Задачі з курсу

ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ

для студентів факультету кібернетики

(спеціальність – Системний аналіз)

Пічкур В.В.

2011

Зміст

Частина I

Задачі до практичних занять

Заняття 1

Опорні функції. Інтеграл від багатозначного відображення

1.1 Аудиторне заняття

Задача 1.1. Знайти опорні функції таких множин:

1. $A = [0, r]$;
2. $A = [-r, r]$;
3. $A = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$;
4. $A = \mathcal{K}_r(0) = \{x \in R^n : \|x\| \leq r\}$;
5. $A = \mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

Задача 1.2. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{I} = \int_0^1 F(x)dx$ таких багатозначних відображень:

1. $F(x) = [0, x], x \in [0, 1]$;
2. $F(x) = \mathcal{K}_x(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq x\}, x \in [0, 1]$.

1.2 Домашнє завдання

Задача 1.3. Знайти опорні функції таких множин:

1. $A = \{-1, 1\}$;
2. $A = \{(x, y, z) : |x| \leq 2, |y| \leq 4, |z| \leq 1\}$;

3. $A = \{a\}$;

4. $A = \mathcal{K}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$.

Задача 1.4. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)dx$ таких багатозначних відображень:

1. $F(x) = [0, \sin x]$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

2. $F(x) = [-\sin x, \sin x]$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

3. $F(x) = \mathcal{K}_{\sin x}(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq \sin x\}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Література: [3]

Заняття 2

Множина досяжності

2.1 Аудиторне заняття

Задача 2.1. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{dx}{dt} = x + u,$$

де $x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_0$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \{x : |x| \leq 1\},$$

$$\mathcal{U} = \{u : |u| \leq 1\}.$$

Задача 2.2. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + u_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 4x_2 + u_2,$$

де $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in M_0$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \{(x_{01}, x_{02}) : |x_{01}| \leq 1, |x_{02}| \leq 1\},$$

$$\mathcal{U} = \{(u_1, u_2) : |u_1| \leq 1, |u_2| \leq 1\}.$$

2.2 Домашнє завдання

Задача 2.3. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{dx}{dt} = x + bu,$$

де $x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_0$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$, b – деяке ненульове число,

$$\mathcal{M}_0 = \{x : |x| \leq 2\},$$

$$\mathcal{U} = \{u : |u| \leq 3\}.$$

Задача 2.4. Знайти опорну функцію множини досяжності для системи керування:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + 2u_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -4x_1 + x_2 + u_2,$$

де $x(0) = (x_{01}, x_{02}) \in M_0$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \left\{(x_{01}, x_{02}) : x_{01}^2 + x_{02}^2 \leq 4\right\},$$

$$\mathcal{U} = \left\{(u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\right\}.$$

Література: [3]

Заняття 3

Критерій керованості і спостережуваності. Критерій двоїстості

3.1 Аудиторне заняття

Задача 3.1. Перевести систему

$$\frac{dx}{dt} = u$$

з точки x_0 в точку x_1 за допомогою керування з класу:

1. постійних функцій;
2. неперервних функцій, що змінюються з часом;
3. кусково-постійних функцій;
4. кусково-неперервних функцій.

Задача 3.2. Дослідити системи на керованість:

1.
$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = u;$$

2.
$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + au,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 4x_2 + u.$$

Задача 3.3. Чи буде система цілком спостережуваною?

1.
$$\ddot{x} = a^2 x,\ y(t) = x(t);$$

2.
$$\dot{x}_1 = x_1 + \alpha x_2,$$
$$\dot{x}_2 = \alpha x_1 + x_2,$$
$$y(t) = \beta x_1 + x_2.$$

3.2 Домашнє завдання

Задача 3.4. Перевести систему

$$\frac{dx}{dt} = 2x + u$$

з точки x_0 в точку x_1 за допомогою керування з класу:

1. постійних функцій;
2. неперервних функцій, що змінюються з часом;
3. кусково-постійних функцій;
4. кусково-неперервних функцій.

Задача 3.5. Дослідити системи на керованість:

1. $\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + au,\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{u}{a};$
2. $\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 + au,\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \frac{u}{a}\ ;$
3. $x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = u(t);$
4. $\frac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + au,\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2 + a^2 u\ ;$
5. $\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 - au,\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + au$

Задача 3.6. Чи буде система цілком спостережуваною?

1.
$$\ddot{x} = a^2 x,\ y(t) = p\dot{x}(t);$$

2.

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + \alpha x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -\alpha x_1 - \alpha x_2,$$
$$y(t) = x_1 + \beta x_2.$$

3.

$$\dot{x}_1 = x_2 - 2x_3,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_3,$$
$$\dot{x}_3 = -2x_3,$$
$$y(t) = -x_1 + x_2 - x_3.$$

Література: [1, 2, 4, 7]

Заняття 4

Варіаційний метод в задачі оптимального керування

4.1 Аудиторне заняття

Задача 4.1. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + (x(T) - x_1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_1 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 4.2. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T u^2(s)ds + (x(T) - x_1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$ю. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_1 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

4.2 Домашнє завдання

Задача 4.3. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T (u(s) - v(s))^2 \, ds + (x(T) - x_1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_1 \in \mathbb{R}^1$, момент часу T і функція $v(t) \in \mathbb{R}^1$ є заданими.

Задача 4.4. Розв'язати задачу оптимального керування варіаційним методом:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T \big(u^2(s) + x^2(s)\big) \, ds + (x(T) - x_1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + u(t), \ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_1 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Література: [6–8]

Заняття 5

Принцип максимуму Понтрягіна за відсутності фазових обмежень

5.1 Аудиторне заняття

Задача 5.1. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 5.2. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u, x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 5.3. Записати крайову задачу принципу максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування

$$\mathcal{J}(u) = \gamma^2 \int_0^T x^2(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), x(0) = x_0,$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$,

$$|u(t)| \leq \rho,$$

$t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

5.2 Домашнє завдання

Задача 5.4. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2} \left(x(T) - x_1\right)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $x_1 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 5.5. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left(u^2(s) + x^2(s)\right) ds + \frac{1}{2} \left(\dot{x}(T) - x_1\right)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 5.6. Записати крайову задачу принципу максимуму Понтрягіна для задачі оптимального керування

$$\mathcal{J}(u) = \gamma^2 \int_0^T \left(x(s) - z(s)\right)^2 ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), x(0) = x_0,$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$,

$$|u(t)| \leq \rho,$$

$t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$, неперервна функція $z(t) \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Література: [1, 4–10]

Заняття 6

Принцип максимуму Понтрягіна: загальний випадок

6.1 Аудиторне заняття

Задача 6.1. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t),\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0,\ x(T) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 6.2. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = u(t),$$
$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0,\ x(T) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 6.3. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^2 x(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u,$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = x(2) = 0,$$

$$u(t) \in [-2, 2]\,.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, 2]$ (задача підвищеної складності).

6.2 Домашнє завдання

Задача 6.4. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = u(t),$$

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 6.5. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T u^4(s)ds \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t),\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0,\ x(T) = 0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 6.6. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \int_{-\pi}^{\pi} x(s) \sin s ds \to \inf$$

за умови, що

$$\dot{x} = u,\ x(-\pi) = x(\pi) = 0,\ u(t) \in [-1, 1]\,,$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [-\pi, \pi]$ (задача підвищеної складності).

Література: [1, 4–10]

Заняття 7

Метод динамічного програмування. Дискретне рівняння Белмана

7.1 Аудиторне заняття

Задача 7.1. Знайти оптимальне керування, оптимальну траєкторію, функцію Белмана і оптимальне значення критерія якості задачі оптимального керування

$$\mathcal{I}\left(\left\{u(k)\right\}, \left\{x(k)\right\}\right) = \sum_{k=0}^{2} u^2(k) + x^2(3) \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = 2x(k) + u(k), x(0) = 1, k = 0, 1, 2.$$

Тут x, $u \in \mathbb{R}^1$.

Задача 7.2. Знайти оптимальне керування і функцію Белмана задачі оптимального керування

$$\mathcal{I}\left(\left\{u(k)\right\}, \left\{x(k)\right\}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) + x^2(N) \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = x(k) + u(k),\ x(0) = x_0,\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Тут x, $u \in \mathbb{R}^1$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – відома.

Задача 7.3. Знайти оптимальне керування і функцію Белмана задачі оптимального керування

$$\mathcal{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} (u(k) - v(k))^2 + x^2(N) \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = x(k) + u(k),\ x(0) = x_0,\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Тут x, $u \in \mathbb{R}^1$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – відома, $v(k)$ – відомі, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

7.2 Домашнє завдання

Задача 7.4. Знайти оптимальне керування, оптимальну траєкторію, функцію Белмана і оптимальне значення критерія якості задачі оптимального керування

$$\mathcal{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{3} u^2(k) + x^2(4) \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = -x(k) + u(k),\ x(0) = 2,\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Тут x, $u \in \mathbb{R}^1$.

Задача 7.5. Знайти оптимальне керування і функцію Белмана задачі оптимального керування

$$\mathcal{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) + x^2(N) \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = x(k) + b(k)u(k),\ x(0) = x_0,\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Тут x, $u \in \mathbb{R}^1$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – відома, $b(k) \in \mathbb{R}^1$ – відомі, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Задача 7.6. Розв'язати задачу оптимального керування

$$\mathcal{I}\left(\{u(k)\},\{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) + (x(N) - x_1)^2 \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = x(k) + u(k),\ \ x(0) = x_0,\ \ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Тут $x,\ u \in \mathbb{R}^1$. Точки $x_0,\ x_1 \in \mathbb{R}^1$ – відомі, $b(k) \in \mathbb{R}^1$ – відомі, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Література: [4–6]

Заняття 8

Метод динамічного програмування. Рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана. Задача фільтрації

8.1 Аудиторне заняття

Задача 8.1. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 8.2. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 8.3. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (u(s) - s)^2\, ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) + t^2, \;\; x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 8.4. Знайти функцію Белмана такої задачі оптимального керування:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s) ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t), \;\; x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 8.5. Знайти розв'язок такої задачі оптимального керування:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(u^2(s) + x^2(s)\right) ds + \frac{1}{2}x^2(0) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + u(t), \;\; x(T) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 8.6. Знайти множину досяжності в момент $t = T$ системи керування:

$$\ddot{x} = u$$

за умови, що

$$\int_0^t u^2(s) ds + x^2(0) + \dot{x}^2(0) \le r^2.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Задача 8.7. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T u^2(s) ds + x_2^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + 2u(t),$$
$$x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 1.$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат з $\mathbb{R}^2$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$, момент часу T є заданим.

Задача 8.8. Побудувати фільтр за заданими спостереженнями $y(t) \in \mathbb{R}^1$, використовуючи множинний підхід:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + v(t),$$

$$y(t) = 2x(t) + w(t),$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова, що задовольняють нерівності

$$\int_0^\tau \left(v^2(s) + w^2(s)\right) ds + x_0^2 \leq 2,\ \tau \in [0, T]\,.$$

Знайти оцінку похибки спостережень.

8.2 Домашнє завдання

Задача 8.9. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}\left(x(T) - x_1\right)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 8.10. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}\dot{x}^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 8.11. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathfrak{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \big(u^2(s) + x^2(s)\big)\,ds + \frac{1}{2}x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 8.12. Знайти функцію Белмана такої задачі оптимального керування:

$$\mathfrak{I}(u) = a^2\int_0^T (u(s) - u_0(s))^2\,ds + x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t),\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Неперервна функція $u_0(t) \in \mathbb{R}^1$, точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими, $a > 0$.

Задача 8.13. Знайти множину досяжності в момент $t = \tau$ системи керування

$$\dot{x} = ax + u$$

за умови, що

$$\int_0^\tau (u(s) - u_0(s))^2\,ds + x^2(0) \le r^2$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Неперервна функція $u_0(t) \in \mathbb{R}^1$ – відома.

Задача 8.14. Знайти множину досяжності в момент $t = T$ системи керування:

$$\ddot{x} = u$$

за умови, що

$$\int_0^t \big(u^2(s) + x^2(s)\big)\,ds + 2x^2(0) + \dot{x}^2(0) \le r^2,$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$.

Задача 8.15. Побудувати фільтр за заданими спостереженнями $y(t) \in R^1$, використовуючи множинний підхід:

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + v(t),$$

$$y(t) = px(t) + w(t),$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова, що задовольняють нерівності

$$\int_0^\tau \left(v^2(s) + w^2(s)\right) ds + (x_0 - 1)^2 \leq 4,\ \ \tau \in [0, T]\,.$$

Знайти оцінку похибки спостережень.

Література: [2, 4–7, 11]

Заняття 9

Задача стабілізації

9.1 Аудиторне заняття

Задача 9.1. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи
$$x'''(t) - 2x''(t) + 3x'(t) - 2x(t) = u.$$

Задача 9.2. Побудувати керування u, яке розв'язує задачу стабілізації системи
$$x^{(IV)}(t) + 2x''(t) + x(t) = u.$$

Задача 9.3. Побудувати керування u, яке розв'язує задачу стабілізації системи
$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + x_2(t) + u,$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t) - 2u.$$

Задача 9.4. Побудувати керування $u = (u_1, u_2)^*$, яке розв'язує задачу стабілізації системи
$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + 2u_1,$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -2x_1(t) + 3x_2(t) - u_1 + u_2.$$

9.2 Домашнє завдання

Задача 9.5. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи
$$x'''(t) + 6x''(t) - 2x'(t) - 5x(t) = u.$$

Задача 9.6. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи
$$x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = u.$$

Задача 9.7. Побудувати керування u, яке розв'язує задачу стабілізації системи
$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + 5x_2(t) + u,$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) + 3u.$$

Задача 9.8. Побудувати керування $u = (u_1, u_2)^*$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 2x_2(t) + u_1 - u_2,$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) + 2x_2(t) + u_1 + 2u_2.$$

Література: [2, 4, 7]

Частина II

Задачі для підготовки до екзамену

Розділ 10

Задачі з практичних занять

Задача 10.1. Знайти інтеграл Аумана $\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)dx$ відображення

$$F(x) = [0, \cos x]\,,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Задача 10.2. Знайти множину досяжності такої системи керування:

$$\frac{dx}{dt} = tx + 2u,$$

де $x(0) = x_0 \in \mathcal{M}_0$, $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \geq 0$,

$$\mathcal{M}_0 = \{x : |x| \leq 4\}\,,$$

$$\mathcal{U} = \{u : |u| \leq 1\}\,.$$

Задача 10.3. Дослідити систему на керованість:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 + au,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 4x_2 + (1-a)u.$$

Задача 10.4. Чи буде система

$$\dot{x}_1 = x_1 + \alpha x_2,$$

$$\dot{x}_2 = \alpha x_1 - x_2,$$

$$y(t) = \beta x_1 + (1-\beta)x_2.$$

цілком спостережуваною?

Задача 10.5. Розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна:

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T \big(u^2(s) + 4x^2(s)\big)\, ds + (\dot{x}(T) - x_1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u,\ x(0) = x_0\ \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 10.6. Знайти оптимальне керування і функцію Белмана задачі оптимального керування

$$\mathcal{I}\left(\{u(k)\}, \{x(k)\}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} u^2(k) + x^2(N) \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = x(k) + 2u(k),\ x(0) = x_0,\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Тут x, $u \in \mathbb{R}^1$, точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – відома.

Задача 10.7. Розв'язати задачу оптимального керування різними методами (варіаційним методом, за допомогою принципу максимуму Понтрягіна, методом динамічного програмування):

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T \big(u^2(s) + 4x^2(s)\big)\, ds + (\dot{x}(T) - x_1)^2 \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u,\ x(0) = x_0\ \dot{x}(0) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0, x_1, y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими. Порівняти одержані результати.

Задача 10.8. Розв'язати задачу оптимального керування різними методами (варіаційним методом, за допомогою принципу максимуму Понтрягіна, методом динамічного програмування):

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T \big(u^2(s) + 4x^2(s)\big)\, ds + x^2(T) \to \inf$$

за умови, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = -tx(t) + u(t) + \sin t,\ x(0) = x_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими. Порівняти одержані результати.

Задача 10.9. Розв'язати задачу оптимального керування і знайти функцію Белмана:

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(s)ds + \frac{1}{2}x^2(0) \to \inf$$

за умови, що

$$\ddot{x} = u,\ x(T) = x_0,\ \dot{x}(T) = y_0.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$. Точки $x_0 \in \mathbb{R}^1$, $y_0 \in \mathbb{R}^1$ і момент часу T є заданими.

Задача 10.10. Знайти множину досяжності в момент t системи керування

$$\ddot{x} = x + 2u$$

за умови, що

$$\int_0^t \left(\frac{u^2(s)}{4} + x^2(s)\right) ds + x^2(0) + 4\dot{x}^2(0) \leq r^2.$$

Тут $x(t) \in \mathbb{R}^1$, $u(t) \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$.

Задача 10.11. Побудувати фільтр за заданими спостереженнями $y(t) \in R^1$, використовуючи множинний підхід:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \cos t \cdot x(t) + 2v(t),$$

$$y(t) = px(t) + w(t),$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^1$ – вектор стану, $v(t) \in \mathbb{R}^1$, $w(t) \in \mathbb{R}^1$ – невідомі шуми, $x_0 \in \mathbb{R}^1$ – невідома початкова умова, що задовольняють нерівності

$$\int_0^\tau \left(v^2(s) + 4w^2(s)\right) ds + \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1, \tau \in [0, T].$$

Знайти оцінку похибки спостережень.

Задача 10.12. Побудувати керування $u(t)$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$x''(t) - x'(t) + 4x(t) = u.$$

Задача 10.13. Побудувати керування $u = (u_1, u_2)^*$, яке розв'язує задачу стабілізації системи

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - x_2(t) + u_1,$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + x_2(t) + 2u_2.$$

Розділ 11

Задачі з лекційного курсу

11.1 Додаткові глави аналізу

Задача 11.1. Показати, що якщо $A \in comp\,(\mathbb{R}^n)$, $B \in comp\,(\mathbb{R}^n)$ і $\lambda \in \mathbb{R}^1$, то $A + B \in comp\,(\mathbb{R}^n)$, $\lambda A \in comp\,(\mathbb{R}^n)$, $A^\varepsilon \in comp\,(\mathbb{R}^n)$.

Задача 11.2. Довести що опукла оболонка компакту в $\mathbb{R}^n$ є компакт.

Задача 11.3. Довести, що перетин довільного числа опуклих множин є опуклою множиною. Опукла оболонка множини A є перетином всіх опуклих множин, що містять множину A.

Задача 11.4. Довести такі твердження. Алгебраїчна сума двох опуклих множин є опуклою множиною. Добуток опуклої множини на скаляр є опуклою множиною.

Задача 11.5. Навести приклад замкненої множини в $\mathbb{R}^2$, опукла оболонка якої є незамкненою.

Задача 11.6. Обгрунтувати лему Каратеодорі [1]

Задача 11.7. Показати, що не завжди $A + A = 2A$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Навести приклад множини A, для якої $A + A = 2A$.

Задача 11.8. Довести що якщо $A, B \in conv\,(\mathbb{R}^n)$, то $A = B \Leftrightarrow c\,(A, \psi) = c\,(B, \psi)$, $\psi \in \mathcal{S}$ (наслідок 4 теореми про представлення).

Задача 11.9. Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$ – компакт, $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Довести, що тоді для довільного $\psi \in \mathbb{R}^n$ має місце рівність $c\,(\lambda A, \psi) = c\,(A, \lambda\psi)$. Крім того, $c\,(\lambda A, \psi) = \lambda c\,(A, \psi)$, де $\lambda > 0$, $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Задача 11.10. Знайти опорну функцію множини

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \le 1, i = 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

[1] Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. –М.: Наука, 1980. – 319 с., теорема 1.1, стор. 9

Задача 11.11. Позначимо

$$\mathcal{E}\left(a, Q\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\langle Q^{-1}(x-a), x-a\right\rangle \leq 1\right\}$$

еліпсоїд в $\mathbb{R}^n$ з центром в точці $a \in \mathbb{R}^n$, де Q – $n \times n$ - симетрична додатновизначена матриця еліпсоїда. Довести такі твердження:

1. еліпсоїд $\mathcal{E}\left(a, Q\right)$ – опуклий компакт;
2. опорна функція $c\left(\mathcal{E}\left(0, Q\right), \psi\right) = \sqrt{\langle Q\psi, \psi\rangle}$;
3. має місце співвідношення $\mathcal{E}\left(a, Q\right) = a + \mathcal{E}\left(0, Q\right)$.

Вивести формулу для опорної функції еліпсоїда $\mathcal{E}\left(a, Q\right)$.

Задача 11.12. Знайти $\beta(A, B)$ за умови, що $A = \mathcal{K}_r(0)$, $B = \mathcal{K}_m(0)$, де $r > 0$, $m > 0$.

Задача 11.13. Знайти відстань Хаусдорфа при $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Задача 11.14. Знайти відстань Хаусдорфа між множинами $A = [0, a]$ і $B = [-b, 0]$, де $a, b > 0$.

Задача 11.15. Для множини $A \in comp(\mathbb{R}^n)$ довести рівність

$$\|A\| = \min\left\{r \geq 0 : A \subseteq \mathcal{K}_r(0)\right\}.$$

Задача 11.16. Показати, що $\|A\| = \alpha(A, \{0\})$, де $A \in comp(\mathbb{R}^n)$.

Задача 11.17. Показати, що $\|A\| = \max_{\psi \in \mathcal{S}} |c(A, \psi)|$, де $A \in conv(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}$ – одинична сфера в $\mathbb{R}^n$.

Задача 11.18. Намалювати графік відображення

1) $F(x) = [0, x]$, $x \in [-1, 1]$;

2) $F(x) = [-|\sin x|, |\sin x|]$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $F(x) = [-1, 1]$,$x \in [-1, 1]$, $x \neq 0$ і $F(0) = \{2\}$;

4) $F(x) = [-1, 1]$, $x \in [-1, 0)$, $F(x) = [-2, 2]$, $x \in [0, 1]$;

5) $F(x) = [-1, 1]$, $x \in [-1, 0\ )$, $F(x) = [-2, 2]$, $x \in [0, 1]$.

Для вказаних відображень побудувати селектори, які є

- постійні
- неперервні;

- кусково постійні
- кусково неперервні;
- мають зліченну кількість точок розриву.

Задача 11.19. Чи буде неперервним відображення $F(x) = [-x, x]$ на множині $x \in [0, 1]$?

Задача 11.20. Знайти інтеграл Аумана від таких багатозначних відображень

1) $F(x) = \{-\sin x, \sin x\}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $F(x) = [-1, 1]$, $x \in [-1, 0)$, $F(x) = [-2, 2]$, $x \in [0, 1]$;

3) $F(x) = [-1, 1]$, $x \in [-1, 0)$, $F(x) = [-2, 2]$, $x \in [0, 1]$;

4) $F(x) = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : |x_i| \le r_i(x)\}$, $x \in [0, 1]$. Тут $r_i(x)$ – неперервні додатні на $[0, 1]$ функції.

Задача 11.21. Довести, що:

1) лінійна комбінація абсолютно неперервних функцій є абсолютно неперервною функцією;

2) добуток двох абсолютно неперервних функцій є абсолютно неперервною функцією;

3) суперпозиція функцій $g \circ f$, де f– абсолютно неперервна функція, g – ліпшицева, є абсолютно неперервною функцією.

Задача 11.22. Сформулювати теорему Пеано і Пікара. У чому відрізняються умови цих теорем від умов теореми Каратеодорі?

Задача 11.23. За допомогою формули Коші знайти траєкторію системи керування

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + x_2(t) + u(t),$$

за умови, що функція скалярна керування $u(\cdot)$ має вигляд $u(t) = sign(sin\, t)$, $x_1(0) = p_0$, $x_1(0) = q_0$.

11.2 Керованість і спостережуваність

Задача 11.24. Показати, що множина досяжності $\mathcal{X}(t, M_0)$ лінійної системи керування є неперервною за M_0, тобто, для послідовності $M_k \in comp\,(\mathbb{R}^n)$, $k = 1, 2, \ldots$ такої, що $\lim_{k\to\infty} \alpha\,(M_k, M_0) = 0$ має місце рівність

$$\lim_{k\to\infty} \alpha\,(\mathcal{X}(t, M_k), \mathcal{X}(t, M_0)) = 0.$$

Задача 11.25. Показати, що якщо $x_0 \in intM_0$, то для множини досяжності лінійної системи має місце включення

$$\mathcal{X}(t, x_0) \subset int\mathcal{X}(t, M_0).$$

Задача 11.26. Довести, що грамміан керованості є невід'ємновизначеним. При цьому умова повної керованості еквівалентна додатній визначеності грамміана керованості.

Задача 11.27. Знайти диференціальне рівняння грамміана керованості для системи керування

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = cos(t)x_1(t) - sin(t)x_2(t) + u_1(t) - 2u_2(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = sin(t)x_1(t) + cos(t)x_2(t) - 3u_1(t) + 4u_2(t),$$

Задача 11.28. Знайти диференціальне рівняння грамміана керованості для системи керування

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + cos(t)u(t),\ t \geq 0.$$

За його допомогою знайти грамміан керованості. Використовуючи критерій керованості, вказати інтервал повної керованості вказаної системи керування. Для цього інтервала записати керування, яке розв'язує задачу про переведення системи з точки x_0 у стан x_T.

Задача 11.29. Довести, що система

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t),\ y(t) = H(t)x(t).$$

є цілком спостережуваною на $[t_0, T]$ тоді і тільки тоді, коли система

$$\frac{dz(t)}{dt} = -A^*(t)z - H^*(t)u(t)$$

є цілком керованою на $[t_0, T]$.

Задача 11.30. Записати диференціальне рівняння для знаходження граміана спостережуваності системи

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -t^2 x_2(t),$$
$$y(t) = sin(t)x_1(t) + cos(t)x_2(t)$$

Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат, y – скалярне спостереження.

Задача 11.31. Для яких параметрів a, b система

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = ax_1(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = bx_2(t),$$
$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

є цілком спостережуваною? Тут $x = (x_1, x_2)^*$ – вектор фазових координат, y – скалярне спостереження.

Задача 11.32. Відомо, що системи

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = A^{(1)}x^{(1)}(t),$$
$$y^{(1)}(t) = \left\langle h, x^{(1)}(t) \right\rangle,$$
$$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} = A^{(2)}x^{(2)}(t),$$
$$y^{(2)}(t) = \left\langle h, x^{(2)}(t) \right\rangle$$

є цілком спостережуваними. Якими будуть умови повної спостережуваності системи

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} = A^{(1)}x^{(1)}(t),$$
$$\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} = A^{(2)}x^{(2)}(t),$$
$$y(t) = \left\langle h, x^{(1)}(t) \right\rangle + \left\langle h, x^{(2)}(t) \right\rangle.$$

Тут $x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$, $x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$, $y^{(1)} \in \mathbb{R}^1$, $y^{(2)} \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$ [1].

11.3 Принцип максимуму Понтрягіна

Задача 11.33. Розв'язати варіаційним методом таку задачу оптимального керування:

$$\mathfrak{I}(u) = \gamma^2 \int_0^T u^2(t)dt + x^2(T) \to \inf,$$

за умови

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a^2x(t) = u(t),$$

$$x(0) = x_0, \ \frac{dx}{dt}(0) = y_0.$$

Тут $\gamma > 0$, $a > 0$, x_0, y_0 – відомі дійсні числа, $u(t)$ – скалярне керування.

Задача 11.34. Розв'язати варіаційним методом таку задачу оптимального керування:

$$\mathfrak{I}(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^T \{\langle N(t)x(t), x(t)\rangle + \langle M(t)u(t), u(t)\rangle\} dt+$$
$$+\frac{1}{2}\langle P_0 x(T), x(T)\rangle \to \inf,$$

за умови

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t) + f(t), \ x(t_0) = x_0.$$

Тут $N(t)$, P_0 – невід'ємновизначені симетричні матриці розмірності $n \times n$, $M(t)$ – додатновизначена симетрична матриця розмірності $m \times m$, $A(t)$ – $n \times n$-матриця з неперервними компонентами, $C(t)$ – $n \times m$-матриця з неперервними компонентами, $f(t)$ – неперервна n-вимірна функція, де $t \in [t_0, T]$.

Задача 11.35. Розв'язати за допомогою принципу максимуму Понтрягіна задачу оптимального керування:

$$\mathfrak{I}(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^T \{\langle N(t)x(t), x(t)\rangle + \langle M(t)u(t), u(t)\rangle\} dt+$$
$$+\frac{1}{2}\langle P_0 x(T), x(T)\rangle \to \inf,$$

за умови

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t) + f(t), \ x(t_0) = x_0.$$

Тут $N(t)$, P_0 – невід'ємновизначені симетричні матриці розмірності $n \times n$, $M(t)$ – додатновизначена симетрична матриця розмірності $m \times m$, $A(t)$ – $n \times n$-матриця з неперервними компонентами, $C(t)$ – $n \times m$-матриця з неперервними компонентами, $f(t)$ – неперервна n-вимірна функція, де $t \in [t_0, T]$.

Задача 11.36. За допомогою принципу максимуму Понтрягіна розв'язати задачу оптимального керування

$$\mathfrak{I}(u) = \int_0^T u^2(t)dt + x^2(T) \to \inf$$

за умов

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = u(t),$$

$$x(0) = x_0, \ \frac{dx(0)}{dt} = y_0, \ \int_0^T u(t)dt = c.$$

Тут x_0, y_0, – відомі дійсні числа, $u(t)$ – скалярне керування, T – відомий кінцевий момент функціонування системи керування.

Задача 11.37. За допомогою принципу максимуму Понтрягіна проаналізувати можливість переведення системи

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a^2x(t) = u(t)$$

з положення

$$x(0) = x_0, \ \frac{dx(0)}{dt} = y_0$$

в початок координат так, щоб

$$\int_0^T u^2(t)dt \le c^2.$$

Тут $a > 0$, x_0, y_0 – відомі дійсні числа, $u(t)$ – скалярне керування, T – фінальний момент функціонування системи керування (невідомий).

11.4 Метод динамічного програмування

Задача 11.38. Розв'язати за допомогою дискретного рівняння Белмана задачу оптимального керування

$$\mathfrak{I}(u) = \sum_{k=0}^{N-1} \{\langle Q(k)x(k), x(k)\rangle + \langle P(k)u(k), u(k)\rangle\} + \langle Q(N)x(N), x(N)\rangle \to \inf$$

за умов

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + f(k),\ x(0) = x_0,\ k = 0, 1..., N-1,$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^*$ – вектор керування, $A(k)$ – матриця розмірності $n \times n$, $B(k)$ – матриця розмірності $n \times m$, $Q(k)$ – невід'ємновизначена симетрична $n \times n$-матриця, $P(k)$ – додатновизначена симетрична $m \times m$-матриця, $f(k)$ – вектор розмірності n, $k = 0, 1...N-1$, $Q(N)$ – невід'ємновизначена симетрична $n \times n$-матриця. Розробити алгоритм.

Задача 11.39. Розв'язати задачу 11.38 за допомогою варіаційного методу.

Задача 11.40. Довести принцип оптимальності Белмана за умови, що час T не є фіксованим.

Задача 11.41. Розв'язати задачу оптимального керування, яка полягає у мінімізації критерію якості

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T (\alpha(t)x^2(t) + \beta(t)u^2(t))dt + \gamma x^2(T)$$

при умовах

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)u,\ x(0) = x_0.$$

Тут $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, $x(t)$, $u(t)$ – скалярні функції, $\gamma > 0$, $t \in [0, T]$.

Задача 11.42. Побудувати функцію Белмана і знайти оптимальне керування для задачі керування

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = u(t)$$

$$x(0) = x_0,\ \frac{dx(0)}{dt} = x_1$$

з функціоналом

$$\mathcal{I}(u) = \int_0^T \left\{ \alpha(t)x^2 + \beta(t)u^2 + \gamma(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right\} dt +$$
$$+ \sigma x^2(T) + \delta \left(\frac{dx(T)}{dt}\right)^2 \to \inf_u$$

Тут $x(t)$, $u(t)$, $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, $\gamma(t) > 0$ – скалярні функції, $\omega > 0$, $\sigma > 0$, $\delta > 0$.

Задача 11.43. Розв'язати задачу оптимального керування системою

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u + f(t),\ x(t_0) = x_0$$

з критерієм якості

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(u,x) = \int_{t_0}^{T} \{\langle N(t)x(t), x(t)\rangle + \langle M(t)u(t), u(t)\rangle\} \, dt + \\ + \langle P_0 x(T), x(T)\rangle , \end{aligned} \tag{11.1}$$

де $f(\cdot)$ – неперервна n-вимірна вектор-функція.

Задача 11.44. Довести принцип оптимальності Белмана для функціоналу від початкового стану.

11.5 Оцінка стану

Задача 11.45. Побудувати спостерігач повного порядку для системи керування

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = u(t),$$
$$y(t) = ax(t) + b\frac{dx(t)}{dt}.$$

Тут x, y – скалярні стан і спостереження, $u(\cdot)$ – скалярна відома функція керування, a, b – дійсні числа.

Задача 11.46. Довести теорему про існування і єдиність чебишевського центру. [2]

Задача 11.47. Знайти матричне диференціальне рівняння для матриці $Q(t)$ розмірності $n \times n$, якщо відомо, що $Q(t) = P^{-1}(t)$ і

$$P'(t) = A(t)P(t) + P(t)A^*(t) - \alpha P^2(t),\ P(0) = P_0,$$

де $\alpha > 0$, $t \in [0, T]$, P_0 –матриця розмірності $n \times n$. Показати, що якщо матриця P_0 – симетрична, то матриця $Q(t)$ – симетрична.

Задача 11.48. Використовуючи множинний підхід, знайти фільтр за заданими скалярними спостереженнями $y(t)$

$$y(t) = 2x(t) + w(t),$$

[2] Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2004. – 416 с. (лема 2.1.1, стор.187, лема 2.1.2 стор. 188)

$$\frac{dx(t)}{dt} = tx(t) + v(t),$$

де a, p є скалярними параметрами, початковий стан x_0 і шуми $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ задовольняють обмеженням вигляду

$$\int_0^\tau \left(v^2(s) + w^2(s)\right) ds + x_0^2 \le r^2,$$

$$t \in [0, T].$$

Для цього виписати відповідну задачу оптимального керування для знаходження інформаційної множини і розв'язати її за допомогою рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана. Знайти похибку оцінювання.

Задача 11.49. Нехай задана система

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)v(t),$$
$$y(t) = G(t)x(t) + w(t),$$

де $A(t)$, $C(t)$, $G(t)$ є матрицями з неперервними компонентами розмірностей $n \times n$, $n \times k$ і $m \times n$ відповідно. Початковий стан x_0 і шуми $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ задовольняють обмеженням вигляду

$$\int_{t_0}^\tau \{\langle M(t)\left(v(t) - v_0(t)\right), v(t) - v_0(t)\rangle +$$
$$+ \langle N(t)\left(w(t) - w_0(t)\right), w(t) - w_0(t)\rangle\} \, dt +$$
$$+ \langle P_0\left(x_0 - a\right), x_0 - a\rangle \le \mu^2.$$

Тут $M(t)$, P_0 є додатновизначеними симетричними матрицями розмірності $k \times k$ і $n \times n$ відповідно, $N(t)$ є невід'ємновизначеною симетричною матрицею розмірності $m \times m$. Матриці $N(t)$, $M(t)$ є неперервними за $t \in [t_0, T]$. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ є заданою. Функції $v_0(\cdot)$, $w_0(\cdot)$ є заданими інтегрованими з квадратом на $[t_0, \tau]$ функціями, $v_0(t) \in \mathbb{R}^k$, $w_0(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [t_0, \tau]$. Шуми $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ належать класу інтегрованих з квадратом на $[t_0, \tau]$ функцій.

Для цієї задачі побудувати фільтр і знайти похибку оцінювання.

Задача 11.50. Нехай A – $n \times n$ матриця, $A = A^*$. *Перетворенням Релея* відображення A називається функція

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle},$$

яка визначена для всіх ненульових $x \in \mathbb{R}^n$. Довести таке твердження. [3]

[3] стор. 23, Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. – М.: Наука, 1983. – 336 с.

Теорема 11.1 (про екстремальні властивості власних значень). *Максимальне значення співвідношення Релея співпадає з найбільшим власним значенням $\lambda_*(A)$ матриці A і досягається на власному векторі матриці A, що відповідає $\lambda_*(A)$. Аналогічно, мінімальне значення співвідношення Релея співпадає з найменшим власним значенням $\lambda_-(A)$ матриці A і досягається на власному векторі матриці A, що відповідає $\lambda_-(A)$. Зокрема,*

$$\max_{x \in S} \langle Ax, x \rangle = \lambda_*(A),$$
$$\min_{x \in S} \langle Ax, x \rangle = \lambda_-(A).$$

Задача 11.51. На основі задач 11.11, 11.17, 11.50 довести, що

$$\|\mathcal{E}\,(0, Q)\| = \sqrt{\lambda_*(Q^{-1})},$$

де Q – $n \times n$ - симетрична додатновизначена матриця еліпсоїда $\mathcal{E}\,(0, Q)$.

Розділ 12

Запитання до іспиту

1. Система керування. Ознаки системи керування. Принципи керування. Задача оптимального керування. Мета математичної теорії керування.

2. Алгебраїчні операції над множинами. Окіл множини.

3. Опуклі множини. Властивості опуклих множин. Опукла оболонка множини. Лема Каратеодорі. Лема про строгу віддільність.

4. Опорні функції. Властивості опорної функції. Опорна гіперплощина. Геометричний зміст опорної функції. Норма множини і неперервність опорної функції. Представлення множини через опорну функцію. Наслідки.

5. Відстань від точки до множини. Відхилення від множини до множини. Властивості. Лема про відхилення для опуклих компактів.

6. Метрика Хаусдорфа. Властивості.

7. Багатозначні відображення. Графік. Неперервні багатозначні відображення. Критерій неперервності.

8. Вимірні багатозначні відображення. Вимірний селектор.

9. Інтеграл від багатозначного відображення. Теорема Ляпунова

10. Абсолютно неперервні функції. Властивості. Теорема Лебега.

11. Система Каратеодорі. Існування і єдиність розв'язку задачі Коші. Теорема про неперервну залежність розв'язку від початкових умов.

12. Лінійна система диференціальних рівнянь Каратеодорі. Фундаментальна матриця. Властивості фундаментальної матриці. Формула Коші.

13. Спряжена система. Її властивості.

14. Множина досяжності. Теорема про множину досяжності лінійної системи керування. Компактність і неперервність множини досяжності. Опорна функція множини досяжності.

15. Означення керованості на інтервалі і повної керованості. Моментні рівності. Критерій керованості в лінійних нестаціонарних системах. Грамміан керованості. Диференціальне рівняння для грамміана керованості.

16. Задача про переведення лінійної нестаціонарної системи з точки в точку і грамміан керованості.

17. Лема про внутрішню точку. Критерій керованості лінійної стаціонарної системи.

18. Загальна задача керованості лінійної системи. Критерій керованості.

19. Постановка задачі спостереження. Спостережуваність на інтервалі. Повна спостережуваність. Грамміан спостережуваності. Матричне диференціальне рівняння для грамміана спостережуваності. Перший критерій спостережуваності.

20. Принцип двоїстості Калмана. Другий критерій спостережуваності.

21. Похідна за напрямком. Похідна Фреше. Перша варіація функціоналу. Необхідні умови екстремуму функціоналу.

22. Варіаційний метод і задача оптимального керування.

23. Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості на основі варіаційного методу.

24. Принцип максимуму Понтрягіна для задачі Больца з фіксованим часом без фазових обмежень. Функція Гамільтона-Понтрягіна. Спряжена система.

25. Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості на основі принципу максимуму Понтрягіна.

26. Принцип максимуму Понтрягіна при загальних обмеженнях.

27. Принцип максимуму Понтрягіна і множина досяжності.

28. Лінійна задача швидкодії. Теорема про існування оптимального за швидкодією керування.

29. Голчата варіація керування. Теорема про голчату варіацію. Теорема про приріст функціоналу. Обґрунтування принципу максимуму Понтрягіна.

30. Достатні умови оптимальності у формі принципу максимуму.

31. Постановка задачі синтезу. Оптимальний синтез.

32. Метод динамічного програмування. Дискретний варіант. Принцип оптимальності Белмана. Функція Белмана і дискретне рівняння Белмана.

33. Алгоритм методу динамічного програмування. Особливості алгоритму.

34. Оптимальне керування лінійною дискретною системою з квадратичним критерієм якості.

35. Метод динамічного програмування для неперервних систем керування. Принцип оптимальності. Функція Белмана. Інтегральне рівняння Белмана.

36. Диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана. Достатні умови оптимальності. Рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана для задачі швидкодії.

37. Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості на основі методу динамічного програмування.

38. Оптимальне за швидкодією гасіння кутових швидкостей мікросупутника.

39. Метод динамічного програмування для неперервних систем керування (функціонал від початкового стану). Принцип оптимальності. Функція Белмана. Інтегральне рівняння Белмана. Диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана.

40. Оптимальне керування лінійною системою з квадратичним критерієм якості (функціонал від початкового стану) на основі методу динамічного програмування (два випадки).

41. Множина досяжності і функція Белмана. Теорема про множину досяжності. Множина досяжності лінійної системи керування при обмеженнях, що задається квадратичним функціоналом.

42. Лінійна задача спостереження. Спостерігач. Теорема про структуру спостерігача.

43. Чебишевський центр. Його властивості.

44. Постановка задачі фільтрації. Множинний підхід. Інформаційна область.

45. Задача лінійної фільтрації. Фільтр. Похибка оцінювання.

46. Постановка задачі стабілізації. Стабілізація стаціонарних систем.

47. Метод функцій Ляпунова і стабілізація систем керування.

48. Задача оптимальної стабілізації. Теорема Красовського.

Література

[1] Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением. – М.: Физматлит, 2005. – 276 с.

[2] Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.

[3] Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. – М.: Высшая школа, 2001. – 239 с.

[4] Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К.: Вища школа, 1975. – 328 с.

[5] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. –М.: Наука, 1980. – 520 с.

[6] Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

[7] Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.

[8] Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.

[9] Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1975. – 528 с.

[10] Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978. – 316 с.

[11] Kurzhanski A., Vályi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. – Boston: IIASA and Birkhauser. – 1997. – 321 p.