \quad \forall t \in [t_0, t_1]$, т. е. $\tilde{\tau}$ является правой обратной к $\tilde{t}(\tau)$. Поскольку $\tilde{t}(\tau)$ отображает "на", то правая обратная существует. Более того, она определена однозначно всюду, кроме конечного множества точек $t^1, \ldots, t^s$, составляющих множество $\mathcal{N}_0$. Значение в каждой точке t^k можно выбрать произвольно из отрезка $\Delta^k := [\tau_0^k, \tau_1^k]$, $k = 1, \ldots, s$, являющегося полным прообразом $\tilde{t}^{-1}(t_k)$. точки t_k . Для определенности положим $\tilde{\tau}(t^k) = \tau_0^k$, $k = 1, \ldots, s$. Тогда $\tilde{\tau}(t)$ *непрерывна слева.*

Следующие два предложения, используемые в доказательстве леммы 1, будем называть предложениями о монотонных кусочно линейных функциях. В них участвуют функции $\tilde{t}(\tau)$, $\tilde{\tau}(t)$ и $\tilde{v}(\tau)$, определенные выше.

Предложение 1. *Пусть $\tilde{u}(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^m$ — ограниченая измеримая функция такая, что $\tilde{u}(\tau) \in U$ п.в. на $[\tau_0, \tau_1]$. Положим $u(t) = \tilde{u}(\tilde{\tau}(t))$, $t \in [t_0, t_1]$.*

Тогда $u(t)$ — ограниченная измеримая функция такая, что $u(t) \in U$ п.в. на $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Достаточно проверить это утверждение на произвольном интервале множества $\mathcal{N}_+$. Но на таком интервале $\tilde{\tau}(t)$ — линейная возрастающая функция, и тогда измеримость, существенная ограниченность и условие $u(t) \in U$ п.в. представляются очевидными.

Предложение 2. *Пусть* $\tilde{x}(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^n$ *— липшицева функция такая, что*

$$\frac{d\tilde{x}(\tau)}{d\tau} = \tilde{v}(\tau)\tilde{\varphi}(\tau) \quad \text{п.в. на} \quad [\tau_0, \tau_1], \tag{1.8}$$

где $\tilde{\varphi}(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^n$ *— ограниченная измеримая функция, а* $\tilde{v}(\tau)$ *— указанная выше кусочно-постоянная неотрицательная функция. Положим*

$$x(t) = \tilde{x}(\tilde{\tau}(t)), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Тогда $x(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ *— липшицева функция такая, что*

$$x(t_0) = \tilde{x}(\tau_0), \quad x(t_1) = \tilde{x}(\tau_1). \tag{1.9}$$

Более того,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varphi(t) \quad \text{п.в. на} \quad [t_0, t_1], \tag{1.10}$$

где

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(\tilde{\tau}(t)), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Доказательство. а) Покажем, что $x(t)$ — липшицева функция. На любом интервале множества $\mathcal{N}_+$ функция $\tilde{\tau}(t)$ линейна и, следовательно, $x(t) = \tilde{x}(\tilde{\tau}(t))$ — липшицева (ибо $\tilde{x}(\cdot)$ — липшицева). Следовательно, достаточно лишь показать, что $x(t)$ непрерывна в каждой точке t^k множества $\mathcal{N}_0$ (несмотря на то, что $\tilde{\tau}(t)$ в каждой такой точке разрывна). Отсюда последует липшицевость $x(t)$.

Заметим, что в силу уравнения (1.8) функция $\tilde{x}(\tau)$ постоянна на каждом Δ^k $(k = 1, \dots, s)$, ибо $\tilde{v}(\tau) = 0$ на Δ^k. Поэтому

$$\tilde{x}(\tau_0^k) = \tilde{x}(\tau_1^k), \quad k = 1, \dots, s. \tag{1.11}$$

Возьмем произвольную точку $t^k \in \mathcal{N}_0$. Проверим непрерывность $x(t)$ в точке t^k. Имеем

$$x(t^k - 0) \stackrel{def}{=} \tilde{x}(\tilde{\tau}(t^k - 0)) = \tilde{x}(\tilde{\tau}(t^k)) \stackrel{def}{=} x(t^k), \tag{1.12}$$

так как $\tilde{\tau}$ непрерывна слева. При этом $\tilde{\tau}(t^k) = \tau_0^k$. Следовательно,

$$x(t^k - 0) = \tilde{x}(\tau_0^k). \tag{1.13}$$

Далее,

$$x(t^k + 0) \stackrel{def}{=} \tilde{x}(\tilde{\tau}(t^k + 0)) = x(\tau_1^k), \tag{1.14}$$

так как $\tilde{\tau}(t^k + 0) = \tau_1^k$. Из (1.11)-(1.14) следует, что

$$x(t^k - 0) = x(t^k) = \tilde{x}(\tau_0^k) = \tilde{x}(\tau_1^k) = x(t^k + 0).$$

Итак, $x(t)$ непрерывна в каждой точке t^k , а, значит, липшицева на $[t_0, t_1]$.

б) Докажем свойство (1.9) — совпадение концов. Поскольку $\tilde{\tau}(t)$ непрерывна слева, то $\tilde{\tau}(t_0) = \tau_0$. Следовательно,

$$x(t_0) \stackrel{def}{=} \tilde{x}(\tilde{\tau}(t_0)) = \tilde{x}(\tau_0).$$

Если $\tau_1 \in \mathcal{M}_+$, то есть τ_1 не является концом последнего отрезка постоянства функции $\tilde{t}(\tau)$ (отрезка Δ^s), то $\tilde{\tau}(t_1) = \tau_1$ и, следовательно,

$$x(t_1) \overset{def}{=} \tilde{x}(\tilde{\tau}(t_1)) = \tilde{x}(\tau_1).$$

Если же τ_1 является правым концом отрезка $\Delta^s = [\tau_0^s, \tau_1^s]$, то $\tilde{\tau}(t_1) = \tau_0^s$ (поскольку $\tilde{\tau}$ непрерывна слева). Следовательно, $x(t_1) = \tilde{x}(\tilde{\tau}(t_1)) = \tilde{x}(\tau_0^s)$. Но в силу (1.11) $\tilde{x}(\tau_0^s) = \tilde{x}(\tau_1^s) = \tilde{x}(\tau_1)$. Таким образом, и в этом случае $x(t_1) = \tilde{x}(\tau)$.

Вообще можно доказать, что $x(\tilde{t}(\tau)) = \tilde{x}(\tau)$ $\forall\, \tau \in [\tau_0, \tau_1]$ (докажите это свойство), откуда (1.9) следует, ибо $\tilde{t}(\tau_0) = t_0$ и $\tilde{t}(\tau_1) = t_1$.

в) Наконец, установим для $x(t) = \tilde{x}(\tilde{\tau}(t))$ свойство (1.10). Возьмем любой интервал $\omega \subset \mathcal{N}_+$ (он является 1:1 образом некоторого интервала $\Delta \subset \mathcal{M}_+$). Как мы знаем, на нем функция $\tilde{\tau}(t)$ строго возрастает (так как она является обратной к возрастающей функции $\tilde{t}(\tau)$). При этом

$$\frac{d\tilde{t}}{d\tau} = v, \qquad v = v(\Delta) > 0, \qquad \frac{d\tilde{\tau}}{dt} = \frac{1}{v},$$

а тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\tilde{x}(\tau)}{d\tau}\frac{d\tilde{\tau}}{dt} = v\tilde{\varphi}(\tilde{\tau})\frac{1}{v} = \tilde{\varphi}(\tilde{\tau}(t)) = \varphi(t).$$

Итак, требуемое равенство (1.10) выполнено на любом интервале, содержащемся в $\mathcal{N}_+$, а поскольку $\mathcal{N}_+$ и состоит из конечного числа интервалов, то (1.10) выполнено на всем отрезке $[t_0, t_1]$, кроме конечного числа точек.

Доказательство леммы 1. Пусть $(\tilde{t}(\tau), \tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau), \tilde{v}(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$ — траектория расширенной системы (1.7). Положим $t_0 = \tilde{t}(\tau_0)$, $t_1 = \tilde{t}(\tau_1)$, и пусть $\tilde{\tau}(t) : [t_0, t_1] \to [\tau_0, \tau_1]$ — правая обратная к $\tilde{t}(\tau)$, непрерывная слева. Положим

$$x(t) = \tilde{x}(\tilde{\tau}(t)), \quad u(t) = \tilde{u}(\tilde{\tau}(t)), \quad t \in [t_0, t_1]\,.$$

Согласно Предложению 1, $u(t)$ — ограниченая измеримая функция такая, что $u(t) \in U$ п.в. на $[t_0, t_1]$. Согласно Предложению 2, $x(t)$ — липшицева функция на $[t_0, t_1]$, причем $x(t_0) = \tilde{x}(\tau_0)$, $x(t_1) = \tilde{x}(\tau_1)$,

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \ \text{ п.в. на } \ [t_0, t_1].$$

Последнее, в силу Предложения 2, вытекает из условий

$$\frac{d\tilde{x}(\tau)}{d\tau} = \tilde{v}(\tau) f(\tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau)), \quad f(\tilde{x}(\tilde{\tau}(t)), \tilde{u}(\tilde{\tau}(t))) = f(x(t), u(t)).$$

Следовательно, $(x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ — траектория системы (1.6). □

2. Задача B и задача $\tilde{B}$, связь между ними. Рассмотрим снова задачу B :

$$J(x_0,x_1)\to min,\quad F(x_0,x_1)\leqslant 0,\quad K(x_0,x_1)=0,\quad \dot{x}=f(x,u),\quad u\in U,$$

где $x_0=x(t_0)$, $x_1=x(t_1)$, $x(t)$ — липшицева, а $u(t)$ - ограниченная измеримая на $[t_0,t_1]$, причем t_0,t_1 - свободны.

Наряду с задачей B будем рассматривать задачу $\tilde{B}$:

$$J(x_0,x_1)\to min,\quad F(x_0,x_1)\leqslant 0,\quad K(x_0,x_1)=0,$$

$$\frac{dx}{d\tau}=vf(x,u),\quad \frac{dt}{d\tau}=v,\quad v\geqslant 0,\quad u\in U,$$

где $x_0=x(\tau_0)$, $x_1=x(\tau_1)$, функции $x(\tau),t(\tau)$ абсолютно непрерывны, $u(\tau)$ — ограничена и измерима, $v(\tau)$ — *кусочно постоянна* (!), $\tau\in[\tau_0,\tau_1]$, концы τ_0,τ_1 — фиксированы. Здесь x и t — фазовые переменные, u и v — управления. При $v\equiv 1$ и $\tau_0=t_0$ траектория задачи $\tilde{B}$ превращается в траекторию задачи B , поэтому мы будем называть задачу $\tilde{B}$ *расширением задачи* B .

Теорема 1 (о связи задач B и $\tilde{B}$). *Пусть* $\Upsilon=(x(t),u(t)\mid t\in[t_0,t_1])$ *— оптимальная траектория задачи* B *. Пусть* $\tilde{\Upsilon}=(\tilde{t}(\tau),\tilde{x}(\tau),\tilde{u}(\tau),\tilde{v}(\tau)\mid\tau\in[\tau_0,\tau_1])$ *— допустимая траектория задачи* $\tilde{B}$ *такая, что* $\tilde{x}(\tau_0)=x(t_0)$, $\tilde{x}(\tau_1)=x(t_1)$.
Тогда $\tilde{\Upsilon}$ *– оптимальная траектория задачи* $\tilde{B}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\Upsilon}$ не оптимальна в задаче $\tilde{B}$. Тогда найдется допустимая траектория задачи $\tilde{B}$

$$\tilde{\Upsilon}'=(\tilde{t}'(\tau),\tilde{x}'(\tau),\tilde{u}'(\tau),\tilde{v}'(\tau)\mid\tau\in[\tau_0,\tau_1])$$

с меньшим начением целевой функции:

$$J(\tilde{x}'(\tau_0),\tilde{x}'(\tau_1))<J(\tilde{x}(\tau_0),\tilde{x}(\tau_1)).$$

(здесь штрихи не означают дифференцирование). По лемме 1 найдется траектория управляемой системы задачи B : $\Upsilon'=(x'(t),u'(t)\mid t\in[t_0',t_1'])$ такая, что $x'(t_0')=\tilde{x}'(\tau_0)$, $x'(t_1')=\tilde{x}'(\tau_1)$. Тогда Υ' — допустимая траектория задачи B (поскольку $\tilde{\Upsilon}'$ допустима в задаче $\tilde{B}$) и при этом $J(x'(t_0'),x'(t_1'))<J(x(t_0),x(t_1))$. Значит, Υ не оптимальна в задаче B . □

Мы провели важную подготовительную работу перед доказательством принципа максимума, связав между собой задачи B и $\tilde{B}$.

Перед этим доказательством сформулируем и докажем еще один важный результат, относящийся к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

1.3 Система уравнений в вариациях

Напомним некоторые определения из функционального анализа.

1. Производная Фреше нелинейного оператора. Пусть X, Y - банаховы пространства. Оператор $g : X \to Y$ называют *дифференцируемым по Фреше* в точке x_0, если существует линейный оператор $A : X - Y$ такой, что

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + Ah + \tilde{y}(h)\|h\|, \quad \text{где } \|\tilde{y}(h)\| \to 0 \text{ при } \|h\| \to 0.$$

Оператор A называют *производной Фреше оператора в точке* x_0 и обозначают $A = g'(x_0)$.

Оператор называют *непрерывно дифференцируемым по Фреше в точке* x_0, если он дифференцируем по Фреше в окрестности этой точки (т. е. имеет производную Фреше в окрестности точки x_0) и при этом

$$\|g'(x) - g'(x_0)\| \to 0; \text{ при } \|x - x_0\| \to 0.$$

2. Пространства функций. Напомним, что абсолютно непрерывные функции характеризуются тем свойством, что они почти всюду (п.в.) имеют производную и всюду равны интегралу от своей производной:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(\tau) d\tau \qquad \forall\, t.$$

Их производная $\dot{x}$ является произвольной функцией из L_1, т. е. измеримой и суммируемой с первой степенью. Множество всех абсолютно непрерывных функций $x(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ обозначается $W_1^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ (первая производная суммируема с первой степенью), или $AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ (absolutely continuous functions). К этому классу в оптимальном управлении принято причислять фазовую переменную $x(t)$. Напомним, что

$$\|x\|_{AC} = \ |x(t_0)| + \|\dot{x}\|_1, \tag{1.15}$$

где $\|u\|_1 = \int_{t_0}^{t_1} |u(t)| dt$ есть норма в пространстве L_1. Пространство AC, снабженное нормой (1.15), является банаховым.

Что же касается управлений, то, как уже говорилось, мы будем считать, что управление $u(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ является произвольной функцией из класса $L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$ ограниченных измеримых функций. Норма в этом пространстве определяется как

$$\|u\|_\infty = \ \operatorname*{vraimax}_{t \in [t_0, t_1]} |u(t)|. \tag{1.16}$$

Напомним, что такое $\operatorname{vrai\,max}$ (существенный максимум, или $\operatorname{ess\,sup}$) ограниченной измеримой функции $\varphi(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$. Он определяется так:

$$\operatorname*{vraimax}_{[t_0, t_1]} \varphi(t) = \ \min \{\, C \ \mid \ \varphi(t) \le C \quad \text{п.в. на} \quad [t_0, t_1] \,\}.$$

(Докажите, что $\min$ здесь действительно достигается.)

Мы будем использовать также пространство $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x(t)$ на $[t_0, t_1]$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Как известно, норма в этом пространстве есть

$$\|x\|_C = \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|.$$

В обозначениях пространств функций их область значений $\mathbb{R}^n$ мы часто будем опускать.

3. Система уравнений в вариациях. Напомним следующий факт из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 2. *Пусть на отрезке* $\Delta = [t_0, t_1]$ *рассматривается управляемая система*

$$\dot{x} = f(x, u), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{1.17}$$

с непрерывно дифференцируемой функцией f *. Пусть* $\hat{x}(t)$ *есть решение этой системы для некоторой функции* $\hat{u} \in L_\infty(\Delta, \mathbb{R}^m)$ *и некоторого начального значения* $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ *. Тогда эта система имеет решение на* Δ *при любом* x_0 *, достаточно близком к* $\hat{x}_0$ *, и любой* $u(t)$ *, равномерно близкой к* $\hat{u}(t)$ *, то есть существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что если*

$$|x_0 - \hat{x}_0| < \varepsilon, \qquad \|u - \hat{u}\|_\infty < \varepsilon,$$

то система (1.17) имеет на Δ *решение* $x(t)$ *.*

Более того, если $|x_0 - \hat{x}_0| \to 0, \quad \|u - \hat{u}\|_\infty \to 0$ *, то* $\|x - \hat{x}\|_C \to 0$ *.*

Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}^n \times L_\infty(\Delta)$ в некоторой окрестности $\mathcal{U}(\hat{x}_0) \times \mathcal{V}(\hat{u})$ точки $(\hat{x}_0, \hat{u})$ определен оператор

$$F : (x_0, u) \in \mathcal{U}(\hat{x}_0) \times \mathcal{V}(\hat{u}) \mapsto x(\cdot) \in C(\Delta),$$

переводящий пару (x_0, u) в соответствующее ей решение $x(t)$ уравнения (1.17), и этот оператор непрерывен в в точке $(\hat{x}_0, \hat{u})$. (Отсюда, кстати, следует, что он будет непрерывен и в любой другой точке указанной окрестности.)

Покажем, что оператор F обладает более сильным свойством.

Теорема 3. *Оператор* F *дифференцируем по Фреше в точке* $(\hat{x}_0, \hat{u})$ *, и его производная Фреше есть линейный оператор*

$$F'(\hat{x}_0, \hat{u}) : \mathbb{R}^n \times L_\infty(\Delta) \mapsto C(\Delta),$$

отображающий пару $(\bar{x}_0, \bar{u})$ *в функцию* $\bar{x}(t)$ *, которая есть решение уравнения*

$$\dot{\bar{x}} = f_x(\hat{x}, \hat{u})\bar{x} + f_u(\hat{x}, \hat{u})\bar{u}, \qquad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0. \tag{1.18}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in \mathcal{U}(\hat{x}_0)$, $u \in \mathcal{V}(\hat{u})$ и x есть решение уравнения (1.17). Положим $\bar{x}_0 = x_0 - \hat{x}_0, \quad \bar{u} = u - \hat{u}, \quad \delta x = x - \hat{x},$ так что

$$x_0 = \hat{x}_0 + \bar{x}_0, \quad u = \hat{u} + \bar{u}, \quad x = \hat{x} + \delta x.$$

Тогда имеем

$$\frac{d}{dt}(\hat{x} + \delta x) = f(\hat{x} + \delta x, \hat{u} + \bar{u}), \qquad (\hat{x} + \delta x)\,|_{t_0} = \hat{x}_0 + \bar{x}_0,$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f(\hat{x}, \hat{u}), \qquad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0.$$

Вычитая из первого уравнения второе, и разлагая f до линейных членов, получаем

$$\delta\dot{x} = f_x(\hat{x}, \hat{u})\delta x + f_u(\hat{x}, \hat{u})\bar{u} + \xi(t, \delta x, \bar{u}), \quad \delta x(t_0) = \bar{x}_0, \tag{1.19}$$

где $\|\xi\|_C = o(\|\delta x\|_C + \|\bar{u}\|_\infty)$ при $\|\delta x\|_C \to 0$, $\|\bar{u}\|_\infty \to 0$.

Рассмотрим теперь функцию $\bar{x}(t)$, которая есть решение уравнения (1.18), и оценим разность $r(t) = \delta x(t) - \bar{x}(t)$. Из (1.19) и (1.18) имеем

$$\dot{r} = f_x(\hat{x}, \hat{u})r + \xi(t, \delta x, \bar{u}), \qquad r(t_0) = 0$$

Из оценок типа Гронуолла (см., например, [15, глава 9]) следует, что тогда

$$\|r\|_C \le \mathrm{const}\, \|\xi(t, \delta x, \bar{u})\|_1, \text{ и поэтому } \|r\|_C \le o(\|\delta x\|_C + \|\bar{u}\|_\infty).$$

Но у нас $\delta x = r + \bar{x}$, поэтому $\|r\|_C \le o(\|r\|_C) + o(\|\bar{x}\|_C + \|\bar{u}\|_\infty)$.

Из (1.18) и опять из оценок Гронуолла вытекает, что $\|\bar{x}\|_C \le \mathrm{const}(|\bar{x}_0| + \|\bar{u}\|_1)$,

поэтому $\|r\|_C(1 - o(1)) \le o(|\bar{x}_0| + \|\bar{u}\|_\infty)$, и тогда $\|r\|_C \le o(|\bar{x}_0| + \|\bar{u}\|_\infty)$,

а это означает, что $\bar{x}(t)$ есть главная линейная часть величины $\delta x(t)$ (то есть приращения фазовой переменной x), порожденной приращениями $\bar{x}_0$ и $\bar{u}$. $\square$

Линейное уравнение (1.18) называют *уравнением в вариациях для нелинейного уравнения (1.17).*

Пусть отрезок $[\tau_0, \tau_1]$ разбит на r последовательных промежутков (интервалов, полуинтервалов или отрезков) $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$. Обозначим через $\chi_k(\tau)$ характеристическую функцию множества σ_k, $k = 1, \ldots, r$.

В качестве исходного нелинейного уравнения мы будем рассматривать уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \hat{u}(\tau)) \sum_{k=1}^{r} z_k \chi_k(\tau), \tag{1.20}$$

с начальным условием

$$x(\tau_0) = x_0, \tag{1.21}$$

где z_k — числа, $k = 1, \ldots, r$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ – вектор, $\hat{u}(\tau)$ – фиксированная ограниченная измеримая функция. Положим, $z = (z_1, \ldots, z_r)$. Пусть f и f_x непрерывны по (x, u) .

Если ввести функцию $v(\tau) = \sum z_k \chi_k(\tau)$, то систему (1.20),(1.21) можно записать в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = v f(x, \hat{u}(\tau)), \quad x(\tau_0) = x_0, \tag{1.22}$$

Теорема 4. *Пусть при некоторых $(\hat{x}_0, \hat{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ задача Коши (1.20),(1.21) имеет решение $\hat{x}(\tau)$, определенное на $[\tau_0, \tau_1]$. Тогда в некоторой окрестности $\mathcal{W}$ точки $(\hat{x}_0, \hat{z})$ система (1.20),(1.21) определяет непрерывно дифференцируемый по Фреше оператор*

$$\varphi : (x_0, z) \in \mathcal{W} \mapsto \quad x(\cdot) \in AC([\tau_0, \tau_1], \mathbb{R}^n), \tag{1.23}$$

причем производная Фреше этого оператора в точке $(\hat{x}_0, \hat{z})$ есть линейный оператор, отображающий пару $(\bar{x}_0, \bar{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ в функцию $\bar{x}(\cdot) \in AC([\tau_0, \tau_1], \mathbb{R}^n)$, определяемую как решение задачи Коши

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = f'_x(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau))\bar{x} \sum_{k=1}^{r} \hat{z}_k \chi_k(\tau) + f(\hat{x}(\tau), \hat{u}(\tau)) \sum_{k=1}^{r} \bar{z}_k \chi_k(\tau), \tag{1.24}$$

$$\bar{x}(\tau_0) = \bar{x}_0. \tag{1.25}$$

Коротко задачу Коши (1.24), (1.25) запишем в виде

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \hat{v}\hat{f}_x\bar{x} + \bar{v}\hat{f}, \qquad \bar{x}(\tau_0) = \bar{x}_0, \tag{1.26}$$

где $\hat{v} = \sum \hat{z}_k\chi_k(\tau)$, $\bar{v} = \sum \bar{z}_k\chi_k(\tau)$, $\hat{f}_x = f_x(\hat{x}, \hat{u})$, $\hat{f} = f(\hat{x}, \hat{u})$. Система уравнений (1.24) есть *система уравнений в вариациях для системы (1.20).*

Введем конечномерный оператор $x_1 = P(x_0, z)$ такой, что

$$P : (x_0, z) \in \mathcal{W} \longmapsto x_1 = x(\tau_1) \in \mathbb{R}^n, \tag{1.27}$$

где $x(\cdot) = \varphi(x_0, z)$ - решение задачи Коши (1.20),(1.21), а $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ - окрестность точки $(\hat{\xi}, \hat{z})$, указанная в теореме 4. Пусть условия этой теоремы выполнены. Непосредственно из теоремы 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Конечномерный оператор (1.27) определен и непрерывно дифференцируем в некоторой окрестности $\mathcal{W}$ точки $(\hat{x}_0, \hat{z})$. Его производная в этой точке есть конечномерный линейный оператор*

$$P' : (\bar{x}_0, \bar{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \longmapsto \bar{x}_1 = \bar{x}(\tau_1)) \in \mathbb{R}^n,$$

где $\bar{x}(\cdot)$ определяется как решение задачи Коши (1.24), (1.25).

1.4 Принцип максимума в задаче B .

1. Формулировка принципа максимума задачи B . Напомним постановку задачи B :

$$J = F_0(x_0, x_1) \to min, \quad F(x_0, x_1) \leqslant 0, \quad K(x_0, x_1) = 0, \tag{1.28}$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U, \tag{1.29}$$

где $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, а t_0, t_1 - свободны. Здесь (1.28) — *концевой блок задачи*, (1.29) — *управляемая система* задачи.

Введем *концевую функцию Лагранжа*

$$l = l(x_0, x_1, \alpha_0, \alpha, \beta) = \alpha_0 F_0(x_0, x_1) + \alpha F(x_0, x_1) + \beta K(x_0, x_1),$$

где α_0 — число, α и β - векторы-строки тех же размерностей, что и F и K соответственно, т.е. $\alpha \in (\mathbb{R}^k)^*$, $\beta \in (\mathbb{R}^q)^*$.

Далее, введем *функцию Понтрягина*

$$H = H(x, u, \psi) = \psi f(x, u),$$

где $\psi \in (\mathbb{R}^n)^*$ — вектор строка.

Пусть $\Upsilon = (x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ - допустимая траектория задачи B . Будем говорить, что для нее выполнен *принцип максимума Понтрягина*, если существуют число α_0 , векторы $\alpha \in (\mathbb{R}^k)^*$, $\beta \in (\mathbb{R}^q)^*$ и абсолютно непрерывная функция $\psi(t) : [t_0, t_1] \to (\mathbb{R}^n)^*$, такие, что

(i) $\alpha_0 \geqslant 0, \alpha \geqslant 0$,

(ii) $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0$,

(iii) $\alpha_i F_i(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$

(iv) $-\dot\psi(t) = H'_x(t, x(t), u(t), \psi(t))$ п.в. на $[t_0, t_1]$,

(v) $\psi(t_0) = l'_{x_0}(x(t_0), x(t_1), \alpha_0, \alpha, \beta), \quad -\psi(t_1) = l'_{x_1}(x(t_0), x(t_1), \alpha_0, \alpha, \beta),$

(vi) $H(x(t), u, \psi(t)) \le 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1] \;\; \forall u \in U$,

(vii) $H(x(t), u(t), \psi(t)) = 0$ п.в. на $[t_0, t_1]$.

Из условий (vi) и (vii) следует, что почти для всех $t \in [t_0, t_1]$ функция $u \mapsto H(x(t), u, \psi(t))$ достигает максимума по $u \in U$ в точке $u = u(t)$. Поэтому (vi)–(vii) называют *условием максимума.*

Функция

$$\mathcal{H}(x, \psi) = \max_{u \in U} H(x, u, \psi) \tag{1.30}$$

называется *функцией Гамильтона*, или *гамильтонианом.*

Из сказанного вытекает, что на оптимальной траектории H и $\mathcal{H}$ совпадают:

$$\mathcal{H}(x(t), \psi(t)) = H(x(t), u(t), \psi(t)) \qquad \text{п.в. на } [t_0, t_1].$$

Замечание 4.0. Обратим внимание, что функция Понтрягина $H(x, u, \psi)$ и функция Гамильтона $\mathcal{H}(x, \psi)$ — это две разные функции; они даже зависят от разного набора аргументов. Связаны эти функции соотношением (1.30), и совпадают они лишь вдоль "оптимальной" траектории. Из-за последнего равенства часто происходит путаница между этими функциями (особенно в иностранной литературе), которой следует избегать.

Используют также следующие названия: (i) — условие *неотрицательности*, (ii) — условие *нетривиальности*, (iii) — условие *дополняющей нежесткости*, (iv) — *сопряженная система* (для ψ), (v) — условия *трансверсальности* (для ψ).

Переменную ψ называют *двойственой* или *сопряженной* переменной, или *множителем Лагранжа для управляемой системы*, а α_0, α, β — *множителями Лагранжа концевого блока задачи.* Набор $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi(\cdot))$ называют *набором множителей Лагранжа* задачи B.

Теорема 6. *Пусть* $\Upsilon = (x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ *— оптимальная траектория в задаче* B. *Тогда для нее выполнен принцип максимума Понтрягина.*

Мы переходим непосредственно к доказательству этой теоремы.

2. Индекс θ . Пусть $\hat\Upsilon = (\hat x(t), \hat u(t) \mid t \in [\hat t_0, \hat t_1])$ — решение задачи B. С этим решением мы свяжем семейство конечномерных задач B^θ и их оптимальных решений (x_0^θ, z^θ), занумерованных некоторым индексом θ .

Под индексом будем понимать набор значений времени и управления

$$\theta = \{(t^1, u^1), \dots, (t^s, u^s)\}$$

такой, что $\hat t_0 \leqslant t^1 \leqslant \ldots \leqslant t^s \leqslant \hat t_1, \qquad u^k \in U, \qquad k = 1, \dots, s.$ Длина индекса $s = s(\theta)$ зависит от θ .

Определим отрезок $[\tau_0, \tau_1]$ следующим образом: берем отрезок $[\hat t_0, \hat t_1]$, и в точках $t^1, \dots, t^s$ вставляем отрезки единичной длины, сохраняя всякий раз положение точки $\hat t_0$.

В результате получаем отрезок $[\tau_0,\tau_1]$ с концами $\tau_0=\hat t_0, \quad \tau_1=\hat t_1+s$, а вставленные отрезки будут иметь вид

$$\Delta^1=[t^1,t^1+1], \quad \Delta^2=[t^2+1,t^2+2], \ \ldots, \quad \Delta^s=[t^s+(s-1),t^s+s].$$

Положим

$$\mathcal{M}_0=\bigcup_1^s \Delta^k, \ \ \mathcal{M}_+=[\tau_0,\tau_1]\backslash\mathcal{M}_0.$$

Пусть

$$v^\theta(\tau)=\begin{cases} 0, & \tau\in\mathcal{M}_0,\\ 1, & \tau\in\mathcal{M}_+,\end{cases} \qquad t^\theta(\tau)=\hat t_0+\int_{\tau_0}^{\tau} v^\theta(s)ds, \quad \tau\in[\tau_0,\tau_1].$$

Тогда

$$\frac{dt^\theta(\tau)}{d\tau}=v^\theta(\tau), \quad t^\theta(\tau_0)=\hat t_0, \quad t^\theta(\tau_1)=\hat t_1.$$

Таким образом, $t^\theta(\tau)$ — кусочно-линейная неубывающая функция, отображающая $[\tau_0,\tau_1]$ на $[\hat t_0,\hat t_1]$, причем Δ^k — ее отрезки постоянства и $t^\theta(\Delta^k)=t^k, \quad k=1,\ldots,s$. Положим

$$u^\theta(\tau)=\begin{cases} \hat u(t^\theta(\tau)), & \tau\in\mathcal{M}_+,\\ u^k, \quad \tau\in\Delta^k, & k=1,\ldots,s;\end{cases} \qquad x^\theta(\tau)=\hat x(t^\theta(\tau)).$$

Тогда $u^\theta(\tau):[\tau_0,\tau_1]\to\mathbb{R}^m$ — ограниченая измеримая функция удовлетворяющая условию $u^\theta(\tau)\in U$ п.в. на $[\tau_0,\tau_1]$ (почему?), а $x^\theta(\tau):[\tau_0,\tau_1]\to\mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция.

Предложение 3. *(a) Имеют место равенства*

$$x^\theta(\tau_0)=\hat x(\hat t_0), \quad x^\theta(\tau_1)=\hat x(\hat t_1); \tag{1.31}$$

(b) п.в. на $[\tau_0,\tau_1]$ *имеет место равенство*

$$\frac{dx^\theta(\tau)}{d\tau}=v^\theta(\tau)f(x^\theta(\tau),u^\theta(\tau)). \tag{1.32}$$

Доказательство. (a) — вытекает из условий $t^\theta(\tau_0)=\hat t_0, \ t^\theta(\tau_1)=\hat t_1$.

(b) Пусть Δ^k - один из отрезков множества $\mathcal{M}_0$. Тогда из условия $t^\theta(\tau)=const$ на Δ^k следует, что $\frac{dx^\theta(\tau)}{d\tau}=0$ на Δ^k. Одновременно $v^\theta(\tau)=0$ на Δ^k . Следовательно (1.32) имеет место на Δ^k , а, значит , п.в. на $\mathcal{M}_0$.

Пусть теперь Δ_+ - интервал множества $\mathcal{M}_+$. Согласно формуле замены переменной на Δ_+ имеем:

$$\frac{dx^\theta(\tau)}{d\tau}=\frac{d\hat x(t^\theta(\tau))}{dt}\cdot\frac{dt^\theta(\tau)}{d\tau}=$$

$$=f(\hat x(t^\theta(\tau)),\hat u(t^\theta(\tau)))v^\theta(\tau)=f(x^\theta(\tau),u^\theta(\tau))v^\theta(\tau)$$

Следовательно (1.32) имеет место на на Δ_+ , а тогда и п.в. на $\mathcal{M}_+$. Но $\mathcal{M}_0\cup\mathcal{M}_+=[\tau_0,\tau_1]$. Значит, (1.32) имеет место п.в. на $[\tau_0,\tau_1]$.

Множество $\mathcal{M}_0$ состоит из конечного числа отрезков Δ^k , $k = 1, \ldots, s$. Множество $\mathcal{M}_+$ — из конечного числа интервалов или полуинтервалов. Все указанные отрезки, интервалы и полуинтервалы множеств $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_+$ обьединим в набор, упорядочим и обозначим составляющие этого набора через σ_k, $k = 1, \ldots, r$. Итак, $[\tau_0, \tau_1] = \bigcup_1^r \sigma_k$, причем различные σ_k не пересекаются. Обозначим через $\chi_k(\tau)$ характеристическую функцию множества σ_k, $k = 1, \ldots, r$.

Пусть $\hat{z}_k$ — значение $v^\theta(\tau)$ на σ_k, $k = 1, \ldots, r$, т.е.

$$v^\theta(\tau) = \sum_{k=1}^{r} \hat{z}_k \chi_k(\tau) \quad \text{п.в.}.$$

Положим $\hat{z} = (\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_r)$, $\hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{t}_0)$. Напомним, что $\hat{z}_k = 0$, если $\sigma_k \subset \mathcal{M}_0$, и $\hat{z}_k = 1$, если $\sigma_k \subset \mathcal{M}_+$.

3. Задача B^θ индекса θ и ее оптимальное решение. Итак, для оптимальной траектории $\hat{\Upsilon} = (\hat{x}(t), \hat{u}(t) \mid t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1])$ задачи B и индекса $\theta = \{(t^1, u^1), \ldots, (t^s, u^s)\}$ мы определили отрезок $[\tau_0, \tau_1]$ и функции $v^\theta, t^\theta, u^\theta, x^\theta$ на этом отрезке. Вместе они определяют траекторию

$$\Upsilon^\theta = (t^\theta(\tau), x^\theta(\tau), u^\theta(\tau), v^\theta(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1]) \tag{1.33}$$

в задаче $\tilde{B}$, которая имеет вид:

$$F_0(p) \to min, \qquad F(p) \leqslant 0 \quad , K(p) = 0,$$

$$\frac{dx}{d\tau} = vf(x, u), \quad \frac{dt}{d\tau} = v, \quad u \in U, \quad v \geqslant 0,$$

где $p = (x_0, x_1) = (x(\tau_0), x(\tau_1))$, функции $t(\tau), x(\tau)$ — абсолютно непрерывны, $u(\tau)$ — ограничена и измерима, а $v(\tau)$ — *кусочно постоянна*, τ_0 и τ_1 — фиксированы.

Теорема 7. *Для любого индекса θ траектория Υ^θ оптимальна в задаче $\tilde{B}$*

Доказательство. Согласно предложению 3, пункт (b),

$$\frac{dx^\theta}{d\tau} = v^\theta f(x^\theta, u^\theta) \qquad \text{п.в.}.$$

Кроме того,

$$\frac{dt^\theta}{d\tau} = v^\theta, \qquad v^\theta \geqslant 0, \qquad u^\theta \in U \qquad \text{п.в.}.$$

— согласно определениям функций v^θ , t^θ , u^θ. Наконец, в силу пункта (a) предложения 3 $x^\theta(\tau_0) = \hat{x}(t_0)$, $x^\theta(\tau_1) = \hat{x}(\hat{t}_1)$. Отсюда и из оптимальности траектории $\hat{\Upsilon}$ в задаче B вытекает, согласно теореме 1 (о связи задач B и $\tilde{B}$) оптимальность траектории Υ^θ в задаче $\tilde{B}$. □

Для индекса θ мы определили разбиение отрезка $[\tau_0, \tau_1]$ на промежутки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ (это отрезки Δ^k множества M_0 и смежные с ними интервалы или полуинтервалы, принадлежащие M_+). Рассмотрим оператор

$$P^\theta : (x_0, z) \mapsto x(\tau_1),$$

где $x(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^n$ определяется как решение задачи Коши

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, u^\theta(\tau)) \sum z_k \chi_k(\tau), \qquad x(\tau_0) = x_0 \tag{1.34}$$

(здесь χ_k — характеристическая функция множества σ_k). Это решение будем обозначать также $x(\cdot) = \varphi^\theta(x_0, z)$.

Поскольку

$$v^\theta(\tau) := \sum \hat{z}_k \chi_k(\tau), \quad \frac{dx^\theta}{d\tau} = v^\theta f(x^\theta, u^\theta), \quad \hat{x}_0 := \hat{x}(\hat{t}_0) = x^\theta(\tau_0),$$

то при $x = \hat{x}_0, z = \hat{z}$ задача Коши (1.34) имеет решение $x^\theta(\tau)$, определенное на $[\tau_0, \tau_1]$, а тогда по теореме 5 оператор P^θ определен в некоторой окрестности $\mathcal{W}$ точки $(\hat{x}_0, \hat{z})$ в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$.

Теперь мы можем поставить конечномерную задачу B^θ . Она рассматривается в пространстве переменных $(x_0, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$.

Задача B^θ .

$$F_0(x_0, P^\theta(x_0, z)) \to min, \qquad F(x_0, P^\theta(x_0, z)) \leqslant 0\,, \qquad K(x_0, P^\theta(x_0, z)) = 0\,,$$

$$-z \leqslant 0, \qquad (x_0, z) \in \mathcal{W}.$$

Положим $\hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{t}_0)$, $\hat{x}_1 = \hat{x}(\hat{t}_1)$, $\hat{p} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1)$. Напомним, что вектор $\hat{z}$ определяется индексом θ , т.е. $\hat{z} = \hat{z}(\theta)$.

Теорема 8. *Для любого индекса θ точка $(\hat{x}_0, \hat{z})$ есть решение задачи B^θ .*

Доказательство. Предположим противное: пусть для некоторого индекса θ в задаче B^θ имеется допустимая точка (x_0, z) такая, что

$$F_0(p) < F_0(\hat{p}), \tag{1.35}$$

где $p = (x_0, P^\theta(x_0, z))$. Пусть $x(\cdot) = \varphi^\theta(x_0, z)$, $v(\cdot) = \sum z_k \chi_k(\cdot)$, а $t(\cdot)$ найдена из условий

$$\frac{dt}{d\tau} = v, \quad t(\tau_0) = t_0,$$

где t_0 выбрано произвольно. Тогда из определений следует, что

$$\tilde{\Upsilon} = (t(\tau), x(\tau), u^\theta(\tau), v(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$$

— допустимая траектория задачи $\tilde{B}$ такая, что $(x(\tau_0), x(\tau_1)) = p$. Согласно теореме 7 траектория Υ^θ (1.33) оптимальна в задаче $\tilde{B}$. Однако в силу (1.35) траектория $\tilde{\Upsilon}$ доставляет меньшее значение целевой функции F_0 , чем траектория Υ^θ . Противоречие доказывает теорему. $\square$

Задача B^θ представляет собой конечномерную гладкую задачу с ограничениями типа равенства и неравенства. Напомним необходимые условия экстремума в общей задаче такого типа.

4. Условия минимума в гладкой конечномерной задаче с ограничениями равенства и неравенства. Здесь мы ограничимся лишь формулировкой необходимых условий в этой задаче – правила множителей Лагранжа. В главе 2 мы дадим формулировку и доказательство правила множителей Лагранжа в более общей ситуации – для бесконечномерного случая.

Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset X$ - открытое множество, на котором заданы функции $f_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, k$, и векторная функция $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$. Предположим, что все f_i и g непрерывно диференцируемы на $\mathcal{U}$. Рассмотрим задачу:

$$f_0(x) \to min, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad g(x) = 0, \quad x \in \mathcal{U}. \tag{1.36}$$

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{R}^{k+1})^*$, $\beta \in (\mathbb{R}^m)^*$. Введем функцию Лагранжа задачи (1.36) :

$$L(x_0, \alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_i(x) + \beta g(x).$$

Назовем α_0, ... , α_k, β *множителями Лагранжа*, а через $\lambda = (\alpha_0, \dots, \alpha_k, \beta) = (\alpha, \beta)$ будем обозначать произвольный набор множителей Лагранжа. Таким образом, $L = L(x, \lambda)$.

Теорема 9 (правило множителей Лагранжа)**.** *Пусть* x_0 *— точка локального минимума в задаче (1.36). Тогда существуют набор* $\lambda = (\alpha_0, \dots, \alpha_k, \beta)$ *такой, что выполнены следующие условия*

$$\alpha_0 \geqslant 0, \ \alpha_1 \geqslant 0, \dots, \alpha_k \geqslant 0, \tag{1.37}$$

$$\sum_0^k \alpha_i + |\beta| > 0, \tag{1.38}$$

$$\alpha_i f_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \tag{1.39}$$

$$L'_x(x_0, \lambda) = 0. \tag{1.40}$$

Говорят, что (1.37) — условие *неотрицательности*, (1.38) — условие *нетривиальности*, (1.39) — условие *дополняющей нежесткости*, (1.40) — условие *стационарности функции Лагранжа по* x . Вместе эти условия и составляют *правило множителей Лагранжа.* Точки x_0 (не обязательно доставляющие локальный минимум), в которых выполнено правило множителей Лагранжа, называются *стационарными.*

5. Условия стационарности в задаче B^θ . Фиксируем индекс θ . Согласно теореме 8, $(\hat{x}_0, \hat{z})$ — точка минимума в задаче B^θ . Следовательно, для нее выполнено правило множителей Лагранжа. Выпишем его.

Функция Лагранжа задачи B^θ имеет вид

$$L = \alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K - \mu z,$$

где α_0 — число, $\alpha \in (\mathbb{R}^k)^*$, $\mu \in (\mathbb{R}^r)^*$, $\nu \in (\mathbb{R}^n)^*$ — вектор-строки. Пусть

$$l(x_0, x_1) = \alpha_0 F_0(x_0, x_1) + \alpha F(x_0, x_1) + \beta K(x_0, x_1)$$

Тогда

$$L(x_0, z) = l(x_0, P^\theta(x_0, z)) - \mu z.$$

Здесь и далее зависимость l и L от множителей Лагранжа α_0 , α , β и μ мы опускаем.

Производные функции Лагранжа по переменым x_0 , z в точке $(\hat{x}_0, \hat{z})$ имеют вид

$$\hat{L}_{x_0} = \hat{l}_{x_0} + \hat{l}_{x_1}\hat{P}^\theta_{x_0}, \qquad \hat{L}_z = \hat{l}_{x_1}\hat{P}^\theta_z - \mu\,.$$

(здесь и далее "крышки"означают, что производные вычисляются в указанной точке или для соответствующих ее проекций). Следовательно, условия стационарности в точке $(\hat{x}_0, \hat{z})$ имеют вид:

$$\alpha_0 \geqslant 0,\ \alpha \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0, \tag{1.41}$$

$$\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| + |\mu| > 0, \tag{1.42}$$

$$\alpha F(\hat{p}) = 0, \quad \mu\hat{z} = 0, \tag{1.43}$$

$$\hat{l}_{x_0} + \hat{l}_{x_1}\hat{P}^\theta_{x_0} = 0, \tag{1.44}$$

$$\hat{l}_{x_1}\hat{P}^\theta_z - \mu = 0. \tag{1.45}$$

Если $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 0$, то $l_p(\hat{p}) = 0$, а тогда в силу (1.45) $\mu = 0$. Следовательно, условие нетривиальности (1.42) эквивалентно условию $\alpha_0+|\alpha|+|\beta| > 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 1$. Окончательно получаем следующую систему условий стационарности:

$$\begin{cases} \alpha_0 \geqslant 0,\ \alpha \geqslant 0,\ \ \mu \geqslant 0, \quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 1, \quad \alpha F(\hat{p}) = 0,\ \ \mu\hat{z} = 0, \\ \hat{l}_{x_0} + \hat{l}_{x_1}\hat{P}^\theta_{x_0} = 0, \quad \hat{l}_{x_1}\hat{P}^\theta_z - \mu = 0. \end{cases} \tag{1.46}$$

Последние два условия вместе означают, что функция Лагранжа $L(x_0, z)$ стационарна в точке $(\hat{x}_0, \hat{z})$, то есть

$$L'(\hat{x}_0, \hat{z})(\bar{x}_0, \bar{z}) = \hat{l}_{x_0}\bar{x}_0 + \hat{l}_{x_1}(P^\theta)'(\hat{x}_0, \hat{z})(\bar{x}_0, \bar{z}) - \mu\bar{z} = 0 \tag{1.47}$$

тождественно по $\bar{x}_0, \bar{z}$. Это, в свою очередь, означает, что $dL(\hat{x}_0, \hat{z}) = 0$.

Напомним, что согласно теореме 5 производная оператора P^θ в точке $(\hat{x}_0, \hat{z})$ есть линейный оператор

$$(\hat{P}^\theta)' : (\bar{x}_0, \bar{z}) \mapsto \bar{x}(\tau_1),$$

где $\bar{x}(\cdot)$ есть решение задачи Коши для уравнения в вариациях

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = v^\theta f^\theta_x \bar{x} + \sum \bar{z}_k \chi_k f^\theta, \quad \bar{x}(\tau_0) = \bar{x}_0. \tag{1.48}$$

Мы обозначили здесь

$$f^\theta_x(\tau) = f_x(x^\theta(\tau), u^\theta(\tau)), \quad f^\theta(\tau) = f(x^\theta(\tau), u^\theta(\tau)). \tag{1.49}$$

Следовательно, частная производная $\hat{P}^\theta_{x_0}$ есть отображение $\bar{x}_0 \mapsto \bar{x}(\tau_1)$, где $\bar{x}(\cdot)$ определяется как решение задачи Коши

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = v^\theta f^\theta_x \bar{x}, \quad \bar{x}(\tau_0) = \bar{x}_0 \tag{1.50}$$

(в условиях (1.48) мы положили $\bar{z} = 0$). Аналогично частная производная $\hat{P}_z^\theta$ есть отображение $\bar{z} \mapsto \bar{x}(\tau_1)$, где $\bar{x}(\cdot)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = v^\theta f_x^\theta \bar{x} + \sum \bar{z}_k \chi_k f^\theta, \quad \bar{x}(\tau_0) = 0 \tag{1.51}$$

(в условиях (1.48) мы положили $\bar{x}_0 = 0$).

6. Сопряженное уравнение и условия трансверсальности. В условии (1.47) фигурирует величина $\hat{l}_{x_1} P'(\hat{x}_0, \hat{z})(\bar{x}_0, \bar{z}) = \hat{l}_{x_1} \bar{x}_1$. Найдем ее явное выражение через приращения независимых переменных $\bar{x}_0$, $\bar{z}$. Это удобно сделать в следующей общей ситуации.

Пусть на отрезке $\Delta = [t_0, t_1]$ задано уравнение

$$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{v}(t), \tag{1.52}$$

где $A(t)$ – матрица с ограниченными измеримыми коэффициентами. Решение этого уравнения $\bar{x}(t)$ зависит от начального значения $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и от функции $\bar{v}(t) \in L_\infty$, которые, отметим, задаются независимо друг от друга.

Пусть также задан произвольный вектор $l_1 \in \mathbb{R}^n$, и нас интересует представление величины $l_1 \bar{x}_1$ (где $\bar{x}_1 = \bar{x}(t_1)$) через независимые переменные $\bar{x}_0$, $\bar{u}$.

Определим абсолютно непрерывную функцию $\psi(t)$ как решение следующего уравнения (которое называется *сопряженным уравнением*)

$$\dot{\psi} = -\psi A \tag{1.53}$$

с начальным значением $\psi(t_1) = l_1$. Ниже для краткости мы полагаем $\psi(t_0) = \psi_0$, $\psi(t_1) = \psi_1$.

Лемма 2. *Для любого решения уравнения (1.52) с начальным значением* $\psi(t_1) = l_1$ *справедливо равенство*

$$l_1 \bar{x}_1 = -\psi_0 \bar{x}_0 - \int_{t_0}^{t_1} \psi \bar{v}\, dt. \tag{1.54}$$

Доказательство. При выполнении (1.52) и (1.53) очевидно имеем

$$\frac{d}{dt}(\psi\bar{x}) \;=\; -\psi A\bar{x} + \psi(A\bar{x} + \bar{v}) = \psi\bar{v},$$

поэтому

$$\psi_1 \bar{x}_1 - \psi_0 \bar{x}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \psi \bar{v}\; dt,$$

откуда с учетом концевого условия $\psi_1 = -l_1$ получаем требуемое равенство. □

Применим полученную формулу к нашей ситуации. У нас

$$A = v^\theta(\tau) f_x^\theta(\tau); \qquad \bar{v} = \sum \bar{z}_k \chi_k f^\theta(\tau), \qquad l_1 = \hat{l}_{x_1}.$$

Пусть ψ^θ есть решение уравнения

$$-\frac{d\psi^\theta}{d\tau} = v^\theta \psi^\theta f_x^\theta \tag{1.55}$$

с начальным условием

$$\psi^\theta(\tau_1) = -\hat{l}_{x_1}. \tag{1.56}$$

Из леммы 2 следует, что условие стационарности

$$\hat{l}_{x_0}\bar{x}_0 + \hat{l}_{x_1} dP^\theta(\hat{x}_0, \hat{z}) - \mu\bar{z} = 0$$

переписывается в виде

$$\hat{l}_{x_0}\bar{x}_0 - \psi^\theta(\tau_0)\bar{x}_0 - \sum_k \bar{z}_k \int\limits_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta \, d\tau = \sum_k \mu_k \bar{z}_k. \tag{1.57}$$

Это равенство выполнено для всех $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и для всех $\bar{z}_k$ $k = 1, \ldots, s$. При этом, как мы помним, $\mu_k \geq 0$, если k таково, что $\sigma_k \subset \mathcal{M}_0$, и $\mu_k = 0$, если $\sigma_k \subset \mathcal{M}_+$. Полагая в (1.57) все $\bar{z}_k = 0$, получаем

$$\hat{l}_{x_0} = \psi^\theta(\tau_0).$$

Это равенство вместе с равенством (1.56) называются *условиями трансверсальности.*

Теперь положим $\bar{x}_0 = 0$ в (1.57). Тогда для $\sigma_k \subset \mathcal{M}_+$ имеем

$$\int\limits_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta d\tau = 0,$$

а для $\sigma_k \subset \mathcal{M}_0$ имеем

$$\int_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta d\tau \leqslant 0.$$

Итог сказанному подводит следующая

Теорема 10. *Для любого индекса θ существует набор $\lambda^\theta = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi^\theta)$ такой, что выполнены условия*

$$\begin{cases} \alpha_0 \geqslant 0, \ \alpha \geqslant 0, \ \alpha F(\hat{p}) = 0, \qquad \alpha_0 + \sum \alpha_i + |\beta| = 1, \\ -\frac{d\psi^\theta}{d\tau} = v^\theta \psi^\theta f^\theta_x, \quad \psi^\theta(\tau_0) = \hat{l}_{x_0}, \quad \psi^\theta(\tau_1) = -\hat{l}_{x_1}, \\ \int_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta d\tau = 0, \quad \sigma_k \subset \mathcal{M}_+, \\ \int_{\sigma_k} \psi^\theta f^\theta d\tau \leqslant 0, \quad \sigma_k \subset \mathcal{M}_0, \ \ k = 1, \ldots, r. \end{cases} \tag{1.58}$$

Здесь $\psi^\theta(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^n$ – липшицева функция.

7. Представление условий стационарности в задаче B^θ с помощью функции $\psi(t)$. Принцип максимума индекса θ. Пусть θ — фиксированный индекс. Ему соответствует отрезок $[\tau_0, \tau_1]$, отрезки $\Delta^k \subset [\tau_0, \tau_1]$, $k = 1, \ldots, s$, множества $\mathcal{M}_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{s} \Delta^k$, $\mathcal{M}_+ = [\tau_0, \tau_1] \backslash \mathcal{M}_0$. Вместе отрезки Δ^k множества $\mathcal{M}_0$ и интервалы (полуинтервалы) множества $\mathcal{M}_+$ образуют набор $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$.

Функция $v^\theta(\tau)$ равна нулю на $\mathcal{M}_0$ и единице на $\mathcal{M}_+$. Мы пользуемся представлением

$$v^\theta(\tau) = \sum \hat{z}_k \chi_k(\tau),$$

где χ_k — характеристическая функция отрезка σ_k, а величины $\hat{z}_k$ принимают значения 0 или 1. Если $\sigma_k \subset \mathcal{M}_0$, то $\hat{z}_k = 0$; если $\sigma_k \subset \mathcal{M}_+$, то $\hat{z}_k = 1$. Наконец, $t^\theta(\tau)$ такова, что

$$\frac{dt^\theta}{d\tau} = v^\theta, \qquad t^\theta(\tau_0) = \hat{t}_0, \quad t^\theta(\tau_1) = \hat{t}_1.$$

Обозначим через $\tau^\theta(t) : [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \to [\tau_0, \tau_1]$ правую обратную функцию к функции $t^\theta(\tau)$, непрерывную слева. Тогда

$$t^\theta(\tau^\theta(t)) = t \qquad \forall t \in \hat{\Delta} = [\hat{t}_0, \hat{t}_1]. \tag{1.59}$$

Пусть $\lambda^\theta = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi^\theta)$ — набор, удовлетворяющий условиям (1.58) теоремы 10. Положим

$$\psi(t) = \psi^\theta(\tau^\theta(t)) \qquad \forall t \in \hat{\Delta}. \tag{1.60}$$

Согласно предложению 2, из уравнения

$$-\frac{d\psi^\theta}{d\tau} = v^\theta \psi^\theta f_x^\theta, \quad \text{где} \quad f_x^\theta = f_x(x^\theta, u^\theta)$$

вытекает, что

$$-\frac{d\psi(t)}{dt} = \psi(t) f_x(x^\theta(\tau^\theta(t)), u^\theta(\tau^\theta(t))).$$

Пусть $\mathcal{N}_+ = [\hat{t}_0, \hat{t}_1] \backslash \{t^1, \ldots, t^s\}$. Поскольку $u^\theta(\tau) = \hat{u}(t^\theta(\tau))$ на $\mathcal{M}_+$ и $\tau^\theta(t)$ переводит $\mathcal{N}_+$ в $\mathcal{M}_+$, то на $\mathcal{N}_+$ имеем:

$$u^\theta(\tau^\theta(t)) \overset{def}{=} \hat{u}(t^\theta(\tau^\theta(t))) \overset{(1.59)}{=} \hat{u}(t).$$

Следовательно, п.в. на $[\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ имеем $u^\theta(\tau^\theta(t)) = \hat{u}(t)$. Далее,

$$x^\theta(\tau^\theta(t)) \overset{def}{=} \hat{x}(t^\theta(\tau^\theta(t))) \overset{(1.59)}{=} \hat{x}(t) \qquad \forall t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1].$$

Следовательно,

$$-\frac{d\psi}{dt} = \psi \hat{f}_x(t) \quad \text{п.в. на } [\hat{t}_0, \hat{t}_1], \quad \text{где } \hat{f}_x = f_x(\hat{x}, \hat{u}).$$

При этом в силу того же предложения 2:

$$\psi(\hat{t}_0) = \psi^\theta(\tau_0), \quad \psi(\hat{t}_1) = \psi^\theta(\tau_1).$$

Следовательно,

$$\psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0}, \quad -\psi(\hat{t}_1) = \hat{l}_{x_1},$$

где

$$\hat{l}_{x_0} = l_{x_0}(\hat{p}), \qquad \hat{l}_{x_1} = l_{x_1}(\hat{p}),$$

$$\hat{p} = (\hat{x}_0, \hat{x}_1), \quad \hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{t}_0), \quad \hat{x}_0 = \hat{x}(\hat{t}_0).$$

Проанализируем теперь условие

$$\int_{\sigma_k} \psi^\theta(\tau) f(x^\theta(\tau), u^\theta(\tau))\, d\tau = 0, \tag{1.61}$$

выполненное для любого $\sigma_k \subset \mathcal{M}_+$. Пусть $\sigma_k \subset \mathcal{M}_+$. Тогда $t^\theta(\sigma_k)$ – один из интервалов (полуинтервалов), составляющих множество $\mathcal{N}_+$. Обозначим его через Δ_+ . В интеграле (1.61) сделаем замену переменной $\tau = \tau^\theta(t)$. Поскольку

$$\frac{d\tau^\theta(t)}{dt} = 1 \;\text{ на }\; \mathcal{N}_+, \quad \psi^\theta(\tau^\theta(t)) \stackrel{def}{=} \psi(t) \;\text{ на }\; \hat{\Delta},$$

$$x^\theta(\tau^\theta(t)) = x(t) \;\text{ на }\; \hat{\Delta}, \quad u^\theta(\tau^\theta(t)) = u(t) \;\text{ на }\; \mathcal{N}_+,$$

и следовательно, те же равенства верны на $t^\theta(\sigma_k)$, то из (1.61) получаем:

$$\int\limits_{\Delta_+} \psi(t) f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt = 0.$$

Это условие выполнено для любого $\Delta_+ \subset \mathcal{N}_+$.

Проанализируем также условие

$$\int\limits_{\Delta_k} \psi^\theta(\tau) f(x^\theta(\tau), u^\theta(\tau)) d\tau \leqslant 0, \tag{1.62}$$

для любого $\Delta_k \subset \mathcal{M}_0$. Напомним, что $\Delta_k = [\tau_0^k, \tau_1^k], \quad \tau^\theta(t^k) = \tau_0^k$.
Поскольку $t^\theta(\tau) = t^k$ на Δ^k, то

$$x^\theta(\tau) \stackrel{def}{=} \hat{x}(t^\theta(\tau)) = \hat{x}(t^k) \;\text{ на }\; \Delta_k.$$

Далее, из условий

$$-\frac{d\psi^\theta}{d\tau} = \upsilon^\theta \psi^\theta f_x^\theta = 0 \quad \text{на } \; \Delta_k$$

вытекает, что на Δ_k

$$\psi^\theta(\tau) = \psi^\theta(\tau_0^k) = \psi^\theta(\tau^\theta(t^k)) \stackrel{def}{=} \psi(t^k).$$

Наконец, по определению функции u^θ имеем $u^\theta(\tau) \equiv u^k$ на Δ^k. Следовательно, из условия (1.62) получаем $\psi(t^k) f(\hat{x}(t^k), u^k) \leqslant 0, \quad k = 1, \ldots, s$.

Таким образом, из теоремы 10 вытекает:

Теорема 11 (принцип максимума индекса θ)**.** *Для любого индекса θ существует набор $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi)$ такой, что*

(a) $\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0; \;\; \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 1;$

(b) $\alpha F(\hat{p}) = 0;$

(c) $-\dot{\psi} = \psi \hat{f}_x;$

(d) $\psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0}; \quad -\psi(\hat{t}_1) = \hat{l}_{x_1};$

(e) $\psi(t^k) f(\hat{x}(t^k), u^k) \leqslant 0, \quad k = 1, \ldots, s;$

(f) для любого интервала или полуинтервала Δ_+ , из которых состоит $\mathcal{N}_+$, выполнено условие

$$\int\limits_{\Delta_+} \psi \hat{f} dt = 0.$$

Здесь значения всех функций берутся, как всегда, на траектории $(\hat{x}, \hat{u})$.

Множество наборов λ , удовлетворяющих условиям (a)–(f), обозначим M^θ .

Предложение 4. M^θ *— конечномерный компакт, причем проектор*

$$\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi) \mapsto (\alpha_0, \alpha, \beta) \tag{1.63}$$

инъективен на M^θ *, то есть функция* $\psi(t)$ *однозначно определяется параметрами* α_0, α, β *.*

Доказательство. Действительно, набор $(\alpha_0, \alpha, \beta)$ однозначно определяет функцию $l = \alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K$, а значит и функцию ψ — с помощью условий

$$-\dot{\psi} = \psi \hat{f}_x, \qquad \psi(\hat{t}_0) = \hat{l}_{x_0}.$$

Следовательно, проектор (1.63) инъективен на M^θ .

Ограниченность M^θ вытекает из условия нормировки $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 1$. Замкнутость M^θ очевидна. Следовательно, M^θ — конечномерный компакт. □

8. Организация принципов максимумов индексов θ . Завершение доказательства принципа максимума задачи B . Напомним, что индекс θ есть множество пар $(t^k, u^k), \quad k = 1, \ldots, s$, где t^k неубывают, $t^k \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1], \quad u^k \in U$ произвольны.

Введем на множестве индексов θ отношение частичного порядка: $\theta_1 < \theta_2$ (θ_2 следует за θ_1), если любая пара (t^k, u^k) первого индекса принадлежит второму индексу. Покажем, что данное отношение порядка является *направлением* на множестве индексов.

Пусть имеется пара индексов θ^1 и θ^2 , возможно, не сравнимых. Возьмем все пары (t^k, u^k) первого индекса и все пары $(t^{k'}, u^{k'})$ второго индекса и объединим их. Из объединения пар составим новый индекс θ_3 . Обозначим его $\theta_3 = \theta_1 \vee \theta_2$. Ясно, что $\theta_1 < \theta_3$ и $\theta_2 < \theta_3$. Итак, за любыми двумя индексами следует третий. Каждому индексу θ соответствует непустой компакт M^θ . Ясно, что при "расширении"индекса соответствующее множество M^θ сужается:

$$\theta_1 < \theta_2 \quad \Rightarrow \quad M^{\theta_2} \subset M^{\theta_1}.$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что семейство M^θ центрировано. Действительно, если имеется конечный набор $M^{\theta_1}, \ldots, M^{\theta_r}$, то полагая $\theta = \theta_1 \vee \theta_2 \vee \ldots \vee \theta_r$, получаем непустое M^θ , содержащийся в каждом M^{θ_k} (ибо $\theta_k < \theta$), а значит, и в их пересечении. Положим

$$M = \bigcap_\theta M^\theta,$$

где пересечение берется по всем индексам θ . Тогда M непусто.

Возьмем любое $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi) \in M.$ Для него выполнены все условия (a)–(f) принципа максимума любого индекса θ . Для любых $t = t^k \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1], \quad u = u^k \in U$ пара (t^k, u^k) входит в некоторый индекс θ . Для этого индекса из (e) получаем:

$$H(\hat{x}(t), u, \psi(t)) = \psi(t) f(\hat{x}(t), u) \leqslant 0.$$

Это условие, выполненное для любого $t \in [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$ и любого $u \in U$, и есть условие максимума (vi).

Нам теперь понадобится один простой факт.

Лемма 3. *Пусть $h(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Пусть для любого интервала $\Delta \subset [t_0, t_1]$ имеет место равенство: $\int_\Delta h(t)dt = 0$. Тогда $h(t) = 0$ п.в. на $[t_0, t_1]$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} h(\tau)\ d\tau$. Она абсолютно непрерывна и по условию равна нулю тождественно. Как известно из ТФДП, почти всюду $\dot y(t) = h(t)$, а поскольку у нас $\dot y(t) \equiv 0$, то получаем $h(t) = 0$ п.в. □

Для любого интервала $\Delta \subset [\hat t_0, \hat t_1]$ найдется индекс θ такой, что Δ есть один из интервалов множества $\mathcal{N}_+$ данного индекса. Следовательно, в силу (f),

$$\int\limits_\Delta \psi \hat f dt = 0 \qquad \text{для любого } \Delta \subset [\hat t_0, \hat t_1].$$

Отсюда в силу леммы 3 получаем:

$$H(\hat x(t), \hat u(t), \psi(t)) = \psi(t) f(\hat x(t), \hat u(t)) = 0 \quad \text{п.в. на} \quad [\hat t_0, \hat t_1].$$

Это — условие (vii). Остальные условия (неотрицательности, нетривиальности, дополняющей нежесткости, сопряженное уравнение и условие трансверсальности) совпадают для всех индексов. Принцип максимума задачи B полностью доказан. Таким образом, завершено доказательство теоремы 6.

1.5 Принцип максимума в задаче A .

Напомним постановку задачи A :

$$F_0(p) \to \min, \quad F(p) \leqslant 0, \quad K(p) = 0, \quad \dot x = f(t, x, u), \quad u \in U,$$

где $p = (t_0, x_0, t_1, x_1)$, $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, концы t_0, t_1 не фиксированы, $F \in \mathbb{R}^k$, $K \in \mathbb{R}^q$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f \in \mathbb{R}^n$. Отличие от только что рассмотренной задачи состоит в том, что f зависит от t , а F_0 , F и K зависят от t_0 , t_1 .

Пусть траектория $\Upsilon = (x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ допустима в задаче A . Сформулируем для нее принцип максимума. Введем концевую функцию Лагранжа

$$l(p) = \alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K, \text{ где } \alpha_0 \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in (\mathbb{R}^k)^*, \quad \beta \in (\mathbb{R}^q)^*,$$

и функцию Понтрягина $H(t, x, u) = \psi_x f + \psi_t$, где $\psi_x \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\psi_t \in \mathbb{R}$

(зависимость функции l от множителей Лагранжа α_0 , α , β и функции H от множителя ψ для краткости опускаем).

Отметим, что здесь ψ_x и ψ_t - двойственные переменные, связанные с переменными x и t соответственно. (Ранее нижний индекс x всегда означал вычисление градиента по x , например, f_x ; здесь же индексы x и t имеют указанный выше смысл; надеемся, что это не приведет к путанице. Удобство такой индексации сопряженных переменных будет оценено при работе с принципом максимума, в частности, при решении задач.)

Определение 1.1. Будем говорить, что для траектории Υ задачи A выполнен принцип максимума, если существуют число α_0 , векторы $\alpha \in (\mathbb{R}^k)^*$, $\beta \in (\mathbb{R}^q)^*$ и липшицевы функции $\psi_x(t) : [t_0, t_1] \to (\mathbb{R}^n)^*$, $\psi_t(t) : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ такие, что выполнены условия:

(I) неотрицательности

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0;$$

(II) нетривиальности

$$\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0;$$

(III) дополняющей нежесткости

$$\alpha_i F_i(p) = 0, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \text{где} \quad p = (t_0, x(t_0), t_1, x(t_1));$$

(IV) сопряженные уравнения

$$-\dot{\psi}_x(t) = H_x(t, x(t), u(t)),$$

$$-\dot{\psi}_t(t) = H_t(t, x(t), u(t));$$

(V) трансверсальности

$$\psi_t(t_0) = l_{t_0}(p), \qquad -\psi_t(t_1) = l_{t_1}(p),$$

$$\psi_x(t_0) = l_{x_0}(p), \qquad -\psi_x(t_1) = l_{x_1}(p);$$

(VI) максимума

$$H(t, x(t), u) \leqslant 0 \quad \text{для любых} \ t \in [t_0, t_1], \quad u \in U;$$

(VII) равенство нулю гамильтониана

$$H(t, x(t), u(t)) = 0 \qquad \text{п.в. на} \quad [t_0, t_1].$$

Теорема 12. *Если* Υ *— решение задачи* A *, то для* Υ *выполнен принцип максимума.*

Доказательство. Пусть $\Upsilon = (x(t), u(t) \mid t \in [t_0, t_1])$ — решение задачи A . Положим $\tau_0 = t_0$, $\tau_1 = t_1$, $t(\tau) = \tau$. Тогда $\Upsilon' = (t(\tau), x(\tau), u(\tau) \mid \tau \in [\tau_0, \tau_1])$ — решение следующей задачи A' :

$$F_0(p) \to \min, \quad F(p) \leqslant 0, \quad K(p) = 0$$

$$\frac{dx}{d\tau} = f(t, x, u), \quad \frac{dt}{d\tau} = 1,$$

где $p = (t(\tau_0), x(\tau_0), t(\tau_1), x(\tau_1))$. Это было объяснено в параграфе 1, пункт 4. Задача A' — того же типа, что и задача B . Выпишем условия принципа максимума для траекторий Υ' в задаче B' :

существуют число α_0 , векторы α и β , липшицевы функции

$$\psi_x(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to (\mathbb{R}^n)^*, \quad \psi_t(\tau) : [\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}$$

такие, что

$$\alpha_0 \geqslant 0, \ \alpha \geqslant 0, \ \ \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0, \ \ \alpha F(p) = 0,$$

$$-\frac{d\psi_x}{d\tau} = H_x, \quad -\frac{d\psi_t}{d\tau} = H_t,$$

$$\psi_x(\tau_0) = l_{x_0}, \ \ -\psi_x(\tau_1) = l_{x_1},$$

$$\psi_t(\tau_0) = l_{t_0}, \ \ -\psi_t(\tau_1) = l_{t_1}, \tag{1.64}$$

$$H(t(\tau), x(\tau), u) \leqslant 0, \quad \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1] \quad \forall u \in U;$$

$$H(t(\tau), x(\tau), u(\tau)) = 0, \quad \text{п.в. на} \quad [\tau_0, \tau_1],$$

где $l = \alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K, \qquad H = \psi_x f + \psi_t,$ градиенты функции l вычисляются в точке $(t(\tau_0), x(\tau_0), t(\tau_1), x(\tau_1))$, а градиенты функции H — на траектории $(t(\tau), x(\tau), u(\tau)), \tau \in [\tau_0, \tau_1]$.

Рассмотрим набор $(\alpha_0, \alpha, \beta, \psi_t(t), \psi_x(t))$. Элементарно проверяется, что он удовлетворяет всем условиям принципа максимума для траектории Υ в задаче A . Теорема доказана. □

1.6 Специальные классы задач.

1. Задача на фиксированном отрезке времени. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{J} = F_0(p) \to \min, \quad F(p) \leqslant 0, \quad K(p) = 0, \quad \dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U, \tag{1.65}$$

где $p = (x(t_0), x(t_1))$, отрезок $\Delta = [t_0, t_1]$ — фиксирован. При сведении ее к задаче A в концевой блок добавляются условия

$$t_0 - \hat{t}_0 = 0, \qquad t_1 - \hat{t}_1 = 0,$$

после чего концевая функция Лагранжа приобретает вид:

$$\bar{l} = \beta_0(t_0 - \hat{t}_0) + \beta_1(t_1 - \hat{t}_1) + l,$$

где $l = \alpha_0 F_0 + \alpha F + \beta K.$

Условия трансверсальности для ψ_t дают

$$\psi_t(t_0) = \bar{l}_{t_0} = \beta_0, \qquad -\psi_t(t_1) = \bar{l}_{t_1} = \beta_1.$$

Покажем, что условие

$$\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0 \tag{1.66}$$

эквивалентно условию нетривиальности.

Действительно, пусть $\alpha_0 + |\alpha| + |\beta| = 0$. Тогда $\alpha_0 = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0$ и, следовательно, $\bar{l}_{x_0} = l_{x_0} = 0$. Из условий $\psi_x(t_0) = \bar{l}_{x_0} = 0$ и $-\dot{\psi}_x = \psi_x f_x$ вытекает, что $\psi_x \equiv 0$, а тогда в силу условия $\psi_x f + \psi_t = 0$ п.в. получаем $\psi_t = 0$ и, следовательно, $\beta_0 = \beta_1 = 0$.

Итак, в качестве условия нетривиальности можно выбрать условие (1.66). Это позволяет убрать условия трансверсальности для ψ_t вместе с компонентами β_0 и β_1 из условий принципа максимума. Уравнение $-\dot{\psi}_t = H_t$, как мы знаем, вытекает из остальных условий принципа максимума, и его также можно исключить. Выпишем кратко в задаче (1.65) систему условий принципа максимума, к которой мы приходим в результате проведенного анализа.

Пусть $(x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$ — решение задачи. Тогда существуют число α_0 , векторы α, β и абсолютно непрерывная на Δ функция ψ_t такие, что

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 0, \quad \alpha_0 + |\alpha| + |\beta| > 0, \quad \alpha F(p) = 0\,, \tag{1.67}$$

$$-\dot{\psi} = H_x, \quad \text{п.в. на}\ \Delta\,, \tag{1.68}$$

$$\psi(t_0) = l_{x_0}, \quad -\psi_x(t_1) = l_{x_1}\,, \tag{1.69}$$

$$\max_{u \in \bar{U}} H(t, x(t), u, \psi(t)) = H(t, x(t), u(t), \psi(t)) \quad \text{п.в. на } \Delta\,, \tag{1.70}$$

причем максимум в левой части последнего равенства достигается при каждом $t \in \Delta$. Здесь $H(t,x,u,\psi) = \psi f(t,x,u)$ (мы заменили ψ_x на ψ).

Если обозначить левую часть равенства (1.70) через $(-\psi_t(t))$, то, как мы знаем, из условий принципа максимума последует, что ψ_t — липшицева функция и для нее выполнено сопряженное уравнение

$$-\dot{\psi}_t(t) = H_t(t, x(t), u(t), \psi(t)) \quad \text{п.в. на } \Delta.$$

2. Автономный случай. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(x,u), \quad u \in U.$$

Здесь f не зависит явно от t . Такая система называется *автономной.* Для нее $H(x,u,\psi_x) = \psi_x\, f(x,u)$ не зависит от t. Поэтому сопряженное уравнение на ψ_t имеет вид $-\dot{\psi}_t = H_t = 0$, откуда вытекает, что $\psi_t = const$ для любой экстремали. Следовательно, на экстремали

$$\max_{u \in \bar{U}} H(x(t), u, \psi_x(t)) = const = H(x(t), u(t), \psi_x(t)).$$

Первое равенство выполняется всюду, а второе — почти всюду на Δ .

3. Задача с интегральным функционалом на фиксированном отрезке времени. Рассмотрим задачу

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_1} F(x,u)dt \to \min, \quad \dot{x} = f(x,u), \quad u \in U, \quad x(t_0) = a, \quad x(t_1) = b, \tag{1.71}$$

где отрезок $\Delta = [t_0, t_1]$ фиксирован. Предполагается, что F, F_x, f, f_x непрерывны по x, u. Перепишем эту задачу в виде:

$$\mathcal{J} = y_1 - y_0 \to \min, \quad x_0 - a = 0, \quad x_1 - b = 0,$$

$$\dot{x} = f(x,u), \quad \dot{y} = F(x,u), \quad u \in U\,.$$

Здесь $l = \alpha_0(y_1 - y_0) + \beta_0(x_0 - a) + \beta_1(x_1 - a), \quad H = \psi_x f(x,y) + \psi_y F$.

Поскольку t_0, t_1 фиксированы и управляемая система автономна, то условия принципа максимума имеют следующий вид:

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha_0 + |\beta_0| + |\beta_1| > 0, \tag{1.72}$$

$$-\dot{\psi}_y = 0, \quad \psi_y(t_0) = -\alpha_0, \quad \psi_y(t_1) = \alpha_0, \tag{1.73}$$

$$-\dot{\psi}_x = H_x, \quad \psi_x(t_0) = \beta_0, \quad -\psi_x(t_1) = \beta_1, \tag{1.74}$$

$$\max_{u \in \bar{U}} H(x(t), u, \psi_x(t), \psi_y(t)) = const = H(x(t), u(t), \psi_x(t), \psi_y(t)), \tag{1.75}$$

причем первое из равенств (1.75) выполняется всюду, а второе — почти всюду на Δ .

Из условий (1.73) следует, что $\psi_y \equiv -\alpha_0$. Тогда $H = \psi_x f(x,y) - \alpha_0 F(x,u)$. Предположим, что $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$. Тогда из условий $\psi_x(t_0) = 0$, $-\dot{\psi}_x = \psi_x f_x$ вытекает, что $\psi_x \equiv 0$ и, следовательно $\psi_x(t_1) = -\beta_1 = 0$. Поэтому условие нетривиальности эквивалентно условию $\alpha_0 + |\beta_0| > 0$, или $\alpha_0 + |\psi_x(t_0)| > 0$.

Положим теперь $\psi_x = \psi$ и

$$H = \psi f(x,u) - \alpha_0 F(x,u) = H(x,u,\psi,\alpha_0). \tag{1.76}$$

Тогда принцип максимума для допустимой пары $(x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$ в задаче (1.71) формулируется следующим образом:

существует число α_0 и абсолютно непрерывная на Δ функция $\psi(t)$ такие, что

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha_0 + |\psi(t_0)| > 0, \tag{1.77}$$

$$-\dot{\psi} = H_x(x(t), u(t), \psi(t), \alpha_0) \text{ п.в. }, \tag{1.78}$$

$$\max_{u \in \bar{U}} H(x(t), u, \psi(t), \alpha_0) = const = H(x(t), u(t), \psi(t), \alpha_0), \tag{1.79}$$

причем первое из равенств (1.79) выполняется всюду на Δ , а второе — почти всюду.

4. Задача быстродействия. Рассмотрим задачу:

$$\begin{gathered} T \to \min, \quad x(0) = a, \quad x(T) = b, \\ \dot{x} = f(x,u), \quad u \in U. \end{gathered} \tag{1.80}$$

Перепишем ее в виде:

$$t_1 \to \min, \quad t_0 = 0, \quad x_0 - a = 0, \quad x_1 - b = 0,$$

$$\dot{x} = f(x,u), \quad u \in U.$$

Здесь

$$l = \alpha_0 t_1 + \beta_t t_0 + \beta_0 (x_0 - a) + \beta_1 (x_1 - b),$$

$$H = \psi_x f(x,y) = H(x,u,\psi_x).$$

Условия принципа максимума имеют вид:

$$\alpha_0 \geqslant 0, \quad \alpha_0 + |\beta_t| + |\beta_0| + |\beta_1| > 0, \tag{1.81}$$

$$-\dot{\psi}_x = H_x, \quad \psi_x(t_0) = \beta_0, \quad -\psi_x(t_1) = \beta_1, \tag{1.82}$$

$$-\dot{\psi}_t = 0, \quad \psi_t(t_0) = \beta_t, \quad -\psi_t(t_1) = \alpha_0, \tag{1.83}$$

$$\max_{u \in \bar{U}} H(x(t), u, \psi_x(t)) + \psi_t(t) = 0, \quad \forall\, t \in \Delta, \tag{1.84}$$

$$H(x(t), u(t), \psi_x(t)) + \psi_t(t) = 0, \quad \text{п.в. на } \Delta. \tag{1.85}$$

Из (1.83) следует, что $\psi_t \equiv -\alpha_0$. Предположим, что $\psi_x(t_0) = 0$. Тогда из уравнения $-\dot{\psi}_x = \psi_x f_x(x,u)$ следует, что $\psi_x \equiv 0$. Отсюда $\beta_0 = \beta_1 = 0$ и $\psi_x f = 0$. Из последнего равенства и условия (1.85) следует, что $\psi_t = 0$. Тогда $\alpha_0 = 0$ и $\beta_t = 0$ в силу (1.83). Мы пришли к противоречию с (1.81). Таким образом, $|\psi_x(t_0)| > 0$ есть эквивалентное условие нормировки.

Итак, окончательная формулировка принципа максимума для траектории $(x(t), u(t) \mid t \in [0,T])$ в задаче (1.80) такова:

существует абсолютно непрерывная на $\Delta = [0,T]$ функция $\psi(t)$ такая, что

$$|\psi(0)| > 0, \tag{1.86}$$

$$-\dot{\psi} = H_x(x(t), u(t), \psi(t)), \quad \text{п.в. на } \Delta, \tag{1.87}$$

$$0 \leqslant \max_{u \in \bar{U}} H(x(t), u, \psi_x(t)) = H(x(t), u(t), \psi_x(t)), \quad \text{п.в. на } \Delta. \tag{1.88}$$

Из этих условий вытекает, что

$$\max_{u \in \bar{U}} H(x(t), u, \psi_x(t)) \equiv const \quad \text{ на } \Delta. \tag{1.89}$$

Поэтому неравенство в (1.88) достаточно проверять хотя бы в одной точке $t \in \Delta$.

Последние две задачи, (1.71) и (1.80), являются основными в книге [1], где для них был получен принцип максимума.

1.7 Понтрягинский минимум

Мы получили принцип максимума как необходимое условие стационарности в каждой конечномерной задаче B^θ (нетрудно показать, что он есть эквивалент стационарности в каждой конечномерной задаче B^θ). Это дает представление о принципе максимума как о необходимом условии первого порядка. Но возникает вопрос: для какого типа минимума принцип максимума является необходимым условием? До сих пор мы предполагали, что исследуемая траектория доставляет глобальный минимум в задаче А. Дело в том, что между основной и конечномерной задачами была установлена довольно грубая связь: из абсолютного минимума в основной задаче вытекает абсолютный минимум в каждой конечномерной задаче, а значит, стационарность в каждой конечномерной задаче. Однако, проводя анализ более внимательно, мы могли бы увидеть, к нарушению какого типа минимума приводит отсутствие стационарности хотя бы в одной из конечномерных задач. Ниже, не приводя больше никаких доказательств, мы сформулируем ответ на этот вопрос для задачи A .

Как и условие Вейерштрасса в вариационном исчислении, принцип максимума вытекает, например, из сильного минимума. В литературе часто так и принято квалифицировать его — как необходимое условие первого порядка для сильного минимума. Напомним, что сильный минимум соответствует малым вариациям фазовой переменной, при этом вариации управления могут быть любыми. Однако известные доказательства условия Вейерштрасса с помощью игольчатой вариации позволяют заключить, что интересующий нас тип минимума связан как раз с игольчатыми вариациями управления, или, возможно, с такими вариациями управления, которые принимают не малые значения лишь на множестве малой меры. Если такие вариации добавить к обычным равномерно малым вариациям управления, то получится класс вариаций, минимум в котором А.Я.Дубовицкий и А.А.Милютин предложили назвать *понтрягинским* в честь первооткрывателя принципа максимума Льва Семеновича Понтрягина. (Добавление малых вариаций управления продиктовано тем, что без них класс "игольчатых" вариаций, во-первых, не сравним с классом малых вариаций, который является основным в КВИ, и во-вторых, минимум в классе одних "игольчатых" вариаций не инвариантен относительно различных преобразований задачи.)

Дадим теперь точное определение понтрягинского минимума в канонической задаче A. Как и для понятий слабого и сильного минимума, это удобнее сделать сначала для задачи A на фиксированном отрезке времени $[t_0, t_1]$. Пусть пока для простоты множество $\mathcal{Q}$ (область определения функций задачи) есть все пространство.

Определение 1.1. Будем говорить, что допустимая траектория $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ доставляет *понтрягинский минимум* в задаче A, если не существует последовательности допустимых траекторий $x^k(t), u^k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, такой что при $k \to \infty$

$$\begin{gathered} ||x^k - \hat{x}||_C \to 0, \qquad ||u^k - \hat{u}||_1 \to 0, \\ ||u^k - \hat{u}||_\infty \le \mathcal{O}(1), \end{gathered} \tag{1.90}$$

и при этом $\forall\, k \qquad J(x^k, u^k) < J(\hat{x}, \hat{u})$.

Другими словами, нельзя понизить функционал задачи на допустимой последовательности, приближающейся к данной $(\hat{x}, \hat{u})$ в смысле (1.90).

(Если множество управлений U ограничено, то последнее условие в (1.90) выполняется автоматически, и поэтому его можно опустить; т.е. понтрягинский минимум в этом случае есть локальный минимум относительно $\|x\|_C + \|u\|_1$.)

В более привычных терминах приведенное определение эквивалентно следующему.

Определение 1.2. Траектория $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ доставляет *понтрягинский минимум* в задаче A, если для любой константы N существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой допустимой траектории (x, u), удовлетворяющей неравенствам

$$||x - \hat{x}||_C < \varepsilon, \qquad ||u - \hat{u}||_1 < \varepsilon, \qquad ||u - \hat{u}||_\infty \le N, \tag{1.91}$$

выполнено неравенство $J(x, u) \ge J(\hat{x}, \hat{u})$.

Другими словами, для любого N траектория $(\hat{x}, \hat{u})$ доставляет локальный минимум относительно нормы $\|x\|_C + \|u\|_1$ в задаче A с дополнительным ограничением $||u - \hat{u}||_\infty \le N$.

Из этого определения сразу видно, что понтрягинский минимум занимает промежуточное положение между классическими слабым и сильным минимумами.

В случае слабого минимума вместо (1.91) фигурируют неравенства

$$||x - \hat{x}||_C < \varepsilon, \qquad ||u - \hat{u}||_\infty < \varepsilon,$$

которые задают в пространстве (x, u) более узкое множество, чем неравенства (1.91), и поэтому из наличия понтрягинского минимума на траектории $(\hat{x}, \hat{u})$ вытекает наличие слабого минимума.

В случае сильного минимума вместо (1.91) имеется лишь одно неравенство

$$||x - \hat{x}||_C < \varepsilon,$$

которое выделяет в пространстве (x, u) более широкое множество, чем неравенства (1.91), и поэтому из наличия сильного минимума на траектории $(\hat{x}, \hat{u})$ вытекает наличие понтрягинского минимума.

Эти соотношения легко получаются и на языке последовательностей.

Слабый минимум на траектории $(\hat{x}, \hat{u})$ означает, что не существует последовательности допустимых траекторий $x^k(t), u^k(t)$, $k = 1, 2, \ldots,$ такой что

$$||x^k - \hat{x}||_C \to 0, \qquad ||u^k - \hat{u}||_\infty \to 0, \tag{1.92}$$

и при этом $\forall\, k \qquad J(x^k, u^k) < J(\hat{x}, \hat{u})$.

Для сильного минимума два условия (1.92) заменяются на одно первое:

$$||x^k - \hat{x}||_C \to 0. \tag{1.93}$$

Сравнивая (1.90), (1.92) и (1.93), опять приходим к тем же соотношениям между этими тремя типами минимума, которые условно можно записать так:

$$\text{сильный} \implies \text{понтрягинский} \implies \text{слабый}.$$

Можно показать, что обе импликации здесь необратимы, т.е. на траектории $(\hat{x}, \hat{u})$ может достигаться слабый минимум, но не быть понтрягинского, и может достигаться понтрягинский минимум, но не быть сильного. (Постройте сами соответствующие примеры!)

В случае, когда отрезок времени в задаче A не фиксирован, определение понтрягинского минимума модифицируется следующим естественным образом. Если пользоваться языком последовательностей, то траектории (x^k, u^k) определены на отрезках $\Delta^k = [t_0^k, t_1^k]$, которые должны стремиться к отрезку $\hat{\Delta} = [\hat{t}_0, \hat{t}_1]$, и все нормы в условии (1.90) надо рассматривать на пересечении $\Delta^k \cap \hat{\Delta}$ (т.е. на общем отрезке определения траекторий (x^k, u^k) и $(\hat{x}, \hat{u})$).

Наконец, если "область определения" задачи не есть все пространство, а задается открытым множеством $\mathcal{Q}$, то последнее условие в (1.90) заменяется на следующее: существует компакт $\Omega \subset \mathcal{Q}$ (зависящий от последовательности), такой что

$$\forall\, k \qquad (t, x^k(t), u^k(t)) \in \Omega \qquad \text{почти всюду на} \quad \Delta^k.$$

Ясно, что если $\mathcal{Q}$ есть все пространство, то это условие равносильно последнему условию в (1.90).

Внимательно прослеживая вышеприведенное доказательство теоремы 12, нетрудно обнаружить, что на самом деле справедливо несколько более сильное утверждение.

Теорема 13. *Если траектория $(\hat{x}, \hat{u})$ доставляет понтрягинский минимум в задаче A, то для нее выполнен принцип максимума Понтрягина.*

Таким образом, принцип максимума Понтрягина есть необходимое условие понтрягинского минимума (а не только сильного, или тем более глобального минимума). Как мы увидим позже, этот факт остается справедливым и для гораздо более общей задачи, чем задача А.

В заключение отметим следующее весьма интересное обстоятельство: понтрягинский минимум, в отличие от слабого и сильного, не является локальным минимумом в смысле какой-либо топологии. Поясним сказанное.

Будем говорить, что последовательность (x^k, u^k) *сходится по понтрягински* к $(\hat{x}, \hat{u})$, если выполнены условия (1.90). (Новизна здесь, конечно, в сходимости компоненты u; относительно x сходимость обычная равномерная.)

Лемма 4. *В пространстве функций (x, u) на данном отрезке Δ не существует топологии, сходимость в которой совпадала бы с понтрягинской сходимостью.*

Как известно, сходимость соответствует некоторой топологии, если оператор замыкания, порожденный этой сходимостью (который к любому множеству $\mathcal{M}$ добавляет всевозможные пределы последовательностей точек этого множества, сходящиеся в данном смысле), обладает тем свойством, что замыкание любого множества замкнуто, т.е. повторное замыкание всегда совпадает с однократным замыканием: $\overline{\overline{\mathcal{M}}} = \overline{\mathcal{M}}$ (см. [10, 11]). Поэтому для доказательства леммы достаточно привести пример множества $\mathcal{M}$, для которого $\overline{\overline{\mathcal{M}}} \neq \overline{\mathcal{M}}$. Мы оставляем это в качестве задачи для заинтересованного читателя.

Несмотря на указанное несколько странное обстоятельство, связанное с понятием понтрягинского минимума, на первый взгляд затрудняющее его исследование традиционными методами анализа, именно понтрягинский минимум оказался очень удобным рабочим инструментом при исследовании различных задач и теоретических вопросов оптимального управления. Понтрягинский минимум обладает наиболее богатой теорией условий как первого так и высших порядков, во многих отношениях более полной и содержательной, чем, скажем, теория слабого минимума классического вариационного исчисления. Это показали исследования последних десятилетий. Одно из объяснений этому состоит в том, что наличие понтрягинского минимума на данной траектории (а также выполнение принципа максимума на ней) сохраняется при различных преобразованиях задачи, тогда как слабый минимум (и соответственно, уравнение Эйлера–Лагранжа) не обладает такой инвариантностью.

Глава 2

Аппарат теории экстремума. Схема Дубовицкого–Милютина

2.1 Накрывание и метрическая регулярность. Теорема Люстерника

1. Теорема Банаха об открытом отображении. Пусть X , Y — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — линейный непрерывный оператор. Как известно, непрерывность оператора A эквивалентна его ограниченности. Пусть B_X , B_Y — единичные шары в X и Y соответственно.

Теорема 14 (об открытом отображении)**.** *Пусть* $A : X \xrightarrow{\text{на}} Y$ *— линейный ограниченный оператор. Тогда существует* $a > 0$ *такое, что*

$$A(B_X) \supset aB_Y, \tag{2.1}$$

т. е. образ единичного шара в X *содержит шар радиуса* a *в* Y *(с центром в нуле).*

Доказательство — см., например, [10, 11].

Следствие 1 (теорема Банаха об обратном операторе)**.** *Если* $A : X \xrightarrow{\text{на}} Y$ *и* A *инъективен, то* $A^{-1} : Y \to X$ *— ограниченный линейный оператор.*

Условие (2.1) называется *свойством накрывания с константой* $a > 0$ для линейного оператора. Таким образом, всякий линейный сюръективный оператор накрывает с некоторой константой $a > 0$.

В силу линейности это свойство можно распространить на любые шары:

$$A(B_X(x, r)) \supset B_Y(Ax, ar), \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, r > 0,$$

где $B_X(x, r)$ — шар в X радиуса r с центром в x (проверьте!).

Именно это свойство используется в определении понятия накрывания для нелинейных операторов.

2. Накрывание для нелинейных операторов. Пусть (X, d_X) , (Y, d_Y) — метрические пространства, $F : X \to Y$ — оператор, $B_X(x, r)$ — шар радиуса r с центром в точке x в X , $B_Y(y, r)$ — шар радиуса r с центром в точке y в Y . Пусть $U \subset X$ — открытое множество.

Определение 2.1. Будем говорить, что оператор F *накрывает на множестве* U с константой $a > 0$, если для любого $B_X(x, r) \subset U$ выполнено включение

$$F(B_X(x, r)) \supset B_Y(F(x), ar). \tag{2.2}$$

Если есть накрывание с константой $a > 0$, то есть накрывание и с любой меньшей константой $a' < a$. Супремум всех a, для которого есть накрывание, называют *константой накрывания* F на U.

Определение 2.2. Оператор $S : X \to Y$ назовем *стягивающим* (или *сжимающим*) на U с константой $b > 0$, если для любого $B_X(x, r) \subset U$ выполнено включение

$$F(B_X(x, r)) \subset B_Y(F(x), br). \tag{2.3}$$

Говорят, что оператор $S : X \to Y$ удовлетворяет условию Липшица на U с константой b, если

$$d_Y(S(x_1), S(x_2)) \leqslant b d_X(x_1, x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in U. \tag{2.4}$$

(Очевидно, при этом $b \geq 0$.) Оператор, удовлетворяющий на U условию Липшица с некоторой константой, называют липшицевым на U.

Ясно, что оператор, удовлетворяющий на U условию Липшица с константой b, является стягивающим на U с той же константой. (А верно ли обратное?)

Оказывается, если накрывающий оператор "возмутить" стягивающим с малой константой, то свойство накрывания не нарушится. Это утверждается в следующей теореме, принадлежащей А.А. Милютину и возникшей как обобщение теоремы Люстерника о касательном многообразии (с последней нам еще предстоит познакомиться).

Теорема 15 (о накрывании)**.** *Пусть* (X, d) *— полное метрическое пространство,* $(Y, \|\cdot\|)$ *— нормированное пространство,* $U \subset X$ *— открытое множество.*

Пусть $T : X \to Y$ *накрывает на* U *с константой* $a > 0$ *и непрерывен на* U, $S : X \to Y$ *стягивает на* U *с константой* $b > 0$. *Пусть* $a > b$.

Тогда оператор

$$F = T + S : X \to Y \qquad (F(x) := T(x) + S(x) \quad \forall\, x \in X)$$

накрывает на U *с константой* $a - b$.

Для доказательства нам понадобится лемма. Пусть $B_X(x_0, R)$ — фиксированный шар радиуса $R > 0$ с центром в x_0 в X. Накрывание и стягивание на $B_X(x_0, R)$ определим как и на U. По-прежнему X — полное метрическое, Y — нормированное пространство.

Лемма 5 (о накрывании)**.** *Пусть оператор* $T : X \to Y$ *непрерывен и накрывает на* $B_X(x_0, R)$ *с константой* $a > 0$, *а оператор* $S : X \to Y$ *стягивает на* $B_X(x_0, R)$ *с константой* $b > 0$, *где* $a > b$. *Тогда для оператора* $F = T + S$ *выполнено включение*

$$F(B_X(x_0, R)) \supset B_Y(F(x_0), (a - b)R). \tag{2.5}$$

Доказательство. Без нарушения общности считаем $a=1$, и тогда $b<1$. (Действительно, в Y можно ввести новую норму $\|\cdot\|' = \frac{1}{a}\|\cdot\|$, и тогда шар радиуса a станет шаром единичного радиуса.) В обозначениях шаров нижние индексы X и Y будем опускать, а расстояние в пространствах X и Y обозначать одной и той же буквой d .

Обозначим $F(x_0)=y_0$. Возьмем произвольный $\hat y \in B(y_0,(1-b)\rho)$, т.е. $d(\hat y,y_0)\le (1-b)\rho$. Требуется показать, что найдется такой $\hat x\in B(x_0,\rho)$, что $F(\hat x)=\hat y$.

Точку $\hat x$ мы получим в виде предела последовательности $\{x_n\}$, которую сейчас построим с помощью некоторого итерационного процесса. Обозначим для краткости $r=(1-b)\rho$.

Имеем начальную ситуацию

$$T(x_0)+S(x_0)=y_0\ , \tag{2.6}$$

а нам надо справа получить $\hat y$. Перепишем это равенство в виде $T(x_0)=y_0-S(x_0)$ и воспользуемся 1-накрыванием оператора T. Поскольку

$$d\,(\hat y-S(x_0),\, y_0-S(x_0)) \;=\; d\,(\hat y,\, y_0)\;\le r,$$

то существует $x_1\in B(x_0,r)$, такой что $T(x_1)=\hat y-S(x_0)$, т.е.

$$T(x_1)+S(x_0)=\hat y\ . \tag{2.7}$$

Теперь заменим здесь $S(x_0)$ на $S(x_1)$. Так как оператор S стягивает с коэффициентом b на шаре $B(x_0,r)$, то $d(S(x_1),S(x_0))\le br$, и поэтому

$$T(x_1)+S(x_1)=y_1\ , \tag{2.8}$$

причем $d(\hat y,y_1)\le br$.

Таким образом, от равенства (2.6) для "базовой" точки x_0 мы перешли к равенству (2.8) для новой "базовой" точки x_1, и при этом

$$d(x_0,x_1)\le r, \qquad d(\hat y,y_1)\le br.$$

Теперь уже в равенстве (2.8) будем пытаться заменить y_1 на $\hat y$.
Так как

$$r+br<\; r\,(1+b+b^2+\ldots)\;=\;r\,\frac{1}{1-b}\;=\rho,$$

то шар $B(x_1,br)$ содержится в шаре $B(x_0,\rho)$; поэтому для него выполнено 1-накрывание оператора T и $b-$ стягивание оператора S, и тогда по аналогии с предыдущим существует $x_2\in B(x_1,br)$, такой что

$$T(x_2)+S(x_2)=y_2\,, \qquad \text{где} \qquad d(\hat y,y_2)\le b^2r.$$

Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность точек x_n, y_n таких, что

$$F(x_n)=T(x_n)+S(x_n)=y_n\ , \tag{2.9}$$

$$d(x_{n-1},x_n)\le b^{n-1}r, \qquad d(\hat y,y_n)\le b^n r. \tag{2.10}$$

При этом

$$d(x_0,x_n)+b^n r\;\le\; d(x_0,x_1)+d(x_1,x_2)+\ldots+d(x_{n-1},x_n)+b^n r\;\le$$

$$\leq\ r + br + \ldots + b^{n-1}r + b^n r \ <\ r\,\frac{1}{1-b}\ = \rho, \tag{2.11}$$

т.е. шар $B(x_n, b^n r)$ содержится в исходном шаре $B(x_0, \rho)$, и поэтому возможен следующий шаг нашего процесса. (Проверьте, что на следующем шаге будут выполнены неравенства, аналогичные (2.10), и тем самым завершите индукцию по n .)

Рассмотрим полученную последовательность x_n . Из первого неравенства (2.10) вытекает, что она фундаментальна, и тогда в силу полноты пространства X она имеет предел. Обозначим его через $\hat{x}$. Из (2.11) следует, что $d(x_0, \hat{x}) \leq \rho$, т.е. $\hat{x} \in B(x_0, \rho)$. Из второго неравенства (2.10) следует, что $y_n \to \hat{y}$, а тогда в силу (2.9) из непрерывности оператора F на исходном шаре получаем $F(\hat{x}) = \hat{y}$, что и требовалось. □

Замечание. В доказательстве этой леммы нам требовалось решить уравнение $T(\hat{x}) + S(\hat{x}) = \hat{y}$, исходя из начального приближения (2.6). Обратим внимание, что фактически мы решали это уравнение методом Ньютона: роль производной нелинейного оператора играл у нас оператор T, а роль нелинейного остатка – оператор S. За счет накрывания T мы "решали" уравнение (2.7) и получали точку x_1, а малый добавок S "сбивал" нас с этого равенства; получалось новое приближение (2.8), уже более точное, чем исходное, и т.д.

Этот абстрактный аналог метода Ньютона впервые был использован Л.А.Люстерником и поэтому мы называем его *люстерниковским итерационным процессом.* Он не совпадает в точности с процессом Ньютона, потому что оператор T, вообще говоря, не взаимно-однозначный, т.е. уравнение (2.7) здесь, в отличие от метода Ньютона, решается не однозначно.

Доказательство теоремы о накрывании получается применением леммы к каждому шару, содержащемуся в U . □

3. Накрывание и метрическая регулярность. Пусть (X, d) и (Y, d) — метрические пространства (чтобы избежать громоздких обозначений, метрики в этих пространствах мы обозначаем одной и той же буквой d , хотя, конечно, они разные), и пусть задан оператор $F : X \to Y$. Через $\mathcal{O}_\varepsilon(x)$ обозначим открытый шар в X радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x , а через $B(x, r)$ по-прежнему обозначаем замкнутый шар в X радиуса $r \geqslant 0$ с центром в точке x .

Определение 2.3. Отображение $F : X \to Y$ *метрически регулярно с константой* $k > 0$ на $X \times Y$, если

$$d\big(x, F^{-1}(y)\big) \leqslant k\, d\big(F(x), y\big) \qquad \forall\, x \in X, \quad \forall\, y \in Y\,. \tag{2.12}$$

Утверждение 1. *Накрывание на X с константой $a > 0$ влечет метрическую регулярность на $X \times Y$ с константой $k = \frac{1}{a}$.*

Доказательство. Пусть $F : X \to Y$ накрывает на X с константой $a > 0$. Пусть $x \in X$, $y \in Y$. По условию накрывания для $r = d\big(F(x), y\big)$ имеем:

$$F\Big(B(x, \frac{r}{a})\Big)\ \supset\ B\big(F(x), r\big).$$

Так как $y \in B\big(F(x), r\big)$, то найдется $x_y \in B\big(x, \frac{r}{a}\big)$ такой, что $F(x_y) = y$. Тогда

$$d(x, x_y) \leqslant \frac{r}{a} = \frac{1}{a}\, d\big(F(x), y\big).$$

Поскольку $x_y \in F^{-1}(y)$, то

$$d\big(x, F^{-1}(y)\big) \leqslant d(x, x_y),$$

и поэтому

$$d\big(x, F^{-1}(y)\big) \leqslant \frac{1}{a}\, d\big(F(x), y\big).$$

Метрическая регулярность означает, что расстояние от точки x до уровня y функции F оценивается первой степенью расстояния от образа $F(x)$ до y .

Часто эта оценка применяется для $y = 0$, то есть для расстояния до нулевого уровня оператора. Наличие оценки (2.12) предполагает непустоту множества $F^{-1}(y)$ — полного прообраза точки y . Если $F^{-1}(y) = \varnothing$, то по определению $d\big(x, F^{-1}(y)\big) = +\infty$ (расстояние от точки до пустого множества равно $+\infty$).

У понятий "накрывание" и "метрическая регулярность" имеется "локальный вариант". Пусть $x_0 \in X$ — фиксированная точка, $y_0 = F(x_0)$.

Определение 2.4. F *накрывает с константой* $a > 0$ *в окрестности точки* x_0 , если существует окрестность U точки x_0 , в которой F накрывает с константой a , т. е.

$$F(B(x, r)) \supset B(F(x), ar) \quad \forall\, B(x, r) \subset U.$$

Определение 2.5. F *метрически регулярно с константой* $k > 0$ *в окрестности точки* x_0 , если существуют окрестность U точки x_0 в X и окрестность V точки $y_0 = F(x_0)$ в $Y,$ такие, что

$$d(x, F^{-1}(y)) \leqslant k d(F(x), y) \quad \forall\, x \in U,\ \forall\, y \in V.$$

Замечание. Правильнее было бы сказать "в окрестности точки (x_0, y_0) в $X \times Y$ ” .

Теорема 16. *Если отображение* F *накрывает в окрестности точки* x_0 *с константой* $a > 0,$ *то оно метрически регулярно с константой* $k = \frac{1}{a}$ *для некоторых окрестностей точек* x_0 *и* $y_0 = F(x_0).$

Для отображения, непрерывного в точке $x_0,$ *верно и обратное: Если отображение* F *метрически регулярно с константой* $k > 0$ *для некоторых окрестностей точек* x_0 *и* $y_0 = F(x_0),$ *то в некоторой окрестности точки* x_0 *оно накрывает с любой константой* $a < \frac{1}{k}$.

Доказательство. ($\Longrightarrow$) Без нарушения общности можно считать $a = 1$ (заменив в пространстве Y метрику $d(\cdot, \cdot)$ на метрику $d(\cdot, \cdot)/a$). Тогда по условию F накрывает с константой 1 в некоторой $\varepsilon-$ окрестности точки x_0. Положим $\delta = \varepsilon/3$ и покажем, что для $\delta-$ окрестностей точек x_0 и $y_0 = F(x_0)$ выполнена метрическая регулярность с константой 1 .

Возьмем произвольные точки $x \in B(x_0, \delta),$ $y' \in B(y_0, \delta).$ Обозначим $F(x) = y,$ $d(y', y) = r.$ Требуется показать, что $d(x, F^{-1}(y')) \leq r$. Мы покажем, что более того,

$$\exists\, x' \in B(x, r) \qquad \text{такой, что} \qquad F(x') = y'\,. \tag{2.13}$$

Возможны два случая: а) $r \geq 2\delta$ (y и y' "далеки" друг от друга),
б) $r < 2\delta$ (y и y' "близки").

В случае а) воспользуемся тем, что в силу 1-накрывания оператора F образ шара $B(x_0,\delta)$ содержит шар $B(y_0,\delta)$, и поэтому существует $x' \in B(x_0,\delta)$ такой, что $F(x') = y'$. При этом

$$d(x',x) \leq\ d(x',x_0) + d(x_0,x)\ \leq\ \delta + \delta\ \leq r,$$

и тем самым (2.13) установлено.

В случае б) шар $B(x,r)$ содержится в $\varepsilon-$ окрестности точки x_0 (ибо по неравенству треугольника любая его точка x' отстоит от x_0 не более, чем на $r + d(x,x_0) \leq r + \delta < 3\delta = \varepsilon$), и тогда в силу 1-накрывания

$$F(B(x,r))\ \supset\ B(y,r). \tag{2.14}$$

Но $y' \in B(y,r)$ (см. определение r), поэтому из (2.14) следует (2.13), ч.т.д.

($\Longleftarrow$) Теперь без нарушения общности мы можем считать $k = 1$. Итак, пусть F непрерывно в x_0 и при некоторых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ метрически регулярно с константой 1 для окрестностей $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ и $\mathcal{O}_\varepsilon(y_0)$ точек x_0 и $y_0 = F(x_0)$. Уменьшим, если необходимо, δ так, чтобы было

$$0 < \delta < \varepsilon/3 \qquad \text{и} \qquad F(\mathcal{O}_\delta(x_0))\ \subset\ \mathcal{O}_{\varepsilon/3}(y_0). \tag{2.15}$$

Покажем, что F накрывает на $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ с любой константой $a < 1$.

Рассмотрим любой шар $B(x,r) \subset \mathcal{O}_\delta(x_0)$. Очевидно, радиус такого шара $r \leq 2\delta$ (т.к. для любой его точки x' выполнено $d(x',x) \leq d(x',x_0) + d(x_0,x) < 2\delta$).

Обозначим $F(x) = y$ и возьмем любое $r' < r$. Достаточно показать, что

$$F(B(x,r))\ \supset\ B(y,r'), \tag{2.16}$$

отсюда $a-$ накрывание F очевидно вытекает (при любом $a < 1$).

Возьмем любую точку $y' \in B(y,r')$. Для нее в силу (2.15)

$$d(y_0,y') \leq\ d(y_0,y) + r'\ <\ \frac{\varepsilon}{3} + 2\delta\ < \varepsilon,$$

поэтому $y' \in \mathcal{O}_\varepsilon(y_0)$. Так как $x \in \mathcal{O}_\delta(x_0)$, то для точек x, y' в силу метрической регулярности имеем

$$d(x,\ F^{-1}(y'))\ \leq\ d(y,y')\ \leq r' < r,$$

поэтому существует $x' \in F^{-1}(y')$ такой, что $d(x,x') < r$.

Таким образом, $x' \in B(x,r)$ и $F(x') = y'$, и тем самым (2.16) установлено. Теорема доказана.

4. Дифференцируемость по Фреше и строгая дифференцируемость оператора. В главе 1 мы уже определяли понятия дифференцируемости по Фреше и непрерывной дифференцируемости для отображений банаховых пространств. Напомним их. Пусть X , Y — банаховы пространства, U — окрестность точки $x_0 \in X$, $g : U \to Y$ — оператор (отображение).

Определение 2.6. Оператор g *дифференцируем по Фреше* в точке x_0 , если существует ограниченный линейный оператор $A : X \to Y,$ такой что

$$g(x_0+h) = g(x_0) + Ah + r(x_0,h), \qquad \text{где} \quad \|r(x_0,h)\| = o(\|h\|).$$

Оператор A называется *производной Фреше* оператора g в точке x_0 . Принято обозначать

$$A = g'(x_0).$$

В частности, при $Y = \mathbb{R}^1$ мы получаем определение функционала, дифференцируемого по Фреше в точке x_0 .

Оператор g называют *непрерывно дифференцируемым* по Фреше в точке x_0 , если он имеет производную Фреше $g'(x)$ в окрестности точки x_0 и при этом

$$\|g'(x) - g'(x_0)\| \to 0 \quad \text{при } \|x - x_0\| \to 0\,.$$

Оператор g называют *строго дифференцируемым* в точке x_0 , если существует ограниченный линейный оператор $A : X \to Y$ такой, что $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0$ такое, что для любых x_1, x_2 , удовлетворяющих неравенствам $\|x_1 - x_0\| < \delta$, $\|x_2 - x_0\| < \delta$ выполнено неравенство

$$\|g(x_2) - g(x_1) - A(x_2 - x_1)\| \leqslant \varepsilon\|x_2 - x_1\|. \tag{2.17}$$

Строгая дифференцируемость в точке сильнее, чем дифференцируемость по Фреше в этой точке. Действительно, на языке $\varepsilon - \delta$ дифференцируемость по Фреше можно сформулировать так: $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0$ такое, что из условия $\|x - x_0\| < \delta$ вытекает, что

$$\|g(x) - g(x_0) - A(x - x_0)\| \leqslant \varepsilon\|x - x_0\|.$$

(По сравнению с (2.17) здесь одна из точек x_1 , x_2 совпадает с данной точкой x_0 .) Отсюда ясно, что строгая дифференцируемость влечет дифференцируемость по Фреше, и что в определении строгой дифференцируемости $A = g'(x_0)$.

Покажем, что из непрерывной дифференцируемости в точке вытекает строгая дифференцируемость в этой точке. Для этого нам понадобится известная теорема о среднем для операторов.

Теорема 17 (о среднем)**.** *Пусть* X , Y *— нормированные пространства,* $U \subset X$ *— открытое множество,* $[a,b] \subset U$ *— отрезок,* $f : U \to Y$ *— оператор, дифференцируемый по Фреше в каждой точке* $x \in [a,b]$. *Тогда*

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|\,\|b - a\|.$$

Замечание. Эта теорема остается справедливой, если в каждой точке отрезка $[a,b]$ оператор f дифференцируем не по Фреше, а лишь по Гато (т. е. в более слабом смысле). Подробности см. в [16], с. 148, там же приведено и доказательство.

Теперь покажем, что непрерывная дифференцируемость в точке сильнее, чем строгая. Пусть $g(x)$ непрерывно дифференцируем по Фреше в точке x_0 . Рассмотрим оператор $\varphi(x) = g(x) - g'(x_0)x$. Для него при x близком к x_0 имеем: $\varphi'(x) = g'(x) - g'(x_0)$, и следовательно, $\|\varphi'(x)\| \to 0 \quad$ при $\|x - x_0\| \to 0$. Тогда

$$\|g(x_2) - g(x_1) - g'(x_0)(x_2 - x_1)\| = \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in[x_1,x_2]} \|\varphi'(x)\|\,\|x_2-x_1\|. \tag{2.18}$$

Поскольку $\sup_{x\in[x_1,x_2]}\|\varphi'(x)\| \to 0$ при $\|x_1-x_0\|+\|x_2-x_0\|\to 0$, то g строго дифференцируем в точке x_0. Итак, доказана

Теорема 18. *Непрерывная дифференцируемость по Фреше в точке влечет строгую дифференцируемость в этой точке.*

5. Накрывание и метрическая регулярность для строго дифференцируемого оператора. Пусть $g: U\to Y$ строго дифференцируем в точке $x_0\in U$. Представим его в виде

$$g(x) = g(x_0+(x-x_0)) = g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+S(x), \tag{2.19}$$

где

$$S(x) = g(x)-g(x_0)-g'(x_0)(x-x_0). \tag{2.20}$$

Для $x_1,x_2\in U$ имеем

$$S(x_2)-S(x_1) = g(x_2)-g(x_1)-g'(x_0)(x_2-x_1).$$

Из определения строгой дифференцируемости оператора g в точке x_0 вытекает, что $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$, такое, что

$$\|S(x_2)-S(x_1)\|\leqslant\varepsilon\|x_2-x_1\| \qquad \forall x_1,x_2\in B(x_0,\delta),$$

т. е. оператор S удовлетворяет условию Липшица (и, следовательно, является стягивающим) с константой $\varepsilon>0$ на шаре $B(x_0,\delta)$. При этом ε можно сделать сколь угодно малым за счет выбора достаточно малого δ.

Теперь мы легко докажем следующий критерий накрывания в окрестности точки x_0 для нелинейного оператора $g: Y\to Y$.

Теорема 19 (достаточное условие для локального накрывания)**.** *Пусть оператор g строго дифференцируем в точке x_0 и пусть $g'(x_0)X=Y$ (выполнено условие Люстерника). Тогда существуют $a>0$ и окрестность точки x_0 такие, что оператор g накрывает с константой a в этой окрестности (а значит g метрически регулярен в окрестности точки x_0 с константой $1/a$).*

Доказательство. Имеем $g(x)=T(x)+S(x),$ где $T(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)$, а $S(x)$ определен формулой (2.20). Поскольку $g'(x_0)X=Y$, то оператор T накрывает на X с некоторой положительной константой $a_0>0$. Как было показано выше, оператор $S(x)$ стягивает на $B(x_0,\delta)$ с константой $\varepsilon>0,$ причем ε можно выбрать сколь угодно малым за счет выбора достаточно малого $\delta>0.$ Пусть $a_0-\varepsilon>0.$ По теореме Милютина о накрывании оператор $g=T+S$ накрывает с константой $a_0-\varepsilon$ в окрестности точки x_0. □

Замечание. Из доказательства видно, что годится любое $a<a_0$, где a_0 — константа накрывания для $g'(x_0)$.

6. Оценка расстояния до нулевого уровня нелинейного оператора. Пусть X , Y — банаховы пространства, $U \subset X$ — открытое множество, $g : U \to Y$ — оператор,

$$M = \{x \in U \mid g(x) = 0\} = g^{-1}(0)$$

— нулевой уровень этого оператора.

Теорема 20 (о поправке)**.** *Пусть* $x_0 \in U$ *такова, что* $g(x_0) = 0$ *(т. е.* $x_0 \in M$ *),* g *строго дифференцируем в точке* x_0 *и* $g'(x_0)X = Y$ *. Тогда существуют окрестность* $\mathcal{O}(x_0)$ *точки* x_0 *и* $k > 0$ *такие, что* $\forall\, x \in \mathcal{O}(x_0)\ \exists\, \bar{x} \in X$ *такой, что* $g(x + \bar{x}) = 0$ *;* $\|\bar{x}\| \leqslant k\|g(x)\|$ *, и, следовательно,* $d(x, M) \leqslant k\|g(x)\|$ *.*

Доказательство. По условию g метрически регулярен в некоторой окрестности $\mathcal{O}(x_0)$ точки x_0 . Следовательно, существует $k_0 > 0$ такое, что

$$d(x, M) \leqslant k_0\|g(x)\| \qquad \forall x \in \mathcal{O}(x_0) \tag{2.21}$$

(в определении метрической регулярности следует положить $y = 0$). Возьмем любое $k > k_0$ и покажем, что с таким k требуемая поправка существует.

Если $g(x) = 0$, то полагаем $\bar{x} = 0$, и все доказано. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\|g(x)\| > 0$.

Из (2.21) и определения расстояния до множества следует, что существует $x_1 \in M$ такой, что $\|x_1 - x\| \leqslant k\|g(x)\|$, и тогда достаточно положить $\bar{x} = x_1 - x$. □

7. Теорема Люстерника о касательном подпространстве. Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$ — множество, $x_0 \in \overline{M}$ — точка, $\overline{M}$ — замыкание множества M .

Определение 2.7. Вектор $\bar{x}$ называется (односторонним) *касательным* к M в точке x_0 , если $d(x_0 + \varepsilon\bar{x},\, M) = o(\varepsilon)$ при $\eta \to 0+$.

Обозначим через $T_{x_0}(M)$ множество всех касательных векторов в точке x_0 .

Напомним, что $K \subset X$ — *конус*, если из условий $x \in K$, $\lambda > 0$ следует, что $\lambda x \in K$. Конус K является выпуклым тогда и только тогда, когда из условий $x, y \in K$ следует, что $x + y \in K.$ (Покажите).

Если $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$ и $\lambda > 0$, то очевидно $\lambda\bar{x} \in T_{x_0}(M).$ Следовательно, $T_{x_0}(M)$ — конус (с вершиной в нуле), вообще говоря, невыпуклый.

Примеры. 1^0. Если $x_0 \in \operatorname{int} M$, то $T_{x_0}(M) = X$.

2^0. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$. Тогда касательный конус в нуле есть M .

3^0. Пусть $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Касательный конус в точке $(1, 0)$ есть полуплоскость $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0\}$

4^0. Пусть $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Касательный конус в точке $(1, 0)$ есть подпространство $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$.

Теорема 21 (Л. А. Люстерник)**.** *Пусть* X *,* Y *— банаховы,* $U \subset X$ *— открытое множество,* $g : U \to Y$ *— оператор,* $x_0 \in U$ *— точка,* $g(x_0) = 0$ *. Пусть*

$$M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}.$$

Пусть оператор g *строго дифференцируем в точке* x_0 *и* $g'(x_0)X = Y$ *(условие Люстерника). Тогда*

$$T_{x_0}(M) = \{\bar{x} \in X \mid g'(x_0)\bar{x} = 0\},$$

т. е. касательный конус к множеству нулей оператора есть подпространство, совпадающее с ядром его производной.

Предложение 5. *Независимо от выполнения условия Люстерника имеет место включение* $T_{x_0}(M) \subset Ker\, g'(x_0)$.

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$ и функция $\tilde{x}(\varepsilon) : (0, \varepsilon_0) \to X$ такие, что

$$g(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) = 0 \qquad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \qquad \|\tilde{x}(\varepsilon)\| = o(\varepsilon).$$

Пользуясь разложением g в точке x_0 , имеем

$$g(x_0) + g'(x_0)(\varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) + r(\varepsilon) = 0,$$

где $\|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon)$. Но $g(x_0) = 0$, следовательно, $g'(x_0)(\varepsilon\bar{x}) + o(\varepsilon) = 0$. Деля это равенство на ε и переходя к пределу по $\varepsilon \to +0$, получаем, что $g'(x_0)\bar{x} = 0$, то есть $\bar{x} \in Ker\, g'(x_0)$. □

Доказательство теоремы Люстерника. Пусть выполнены условия теоремы. Требуется установить включение $Ker\, g'(x_0) \subset T_{x_0}(M)$. Пусть $g'(x_0)\bar{x} = 0$. Тогда

$$g(x_0 + \varepsilon\bar{x}) = g(x_0) + g'(x_0)\varepsilon\bar{x} + r(\varepsilon) = r(\varepsilon), \quad \text{где } \|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon) .$$

По теореме о поправке $d(x_0 + \varepsilon\bar{x}, M) \leqslant k\,\|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon)$. Следовательно, $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$. □

Отметим, что понятия "накрывание", "метрическая регулярность" и соответствующие теоремы возникли из анализа доказательства теоремы Люстерника и так или иначе были с ней связаны.

2.2 Отделимость выпуклых множеств

1. Теорема отделимости Пусть X — банахово пространство, $x_1, x_2 \in X$. Через $[x_1, x_2]$ мы обозначаем отрезок в X с концами x_1 , x_2 , т. е. множество точек, представимых в виде $x = \alpha x_1 + \beta x_2$, где $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Напомним, что множество $M \subset X$ называется *выпуклым*, если вместе с каждыми двумя точками оно содержит соединяющий их отрезок.

Через X^* мы обозначаем сопряженное пространство к X , состоящее из всех линейных непрерывных функционалов $x^* : X \to \mathbb{R}$. По определению

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \langle x^*, x\rangle$$

— норма в X^*. С этой нормой пространство X^* является банаховым.

Пусть A , B — два множества в X .

Определение 2.8. Функционал $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ *разделяет* A и B , если

$$\sup_{x \in A} \langle x^*, x\rangle \leqslant \inf_{x \in B} \langle x^*, x\rangle \tag{2.22}$$

Пусть c — число, заключенное между левой и правой частями неравенства (2.22). Тогда гиперплоскость $\{x \mid \langle x^*, x\rangle = c\}$ *разделяет* A и B (или *отделяет* A и B друг от друга) в том смысле, что A лежит в полупространстве $\{x \mid \langle x^*, x\rangle \leqslant c\}$, а B лежит в полупространстве $\{x \mid \langle x^*, x\rangle \geqslant c\}$.

Следующая теорема представляет собой ключевой абстрактный факт, на котором базируется вся современная теория необходимых условий экстремума.

Теорема 22 (об отделимости)**.** *Пусть A — выпуклое открытое множество, B — выпуклое множество. Пусть $A \cap B = \varnothing$. Тогда существует ненулевой линейный непрерывный функционал, разделяющий A и B.*

Это теорема Хана–Банаха "в геометрической форме". Ее доказательство имеется, например, в учебнике [11].

Пусть $M \subset X$ — множество, $x^* \in X^*$ — функционал.

Определение 2.9. Функционал x^* называется *опорным* к множеству M, если

$$\inf x^*(M) = \inf_{x\in M} \langle x^*, x\rangle > -\infty.$$

Это означает, что $M \subset \{x \mid \langle x, x\rangle \geqslant a\}$ при некотором a. Множество всех опорных к M обозначим через M^*. Покажите, что M^* — выпуклый конус.

Упражнения.

1. Покажите, что M^* — выпуклый конус.

2. Покажите, что если K — конус, то

$$x^* \in K^* \Leftrightarrow \langle x^*, x\rangle \geqslant 0 \qquad \forall\, x \in K.$$

Конус K^* называют *сопряженным* к конусу K.

3. Докажите, что если конус K открыт, то ненулевой опорный функционал положителен на любом $x \in K$.

4. Докажите, что если одно из множеств в теореме отделимости есть конус, то константу c в определении отделимости можно выбрать равной нулю, и при этом x^* или $-x^*$ оказывается элементом сопряженного конуса.

5. Пусть $L \subset X$ – подпространство. Докажите, что всякий функционал x^*, опорный к L, "исчезает"на L, т.е. $\langle x^*, x\rangle = 0\ \ \forall\, x \in L$. Множество функционалов, удовлетворяющих этому условию, обозначается $L^\perp$ и называется *аннулятором* подпространства L. (Аналогично определяется аннулятор произвольного множества). Итак, для подпространства сопряженный конус совпадает с аннулятором.

6. Пусть A и B два множества в X. Покажите, что их можно отделить в том и только в том случае, когда существуют ненулевые функционалы x^* и y^* такие, что

$$x^* \in A^*, \quad y^* \in B^*, \quad x^* + y^* = 0, \quad \inf x^*(A) + \inf x^*(B) \geqslant 0\,.$$

Эквивалентная формулировка понятия отделимости, содержащаяся в последнем упражнении, позволяет обобщить теорему отделимости на случай конечного числа множеств. Это обобщение рассматривается в следующем пункте, сначала для конусов.

2. Теорема Дубовицкого – Милютина об отделимости конечного числа выпуклых множеств.

Теорема 23 (Дубовицкий—Милютин). *Пусть* $\Omega_1,\ \ldots,\ \Omega_k,\ \Omega$ *– непустые выпуклые конусы в* X *, причем* $\Omega_1,\ \ldots,\ \Omega_k$ *открыты. Тогда* $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_k \cap \Omega = \varnothing$ *в том и только в том случае, когда существуют линейные функционалы*

$$x_1^* \in \Omega_1^*, \quad \ldots, \quad x_k^* \in \Omega_k^*, \quad x^* \in \Omega^*, \tag{2.23}$$

не все равные нулю и такие, что

$$x_1^* + \ldots + x_k^* + x^* = 0\,. \tag{2.24}$$

Условие (2.24) Дубовицкий и Милютин назвали *уравнением Эйлера* для системы конусов $\Omega_1, \ldots, \Omega_k, \Omega$. Хотя название может показаться странным, оно объясняется тем обстоятельством, что все необходимые условия первого порядка локального минимума в различных задачах на условный экстремум, в том числе и уравнение Эйлера–Лагранжа в задачах вариационного исчисления, могут быть получены с помощью этого (весьма примитивного, на первый взгляд) равенства. Соответствующая процедура называется схемой (или методом) Дубовицкого–Милютина. С ней нам предстоит подробно познакомиться.

Для доказательства теоремы Дубовицкого–Милютина нам понадобится следующий простой факт. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — банаховы пространства, $\widehat{X} = X_1 \times \ldots \times X_n$ — их произведение. Тогда $\hat{x}^* \in \widehat{X}^* \Leftrightarrow \exists\, x_k^* \in X_k^*$ такие, что для любого $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \widehat{X}$ имеем

$$(\hat{x}^*, \hat{x}) = \langle x_1^*, x_1 \rangle + \ldots + \langle x_n^*, x_n \rangle \qquad \text{(покажите это).}$$

Доказательство теоремы 23. *Необходимость.* Пусть $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_k \cap \Omega = \varnothing$. В произведении $\hat{X} = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{k \text{ раз}} = X^k$ рассмотрим два конуса:

$$K_0 = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_k\,,$$

$$K = \{\hat{x} = (x_1, \ldots, x_k) \mid x_1 = \ldots = x_k = x \in \Omega\}.$$

Таким образом, K есть "диагональ" в произведении $\underbrace{\Omega \times \ldots \times \Omega}_{k \text{ раз}} = \Omega^k$.

Покажем, что

$$K_0 \cap K = \varnothing. \tag{2.25}$$

Пусть это не так, и пусть $\hat{x} \in K_0 \cap K$. Поскольку $\hat{x} \in K_0$, то $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, где $x_1 \in \Omega_1, \ldots, x_k \in \Omega_k$. Поскольку $\hat{x} \in K$, то $x_1 = \ldots = x_k = x \in \Omega$. Таким образом, $x \in \Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_k \cap \Omega,$ что противоречит условию непересечения конусов.

Оба конуса K_0 и K выпуклы, причем K_0 открыт. Из условия (2.25) по теореме отделимости вытекает существование $\hat{x}^* \in (X^k)^*$ такого, что

$$\langle \hat{x}^*, K_0 \rangle \geq 0, \quad \langle \hat{x}^*, K \rangle \leq 0\,,$$

и при этом $\hat{x}^* \neq 0$. Но $\hat{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$, где $x_i^* \in X^*, \quad i = 1, \ldots, k$, а условие $\langle x^*, K_0 \rangle \geq 0$ означает, что $\langle x_1^*, x_1 \rangle + \ldots + \langle x_k^*, x_k \rangle \geq 0$ для $x_1 \in \Omega_1, \ldots, x_k \in \Omega_k$.

Отсюда легко следует (покажите это), что $x_1^* \in \Omega_1^*, \dots, x_k^* \in \Omega_k^*$. При этом не все функционалы $x_1^*, \dots, x_k^*$ равны нулю, поскольку $\hat{x}^* \neq 0$.

Далее, условие $\langle \hat{x}^*, K \rangle \leq 0$ означает, что $\langle x_1^* + \ldots + x_k^*, x \rangle \leq 0 \; \forall x \in \Omega$. Положим $x^* = -(x_1^* + \ldots + x_k^*)$. Тогда $x^* \in \Omega^*$ и $x_1^* + \ldots + x_k^* + x^* = 0$.

Достаточность. Пусть существует ненулевой набор функционалов $x_1^*, \dots, x_k^*, x^*$, удовлетворяющий условиям (2.23) и (2.24). Пусть однако конусы $\Omega_1, \dots, \Omega_k, \Omega$ пересекаются, и пусть $\tilde{x}$ — их общий элемент. Среди функционалов $x_1^*, \dots, x_k^*$ имеется хотя бы один ненулевой $x_{i_0}^*$. Для него $\langle x_{i_0}^*, \tilde{x} \rangle > 0$, поскольку $\tilde{x} \in \operatorname{int} \Omega_{i_0}$. Для остальных x_i^* имеем: $\langle x_i^*, \tilde{x} \rangle \geq 0$. Кроме того, $\langle x^*, \tilde{x} \rangle \geq 0$. Следовательно $\langle \sum_{i=1}^k x_i^* + x^*, \tilde{x} \rangle > 0$, что противоречит условию (2.24). □

Трудно удержаться от того, чтобы не привести аналог (обобщение) этой теоремы для конечного числа выпуклых множеств, хотя это обобщение нам не понадобится.

Теорема 24 (Дубовицкий–Милютин). *Пусть $M_1, \dots, M_k, M$ – непустые выпуклые множества в банаховом пространстве X, причем $M_1, \dots, M_k$ открыты.*
Тогда условие

$$M_1 \cap \ldots \cap M_k \cap M = \varnothing$$

равносильно существованию ненулевого набора функционалов $(x_1^*, \dots, x_k^*, x^*)$ из X^* такого, что

$$x_1^* + \ldots + x_k^* + x^* = 0\,, \tag{2.26}$$

$$\inf\langle x_1^*, M_1 \rangle + \ldots + \inf\langle x_k^*, M_k \rangle + \inf\langle x^*, M \rangle \geq 0\,. \tag{2.27}$$

Эту теорему также несложно доказать, воспользовавшись теоремой отделимости. Для этого следует в пространстве X^k рассмотреть множество A элементов вида $\tilde{x} = (x_1 - x, \dots, x_k - x)$, где $x_1 \in M_1, \; \dots, x_k \in M_k, \; x \in M$. Из условия непересечения множеств $M_1, \dots, M_k$ и M вытекает, что A не содержит нуля. Кроме того, A открыто и выпукло. Следовательно, найдется функционал $\tilde{x}^* = (x_1^*, \dots, x_k^*)$, отделяющий A от нуля: $\langle x^*, \tilde{x} \rangle > 0 \quad \forall \, \tilde{x} \in A,$ то есть

$$\langle x_1^*, x_1 \rangle + \ldots + \langle x_k^*, x_k \rangle + \langle -x_1^* - \ldots - x_k^*, x \rangle > 0$$

для всех $x_1 \in M_1, \dots, x_k \in M_k, \; x \in M.$ Положим $x^* = -x_1^* - \ldots - x_k^*.$ Покажите, что набор $(x_1^*, \dots, x_k^*, x^*)$ ненулевой и удовлетворяет условиям (2.26), (2.27).
Доведите доказательство до конца. □

3. Лемма о нетривиальности аннулятора. Пусть $L \subset X$ линейное многообразие. Множество

$$L^\perp = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x \rangle = 0 \quad \forall x \in L\}$$

назовем *аннулятором* многообразия L. Ясно, что любой $x^* \in L^\perp$ является опорным к L , но верно и обратное (покажите!). Таким образом, $L^\perp = L^*$. Очевидно, $L^\perp \subset X^*$ — подпространство, т.е. замкнутое линейное многообразие.

Лемма 6. *Пусть $L \subset X$ — подпространство, не совпадающее с X. Тогда $L^\perp$ содержит ненулевой элемент.*

Доказательство. ([16], с. 127) Пусть $x \in X \setminus L$. Тогда $B(x,\varepsilon) \subset X \setminus L$ при некотором $\varepsilon > 0$. Отделим $B(x,\varepsilon)$ от L ненулевым функционалом. Тогда $x^* \in L^\perp$, $x^* \neq 0$ (поясните почему!).

Отметим, что предположение о замкнутости L здесь существенно. (Покажите.)

4. Лемма о замкнутости образа.

Лемма 7. *Пусть* X , Y , Z *— банаховы пространства,* $A : X \to Y$, $B : X \to Z$ *— линейные непрерывные операторы. Пусть* $AX = Y$ *и множество* $B(\operatorname{Ker} A)$ *(образ ядра оператора* A *при отображении оператором* B*) замкнуто в* Z*. Тогда "составной" оператор* $T : X \to Y \times Z$*, при котором* $x \mapsto (Ax, Bx)$ *, имеет замкнутый образ.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ в X такова, что

$$A\,x_n = y_n, \qquad B\,x_n = z_n, \qquad (y_n, z_n) \to (y_0, z_0)\,.$$

Требуется показать, что $\exists\, x \in X$ такой, что $Ax = y_0$, $Bx = z_0$.

Из условия $AX = Y$ следует, что существует $x_0 \in X$ такой, что $Ax_0 = y_0$. Обозначив $\delta x_n = x_n - x_0$, получим

$$A\,\delta x_n = y_n - y_0 \to 0, \qquad B\,\delta x_n = z_n - Bx_0 \to z_0 - Bx_0\,.$$

Положим $z_0 - Bx_0 = z_0'$. Таким образом, мы пришли к ситуации, когда

$$A\,\delta x_n \to 0\,, \qquad B\,\delta x_n \to z_0'$$

(т.е, свели все к случаю $y_0 = 0$), и нам надо показать что найдется $x' \in X$ такой, что $Ax' = 0$, $Bx' = z_0'$ (тогда $A(x' + x_0) = y_0$ и $B(x' + x_0) = z_0$).

Поскольку A действует "на", из теоремы Банаха об открытом отображении следует, что существует последовательность $\bar{x}_n \to 0$ такая, что $A\delta x_n = A\bar{x}_n$, т.е. $A(\delta x_n - \bar{x}_n) = 0$. При этом $B(\delta x_n - \bar{x}_n) \to z_0'$ (стремится к той же точке z_0'). Таким образом, последовательность $x_n' = \delta x_n - \bar{x}_n \in \operatorname{Ker} A$, и на ней $Bx_n' \to z_0'$. Но по условию оператор B на подпространстве $\operatorname{Ker} A$ имеет замкнутый образ, следовательно, существует $x' \in \operatorname{Ker} A$ такой, что $Bx' = z_0'$, что и требовалось. Лемма доказана. □

Ясно, что в этой лемме вместо условия $AX = Y$ можно предположить, что образ $Y_1 := AX$ замкнут в Y. Тогда $A : X \xrightarrow{\text{на}} Y_1$ и, следовательно, образ $T = (A, B)$ снова замкнут.

Обычно в оптимальном управлении используется следующее утверждение, вытекающее из леммы о замкнутости образа.

Следствие 2. *Пусть* $A : X \to Y$ *— линейный оператор "на", а* $B : X \to Z$ *— конечномерный линейный оператор* $(dim\, Z < \infty)$ *. Тогда оператор* $T(x) = (Ax, Bx)$ *имеет замкнутый образ в* $Y \times Z$ *.*

Доказательство вытекает из того обстоятельства, что здесь подпространство $B(\operatorname{Ker} A)$ конечномерно и поэтому замкнуто.

5. Лемма об аннуляторе ядра линейного оператора

Лемма 8. *Пусть* $A : X \to Y$ *— линейный оператор "на". Тогда*

$$(Ker\,A)^* = A^*\,Y^*,$$

где A^* *— сопряженный оператор. Другими словами, любой линейный функционал* $x^* \in X^*$, *исчезающий на подпространстве* $\operatorname{Ker} A$, *имеет вид* $\langle x^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle$, *где* y^* *– некоторый линейный функционал над пространством* Y *(т.е.* $y^* \in Y^*$*) . И обратно, любой функционал такого вида исчезает на* $\operatorname{Ker} A$ *(последнее утверждение не требует сюръективности* A *).*

Доказательство. а) Покажем, что $A^*Y^* \subset (\operatorname{Ker} A)^*$. Действительно, пусть $x^* = A^*y^*$, т. е. $\langle x^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle \qquad \forall\, x \in X$. Тогда

$$\langle x^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle = \langle y^*, 0\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in \operatorname{Ker} A,$$

т. е. $x^* \in (\operatorname{Ker} A)^*$. (Здесь условие $AX = Y$ не требуется.)

б) Покажем, что $(\operatorname{Ker} A)^* \subset A^*Y^*$. Пусть линейный функционал x^* исчезает на $\operatorname{Ker} A$. Рассмотрим оператор

$$T : X \to Y \times \mathbb{R}, \qquad x \to (Ax, \langle x^*, x\rangle)\,,$$

отображающий X в произведение $Y \times \mathbb{R}$. Согласно следствию из леммы о замкнутости образа, образ этого оператора замкнут в $Y \times \mathbb{R}$. Этот образ не совпадает со всем пространством $Y \times \mathbb{R}$, поскольку он не содержит точку $(0, 1)$, ибо по условию из $Ax = 0$ следует, что $\langle x^*, x\rangle = 0$. Тогда по лемме 6 аннулятор подпространства TX содержит ненулевой элемент, т. е. существуют $y^* \in Y^*$ и $c \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\langle y^*, Ax\rangle + c\langle x^*, x\rangle = 0 \qquad \forall\, x \in X,$$

и при этом $\|y^*\| + |c| > 0$. Покажем, что $c \neq 0$. Если $c = 0$, то $\langle y^*, Ax\rangle = 0\ \forall\, x \in X$. Отсюда $\langle y^*, y\rangle = 0\ \forall\, y \in Y$ (ибо $AX = Y$), т.е. $y^* = 0$, противоречие.

Итак, $c \neq 0$. Тогда

$$\langle x^*, x\rangle = -\langle \frac{1}{c}\, y^*, Ax\rangle \qquad \forall\, x \in X\,,$$

т.е. $\langle x^*, x\rangle = \langle y_1^*, Ax\rangle$, где $y_1^* = -\frac{1}{c}\, y^* \in Y^*$, что и требовалось. □

2.3 Условия минимума в гладких задачах с ограничениями

1. Производная по направлению. Производная Гато. ([16], с. 137)
Пусть X, Y – банаховы пространства, $U \subset X$ — открытое множество, $x_0 \in U$ — точка, $F : U \to Y$ — оператор, $h \in X$ — фиксированный элемент (направление).

Определение 2.10. Пусть существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{F(x_0 + \varepsilon h) - F(x_0)}{\varepsilon}\,,$$

понимаемый в смысле сходимости по норме пространства Y . Тогда он называется *производной* оператора F в точке x_0 *по напрвлению* h и обозначается $F'(x_0; h)$.

Определение 2.11. Пусть оператор F в точке x_0 имеет производную $F'(x_0, h)$ по любому направлению $h \in X$, и при этом отображение $h \mapsto F'(x_0, h)$ представляет собой линейный непрерывный оператор. Обозначим его $F'_\Gamma(x_0)$. Он называется *производной Гато* оператора F в точке x_0 .

Если оператор *дифференцируем по Гато* в точке x_0 , то есть имеет в этой точке производную Гато, то он имеет производную по любому направлению h , которая дается формулой

$$F'(x_0, h) = F'_\Gamma(x_0)h.$$

Далее, если оператор имеет в точке x_0 производную Фреше $F'(x_0)$, то он имеет и производную Гато $F'_\Gamma(x_0)$, и они совпадают:

$$F'_\Gamma(x_0) = F'(x_0).$$

Обратное не имеет места; например, уже в $\mathbb{R}^2$ функция дифференцируемая по Гато в точке не обязана быть непрерывной в этой точке (см. [16], с. 141), в то время как из дифференцируемости по Фреше непрерывность, конечно, следует.

Итак, для точки x_0 мы имеем:

непрерывная дифференцируемость $\Rightarrow$ *строгая дифференцируемость* $\Rightarrow$ *дифференцируемость по Фреше* $\Rightarrow$ *дифференцируемость по Гато* $\Rightarrow$ *дифференцируемость по каждому направлению* .

Отметим также, что строгая дифференцируемость оператора g в точке x_0 (а значит, и непрерывная дифференцируемость в точке) влечет липшицевость в окрестности этой точки. Это вытекает, например, из представления

$$g(x) = g'(x_0)x + (g(x) - g'(x_0)x),$$

где $(g(x) - g'(x_0)x)$ имеет произвольную малую константу Липшица, если окрестность точки x_0 достаточно мала. Таким образом, константа Липшица оператора g в окрестности точки x_0 сколь угодно близка к величине $\|g'(x_0)\|$, если окрестность точки достаточно мала.

2. Минимизация функционала на множестве. Пусть X — банахово пространство, $f : X \to \mathbb{R}$ — функционал, $M \subset X$ — множество, $x_0 \in M$ — точка. Ниже достаточно считать, что f определен в некоторой окрестности U точки x_0 .

Определение 2.12. x_0 — точка *локального минимума* f *на* M , если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $x \in M$ таких, что $\|x - x_0\| < \varepsilon$, имеет место неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Нас будут интересовать необходимые условия локального минимума f на M. Чтобы их получить, нужно предположить определенные свойства f в окрестности точки x_0 .

Теорема 25. *Пусть f имеет производную в точке $x_0 \in M$ по любому направлению $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$ и удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки x_0. Пусть x_0 — точка локального минимума f на M. Тогда*

$$f'(x_0, \bar{x}) \geqslant 0 \qquad \forall\, \bar{x} \in T_{x_0}(M).$$

Доказательство. Возьмем произвольный $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$. По определению найдется функция $\tilde{x}(\varepsilon) : (0, \varepsilon_0) \to X$ $(\varepsilon_0 > 0)$ такая, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon) \in M, \quad \|\tilde{x}(\varepsilon)\| = o(\varepsilon).$$

Из наличия локального минимума в x_0 на M вытекает, что

$$f(x_0) \leq f(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon))$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поскольку f удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки x_0 с некоторой константой $L > 0$, то

$$f(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) \leqslant f(x_0 + \varepsilon\bar{x}) + L\|\tilde{x}(\varepsilon)\| = f(x_0 + \varepsilon\bar{x}) + o(\varepsilon).$$

Следовательно, $f(x_0) \leqslant f(x_0 + \varepsilon\bar{x}) + o(\varepsilon)$. Отсюда вытекает, что

$$f'(x_0, \bar{x}) = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{f(x_0 + \varepsilon\bar{x}) - f(x_0)}{\varepsilon} \geqslant 0\,.$$

□

Следствие 3. *Пусть f строго дифференцируема в точке $x_0 \in M$, и пусть $T_{x_0}(M)$ — подпространство. Тогда необходимое условие локального минимума функции f на M в x_0 состоит в том, что*

$$f'(x_0)\bar{x} = 0 \qquad \forall\, \bar{x} \in T_{x_0}(M).$$

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$ — произвольный элемент. Поскольку $T_{x_0}(M)$ — подпространство , то и $(-\bar{x}) \in T_{x_0}(M)$. По теореме 25

$$f'(x_0)\bar{x} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad f'(x_0)(-\bar{x}) \geqslant 0\,.$$

Следовательно, $f'(x_0)\bar{x} = 0$. □

3. Гладкая задача с ограничением типа равенства. Пусть X, Y - банаховы пространства, $U \subset X$ - открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}$ - функционал, $g : U \to Y$ - оператор. Рассмотрим задачу:

$$f(x) \to \min, \qquad g(x) = 0. \tag{2.28}$$

Пусть $x_0 \in U$ — *допустимая точка*, т.е. $g(x_0) = 0$. Предположим, что f и g строго дифференцируемы в точке x_0 (например, достаточно считать, что f и g непрерывно дифференцируемы на U , т.е. $f \in C^1(U)$ $\quad g \in C^1(U, Y)$).

Предположим также, что выполнено условие Люстерника $g'(x_0)X = Y$, и следовательно, по теореме Люстерника касательный конус к множеству $M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ в точке x_0 есть подпространство $\operatorname{Ker} g'(x_0)$.

Пусть теперь x_0 есть точка локального минимума. Согласно теореме 3, необходимое условие локального минимума в этой точке состоит в том, что

$$\langle f'(x_0), \bar{x}\rangle = 0 \quad \forall \bar{x} \in \operatorname{Ker} g'(x_0). \tag{2.29}$$

Согласно лемме об аннуляторе ядра линейного сюрьективного оператора существует $y^* \in Y^*$ такой, что

$$f'(x_0) + y^* \circ g'(x_0) = 0, \tag{2.30}$$

где $y^* \circ g'(x_0) = [g'(x_0)]^* y^*$ (т.е. $\langle y^* \circ g'(x_0), x\rangle = \langle y^*, g'(x_0)x\rangle \ \forall x \in X$).

Итак, необходимое условие (2.29) мы представили в форме (2.30). Некоторое "неудобство" полученного условия состоит в том, что требуется выполнение условия Люстерника. Формально этого требования можно избежать в тех случаях, когда известно, что образ $g'(x_0)X$ замкнут. Последнее, как мы узнаем позже, верно для операторов ограничений равенства в задачах оптимального управления. Это верно и в случае, когда $\dim\ Y < +\infty$.

В предположении о замкнутости образа $g'(x_0)X$, формально более слабом, чем условие $g'(x_0)X = Y,$ правило множителей Лагранжа, т.е. необходимое условие локального минимума, формулируется в следующем виде:

существуют $\alpha \in \mathbb{R}$ и $y^* \in Y^*$, не равные нулю одновременно, и такие, что

$$\alpha f'(x_0) + y^* \circ g'(x_0) = 0. \tag{2.31}$$

Если условие Люстерника выполнено, то (2.31) реализуется с $\alpha = 1$, т.е. в виде (2.30). Если же условие Люстерника не выполнено, то по предположению образ $g'(x_0)X$ есть замкнутое подпространство в Y. Тогда по лемме о нетривиальности аннулятора существует $y^* \neq 0$ такой, что $\langle y^*, g'(x_0)X\rangle = 0$. Условие (2.31) реализовалось на этот раз с $\alpha = 0$. Ничего другого, кроме констатации факта, что $g'(x_0)X \neq Y$, это условие в данном случае в себе не несет. По сути дела, при невыполненом условии Люстерника мы отказываемся от исследования задачи. Однако, подобная форма записи необходимого условия оказывается удобной.

Отметим также, что, не ограничивая общности, в необходимом условии (2.31) мы можем считать $\alpha \geqslant 0$, ибо это условие выдерживает умножение на (-1) .

Если ввести *функцию Лагранжа* $L(x, \alpha, y^*) = \alpha f(x) + \langle y^*, g(x)\rangle$, то условие (2.31) можно записать так: $L'_x(x_0, \alpha, y^*) = 0$, где L'_x — частная производная Фреше (определяемая естественным образом). Это условие в столь общей бесконечномерной задаче с ограничением типа равенства впервые было доказано Л.А.Люстерником в 1934 году.

Итак, доказана следующая теорема:

Теорема 26 (Л.А.Люстерник)**.** *Пусть f и g строго дифференцируемы в точке $x_0 \in U$ такой, что $g(x_0) = 0$, и пусть образ $g'(x_0)X$ замкнут в Y . Пусть x_0 — точка локального минимума в задаче* (2.28)*. Тогда существуют множители Лагранжа $\alpha \in \mathbb{R}$ и $y^* \in Y^*$ такие, что*

$$\alpha \geqslant 0, \tag{2.32}$$

$$\alpha + \|y^*\| > 0, \tag{2.33}$$

$$L'_x(x_0, \alpha, y^*) = 0, \tag{2.34}$$

где $L(x, \alpha, y^*) = \alpha f(x) + \langle y^*, g(x)\rangle$ — функция Лагранжа.

Здесь (2.32) — условие *неотрицательности* множителя α , (2.33) — условие *нетривиальности* набора (α, y^*) , (2.34) — условие *стационарности* по x функции Лагранжа.

Эта теорема реализует так называемый *принцип Лагранжа*, состоящий в том, что если x_0 — точка минимума в задаче с ограничениями, то найдутся множители Лагранжа, при которых функция Лагранжа стационарна в этой точке в задаче без ограничений.

Задание. Сформулируйте теорему 26 в случае, когда $Y = \mathbb{R}^m$ и, следовательно, $g = (g_1, \dots g_m)$ - конечный набор функционалов над X . В этом случае образ $g'(x)X$ автоматически замкнут.

4. Условия минимума в гладкой задаче с ограничениями типа равенства и неравенства. Пусть X — банахово пространство, $U \subset X$ — открытое множество, на котором заданы функционалы $f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, k$, и оператор $g : U \to Y$, действующий в другое банахово пространство Y . Предположим, что все f_i и g непрерывно диференцируемы на U , причем, образ $g'(x)X$ замкнут в Y $\forall x \in U.$ Рассмотрим задачу:

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad g(x) = 0. \tag{2.35}$$

Назовем ее *гладкой задачей с ограничениями типа равенства и типа неравенства* (иногда ее называют также *гладкой задачей математического программирования*).

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$, $y^* \in Y^*$. Введем функцию Лагранжа задачи (2.35):

$$L(x, \alpha, y^*) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_i(x) + \langle y^*, g(x) \rangle.$$

Назовем $\alpha_0, \dots, \alpha_k, y^*$ *множителями Лагранжа*, а через $\lambda = (\alpha_0, \dots, \alpha_k, y^*) = (\alpha, y^*)$ будем обозначать произвольный набор множителей Лагранжа. Таким образом, $L = L(x, \lambda)$.

Теорема 27 (Правило множителей Лагранжа)**.** *Пусть $x_0 \in U$ — точка локального минимума в задаче (2.35). Тогда существуют набор $\lambda = (\alpha_0, \dots, \alpha_k, y^*)$ такой, что выполнены следующие условия*

$$\alpha_0 \geqslant 0, \ \alpha_1 \geqslant 0, \dots, \alpha_k \geqslant 0, \tag{2.36}$$

$$\sum_{0}^{k} \alpha_i + \|y^*\| > 0, \tag{2.37}$$

$$\alpha_i f_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \tag{2.38}$$

$$L'_x(x_0, \lambda) = 0. \tag{2.39}$$

Условия имеют следующие названия: (2.36) — условия *неотрицательности*, (2.37) — условие *нетривиальности*, (2.38) — условия *дополняющей нежесткости*, (2.39) — условие *стационарности по x функции Лагранжа.*

Доказательства теоремы проведем по схеме Дубовицкого—Милютина, которая здесь реализуется в наиболее простом и ясном виде. Первый шаг этой схемы состоит в переходе от ограничений задачи к аппроксимирующим их выпуклым конусам. Аппроксимации берутся для точки $x_0 \in U$, удовлетворяющей всем ограничениям и исследуемой на локальный минимум. Наряду с ограничениями в этой точке аппроксимируется также и так называемое "множество убывания целевого функционала", т.е. множество x таких, что $f_0(x) < f_0(x_0)$.

Введем для точки x_0 *множество активных индексов*

$$I = \{i \in \{1, \dots, k\} \mid f_i(x_0) = 0\} \cup \{0\}. \tag{2.40}$$

Лемма 9 (о непересечении аппроксимаций)**.** *Пусть* $x_0 \in U$ *— точка локального минимума в задаче (2.35). Пусть* $g'(x_0)X = Y$ *, т.е. для* g *в* x_0 *выполнено условие Люстерника. Тогда не существует* $\bar{x} \in X$ *, удовлетворяющего условиям:*

$$\langle f_i'(x_0), \bar{x}\rangle < 0, \quad i \in I, \tag{2.41}$$

$$g'(x_0)\bar{x} = 0. \tag{2.42}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать что $f_0(x_0) = 0$, заменив, если надо, $f_0(x)$ на $f_0(x) - f_0(x_0)$.

Пусть $\bar{x}$ удовлетворяет условиям (2.41) и (2.42). Согласно теореме Люстерника вектор $\bar{x}$ (в силу (2.42)) является касательным к ограничению $g(x) = 0$ в точке x_0. Следовательно, существует $\tilde{x}(\varepsilon) : (0, \varepsilon_0) \to X$ $(\varepsilon_0 > 0)$ такая, что

$$g(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) = 0, \qquad \|\tilde{x}(\varepsilon)\| = o(\varepsilon). \tag{2.43}$$

Положим $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)$. Покажем, что $\{x_\varepsilon\}$ "нарушает"минимум в точке x_0. Действительно, имеем

$$g(x_\varepsilon) = 0 \ \ \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \qquad \|x_\varepsilon - x_0\| \to 0 \ \ (\varepsilon \to +0). \tag{2.44}$$

Пусть i не принадлежит $I,\ i \in \{1, \dots, k\},$ т.е. $f_i(x_0) < 0$. Тогда из непрерывности f_i в точке x_0 в силу (2.44) следует, что $f_i(x_\varepsilon) < 0$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то есть i -е ограничение выполнено.

Пусть теперь $i \in I.$ Тогда $f_i(x_0) = 0$ и $\langle f_i'(x_0), \bar{x}\rangle < 0$ в силу (2.41), и поэтому

$$f_i(x_\varepsilon) = f_i(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) = f_i(x_0) + \langle f_i'(x_0), \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)\rangle + o(\varepsilon) = \varepsilon\langle f_i'(x_0), \bar{x}\rangle + o(\varepsilon).$$

Поскольку $\varepsilon > 0$, $\langle f_i'(x_0), \bar{x}\rangle < 0,$ то $f_i(x_\varepsilon) < 0$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то есть и в этом случае для $i \neq 0$ i -е ограничение выполнено, а для $i = 0$ имеем $f_0(x_\varepsilon) < 0 = f_0(x_0)$ всех достаточно малых $\varepsilon > 0.$ Но тогда $\{x_\varepsilon\}$ удовлетворяет всем ограничениям и понижает функционал задачи, что противоречит локальному минимуму в точке x_0 . Лемма доказана. □

Нам также понадобится следующий простой факт.

Предложение 6 (сопряженный конус к полупространству)**.** *Пусть* $l : X \to \mathbb{R}$ *— ненулевой линейный функционал. Пусть* $K = \{x \in X \mid \langle l, x\rangle > 0\}$ *— открытое полупространство. Пусть* $m \in K^*$*, т.е.* $\langle m, x\rangle \geqslant 0 \ \ \forall x \in K.$ *Тогда существует* $\lambda \geqslant 0$ *такое, что* $m = \lambda l.$ *Таким образом, сопряженный конус к полупространству есть луч, натянутый на функционал, определяющий это полупространство.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\langle m, x\rangle = 0 \ \ \forall\, x \in \operatorname{Ker} l.$ Действительно, пусть $x_0 \in \operatorname{Ker}\ l$, т.е. $\langle l, x_0\rangle = 0$ и пусть x_1 таков, что $\langle l, x_1\rangle > 0$. Тогда $x_1 + \beta x_0 \in K \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$ Следовательно, $\langle m, x_1\rangle + \beta\langle m, x_0\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}.$ Это возможно лишь при $\langle m, x_0\rangle = 0$. Итак, $\langle l, x\rangle = 0 \ \Rightarrow \ \langle m, x\rangle = 0.$ Отсюда, как мы знаем, следует существование $\lambda \in \mathbb{R}$ такого, что $m = \lambda\, l.$ Поскольку из $\langle l, x\rangle > 0$ вытекает, что $\langle m, x\rangle \geqslant 0$, то, очевидно, $\lambda \geqslant 0.$ □

Теперь мы готовы дать

Доказательство теоремы 27. Пусть x_0 — точка локального минимума в задаче (2.35). Если среди функционалов $f_i'(x_0)$, $i \in I$ есть нулевой, то полагая соответствующий ему множитель α_i равным 1, а остальные множители (включая y^*) равными нулю, получаем набор λ , удовлетворяющий всем условиям (2.36)-(2.39) теоремы. Поэтому далее считаем, что $f_i'(x_0) \neq 0 \quad \forall i \in I$, и тогда все полупространства (2.41) непусты.

Рассмотрим два случая.

а) *Невырожденный случай*: $g'(x_0)X = Y$. В этом случае согласно лемме 9 система условий (2.41) и (2.42) несовместна. Положим

$$\Omega_i = \{\bar{x} \mid \langle f_i'(x_0), \bar{x} \rangle < 0\}, \ \ i \in I\,, \qquad \Omega = \{\bar{x} \mid g'(x_0) = 0\}.$$

Пересечение полупространств Ω_i, $i \in I$ и подпространства Ω пусто.
Согласно теореме Дубовицкого-Милютина о непересечении конусов существуют $x_i^* \in \Omega_i^*$, $i \in I$, $\quad x^* \in \Omega^*$, не все равные нулю и такие, что $\sum_I x_i^* + x^* = 0$.
Согласно предложению 6 $x_i^* = -\alpha_i f_i'(x_0)$, $\quad \alpha_i \geqslant 0$, $\quad i \in I$, а по лемме об ануляторе $x^* = [g'(x_0)]^*(-y^*) = -y^* \circ g'(x_0)$, где $y^* \in Y^*$ (знак минус удобен). Следовательно,

$$-\sum_I \alpha_i f_i'(x_0) - y^* \circ g'(x_0) = 0.$$

Остается положить $\alpha_i = 0$ при $i \notin I$. Тогда все условия (2.36)-(2.39) теоремы оказываются выполненными. (Набор α_i, y^* нетривиален, ибо в противном случае набор x_i^*, x^* тривиален.)

б) *Вырожденный случай*: $g'(x_0)X \neq Y$. В этом случае образ $L = g'(x_0)X$ есть замкнутое пространство в Y , не совпадающее с Y. Тогда по лемме о нетривиальности аннулятора существует функционал $y^* \neq 0$, аннулирующийся на L. Следовательно, $\langle y^* g'(x_0), x \rangle = 0 \ \ \forall x \in X$. Положим $\alpha_i = 0 \ \forall i = 0, \ldots, k$. Тогда набор $\lambda = (0, \ldots, 0, y^*)$ удовлетворяет всем условиям (2.36)-(2.39) теоремы. (В этом случае правило множителей Лагранжа лишь констатирует тот факт, что $g'(x_0)X \neq Y$, и мы отказываемся от исследования задачи на минимум.) □

Замечание. *Из доказательства видно, что условия теоремы могут быть ослаблены. А именно, достаточно считать, что в точке x_0 все функционалы f_i дифференцируемы по Фреше, а оператор g строго дифференцируем, и, кроме того, образ $g'(x_0)X$ замкнут в Y .*

2.4 Негладкая задача с ограничениями.

1. Теорема о непересечении аппроксимаций. Пусть X — банахово пространство, $U \subset X$ — открытое множество, $f : U \to \mathbb{R}$ — функционал, $x_0 \in U$ — фиксированная точка, $\bar{x} \in X$ — вектор (направление). Определим верхнюю производную $\bar{f}'(x_0, \bar{x})$ функционала f в точке x_0 по направлению $\bar{x}$ как верхний предел:

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to +0}} \frac{f(x_0 + \varepsilon \bar{x}) - f(x_0)}{\varepsilon} = \bar{f}'(x_0, \bar{x}).$$

Пусть теперь на U заданы функционалы $f_i : U \to \mathbb{R}$, $\quad i = 0, 1, \ldots, k$, удовлетворяющие условию Липшица с общей константой L, и пусть $\bar{f}_i'(x_0, \bar{x})$ — их верхние производные в точке $x_0 \in U$ по направлению $\bar{x}$. Пусть имеется также множество $M \subset X$, причем $x_0 \in M$. Обозначим через $T_{x_0}(M)$ касательный конус в x_0 к M .

Рассмотрим следующую **задачу** $\mathcal{Z}$:

$$f_0(x) \to \min, \qquad f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, k, \qquad x \in M\,. \tag{2.45}$$

Пусть $x_0 \in U$ — допустимая точка в этой задаче. Без нарушения общности будем считать, что $f_0(x_0) = 0$ (для этого надо перейти к функционалу $f_0(x) - f_0(x_0)$), и введем так называемое *множество активных индексов задачи* в точке x_0 : $I = \{i \in \{0, 1, \ldots, k\} \mid f_i(x_0) = 0\}$. По определению $i = 0 \in I$, т.е. индекс, соответствующий функционалу задачи, всегда активный.

Теорема 28. *Если x_0 — точка локального минимума в задаче $\mathcal{Z}$, то не существует $\bar{x} \in X$ такого, что*

$$\bar{f}_i'(x_0, \bar{x}) < 0, \qquad i \in I, \tag{2.46}$$

$$\bar{x} \in T_{x_0}(M)\,. \tag{2.47}$$

Это и есть теорема о непересечении аппроксимаций в задаче $\mathcal{Z}$. Верхняя производная по направлению представляет собой положительно однородный функционал по $\bar{x}$. Отсюда следует, что каждое из множеств, определяемых неравенствами (2.46), есть конус. Дубовицкий и Милютин назвали множество $\{\bar{x} \mid \bar{f}_0'(x_0, \bar{x}) < 0\}$ *конусом запрещенных вариаций* в точке x_0 для функционала f_0 , а множество $\{\bar{x} \mid \bar{f}_i'(x_0, \bar{x}) < 0\}$ при $i \in I$, $i \ne 0$ — *конусом допустимых вариаций* в точке x_0 для ограничения типа неравенства $f_i(x) \le 0$. (Для $i \notin I$ каждый такой конус по определению есть все пространство X). Наконец, $T_{x_0}(M)$ есть *конус касательных вариаций в точке x_0 для ограничения* $x \in M$. Все это — аппроксимации функционала и ограничений задачи в точке x_0.

Обратим внимание, что с функционалом задачи мы поступаем так же, как поступили бы с ограничением неравенства $f_0(x) - f_0(x_0) \le 0$, которое автоматически активно.

Итак, необходимое условие первого порядка локального минимума в точке x_0 есть непересечение аппроксимаций в этой точке. Это условие называют также *условием стационарности.* Как мы уже видим, оно носит очень общий характер. Далее мы увидим, что весьма широкие классы задач оптимального управления укладываются в данную абстрактную схему.

Доказательство теоремы 28. Допустим противное — что существует $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям (2.46) и (2.47). Покажем, что тогда x_0 не является точкой локального минимума в задаче $\mathcal{Z}$. Из (2.46) вытекает, что $\forall\, i \in I \quad \bar{f}_i'(x_0, \bar{x}) \le -a$ при некотором $a > 0$.

Поскольку $\bar{x} \in T_{x_0}(M)$, то существует функция $\tilde{x}(\varepsilon) : (0, \varepsilon_0) \to X$ такая, что

$$x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon) \in M; \qquad \|\tilde{x}(\varepsilon)\| = o(\varepsilon).$$

Положим $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)$. Тогда $x_\varepsilon \to x_0$ (при $\varepsilon \to +0$) . Пусть $i \notin I$ (неактивный индекс). Тогда $f_i(x_0) < 0$ и, следовательно, $f_i(x_\varepsilon) < 0$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поэтому считаем, что при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$f_i(x_\varepsilon) < 0 \quad \forall i \notin I, \quad x_\varepsilon \in U, \quad x_\varepsilon \in M. \tag{2.48}$$

Рассмотрим теперь $i \in I$ — активный индекс. Поскольку f_i удовлетворяет условию Липшица на U с константой L , то

$$|f_i(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) - f_i(x_0 + \varepsilon\bar{x})| \le L\|\tilde{x}(\varepsilon)\| = o(\varepsilon). \tag{2.49}$$

Далее, из определения верхней производной по направлению вытекает, что

$$f_i(x_0 + \varepsilon\bar{x}) - f_i(x_0) \le \ \varepsilon\bar{f}_i'(x_0, \bar{x}) + o(\varepsilon) \le -a\varepsilon + o(\varepsilon). \tag{2.50}$$

Из условий (2.49), (2.50) и (2.46) получаем:

$$f_i(x_0 + \varepsilon\bar{x} + \tilde{x}(\varepsilon)) - f_i(x_0) \ \le \ -a\varepsilon + o(\varepsilon) < 0$$

для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Считаем, что это верно для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Итак, при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$f_i(x_\varepsilon) < f_i(x_0), \quad i \in I. \tag{2.51}$$

Но условия (2.48) и (2.51) совместно с условием $x_\varepsilon \longrightarrow x_0$ означают отсутствие локального минимума в точке x_0 в задаче $\mathcal{Z}$. Теорема доказана. $\square$

При внимательном анализе проведенного доказательства можно заметить, что предположение о существовании $\bar{x}$, удовлетворяющего системе (2.46), (2.47), приводит не только к нарушению локального минимума в x_0 , но и к нарушению следующего свойства, которое называется $s-$ необходимостью.

Определение 2.13. Будем говорить, что в в задаче $\mathcal{Z}$ в точке x_0 выполнена $s-$ необходимость, если не существует последовательности $x_n \to x_0$ такой, что для всех $n \quad x_n \in M$, и $f_i(x_n) < 0 \ \ \forall\, i = 0, 1, \ldots, k$.

(Очевидно, можно требовать выполнения этих условий лишь для всех достаточно далеких членов последовательности, а выполнение неравенства $f_i(x_n) < 0$ достаточно требовать лишь для всех активных индексов, так как для неактивных оно будет выполнено автоматически.) В терминах окрестностей отсутствие $s-$ необходимости в точке x_0 означает, что в любой окрестности точки x_0 найдется точка $x \in M$, в которой все $f_i(x) < 0, \ \ i = 0, 1, \ldots, k$.

Легко видеть, что если в точке x_0 имеется локальный минимум, то в ней выполнена и $s-$ необходимость. Таким образом, *$s-$ необходимость есть необходимое условие локального минимума.* В это условие функционал задачи f_0 и все ограничения неравенства f_i входят абсолютно симметрично, в отличие от понятия локального минимума. Более того, можно показать, что $s-$ необходимость есть *сильнейшее* необходимое условие локального минимума, в которое функционал задачи и ограничения неравенства входят симметрично. Сильнейшее в том смысле, что любое другое необходимое условие локального минимума, симметричное относительно всех $f_i, \ \ i = 0, 1, \ldots, k,$ вытекает из $s-$ необходимости, а не только из самого локального минимума в точке x_0. Понятие $s-$ необходимости, введенное А.А. Милютиным, вместе с соответствующим понятием $s-$ достаточности, которое мы здесь не рассматриваем (оно эквивалентно наличию *строгого* локального минимума в точке x_0), оказалось очень удобным для получения и анализа условий экстремума в различных классах задач с ограничениями.

Итак, вместе с теоремой 28 мы фактически доказали несколько более сильное утверждение.

Теорема 29. *Если в точке x_0 выполнена $s-$ необходимость в задаче $\mathcal{Z}$, то эта точка стационарна, т.е. не существует $\bar{x} \in X$, удовлетворяющего условиям (2.46), (2.47).*

Задача $\mathcal{Z}$ имеет довольно общий абстрактный характер. Для дальнейшего продвижения мы несколько сузим ее постановку. Будем предполагать, что

(а) *f_i удовлетворяет условию Липшица на U $(i = 0, \dots, k)$;*

(б) *f_i обладает в точке x_0 производной по каждому направлению $\bar{x}$ $(i \in I)$;*

(в) *множество M задается равенством $g(x) = 0$, где $g : U \to Y$ – оператор, строго дифференцируемый по Фреше в точке x_0 ;*

(г) *оператор g в точке x_0 удовлетворяет условию Люстерника: $g'(x_0)X = Y$.*

Из двух последних условий по теореме Люстерника

$$T_{x_0}(M) \; = \; \{\bar{x} \mid g'(x_0)\bar{x} = 0\}.$$

Итак, мы рассматриваем **задачу** $\mathcal{Z}_1$:

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad g(x) = 0. \tag{2.52}$$

При сделанных предположениях имеет место следующая теорема, вытекающая из предыдущей.

Теорема 30. *Пусть в задаче $\mathcal{Z}_1$ в точке x_0 имеется локальный минимум (или хотя бы выполнена $s-$ необходимость). Тогда выполнено следующее условие стационарности: не существует такого $\bar{x} \neq 0$, что*

$$f_i'(x_0, \bar{x}) < 0, \qquad i \in I, \tag{2.53}$$

$$g'(x_0)\,\bar{x} = 0. \tag{2.54}$$

Далее нас будет интересовать анализ условия стационарности. Мы получим двойственный критерий этого условия, т.е. критерий, сформулированный в терминах сопряженного пространства. Для этого нам понадобится предположение о том, что функционалы $f_i'(x_0, \bar{x})$ являются не только однородными, но и выпуклыми по $\bar{x}$. В этом случае конусы, определяемые неравенствами (2.53), оказываются выпуклыми и открытыми, и мы сможем сформулировать условие несовместности системы (2.53) и (2.54) с помощью теоремы Дубовицкого—Милютина о непересечении конечного числа выпуклых конусов. Таков наш план.

Как уже было сказано, путь, которым мы сейчас следуем, соответствует абстрактной схеме Дубовицкого — Милютина. Опыт последних 40 лет показал, что это — самый универсальный и удобный метод получения необходимых условий первого порядка для локального минимума в разнообразных задачах на экстремум с ограничениями.

2. Сублинейный функционал. Пусть X — банахово пространство. Функционал $\varphi : X \to \mathbb{R}$ называется *сублинейным*, если он является положительно однородным и выпуклым:

(a) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \quad \forall x \in X,\ \lambda > 0,$

(b) $\varphi(x+y) \le \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in X$.

Первое условие есть положительная однородность. Условие (b) называется субаддитивностью; для положительно однородного функционала оно эквивалентно выпуклости (докажите).

Сублинейный функционал φ называется *ограниченным* (по аналогии с ограниченным линейным функционалом), если существует константа $C > 0$ такая, что

(c) $\qquad |\varphi(x)| \le C\|x\| \quad \forall\, x \in X.$

В силу однородности это условие эквивалентно ограниченности φ на единичном шаре в X . Мы покажем, что для этого достаточно ограниченности φ *сверху* на шаре. В дальнейшем мы рассматриваем только ограниченные сублинейные функционалы.

Лемма 10. *Если* $\varphi(x) \le C\|x\| \quad \forall\, x \in X,$ *то и* $|\varphi(x)| \le C\|x\| \quad \forall\, x \in X,$ *и* φ *липшицев во всем пространстве* X *с константой* C.

Доказательство. Так как $\varphi(-x) \le C||x||$, а $0 = x + (-x)$, то

$$0 = \varphi(0) = \varphi(x + (-x)) \le \varphi(x) + \varphi(-x),$$

поэтому $-\varphi(x) \le \varphi(-x) \le C||x||$. Отсюда с учетом неравенства $\varphi(x) \le C||x||$ получаем $|\varphi(x)| \le C||x||\ \forall\, x \in X$. Далее, для любых $x, y \in X$ имеем:

$$\varphi(y) = \varphi(x + (y-x)) \le \varphi(x) + \varphi(y-x) \le \varphi(x) + C\|y-x\|\,,$$

следовательно, $\varphi(y) - \varphi(x) \le C\|y-x\|$. Но точно так же $\varphi(x) - \varphi(y) \le C\|x-y\|$, и поэтому $|\varphi(y) - \varphi(x)| \le C\|y-x\|$. $\square$

Линейный функционал $l \in X^*$ называется *опорным* к сублинейному функционалу φ, если $l(x) \le \varphi(x)\, \forall x \in X$. Множество всех опорных к φ обозначается $\partial\varphi$ и называется *субдифференциалом* функционала φ (в нуле), а его элементы $l \in \partial\varphi$ (т.е. опорные) – *субградиентами* функционала φ (в нуле).

Отметим, что если $C > 0$ таково, что $\varphi(x) \le C\|x\| \ \ \forall\, x \in X,$ то все множество опорных $\partial\varphi$ содержится в шаре $B_C(0)$.

Действительно, если $l \in \partial\varphi$, то $\langle l, x\rangle \le \varphi(x) \le C\|x\| \quad \forall\, x$. Отсюда $\langle l, x\rangle \le C\|x\| \ \forall\, x$, и поэтому $|\langle l, x\rangle| \le C\|x\| \ \forall\, x$, а тогда $\|l\| \le C$.

Итак, у ограниченного сублинейного функционала множество $\partial\varphi$ ограничено. Элементарно проверяется, что $\partial\varphi$ выпукло и замкнуто. Более того, из теоремы отделимости вытекает, что оно слабо-* замкнуто. (Покажите!). Как следует из теоремы Алаоглу, ограниченное слабо-* замкнутое множество в сопряженном пространстве есть компакт в слабой-* топологии этого пространства. Таким образом, $\partial\varphi$ выпукло и слабо-* компактно в X^* .

Покажем теперь, что $\partial\varphi$ непусто. Мы установим даже более сильный факт.

Теорема 31. *Пусть $\varphi : X \to \mathbb{R}$ - ограниченный сублинейный функционал. Тогда множество его опорных $\partial\varphi$ непусто и имеет место формула*

$$\varphi(x) = \max_{l \in \partial\varphi} \langle l, x\rangle \qquad \forall\, x \in X\,, \tag{2.55}$$

причем для любого $x \in X$ максимум в правой части этой формулы достигается (что, впрочем, вытекает и из слабой- компактности $\partial\varphi$).*

Доказательство. Если $l \in \partial\varphi$, то $\langle l, x\rangle \le \varphi(x)\ \ \forall\, x$, откуда получаем неравенство

$$\sup_{l \in \partial\varphi} \langle l, x\rangle \le \varphi(x)\ \ \forall\, x.$$

Чтобы установить равенство, достаточно показать, что для любого $x_0 \in X$ найдется $l \in \partial\varphi$ такой, что $\langle l, x_0\rangle = \varphi(x_0)$. Тем самым мы установим непустоту $\partial\varphi$ и достижение максимума в правой части равенства (2.55). В результате теорема будет доказана.

В произведении $X \times \mathbb{R}$ рассмотрим множество $K = \{(x,t) \mid \varphi(x) < t\}.$ Элементарно проверяется, что это непустой выпуклый конус. В силу непрерывности φ он открыт. Пусть $x_0 \in X,\ t_0 = \varphi(x_0).$ Точка (x_0, t_0) не принадлежит $K.$ Следовательно, по теореме Хана–Банаха найдется ненулевой функционал $(l, \alpha) \in X^* \times \mathbb{R}$, отделяющий ее от K :

$$\langle l, x\rangle + \alpha t \le \langle l, x_0\rangle + \alpha t_0 \qquad (x,t) \in K\,. \tag{2.56}$$

Проанализируем это условие. Так как при фиксированном x оно справедливо $\forall\, t > \varphi(x)$, то очевидно $\alpha \le 0$. Если $\alpha = 0$, то $\langle l, x - x_0\rangle \le 0 \quad \forall\, x$, откуда $l = 0$, что противоречит нетривиальности пары (l, α) . Поэтому $\alpha < 0$, и можно положить $\alpha = -1$. Тогда (2.56) приобретает вид:

$$\langle l, x\rangle - \langle l, x_0\rangle \le t - t_0 \qquad \forall\, t > \varphi(x),$$

а тогда это верно и для $t = \varphi(x),$ т.е. для всех $x \in X$ выполнено

$$\langle l, x\rangle - \langle l, x_0\rangle \le \varphi(x) - \varphi(x_0). \tag{2.57}$$

Пусть $\bar{x} \in X$ - произвольный элемент. Положим $x = N\bar{x},$ где N — большое число. Тогда

$$\langle l, \bar{x}\rangle - \frac{1}{N}\langle l, x_0\rangle \ \le\ \varphi(\bar{x}) - \frac{1}{N}\varphi(x_0),$$

откуда при $N \to \infty$ следует, что $\langle l, \bar{x}\rangle \le \varphi(\bar{x})$. В силу произвольности $\bar{x}$ это означает, что $l \in \partial\varphi$, и следовательно, $\partial\varphi$ непусто.

Далее, полагая в (2.57) $x = 0$, получаем $\langle l, x_0\rangle \ge \varphi(x_0).$ Поскольку $l \in \partial\varphi$, то верно и обратное неравенство. Следовательно, имеет место равенство $\langle l, x_0\rangle = \varphi(x_0).$ Теорема доказана. □

Задача. Покажите, что если $\varphi = l$ – линейный функционал в X , то $\partial\varphi$ состоит из единственного элемента l .

Для доказательства следующей теоремы напомним формулировку теоремы Хана–Банаха в алгебраической форме (в которой она и доказывается в стандартных курсах функционального анализа).

Теорема 32. *(о продолжении опорных к сужению сублинейного функционала). Пусть X – произвольное векторное пространство, $\Gamma \subset X$ – подпространство, $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ – произвольный сублинейный функционал, $\varphi_\Gamma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ – его сужение на Γ. Тогда для любого $l \in \partial\varphi_\Gamma$ существует $\tilde{l} \in \partial\varphi$ такой, что $\tilde{l}(x) = l(x)\ \forall\, x \in \Gamma$, т.е. сужение $\tilde{l}$ на Γ есть l (и, таким образом, $\tilde{l}$ есть продолжение функционала l с подпространства Γ на все пространство X.)*

С помощью этой теоремы докажем следующую важную теорему.

Теорема 33. *(об опорном к сублинейному функционалу от линейного оператора). Пусть $A : X \longrightarrow Y$ – линейный оператор, $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ – сублинейный функционал. Определим сублинейный функционал $f(x) = \varphi(Ax)$. Тогда*

$$\partial f \ = \ A^* \, \partial\varphi, \tag{2.58}$$

т.е. любой $p \in \partial f$ имеет вид $\langle p, x\rangle = \langle \lambda, Ax\rangle$, где $\lambda \in \partial\varphi$.

Доказательство. Пусть $p \in \partial f$, т.е. $(p, x) \le \varphi(Ax)\ \forall\, x \in X$. В произведении $X \times Y$ зададим сублинейный функционал $\widehat{\varphi}(x, y) = \varphi(y)$, и рассмотрим подпространство $\Gamma = \{(x, y) \mid\ y = Ax\}$ (график оператора A), на котором зададим линейный функционал $l(x, y) = p(x)$. Тогда на Γ выполнено неравенство $l(x, y) \le \widehat{\varphi}(x, y)$ (ибо $(p, x) \le \varphi(Ax)\ \forall\, x \in X$.) По теореме 32 функционал l можно продолжить на все пространство $X \times Y$ с сохранением свойства $l \le \varphi$. Но любой линейный функционал l на $X \times Y$ имеет вид $l(x, y) = (\mu, x) + (\lambda, y)$, где $\mu \in X^*$, $\lambda \in Y^*$. Таким образом,

$$(\mu, x) + (\lambda, y) \le \widehat{\varphi}(x, y) = \varphi(y), \qquad \forall\, x, y, \tag{2.59}$$

$$(\mu, x) + (\lambda, y) = l(x, y) = (p, x) \qquad \forall\, (x, y) \in \Gamma. \tag{2.60}$$

Из первого соотношения следует, что $\mu = 0$ и $(\lambda, y) \le \varphi(y)\ \forall\, y$, т.е. $\lambda \in \partial\varphi$, а из второго, поскольку $y = Ax$ на Γ, что $(p, x) = (\lambda, Ax)$, ч.т.д.

Обратно, пусть $\lambda \in \partial\varphi$, $p = A^*\lambda$. Тогда $(p, x) = (\lambda, Ax) \le \varphi(Ax) = f(x)\ \forall\, x$, откуда следует, что $p \in \partial f$. Таким образом, имеет место равенство (2.58). □

3. Теоремы о сопряженных конусах. Пусть X – банахово пространство.

Теорема 34. *Пусть $\varphi : X \to \mathbb{R}$ – сублинейный ограниченный функционал, и пусть конус $K = \{x \in X \mid \varphi(x) < 0\}$ непуст. Тогда для любого линейного функционала $\mu \in K^*$ существуют $\alpha \ge 0$ и $l \in \partial\varphi$ такие,что $\mu = -\alpha l$.*

Доказательство. Если $\mu = 0$, то полагаем $\alpha = 0$, а $l \in \partial\varphi$ – любой. Поэтому далее считаем $\mu \ne 0$. По условию имеем:

$$\varphi(x) < 0 \Longrightarrow \mu(x) \ge 0\,. \tag{2.61}$$

В произведении $X \times R$ рассмотрим конусы:

$$\Omega_0 = \{(x, t) \mid \varphi(x) < t\}, \qquad \Omega = \{(x, t) \mid \mu(x) < 0,\ t = 0\}.$$

Ясно, что они непусты и выпуклы, причем конус Ω_0 открыт. Кроме того, $\Omega_0 \bigcap \Omega = \varnothing$. Действительно, если $(x,0)$ – их общий элемент, то $\varphi(x) < 0$ и $\mu(x) < 0$, что противоречит условию (2.61).

По теореме отделимости существует функционал, отделяющий Ω_0 от Ω, причем отрицательный на Ω_0 и неотрицательный на Ω, то есть существуют $l \in X^*$ и число β такие, что

$$\varphi(x) < t \Longrightarrow l(x) + \beta t < 0\,, \tag{2.62}$$

$$\mu(x) < 0 \Longrightarrow l(x) \geq 0\,. \tag{2.63}$$

Проанализируем условие (2.62). Положим $x = 0$, $t = 1$. Тогда из (2.62) вытекает, что $\beta < 0$, поэтому считаем, что $\beta = -1$. Тогда (2.62) приобретает вид:

$$\varphi(x) < t \implies l(x) < t \qquad \forall\, x, t,$$

откуда $l(x) \leq \varphi(x)\, \forall\, x$, т.е. $l \in \partial\varphi$.

Из условия (2.63) следует, что $l = -\alpha\mu$, где $\alpha \geq 0$. Если $\alpha = 0$, то $l = 0$, тогда $0 \in \partial\varphi$, следовательно, $\varphi(x) \geq 0 \;\; \forall\, x$, что противоречит непустоте K. Поэтому $\alpha > 0$, и тогда $\mu = -\frac{1}{\alpha}\, l$, и теорема доказана. □

Верно и обратное утверждение: если $l \in \partial\varphi$ и $\alpha \geq 0$, то $\mu = -\alpha l \in K^*$. Действительно, если $x \in K$, то $l(x) \leq \varphi(x) < 0 \Longrightarrow -\alpha l(x) \geq 0 \Longrightarrow -\alpha l \in K^*$.

Таким образом, получаем

Следствие 4. *В условиях теоремы* $K^* = -\operatorname{con}(\partial\varphi)$, *где* $\operatorname{con} M = \bigcup\limits_{a \geq 0} \alpha M$ *— конус, натянутый на множество* M.

4. Теорема о несовместности системы строгих сублинейных неравенств и линейного равенства. Пусть X, Y – банаховы. Важную роль при анализе условия стационарности в негладких задачах с ограничениями играет следующая

Теорема 35. *Пусть* $\varphi_i(x) : X \mapsto \mathbb{R}$ *– сублинейные функционалы,* $i = 1, ..., k$, $G : X \mapsto Y$ *– линейный сюрьективный оператор. Система условий*

$$\varphi_i(x) < 0, \quad i = 1, ..., k; \qquad Gx = 0, \tag{2.64}$$

несовместна тогда и только тогда, когда существуют числа $\alpha_1, ..., \alpha_k$ *и функционалы* $x_1^*, ..., x_k^*$ *из* X^*, *а также функционал* $y^* \in Y^*$ *такие, что*

$$\alpha_1 \geq 0, \; \ldots \; \alpha_k \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i > 0, \tag{2.65}$$

$$x_i^* \in \partial\varphi_i, \quad i = 1, ..., k, \tag{2.66}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i^* + y^* G = 0. \tag{2.67}$$

Доказательство. а) Необходимость. Пусть система (2.64) несовместна. Рассмотрим сначала случай, когда среди конусов $\Omega_i = \{x \mid \varphi_i(x) < 0\}$, $i = 1, ..., k$ есть пустой, например, конус Ω_1 пуст. Тогда $\varphi_1(x) \geq 0 \; \forall x$. Следовательно, $0 \in \partial\varphi_1$. Положим $x_1^* = 0$, а остальные x_i^* выберем произвольно из $\partial\varphi_i^*$ соответственно. Положим $\alpha_1 = 1$, а остальные $\alpha_i = 0$. Положим $y^* = 0$. Тогда набор $(\alpha_1, ..., \alpha_k, \, x_1^*, ..., x_k^*, \, y^*)$ удовлетворяет всем условиям (2.65)-(2.67).

Поэтому далее считаем, что все конусы Ω_i, $i = 1, ..., k$ непусты. Тогда, как мы знаем,

$$\Omega_i^* = \; - \operatorname{con} \partial\varphi_i, \qquad i = 1, ..., k. \tag{2.68}$$

Введем подпространство

$$L = \; \{x \mid Gx = 0\}.$$

В силу условия $GX = Y$ имеем:

$$L^* \; = \; G^* Y^* \tag{2.69}$$

(по теореме об аннуляторе ядра линейного сюръективного оператора).

Поскольку по условию $(\bigcap\limits_{i=1}^{k} \Omega_i) \bigcap L \, = \varnothing$, то по теореме Дубовицкого-Милютина о непересечении конусов существуют $p_i \in \Omega_i^*, \quad i = 1, ..., k, \quad q \in L^*$, не все равные нулю, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i + q = 0$.

Согласно (2.68), $p_i = -\alpha_i x_i^*$, где $\alpha_i \geq 0, \quad x_i^* \in \partial\varphi_i, \quad i = 1, ..., k,$ а согласно (2.69), $q = -y^* G, \quad y^* \in Y^*$ (знак минус удобен).

Если $\alpha_i = 0 \; \forall \, i$, то все p_i равны нулю, а тогда и $q = 0$, что противоречит условию нетривиальности набора $p_1, ..., p_k, \, q$. Следовательно $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i > 0$. Необходимость доказана.

б) Достаточность. Пусть существуют $\alpha_1, ..., \alpha_k, \quad x_1^*, ..., x_k^*, \quad y^*,$ удовлетворяющие условиям (2.65)-(2.67), но тем не менее система (2.64) совместна, и пусть $\hat{x}$ – ее решение. Тогда

$$\langle x_i^*, \hat{x} \rangle \leq \varphi_i(\hat{x}) < 0 \quad \forall \, i, \qquad G\hat{x} = 0.$$

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i > 0$, то отсюда получаем $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \langle x_i^*, \hat{x} \rangle + \langle y^*, G\hat{x} \rangle < 0,$
что противоречит (2.67). Теорема доказана. □

5. Негладкая задача с ограничениями равенства и неравенства. Условие стационарности. Вернемся к задаче $\mathcal{Z}_1$:

$$f_0(x) \longrightarrow \min; \qquad f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, ..., k; \qquad g(x) = 0.$$

Мы изменим сделанные ранее предположения в этой задаче, предположив следующее. Пусть $U \subset X$ — открытое множество $x_0 \in U$ — допустимая ограничениями точка. Предполагается, что

(a) Все функционалы $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 0, ..., k$ удовлетворяют условию Липшица на открытом множестве $U \subset X$.

(b) Каждый функционал $f_i, \quad i = 0, ..., k$ обладает в точке x_0 производной $f_i'(x_0, \bar{x})$ по любому направлению $\bar{x}$, причем отображение $\bar{x} \in X \longmapsto f_i'(x_0, \bar{x})$ есть сублинейный функционал на всем пространстве X .

(c) Оператор $g : U \longrightarrow Y$ *строго дифференцируем по Фреше в точке* x_0 .

(d) Образ $g'(x_0)X$ *замкнут в* Y .

В пункте (b) произошло усиление сделанных ранее предположений, а в пункте (d) — ослабление: ранее мы предполагали, что $g'(x_0)X = Y.$

Задачу $\mathcal{Z}_1$ с новыми предположениями будем называть *негладкой абстрактной задачей*, или **задачей** $\mathcal{Z}_C$. Она является абстрактным аналогом канонической задачи оптимального управления (задачи C), которую мы рассмотрим в следующей главе.

Через $\partial f_i'(x_0,\cdot)$ мы обозначаем множества опорных (субдифференциалы) к соответствующим сублинейным функционалам $f_i'(x_0,\cdot)$.

Теорема 36. *Пусть* $x_0 \in U$ *– точка локального минимума в задаче* $\mathcal{Z}_C$. *Тогда существует набор множителей Лагранжа* $(\alpha_0,...,\alpha_k,\ x_0^*,...,x_k^*,\ y^*)$ *(где* α_i *– числа,* $x_i^* \in X^*$ *и* $y^* \in Y^*$ *– функционалы) такой, что выполнены условия:*

(i) неотрицательности: $\alpha_i \geq 0,\ i = 0,...,k$ *;*

(ii) нетривиальности: $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i + \|y^*\| > 0$ *;*

(iii) дополняющей нежесткости: $\alpha_i f_i(x_0) = 0,\ i = 1,...,k$ *;*

(iv) принадлежности: $x_i^* \in \partial f_i'(x_0,\cdot),\ i = 0,1,...,k$ *;*

(v) $\sum\limits_{i=0}^{k} \alpha_i x_i^* + y^* \circ g'(x_0) = 0$ *(уравнение Эйлера).*

Доказательство. а) Пусть $g'(x_0)X \neq Y$ (вырожденный случай). Поскольку образ $g'(x_0)X$ замкнут в Y , то по лемме о нетривиальности аннулятора найдется $y^* \in Y^*,\ y^* \neq 0$ такой, что $y^* g'(x_0) = 0$. Положим в этом случае $\alpha_i = 0\ \forall i$, а $x_i^* \in \partial f_i'(x_0,\cdot)$ выберем произвольно.

б) Пусть $g'(x_0)X = Y$. По теореме 30 система аппроксимаций

$$f_i'(x_0,\bar{x}) < 0, \quad i \in I; \quad g'(x_0)\bar{x} = 0$$

в задаче (2.52) несовместна по $\bar{x}$. Далее применяем теорему 35 о несовместности системы сублинейных неравенств и линейного равенства. Для $i \notin I$ полагаем $\alpha_i = 0$, а $x_i^* \in \partial f_i'(x_0,\cdot)$ выбираем произвольно. □

Теоремы 30 и 35 представляют собой основные два шага в исследовании абстрактной задачи по схеме Дубовицкого — Милютина: первый шаг состоит в переходе от локального минимума в задаче к непересечению конусных аппроксимаций всех ограничений в данной точке (теорема 30), а второй шаг — в записи факта непересечения этих конусных аппроксимаций в виде уравнения Эйлера относительно элементов из сопряженного пространства (теорема 35). Теорема 36 есть итоговый результат этих двух шагов; мы применим ее в следующей главе для получения условий слабого минимума в общей регулярной задаче оптимального управления.

Литература

[1] Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1969.

[2] А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин. Задачи на экстремум при наличии ограничений. — *Журнал вычислительной математики и мат. физики*, 1965, Т. 5, № 3, с. 395–453.

[3] А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. Москва, Наука (ИХФ АН СССР), 1971.

[4] А.Я. Дубовицкий, А.А. Милютин. Теория принципа максимума. — В кн. *"Методы теории экстремальных задач в экономике"* (ред. В.Л. Левин), М., Наука, ЦЭМИ, 1981, с. 6–47.

[5] А.А. Милютин. Общие схемы получения необходимых условий экстремума и задачи оптимального управления. — *Успехи мат. наук,* 1970. т. 25, вып.5, с. 110–116.

[6] А.А. Милютин. Принцип максимума в регулярной задаче оптимального управления. — В кн. *"Необходимое условие в оптимальном управлении",* М., Наука, 1990.

[7] И.В. Гирсанов. Лекции по теории экстремальных задач. МГУ, 1970.

[8] Г.А. Блисс. Лекции по вариационному исчислению. М., ИЛ, 1950.

[9] И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.

[10] Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962.

[11] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функции и функционального анализа. М., Наука, 1976.

[12] Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. Краткий курс функционального анализа. М., Высшая школа, 1982.

[13] И.П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1974.

[14] В.И. Аркин, В.Л. Левин. Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи. — *УМН,* 1972, т. 27, N 3, с. 21–77.

[15] А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. М., Наука, 1974.

[16] В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. Оптимальное управление. М., Наука, 1979.

[17] Б.Н. Пшеничный. Необходимые условия экстремума. М., Наука, 1980.

[18] В.А. Якубович, А.С. Матвеев. Абстрактная теория оптимального управления. СПб, изд-во Санкт-Петербургского университета, 1994.

[19] А.В. Дмитрук, А.А. Милютин, Н.П. Осмоловский. Теорема Люстерника и теория экстремума. — *Успехи мат. наук,* 1980, т. 35, N 6, с. 11–46.

[20] В.В. Дикусар, А.А. Милютин. Качественные и численные методы в принципе максимума. М., Наука, 1989.

[21] А.В. Дмитрук. Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями. — В сб. *"Оптимальность управляемых динамических систем",* М., ВНИИСИ, 1990, вып. 14, с. 26–42.

[22] A.A. Milyutin, N.P. Osmolovskii. Calculus of Variations and Optimal Control. American Mathematical Society, 1998.

[23] А.А. Милютин. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. М., Физматлит, 2001.

[24] А.В. Дмитрук. Аппроксимационная теорема для нелинейной управляемой системы со скользящими режимами. — Труды МИРАН, 2007, т. 256, с. 102–114.