Финансовая академия при Правительстве Российской Федерации

Е.К. Васенкова, Е.С. Волкова, И.Г. Шандра

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Курс лекций

Москва 2002

УДК 33.51(075.8)
ББК 22.18
Д33

Рецензенты: проф. *Н.Ш. Кремер* (ВЗФЭИ),
проф., д.э.н. *И.Н. Дрогобыцкий* (ФА)

Васенкова Е.К., Волкова Е.С., Шандра И.Г. Математика для экономистов. Дифференциальные и разностные уравнения: Курс лекций. М.: Финансовая академия, 2003. 116 с.

Данное пособие представляет собой коренную переработку издания 1998 г. и полностью соответствует требованиям новых Госстандартов по математике для экономических специальностей. В нем, в частности, рассмотрены новые темы "Уравнения в полных дифференциалах", "Уравнения, допускающие понижение порядка", "Разностные уравнения". Пособие пополнено новыми примерами и упражнениями, добавлены вопросы для самоконтроля.

Пособие предназначено в первую очередь для самостоятельной работы студентов по курсу "Математика" во втором семестре 1-го курса.

Параграфы 1–10 написаны И.Г. Шандрой, с § 11 по §14 – И.Г. Шандрой и Е.К. Васенковой, с § 15 по § 17 – И.Г. Шандрой и Е.С. Волковой.

ISBN 5-7942-0300-5

§ 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ПРИМЕРЫ

Различные вопросы математики, естествознания, экономики приводят к необходимости решения уравнений, содержащих в качестве неизвестной некоторую функцию $y(x)$ и ее производные до некоторого порядка n. С одним из наиболее простых таких уравнений, уравнением вида $y' = f(x)$, мы уже встречались в интегральном исчислении. Его решением является неопределенный интеграл от $f(x)$. Приведем другие примеры таких уравнений:

$$y' + 2y = x^2;\ y''' + y' = 0;\ y'' = xy.$$

Определение. *Уравнение, связывающее независимую переменную x с неизвестной функцией $y(x)$ и ее производными до некоторого порядка n включительно, называется* ***дифференциальным уравнением n-го порядка.***

Таким образом, приведенные выше уравнения являются примерами дифференциальных уравнений соответственно первого, третьего и второго порядков.

Любое дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где F – некоторая заданная функция, x – независимая переменная, $y(x)$ – искомая функция, а $y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ – ее производные.

Определение. ***Решением*** *дифференциального уравнения* (1) *называется функция* $y(x)$, *имеющая производные до n-го порядка включительно, и такая, что ее подстановка в уравнение* (1) *обращает его в тождество*.

Так, например, решением уравнения $y' = 2y$ является функция $y = e^{2x}$. Легко видеть, что решением этого уравнения будет также любая функция вида

$$y(x) = Ce^{2x}, \tag{2}$$

где C – произвольная постоянная. В дальнейшем мы покажем, что формулой (2) определяются все решения данного уравнения, или, как говорят, задается *общее решение* уравнения. Отметим, что в нашем случае общее решение зависит от произвольной постоянной C. Придавая ей определенные числовые значения, мы будем получать конкретные решения, или, как принято говорить, *частные решения*.

Рассмотрим в качестве примера еще одно уравнение:

$$y'' = x. \tag{3}$$

Имеем:

$$y' = \frac{x^2}{2} + C$$

и далее:

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2, \tag{4}$$

где C_1, C_2 – постоянные. Очевидно, что при любых значениях C_1 и C_2 полученная функция y будет решением уравнения (3), т.е. формула (4) задает общее решение уравнения (3). Оно, как видно, зависит от двух произвольных постоянных C_1 и C_2. Придавая им конкретные значения, мы получаем частные решения.

В дальнейшем понятия общего и частного решения будут уточнены. Однако одно очень важное обстоятельство мы можем отметить уже сейчас, исходя из рассмотренных выше примеров:

1) дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений;

2) общее решение дифференциального уравнения зависит от произвольных постоянных, число которых равно порядку дифференциального уравнения;

3) частные решения получаются из общего путем придания конкретных значений этим постоянным.

Отметим также, что процесс нахождения решения дифференциального уравнения принято называть *интегрированием* этого уравнения, а график решения – *интегральной кривой* данного уравнения.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение и приведите пример дифференциального уравнения *n*-го порядка.
2. Что называется решением дифференциального уравнения?
3. Задано уравнение $y' = 2x$. Какие из функций являются решениями этого уравнения: $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 + 5$, $y_3 = 5x^2$, $y_4 = x^3$, $y_5 = x^2 + C, c = const$?
4. Какая связь между общим и частным решением дифференциального уравнения?
5. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?

§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка есть

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение можно разрешить относительно y', т.е. записать в виде

$$y' = f(x, y), \tag{5}$$

то говорят, что уравнение записано в ***нормальной форме*** (или в ***форме Коши***).

Замечание 1. Уравнение (5) является частным случаем уравнения вида

$$N(x,y)dx + M(x,y)dy = 0, \tag{6}$$

называемого ***уравнением в дифференциалах***. Уравнения (5) и (6) равносильны (т.е. имеют одинаковые решения) в области, где выполнено условие $M(x,y) \neq 0$. Уравнение (6) также называют ***симметричной формой*** *записи* дифференциального уравнения первого порядка. Это название обусловлено тем, что в этом уравнении не обозначено явным образом, какая из переменных является искомой функцией. Поэтому в зависимости от ситуации в качестве таковой может быть выбрана любая из переменных.

2. Рассмотрим *геометрическую трактовку* нахождения решений уравнения (5). Возьмем некоторую точку (x_0, y_0) из области определения D функции $f(x, y)$. Пусть $y = \varphi(x)$ − интегральная кривая, проходящая через эту точку (т.е. $y_0 = \varphi(x_0)$). Из уравнения (5) вытекает, что:

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Таким образом, угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0), равен (при $x = x_0$) числу $f(x_0, y_0)$.

Построим теперь для каждой точки (x_0, y_0) из области определения D прямую, проходящую через эту точку и имеющую угловой коэффициент, равный $f(x_0, y_0)$. В этом случае принято говорить, что эта прямая определяет ***направление*** в точке (x_0, y_0), а на множестве D задано ***поле направлений***. Таким образом, с геометрической точки зрения решить уравнение (5) означает найти кривую, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Правая часть уравнения определена на множестве D, состоящем из точек (x, y), где $x \neq 0$. Следовательно, поле направлений для данного уравнения можно построить на всей плоскости, кроме оси Oy. В каждой точке (x, y) угловой коэффициент y' касательной совпадает с угловым коэффициентом прямой, проходящей через данную точку и начало координат. Вдоль этих прямых угловой коэффициент постоянен, т.е. $\frac{y}{x} = C = \text{const}.$ Отсюда следует, что интегральными кривыми этого уравнения являются прямые $y = Cx$, где C − произвольная постоянная. На рис. 1 изображено поле направлений данного уравнения.

Заметим также, что решения этого уравнения удовлетворяют (при $y \neq 0$) условию:

$$\frac{y'x}{y} = 1,$$

означающему, что эти кривые и только они имеют эластичность, равную 1.

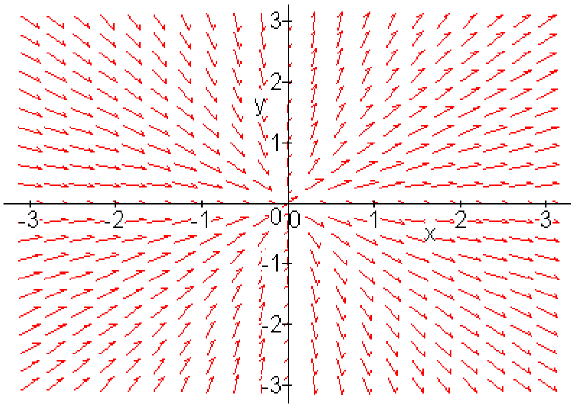

Рис. 1

3. Как мы уже отмечали, дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений. Чтобы из этого множества выделить какое-то конкретное решение, необходимо указать дополнительное условие; чаще всего такое условие задается в виде начального условия

$$y(x_0) = y_0. \tag{7}$$

Задача о нахождении решений дифференциального уравнения (5), удовлетворяющих начальному условию (7), называется ***задачей Коши***.

В общем случае задача Коши может иметь единственное решение, бесконечно много решений, либо вообще не имеет решений. Условия, при которых решение задачи Коши существует и единственно, формулируются в следующей теореме Коши.

Теорема 1 (*о существовании и единственности решения задачи Коши*). *Если в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0) *функция* $f(x, y)$ *определена, непрерывна и имеет непрерывную частную производную* f_y', *то существует такая окрестность точки* (x_0, y_0), *в которой задача Коши* (5), (7) *имеет решение, притом единственное.*

Эту теорему мы примем без доказательства.

На основании теоремы Коши мы можем теперь уточнить понятия общего и частного решений.

Определение. *Если задача Коши* (5), (7) *имеет единственное решение, то это решение называется* ***частным решением*** *уравнения* (5).

Множество всех частных решений называется *общим решением* дифференциального уравнения.

Отметим, что в некоторых случаях процесс решения дифференциального уравнения приводит не к явному выражению $y = \varphi(x, C)$ для общего решения, а к некоторому соотношению вида

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{8}$$

определяющему решение y как неявную функцию. Это соотношение называется ***общим интегралом*** дифференциального уравнения. Из соотношения (8) при помощи выбора постоянных

C может быть получено уравнение любой интегральной кривой, т.е. может быть получено в неявном виде любое частное решение.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называют ***интегрированием*** этого уравнения; обычно под этим понимают нахождение общего решения или общего интеграла.

Замечание 2. В теории дифференциальных уравнений под выражением вида $\int f(x)dx$ принято понимать не множество всех первообразных функции $f(x)$, а какую-либо одну фиксированную первообразную. Само выражение $\int f(x)dx$ часто называют ***квадратурой*** функции $f(x)$, а решить дифференциальное уравнение *в квадратурах* означает выразить его общее решение (или общий интеграл) в виде конечного числа квадратур от элементарных функций или их первообразных.

3. Выше нами была сформулирована теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$. Условием, гарантирующим как существование решения, так и его единственность, является дифференцируемость функции $f(x, y)$. В отдельных точках это условие может нарушаться; через такие точки может не проходить ни одной интегральной кривой или проходить несколько интегральных кривых.

Точки, через которые не проходит ни одна интегральная кривая или проходит более одной интегральной кривой, называются ***особыми точками*** данного дифференциального уравнения.

Может случиться, что некоторая интегральная кривая уравнения состоит из одних особых точек. Такая кривая называется ***особым решением*** уравнения.

Например, для уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ функция $f(x, y) = 3y^{2/3}$ определена и непрерывна на всей плоскости Oxy. Ее частная производная $f'_y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$ существует и непрерывна во всех точках, где $y \neq 0$, т.е. во всех точках, не принадлежащих оси Ox. Таким образом, через любую точку, не лежащую на оси Ox, проходит единственная интегральная кривая уравнения. Чтобы выяснить, как обстоит дело с точками оси Ox, проинтегрируем данное уравнение. Имеем:

$$\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = dx ,$$

откуда следует

$$y^{1/3} + C = x ,$$

или

$$y = (x - C)^3.$$

Итак, общее решение представляет собой семейство кубических парабол. Однако имеется еще одно решение – $y(x) = 0$. Следовательно, через любую точку $(C, 0)$ оси Ox проходят, по крайней мере, две интегральные кривые: ось Ox и парабола $y = (x - C)^3$. Это показывает, что точки оси Ox являются особыми точками уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, а функция $y(x) = 0$ – особым решением.

Нетрудно установить, что через любую точку вида $(C, 0)$ проходит в действительности бесчисленное множество интегральных кривых. Любую из них можно составить из трех кусков: "нижней" половины параболы $y = (x - C_1)^3$, где C_1 - число, меньшее или равное C, отрезка C_1C_2 оси Ox, где $C_2 > C_1$, и "верхней" половины параболы $y = (x - C_2)^3$ (см. рис. 2).

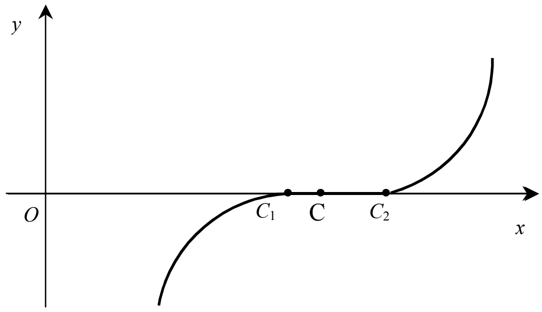

Рис. 2

Из этого примера можно понять, почему в формулировке теоремы Коши мы были вынуждены говорить о существовании и единственности решения лишь в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0), а не во всей области существования функции $f(x, y)$. В самом деле, пусть точка (x_0, y_0) не является особой для уравнения $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$, т.е. $y \neq 0$. Если взять столь малую окрестность D точки (x_0, y_0), чтобы она не пересекала ось Ox, то внутри такой окрестности через точку (x_0, y_0) будет проходить единственная кубическая парабола вида $y = (x - C)^3$. Однако, если взять достаточно большую окрестность (например, всю плоскость Oxy), то окажется, что внутри такой окрестности через точку $(x_0; y_0)$ проходит бесчисленное множество интегральных кривых. Любую из них можно составить указанным выше способом из трех кусков, один из которых проходит через точку $(x_0;y_0)$ (рис.3).

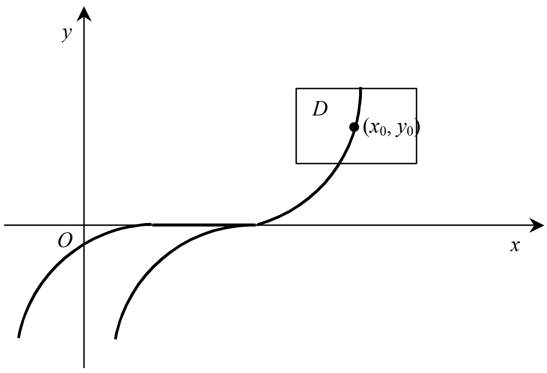

Рис. 3

Вопросы для самоконтроля

1. Какая форма записи дифференциального уравнения первого порядка называется нормальной? симметрической?
2. В чем состоит геометрический смысл решения дифференциального уравнения?
3. Что называется задачей Коши дифференциального уравнения первого порядка?
4. Сформулируйте условие, достаточное для существования и единственности решения задачи Коши.
5. Что понимается под интегрированием дифференциального уравнения?
6. Что означает решить дифференциальное уравнение в квадратурах?
7. Какие точки называются особыми точками дифференциального уравнения?
8. Какое решение дифференциального уравнения называется особым?

§ 3. Уравнения с разделяющимися переменными. Автономные уравнения

1. Одним из наиболее простых, но весьма важных с точки зрения приложений типов дифференциальных уравнений являются ***уравнения с разделяющимися переменными***. Это дифференциальные уравнения вида:

$$y' = p(x)g(y), \tag{9}$$

где $p(x)$ и $g(y)$ – непрерывные функции.

Запишем уравнение (9) в форме:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)g(y).$$

Для отыскания решения этого уравнения необходимо, как говорят, *разделить* в нем *переменные*, т.е. переписать уравнение следующим образом:

$$\frac{dy}{g(y)} = p(x)dx,$$

в предположении, что в рассматриваемой области $g(y) \neq 0$. Теперь левая часть уравнения содержит только переменную y, а правая только x. Интегрируя обе части этого уравнения, получим:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)dx + C.$$

Таким образом, найден общий интеграл уравнения (9).

Пример 2. Найти функцию, имеющую постоянную эластичность, равную k.

По условию задачи имеем:

$$\frac{y'x}{y} = k,$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = k.$$

Отсюда, при естественном предположении $x \neq 0$, получим:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \cdot k \ .$$

Интегрируя обе части полученного равенства, находим

$$\ln|y| = k\ln|x| + \ln C,$$

откуда следует, что:

$$y = C \cdot x^k.$$

Замечание 1. Обобщением уравнения (9) является уравнение в дифференциалах вида

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0\,,$$

где $p_1(x)$, $p_2(x)$, $g_1(y)$ и $g_2(y)$ – непрерывные функции. Его также называют *уравнением с разделяющимися переменными* и к нему полностью применим метод интегрирования, описанный выше для уравнения (9).

2. Одним из важных частных случаев дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными являются так называемые *автономные уравнения*. Это уравнения вида:

$$y' = g(y)\,. \tag{10}$$

Такие уравнения часто встречаются в различных вопросах экономической динамики. Обычно в качестве независимой переменной рассматривается время; его отсутствие в правой части уравнения (10) можно трактовать, как неизменность законов, по которым развивается экономическая система в рассматриваемый промежуток времени.

Замечание 2. Если y^* – корень уравнения $g(y) = 0$, то $y = y^*$ ($= const$) является решением уравнения (10). Такое решение называется ***стационарным.***

Отметим еще одно интересное свойство, которым обладают решения автономного уравнения.

Теорема 2. *Если $y = \varphi(x)$ – решение автономного дифференциального уравнения, то $y = \varphi(x + C)$ также является решением этого уравнения.*

Доказательство. Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (10), т.е.

$$\varphi'(x) = g(\varphi\,(x)).$$

Это равенство выполняется для любого x из области определения, поэтому мы можем заменить в нем x на $x + C$, в результате получим:

$$\varphi'(x + C) = g(\varphi\,(x + C)). \tag{11}$$

Положим $\bar{y} = \varphi(x + C)$. Принимая во внимание равенство (11) и правило дифференцирования сложной функции, находим:

$$\bar{y}' = \varphi'(x + C) \cdot (x + C)' = g(\varphi(x + C)) \cdot 1 = g(\bar{y})\ .$$

Это говорит о том, что функция $\bar{y} = \varphi(x + C)$ также является решением. Теорема доказана.

Замечание 3. Геометрическая трактовка данной теоремы заключается в том, что при параллельном переносе вдоль оси Ox интегральные кривые автономного уравнения переходят друг в друга.

Замечание 4. Если $g(y) \neq 0$, то общее решение автономного уравнения задается формулой $y = \varphi(x + C)$, где $\varphi(x)$ – произвольное частное решение.

3. К автономным уравнениям приводятся дифференциальные уравнения вида:

$$y' = f(ky + lx + p), \tag{12}$$

где k, l, p – некоторые постоянные. Естественно предполагать, что k и l отличны от нуля. Тогда, применяя подстановку $z=ky+lx$, получаем, что $z' = ky' + l$. Следовательно, уравнение (12) равносильно уравнению $z' = kf(z + p) + l$, которое в свою очередь совпадает с (10), если положить $g(z) = kf(z + p) + l$. Нетрудно видеть, что к данному результату также можно было прийти, применив замену $z = ky + lx + p$.

Аналогичным образом к однородным уравнениям приводятся и уравнения вида:

$$y' = f\left(\frac{ky + lx + p}{my + nx + q}\right), \tag{13}$$

где k, l, p, m, n, q – некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям: $kn - lm = 0$, $k \neq 0$, $l \neq 0$. Из этих условий вытекает, что:

$$\frac{m}{k} = \frac{n}{l} = a.$$

Поэтому после замены $z = ky + lx$, уравнение (13) преобразуется к виду:

$$z' = kf\left(\frac{z + p}{az + q}\right) + l,$$

то есть к уравнению вида (10).

Пример 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$y' = \cos(2y + 2x + 6).$$

Делая замену $z = 2y + 2x + 6$, находим $z' = 2y' + 2$. А, следовательно,

$$z' = 2\cos z + 2,$$

или

$$z' = 4\cos^2 \frac{z}{2}. \tag{14}$$

Мы получили автономное дифференциальное уравнение. Возможны два случая.

1) $\cos\frac{z}{2} \neq 0$. Тогда, разделяя в (14) переменные, получаем:

$$\frac{dz}{2\cos^2\frac{z}{2}} = 2dx.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2} = 2x + C.$$

Откуда:

$$y = 2\operatorname{arctg}(2x+C) + 2\pi k. \tag{15}$$

2) $\cos\frac{z}{2} = 0$. Этот случай дает нам стационарные решение уравнения (14):

$$z = (2k+1)\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{16}$$

Теперь, возвращаясь в (15) и (16) к переменной $y = z/2 - x - 3$, получаем решение исходного уравнения:

$$y = \operatorname{arctg}(2x+C) + 2\pi k - x - 3,$$

$$y = \frac{\pi}{2} + \pi k - x - 3,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 4. Решить дифференциальное уравнение:

$$y' = \left(\frac{y-x}{2y-2x+1}\right)^2 + 1.$$

Положив $z = y - x$, имеем $z' = y' - 1$. Следовательно:

$$z' = \left(\frac{z}{2z+1}\right)^2.$$

Очевидно, что $z = 0$ является решением этого уравнения. Если же $z \neq 0$, то, разделяя переменные, приходим к уравнению:

$$\left(2 + \frac{1}{z}\right)^2 dz = dx.$$

Интегрируя его, находим:

$$4z + 4\ln|z| - \frac{1}{z} = x + C \cdot$$

Сделав обратную замену, получаем общий интеграл исходного уравнения:

$$4y - 4\ln|y - x| - \frac{1}{(y - x)} = 5x + C \cdot$$

Кроме того, случай $z = 0$ дает еще одно решение:

$$y = x.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение и приведите пример дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
2. Дайте определение и приведите пример автономного уравнения.
3. Приведите пример уравнения, приводимого к автономному.
4. Сформулируйте и докажите свойство, которым обладают решения автономного уравнения. В чем заключается его геометрический смысл?
5. Что такое стационарное решение автономного уравнения?

§ 4. Математические модели экономической динамики с непрерывным временем

Рассматривая ниже некоторые математические модели роста, мы будем предполагать, что в качестве аргумента неизвестной функции выбрано время t. Данные модели, базирующиеся на дифференциальных уравнениях, называются моделями роста с непрерывным временем. Отметим, что существуют также дискретные аналоги этих моделей, они будут рассмотрены ниже.

I. Модель естественного роста (рост при постоянном темпе)

Пусть $y(t)$ – интенсивность (т.е. величина выпуска на единицу времени) выпуска продукции некоторого предприятия. Мы будем предполагать, что имеет место аксиома о ненасыщаемости потребителя, т.е. что весь выпущенный предприятием товар будет продан, а также то, что объем продаж не является столь высоким, чтобы существенно повлиять на цену товара p, которую ввиду этого мы будем считать фиксированной. Чтобы увеличить интенсивность выпуска $y(t)$, необходимо, чтобы чистые инвестиции $I(t)$ (т. е. разность между общим объемом инвестиций и амортизационными затратами) были больше нуля. В случае $I(t) = 0$ общие инвестиции только лишь покрывают затраты на амортизацию, и уровень выпуска продукции остается неизменным. Случай $I < 0$ приводит к уменьшению основных фондов и, как следствие, к уменьшению уровня выпуска продукции. Таким образом, мы видим, что скорость увеличения интенсивности выпуска продукции является возрастающей функцией от I.

Пусть эта зависимость выражается прямой пропорциональностью, т.е. имеет место так называемый *принцип акселерации*:

$$my' = I \quad (m = \text{const}), \tag{17}$$

где m – *норма акселерации*. Пусть α – *норма чистых инвестиций*, т.е. часть дохода py, которая тратится на чистые инвестиции, тогда

$$I = \alpha py.$$

Подставляя отсюда выражение для I в (17), получаем:

$$y' = \frac{\alpha p}{m} y,$$

или

$$y' = ky, \tag{18}$$

где $k = \alpha p/m$. Разделяя переменные в уравнении (18), имеем:

$$\frac{dy}{y} = kdt.$$

Отсюда после интегрирования обеих частей находим:

$$\ln|y| = kt + \ln|C|$$

или, что то же самое:

$$y = Ce^{kt}. \tag{19}$$

Интегральная кривая уравнения (18) имеет вид:

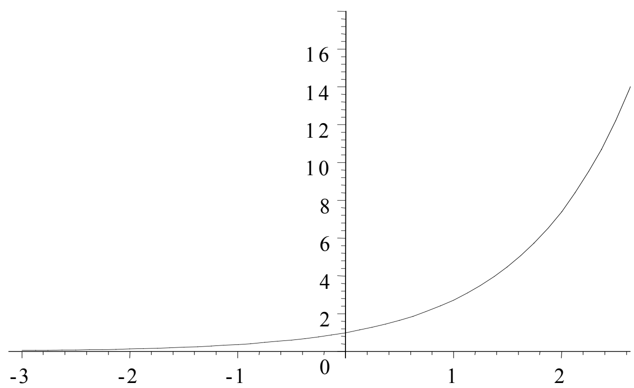

Рис. 4

Если $y(t_0) = y_0$, то из (19) следует, что $C = y_0 e^{-kt_0}$, то есть:

$$y = y_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{20}$$

Уравнение (18) называется ***уравнением естественного роста***. Этим уравнением описываются также динамика роста цен при постоянном темпе инфляции, процессы радиоактивного распада и процессы размножения бактерий. Эту модель целесообразно применять для исследования начальных этапов развития экономической системы и в течение ограниченного промежутка времени, поскольку, как это следует из уравнения (20), с течением времени y может принимать сколь угодно большие значения, что не может не сказаться на изменении цены (в данной модели мы ее предполагали постоянной).

2. Логистический рост

1. Рассмотрим более общий случай по сравнению с предыдущим пунктом. Пусть $p = p(y)$ – убывающая функция $\left(\frac{dp}{dy} < 0\right)$, т.е. с увеличением выпуска будет происходить насыщение рынка и цена будет падать. Проведя аналогичные рассуждения, получим уравнение:

$$y' = kp(y) \cdot y, \tag{21}$$

здесь $k = \alpha \backslash m$. Уравнение (21) представляет собой автономное дифференциальное уравнение. Так как $k > 0$, $p > 0$, $y > 0$, то из (21) следует, что $y(t)$ есть возрастающая функция ($y' > 0$). Исследуем $y(t)$ на выпуклость. Дифференцируя уравнение (21) по t, имеем:

$$y'' = ky'\left(\frac{dp}{dy} \cdot y + p\right)$$

$$y'' = ky'p\left(\frac{dp}{dy} \cdot \frac{y}{p} + 1\right),$$

$$y'' = ky'p\left(1 - \frac{1}{|e_y|}\right),$$

где $e_y(p) = \frac{dy}{dp} \cdot \frac{p}{y}$ – эластичность спроса. Из последнего соотношения вытекает, что если спрос эластичен, т.е. $|e_y| > 1$, то $y'' > 0$, т.е. функция спроса – вогнутая функция, а если спрос неэластичен, т.е. $|e_y| < 1$, то $y'' < 0$ и функция спроса – выпуклая функция.

2. Рассмотрим наиболее простой вид зависимости цены от выпуска – линейный. То есть предположим, что:

$$p(y) = b - ay \ (a, b > 0),$$

тогда уравнение (21) принимает вид:

$$y' = k(b - ay)y. \tag{22}$$

Из (22) легко получить, что $y' = 0$, если $y = 0$, или $y = \frac{b}{a}$, а также, что $y'' < 0$ при $y < \frac{b}{2a}$, и $y'' > 0$ при $y > \frac{b}{a}$. График $y(t)$ имеет вид:

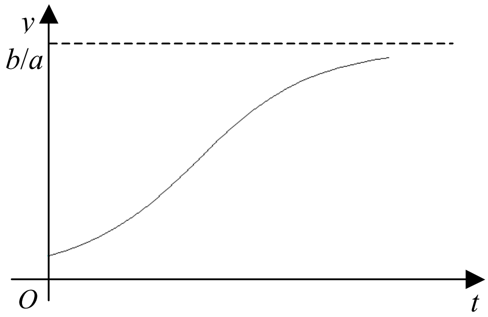

Рис. 5

В данном случае нетрудно получить и явное выражение для $y(t)$. Разделяя переменные в уравнении (22), находим:

$$\frac{dy}{y(b-ay)} = kdt\,,$$

или

$$\frac{dy}{b}\left(\frac{1}{y} + \frac{a}{b-ay}\right) = kdt\,.$$

Проинтегрировав это соотношение, имеем:

$$\ln|y| - \ln|b - ay| = kbt + \ln C,$$

$$\frac{y}{b-ay} = Ce^{kbt}\,.$$

Отсюда получим, что:

$$y = \frac{Cbe^{bkt}}{1 + Cae^{bkt}}\,.$$

Интегральная кривая уравнения (22) называется ***логистической кривой***. Она также описывает некоторые модели распространения информации (рекламы), динамику эпидемий, жизненные циклы технологических укладов, процессы размножения бактерий в ограниченной среде обитания и др.

Замечание 1. Из графика логистической кривой видно, что при малых t логистический рост схож с естественным ростом, однако при больших t характер роста меняется, темпы роста замедляются, и кривая асимптотически приближается к прямой $y = \dfrac{b}{a}$. Эта прямая является стационарным решением уравнения (22) и соответствует случаю $p(y) = 0$. Для уравнения (22) также существуют решения и при $y > \dfrac{b}{a}$, имеющие графики вида.

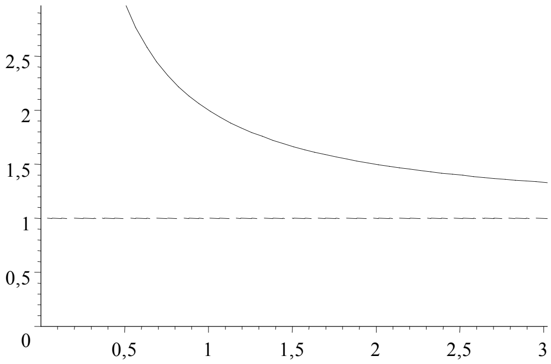

Рис. 6

Но, так как в этом случае $p(y) < 0$, то они не имеют экономической интерпретации.

Замечание 2. Интегральная кривая дифференциального уравнения:

$$y' = k(t)(y - y_1)(y_2 - y), \tag{23}$$

где $k(t) > 0$, $y_2 > y_1 > 0$, называется *обобщенной логистической кривой.*

Уравнение (23) используется для описания моделей роста в макроэкономике, в частности – роста в условиях инфляции или роста с учетом технологического прогресса. При этом множитель $k(t)$ носит соответственно название *мультипликатор инфляции* или *мультипликатор технологического прогресса*. Проделав выкладки, аналогичные тем, что были проведены выше для уравнения (22), нетрудно получить решения:

$$y = y_1,\ y = y_2,\ \ y = \frac{y_1 + y_2 Ce^{P(t)}}{1 + Ce^{P(t)}},$$

где $P(x) = (y_2 - y_1)\int k(t)dt$.

3. Более реалистичной является модель, в которой скорость роста зависит не от дохода, а от прибыли. Пусть $S(y) = \alpha y + \beta$ – функция издержек, где αy – переменные издержки, а β – постоянные (α, $\beta = const$), тогда:

$$y' = k(p(y) \cdot y - \alpha y - \beta). \tag{24}$$

Если теперь предположить, что $p(y) = b - ay$, то правая часть уравнения (23) представляет собой квадратный трехчлен относительно y с отрицательным коэффициентом перед y^2. В этом случае возможны три варианта:

а) $D < 0$. Следовательно, $y' < 0$. Издержки настолько велики, что это приводит к постоянному падению уровня производства и в конце концов к банкротству.

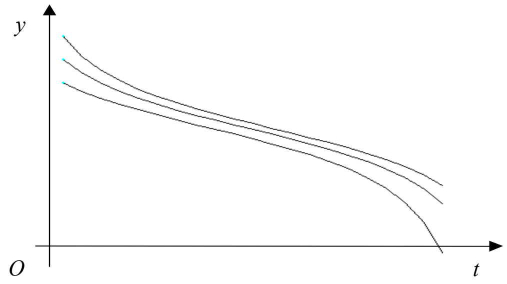

Рис. 7

б) $D = 0$. В этом случае $y' \geq 0$ и имеется одна стационарная кривая

$$y = y^* < \frac{b}{a}.$$

При этом интегральные кривые, удовлетворяющие начальному условию $y(t_0) = y_0 > y^*$ (тогда $y_0 < \frac{b}{a}$) будут асимптотически приближаться к y^* на $+\infty$, а удовлетворяющие условию $y(t_0) < y^*$, будут асимптотически приближаться к y^* на $-\infty$.

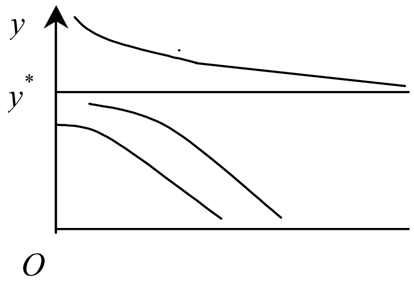

Рис. 8

в) $D > 0$. В этом случае существуют два стационарных решения $y = y_1$, $y = y_2$.$(0 < y_1 < y_2 < \frac{b}{a})$. При этом $y' > 0$ при $y_1 < y < y_2$, и $y' < 0$ при $y < y_1$ или $y > y_2$.

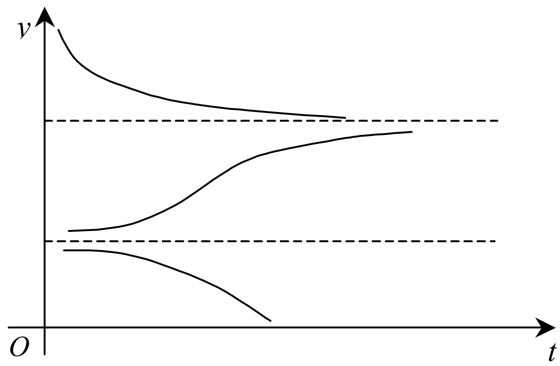

Рис. 9

Предлагаем читателю самостоятельно проинтегрировать уравнение (24) (в предположении $p(y) = b - ay$) и получить явные выражения для y.

3. Неоклассическая модель роста

Пусть $Y = F(K, L)$ – национальный доход, где K – объем капиталовложений (фондов) , L – величина затрат труда, $F(K, L)$ – линейно-однородная производственная функция

$$F(tK, tL) = tF(K, L).$$

Обозначим через $f(k)$ производительность труда:

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k, 1)$$

где $k = K/L$ – фондовооруженность. Производственная функция называется *неоклассической*, если

$$f'(k) > 0, f''(k) < 0 .$$

Мы будем предполагать, что:

1. Происходит естественный прирост трудовых ресурсов, т.е.

$$L' = \alpha L \ (\alpha = \text{const}). \tag{25}$$

2. Инвестиции направлены как на увеличение производственных фондов, так и на амортизацию, т.е.

$$I = K' + \beta K \tag{26}$$

(β – норма амортизации).

Пусть v-норма инвестиций (т.е. $I = vY$), тогда в силу (26), имеем:

$$vY = K' + \beta K$$

$$K' = vY - \beta K . \tag{27}$$

Из определения фондовооруженности вытекает:

$$k' = \left(\frac{K}{L}\right)' = \frac{K'L - KL'}{L^2} .$$

Подставляя сюда значения для L' и K' из (25) и (27), находим:

$$k' = \frac{(vY - \beta K)L - \alpha LK}{L^2} ,$$

т.е. $k' = \dfrac{vY}{L} - (\beta + \alpha)k$.

Учитывая, что $f = \dfrac{Y}{L}$, получаем:

$$k' = vf(k) - (\alpha + \beta)k\,. \tag{28}$$

Уравнение (28) называется ***уравнением неоклассического роста***.

Замечание 3. У автономного дифференциального уравнения (28) существует стационарное решение $k = k^*$. Действительно, так как $f''(k) < 0$, то графики $vf(k)$ и $(\alpha + \beta)k$ обязательно пересекутся.

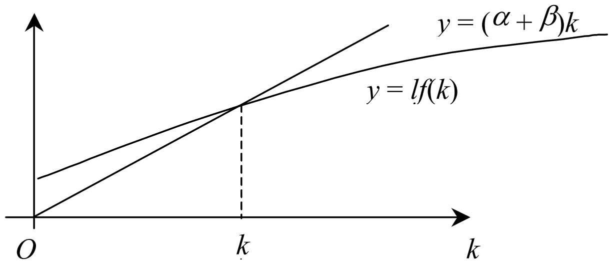

Рис. 10

Кроме того, так как $f'(k)$ непрерывная монотонно убывающая функция, то существует такое k_1, что $f'(k_1) = \dfrac{(\alpha + \beta)}{m}$ (т.е. у $k(t)$ существует точка перегиба). Итак, при $k > k^*$ имеем $k' < 0$; при $k < k^*$ будет $k' > 0$. При $k < k_1$ имеем $k'' > 0$, а при $k > k_1$, $k'' < 0$.

Ввиду этого интегральная кривая уравнения (28) очень напоминает логистическую кривую.

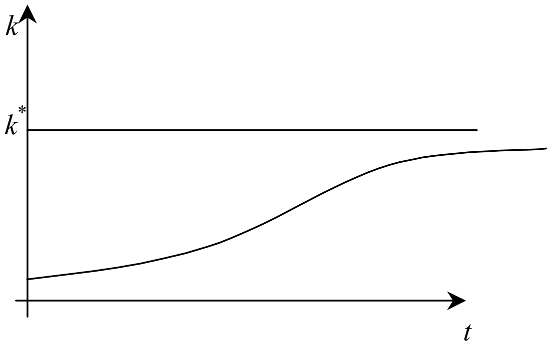

Рис. 11

Вопросы для самоконтроля

1. В чем состоит принцип акселерации?
2. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением естественного роста? Какие процессы моделирует это уравнение?
3. Что такое логистическая кривая? Какие процессы она моделирует?
4. Проинтегрируйте уравнение (24) в предположении $p(y) = b - ay$.

§ 5. Однородные уравнения

1. **Определение.** *Дифференциальное уравнение первого порядка*

$$N(x,y)dx + M(x,y)dy = 0; \qquad (29)$$

где $N(x,y)$ и $M(x,y)$ – однородные функции одной и той же степени, называется ***однородным уравнением***.

Рассмотрим другие формы записи однородного уравнения. Дифференциальное уравнение, заданное в нормальной форме:

$$y' = F(x, y), \qquad (30)$$

является однородным, тогда и только тогда, когда функция $F(x,y)$ есть однородная функция нулевой степени. Кроме того, если в рассматриваемой области выполнено условие $x \neq 0$, то на основании определения однородной функции нулевой степени правая часть уравнение (30) может быть преобразована следующим образом:

$$F(x,y) = F\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^0 F\left(1, \frac{y}{x}\right) = F\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

В силу этого уравнение (30) принимает вид:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (31)$$

где $f\left(\frac{y}{x}\right) = F\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

Пример 5. Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$(x^2 + y^2) \cdot dy - xy \cdot dx = 0. \qquad (32)$$

Оно является однородным, так как обе функции $N(x,y) = x^2 + y^2$ и $M(x,y) = -xy$ являются однородными второй степени. В области, не включающей в себя начало координат, данное уравнение может быть записано в нормальной форме:

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Если дополнительно потребовать выполнения условия $x \neq 0$, то данное уравнение принимает вид:

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}. \qquad (33)$$

2. Остановимся теперь на методе интегрирования однородного уравнения. Подстановкой

$$y(x) = xu(x)$$

это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Продемонстрируем это на примере уравнения (31). Имеем:

$$y' = u(x) + xu'(x).$$

Ввиду этого соотношение (31) принимает вид:

$$u + xu' = f(u).$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}.$$

Отсюда находим общий интеграл уравнения:

$$\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|x| + C.$$

После нахождения *u(x)* необходимо вернуться к функции $y(x) = xu(x)$.

Замечание 1. Если существуют корни уравнения $f(u) = u$, то к найденным решениям добавляются стационарные решения $u(x) = u^*$, где u^* – любой корень уравнения $f(u) = u$.

Пример 6. Решить уравнение:

$$y' = 3\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1.$$

Это уравнение является однородным. Выполнив замену $y(x) = xu(x)$, приходим к уравнению:

$$u' = \frac{2u - u^2 - 1}{x}. \qquad (34)$$

Разделяя в нем переменные, получим при $u \neq 1$

$$\int \frac{du}{2u - u^2 - 1} = \int \frac{dx}{x},$$

или

$$\frac{1}{u-1} = \ln|x| + C,$$

$$u = \left(\ln|x| + C\right)^{-1} + 1.$$

Кроме этого, у уравнения (34) имеется стационарное решение $u(x) = 1$. Таким образом, решением исходного уравнения являются функции:

$$y(x) = \frac{x}{\ln|x| + C} + x;\ \ y(x) = x\ .$$

3. К однородным уравнениям приводятся дифференциальные уравнения вида:

$$y' = f\left(\frac{ky + lx + p}{my + nx + q}\right),\ kn{-}lm \neq 0, \qquad (35)$$

где k, l, p, m, n, q – некоторые постоянные. Этого можно добиться, сделав замену переменных:

$$t = x - \alpha\ ;\ z = y - \beta, \qquad (36)$$

и выбрав постоянные α и β таким образом, чтобы свободные члены в правой части выражения (35) стали равными нулю. Действительно, на основании (35) , (36) имеем:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dy}{dx} - 0\right)\cdot 1 = f\left(\frac{kz + lt + k\beta + l\alpha + p}{mz + nt + m\beta + n\alpha + q}\right).$$

Приравнивая к нулю свободные члены в числителе и знаменателе дроби, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} k\beta + l\alpha = -p \\ m\beta + n\alpha = -q \end{cases}. \qquad (37)$$

Определитель этой системы равен $kn - ml$ и в силу (35) отличен от нуля. Следовательно, у этой системы существует единственное решение и пара (β,α) определена однозначно. Таким образом, в результате проведенной замены уравнение (35) преобразуется к однородному уравнению:

$$\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{kz + lt}{mz + nt}\right).$$

Пример 7. Решить уравнение:

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y + x + 3}{x + 2}\right)^2. \qquad (38)$$

В данном случае замена очевидна и можно обойтись без решения системы (37). Положим $t = x + 2$, $z = y + 1$. Тогда уравнение (37) принимает вид:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{z + t}{t}\right)^2,$$

или

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{t}+1\right)^2.$$

Применяя в полученном однородном уравнении подстановку $z = ut$, находим:

$$\frac{du}{dt}=\frac{u^2+1}{2t}.$$

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dz}{u^2+1}=\frac{dt}{2t}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\operatorname{arctg} u=\frac{1}{2}\ln|t|+C.$$

Возвращаясь сначала к переменной z, а затем к переменным x и y, находим общий интеграл уравнения (38):

$$\operatorname{arctg}\frac{y+1}{x+2}=\frac{1}{2}\ln|x+2|+C.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение и приведите пример однородного дифференциального уравнения.
2. Опишите последовательность интегрирования однородного уравнения.
3. Приведите пример уравнения, приводимого к однородному.

§ 6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

1. **Определение.** *Дифференциальное уравнение вида*

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y + \gamma(x) = 0 \tag{39}$$

называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***.

Предполагается, что $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – непрерывные на некотором промежутке функции. Если $\alpha(x) \neq 0$, то уравнение (39) можно преобразовать следующим образом:

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{40}$$

где $p(x)=\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$; $f(x)=-\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$.

Дифференциальное уравнение:

$$y' + p(x)y = 0 \tag{41}$$

называется ***линейным однородным уравнением***, соответствующим уравнению (40).

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения (40) применим ***метод Лагранжа*** (другое название этого метода – ***метод вариации произвольной постоянной***). Сначала найдем решение уравнения (41), которое представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Очевидно, что $y = 0$ является решением уравнения (41). При $y \neq 0$ имеем:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$\ln|y| = -P(x) + \ln|C|,$$

где $P(x) = \int p(x)dx$, а C – отличная от нуля постоянная. Из последнего уравнения находим общее решение уравнения (41):

$$y = Ce^{-P(x)}, \tag{42}$$

здесь C – уже произвольная постоянная, так как решение $y = 0$ входит в (42) при $C = 0$.

Теперь заменим в формуле (42) постоянную C на некоторую (искомую) функцию $C(x)$, т.е. общее решение уравнения (40) будем искать в виде:

$$y = C(x)e^{-P(x)}. \tag{43}$$

Из (43) следует:

$$y' = C'e^{-P(x)} - Ce^{-P(x)}p(x). \tag{44}$$

Подставляя выражения для y и y' из (43) и (44) в (40), находим:

$$C'e^{-P(x)} - Ce^{-P(x)}p(x) + p(x)Ce^{-P(x)} = f(x).$$

Отсюда получим, что:

$$C' = f(x)e^{P(x)}.$$

Следовательно:

$$C(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx. \tag{45}$$

Подставив в (43) выражение для $C(x)$, получим общее решение уравнения (40).

Итак, сформулируем алгоритм решения линейного неоднородного дифференциального уравнения *методом Лагранжа* (*методом вариации постоянной*).

1) Для заданного неоднородного уравнения (40) выписать соответствующее ему однородное уравнение (формула (41)).
2) Методом разделения переменных найти общее решение однородного уравнения (формула (42)).

3) В общем решении однородного уравнения заменить постоянную C на функцию $C(x)$ (формула (43)).

4) Подставить полученное в пункте 3 выражение в исходное неоднородное уравнение и найти $C(x)$ (формула (45)).

5) Выписать общее решение неоднородного уравнения, подставив выражение для $C(x)$ в (43).

Пример 8. Решить уравнение:

$$y' + \frac{2y}{x} = 5x^2 .$$

Это линейное дифференциальное уравнение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$y' + 2\frac{y}{x} = 0 .$$

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x}$$

Откуда:

$$\ln|y| = -2\ln|x| + \ln C ,$$

т.е. $y = \dfrac{C}{x^2}$.

Полагая $C = C(x)$, находим:

$$y' = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} .$$

Подставив выражение для y и y' в исходное уравнение, получим:

$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2C(x)}{x^3} = 5x^2 .$$

Отсюда следует, что:

$$C'(x) = 5x^4.$$

Значит:

$$C(x) = x^5 + C_1 \ (C_1 = const).$$

Таким образом,

$$y(x)=\frac{x^5+C_1}{x^2} \quad \text{или} \quad y(x)=x^3+\frac{C_1}{x^2}.$$

Замечание 1. В некоторых случаях дифференциальное уравнение может быть приведено к линейному, если поменять ролями переменные y и x – искомую функцию и ее аргумент.

Пример 9. Решить задачу Коши:

$$y'=\frac{y}{x+2y^3},\ y(8)=2. \tag{46}$$

Данное дифференциальное уравнение не является линейным относительно неизвестной функции $y(x)$. Однако, если предположить, что неизвестной является функция $x(y)$, то уравнение станет линейным. Действительно, из (46) следует:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x+2y^3}{y}, \tag{47}$$

или

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+2y^2.$$

Решением соответствующего линейного однородного уравнения является

$$x = Cy.$$

В соответствии с методом вариации постоянной будем искать решение неоднородного уравнения в виде $x = C(y)\ y$. Подставляя выражение для x в (47), после приведения подобных получаем:

$$C'y=2y^2.$$

Отсюда находим:

$$C(y) = y^2 + C_1\ (C_1 = const).$$

Таким образом, решением уравнения (47) является:

$$x = y^3 + C_1 y. \tag{48}$$

Теперь найдем решение задачи Коши (46). Полагая в (48) $x = 8$, $y = 2$, получаем, что $C_1 = 0$. Следовательно, $x = y^3$, а, значит, $y=\sqrt[3]{x}$.

2. Для решения линейного дифференциального уравнения может быть также применен ***метод Бернулли***, который заключается в следующем.

1) Решение уравнения (40) ищется в виде:

$$y = u(x)v(x), \tag{49}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые функции, которые необходимо определить.

2) Выражение для y подставляется в исходное уравнение, и после группировки слагаемых оно принимает вид:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)\,. \tag{50}$$

3) Функция $v(x)$ находится из уравнения:

$$v' + p(x)v = 0\,. \tag{51}$$

4) После подстановки найденной функции $v(x)$ в уравнение (50) получается следующее уравнение для определения функции $u(x)$:

$$u' = -\frac{f(x)}{v(x)}\,. \tag{52}$$

5) Искомое общее решение выписывается в виде произведения функций $u(x)$ и $v(x)$.

Пример 10. Решить уравнение:

$$y' + y\operatorname{ctg} x = 2\cos x\,.$$

Полагая в уравнении $y = u(x)v(x)$, имеем:

$$u'v + u(v' + v\operatorname{ctg} x) = 2\cos x\,. \tag{53}$$

Приравнивая выражение в скобках к нулю, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{v'}{v} = -\operatorname{ctg} x\,.$$

Его общее решение имеет вид:

$$v(x) = \frac{\mathrm{C}}{\sin x}\,.$$

В качестве $v(x)$ возьмем частное решение:

$$v(x) = \frac{1}{\sin x}, \tag{54}$$

получающееся из общего при $C = 1$. Подставляя выражение для $v(x)$ из (54) в (53), находим:

$$u' = 2\sin x\cos x\,.$$

Отсюда находим, что:

$$u(x) = \sin^2 x + C.$$

Тогда:

$$y = uv = \frac{\sin^2 x + C}{\sin x}\,.$$

Таким образом, общим решением исходного уравнения будет:

$$y = \sin x + \frac{C}{\sin x}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение и приведите пример линейного дифференциального уравнения.
2. Сформулируйте алгоритм решения линейного дифференциального уравнения методом Лагранжа. В чем его отличие от метода Бернулли?

§ 7. Уравнения Бернулли и Риккати

1. Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x)y^n \ (n \neq 0,\ n \neq 1) \tag{55}$$

*называется **уравнением Бернулли**.*

Заменой $z = y^{1-n}$ уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению:

$$z' + (1 - n)\, p(x)z = (1 - n)\, f(x).$$

Пример 11. Решить уравнение:

$$y' - y = \frac{e^{6x}}{y^2}.$$

Это уравнение Бернулли ($n = -2$). Выполнив замену $z = y^3$, получим $z' = 3y^2y'$. Умножая обе части исходного уравнения на $3y^2$ ($\neq 0$), с учетом выражений для z и z', находим

$$z' - 3z = 3e^{6x}.$$

Соответствующее линейное однородное уравнение $z' - 3z = 0$ имеет решение $z = Ce^{3x}$. Применяя метод вариации постоянной, получаем:

$$C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x} - 3C(x)e^{3x} = 3e^{6x},$$

т.е. $C'(x) = 3e^{3x}$, $C(x) = e^{3x} + C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Таким образом, $z = e^{6x} + C_1e^{3x}$. Значит, $y = \sqrt[3]{e^{6x} + C_1e^{3x}}$.

Замечание 1. Уравнение Бернулли может быть решено непосредственно при помощи метода Лагранжа или метода Бернулли без предварительного приведения к линейному уравнению.

Пример 12. Решить задачу Коши:

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^4}, \quad y(1) = \frac{1}{2}.$$

Данное уравнение является уравнением Бернулли ($n = 2$). Решим его методом Лагранжа. Для этого рассмотрим сначала однородное линейное уравнение:

$$y' - \frac{y}{x} = 0.$$

Разделяя переменные, находим:

$$y = Cx.$$

В соответствии с методом вариации постоянной решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y = C(x)x$. Подставляя выражения для y и y' в исходное уравнение, имеем:

$$C'x + C - C = \frac{C^2x^2}{x^3}, \qquad \frac{C'}{C^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$\frac{-1}{C} = \frac{-1}{x} - C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Отсюда:

$$C(x) = \frac{x}{C_1x + 1}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = \frac{x^2}{C_1x + 1}. \tag{56}$$

Полагая в (56) $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$, находим:

$$C_1 + 1 = 2.$$

Таким образом, $C_1 = 1$ и решением задачи Коши будет:

$$y = \frac{x^2}{x + 1}.$$

Пример 13. Решить уравнение:

$$y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = \frac{2\operatorname{arctg} x}{3(1 + x^2)^4} y^4.$$

Данное уравнение представляет собой уравнение Бернулли ($n = 4$). Для его решения воспользуемся методом Бернулли. Положим $y = u(x)v(x)$. В силу этого уравнение принимает вид:

$$u'v + u\left(v' - \frac{2xv}{1 + x^2}\right) = \frac{2\operatorname{arctg} x}{3(1 + x^2)^4}(uv)^4. \tag{57}$$

Функцию $v(x)$ найдем как решение уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' - \frac{2xv}{1+x^2} = 0 .$$

Интегрируя его, получаем частное решение:

$$v(x) = 1 + x^2 .$$

Подставляя выражение для $v(x)$ в уравнение (57), получаем:

$$3u'(1+x^2) = 2u^4 \operatorname{arctg} x .$$

Разделяя переменные, находим:

$$\frac{3du}{u^4} = \frac{2dx}{1+x^2} \operatorname{arctg} x ,$$

$$\frac{-1}{u^3} = \operatorname{arctg}^2 x - C ,$$

$$u = \frac{1}{\sqrt[3]{C - \operatorname{arctg}^2 x}} .$$

Перемножая *u* и *v*, получаем общее решение исходного уравнения:

$$u = \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{C - \operatorname{arctg}^2 x}} .$$

2. В § 6 при рассмотрении некоторых моделей роста мы встречались с дифференциальными уравнениями первого порядка, в которых производная искомой функции была равна квадратному трехчлену (с постоянными коэффициентами) от этой функции. С точки зрения экономической динамики также представляют интерес и уравнения того же типа, с коэффициентами, зависящими от времени. На них мы и остановимся в данном пункте.

Определение. *Дифференциальное уравнение вида*

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{58}$$

называется ***уравнением Риккати.***

В общем случае уравнение Риккати не удается проинтегрировать в квадратурах. Однако, если известно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения, то можно найти и его общее решение. Действительно, делая замену $y(x) = y_1(x) + z(x)$, где $z(x)$ – новая неизвестная функция, приходим к уравнению

$$z' - (2a(x)y_1 + b(x))z = a(x)z^2 ,$$

являющемуся уравнением Бернулли ($n = 2$).

Пример 14. Решить уравнение:

$$y' = y^2 - 2xy + x^2 - 1\,.$$

Нетрудно убедится в том, что решением является $y_1(x) = x$. Тогда, в результате замены

$$y(x) = x + z(x),$$

получаем автономное уравнение:

$$z' = z^2\,.$$

Это уравнение имеет стационарное решение $z = 0$. Если же $z \neq 0$, то, разделяя переменные, находим:

$$z = -\frac{1}{x+C}\,.$$

Возвращаясь к переменной y, находим решение исходного уравнения:

$$y = x - \frac{1}{x+C}\,, \quad y = x\,.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение и приведите пример уравнения Бернулли.
2. Опишите способы решения уравнения Бернулли.
3. Дайте определение и приведите пример уравнения Риккати. В каких случаях это уравнение можно проинтегрировать?

§ 8. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

1. **Определение.** *Дифференциальное уравнение в симметрической форме:*

$$N(x,y)dx + M(x,y)dy = 0, \tag{59}$$

*где $N(x,y)$, $M(x,y)$ – непрерывные в некоторой области D функции, называется **уравнением в полных дифференциалах**, если существует такая непрерывно дифференцируемая функция $U(x,y)$, что*:

$$dU = N(x,y)dx + M(x,y)dy. \tag{60}$$

Из (60) следует, что общий интеграл уравнения в полных дифференциалах задается соотношением:

$$U(x,y) = C.$$

Возникает естественный вопрос: каким образом по коэффициентам $N(x,y)$ и $M(x,y)$ можно определить, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах? В случае, когда $U(x,y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, необходимое условие установить несложно. Действительно, из (60) вытекает, что:

$$N=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad M=\frac{\partial U}{\partial y}. \tag{61}$$

Так как $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$, то из (61) получаем:

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial y}. \tag{62}$$

Соотношения (62) будут также достаточными, если, например, рассматриваемая область является выпуклой. Однако доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса.

Пример 13. Решить уравнение:

$$(3x^2-\sin(x+y^2)+\ln y)\cdot dx+\left(\frac{x}{y}-2y\sin(x+y^2)+2y\right)\cdot dy=0.$$

В данном случае функции:

$$N(x,y)=3x^2-\sin(x+y^2)+\ln y \text{ и } M(x,y)=\frac{x}{y}-2y\sin(x+y^2)+2y$$

– непрерывно дифференцируемые функции в выпуклой области D, задаваемой условием $y>0$. Кроме того,

$$\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial y}=\frac{1}{y}-2y\cos(x+y^2),$$

а значит, условие (62) выполнено, и данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $U(x,y)$ из системы уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x}&=3x^2-\sin(x+y^2)+\ln y,\\ \frac{\partial U}{\partial y}&=\frac{x}{y}-2y\sin(x+y^2)+2y.\end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем:

$$U=x^3-\cos(x+y^2)+x\ln y+g(y),$$

где $g(y)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Чтобы ее определить, подставим выражение для U во второе уравнение системы. Имеем:

$$\frac{x}{y}-2y\sin(x+y^2)+g'(y)=\frac{x}{y}-2y\sin(x+y^2)+2y,$$

$$g'(y)=2y,\qquad g(y)=y^2.$$

Таким образом, общим интегралом исходного уравнения будет:

$$x^3 - \cos(x + y^2) + x\ln y + y^2 = C\ .$$

2. В некоторых случаях уравнения, записанные в симметричной форме, могут быть сведены к уравнению в полных дифференциалах путем умножения на некоторый множитель.

Пример 14. Решить уравнение:

$$x(\sin y^2 - 2\sin x^2 + \cos x^2)dx + y(\sin y^2 + 2\cos y^2 + \cos x^2)dy = 0.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что условия (62) не выполнены и данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Однако оно станет таковым, если обе части этого уравнения умножить на e^{xy}. Действительно, имеем:

$$e^{xy}x(\sin y^2 - 2\sin x^2 + \cos x^2)dx +$$

$$+ e^{xy}y(\sin y^2 + 2\cos y^2 + \cos x^2)dy = 0.$$

Теперь, как нетрудно убедиться, условия (62) выполнены. Решая систему:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{xy}x(\sin y^2 - 2\sin x^2 + \cos x^2)\,,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{xy}x(\sin y^2 + 2\cos y^2 + \cos x^2)\,,$$

находим:

$$U(x,y) = e^{xy}(\sin y^2 + \cos x^2)\ .$$

Следовательно, уравнение

$$e^{xy}(\sin y^2 + \cos x^2) = C$$

определяет общий интеграл исходного уравнения.

Определение. Непрерывно дифференцируемая в области G функция $\mu(x,y) \neq 0$ называется ***интегрирующим множителем*** уравнения (59), если уравнение

$$\mu(x,y)(N(x,y)dx + M(x,y)dy) = 0 \qquad (63)$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Если для данного уравнения существует интегрирующий множитель, то он на основании (62) должен удовлетворять условию:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu N)}{\partial y}\ .$$

Или:

$$M\frac{\partial\mu}{\partial x}-N\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)=0. \qquad (64)$$

Равенство (64) представляет собой так называемое *дифференциальное уравнение в частных производных*. Решить это уравнение ничуть не проще, чем уравнение (59). Однако, так как нас интересует только лишь одно частное решение уравнения (64), то иногда его можно найти, используя особенности коэффициентов N и M. В частности, в некоторых случаях это удается сделать в предположении, что $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$.

Пример 15. Решить уравнение:

$$(x+y^2)\,dx + xydy = 0. \qquad (65)$$

Будем искать интегрирующий множитель этого уравнения в виде $\mu = \mu(x)$. Тогда в силу (65) уравнение (64) примет вид:

$$xy\mu' = (2y-y)\mu,$$

или

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{dx}{x}.$$

Из этого равенства, находим $\mu = Cx$. В качестве интегрирующего множителя для уравнения (65) выберем $\mu = 6x$. В результате получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$6(x^2+xy^2)\,dx + 6x^2ydy = 0.$$

Решая систему:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=6(x^2+xy^2), \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=6x^2y,$$

из первого уравнения находим:

$$U = 2x^3+3x^2y^2+g(y),$$

где $g(y)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Подставляя выражение для U во второе уравнение системы, имеем:

$$6xy^2+g'(y)=6xy^2,$$

$$g'(y)=0, \qquad g(y)=C.$$

Таким образом, общим интегралом исходного уравнения будет:

$$2x^3+3x^2y^2=C.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение и приведите пример уравнения в полных дифференциалах.
2. Сформулируйте достаточное условие, при котором дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.
3. Что такое интегрирующий множитель, и какому уравнению он удовлетворяет?

§ 9. Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Общие сведения

В данном параграфе мы остановимся на свойствах дифференциальных уравнений высших порядков. Напомним, что в общем виде дифференциальное уравнение n-го порядка задается соотношением (1). Если это уравнение разрешено относительно старшей производной, то есть

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{66}$$

то говорят, что оно записано в ***нормальной форме*** (или в ***форме Коши***).

Начальные условия для уравнения n-го порядка имеют вид:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{67}$$

Аналогичным образом задача об отыскании решений уравнения (66), удовлетворяющих начальному условию (67), называется ***задачей Коши*** уравнения n-го порядка. Так же как и в случае дифференциального уравнения первого порядка, имеет место следующая теорема.

Теорема 3 (***о существовании и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения n-го порядка***). *Если в некоторой окрестности точки* $(x_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ *функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные по* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$*, то существует такая окрестность этой точки, в которой задача Коши* (66) (67) *имеет решение, притом единственное.*

Для уравнения второго порядка геометрический смысл этой теоремы заключается в том, что через данную точку в заданном направлении проходит единственная интегральная кривая.

2. Уравнения, допускающие понижение степени

В некоторых случаях удается понизить порядок дифференциального уравнения. Не ограничивая общности, продемонстрируем это на примере уравнения второго порядка.

1. Если уравнение не содержит в явном виде аргумента, т.е.

$$F(y, y', y'') = 0,$$

то порядок уравнения может быть понижен при помощи замены $y' = z(y)$, где $z(y)$ – новая неизвестная функция от аргумента y.

Пример 16. Решить уравнение

$$y'' = -2y(y')^3.$$

В данном уравнении отсутствует в явном виде аргумент x. Положим $y' = z(y)$, тогда на основании правила дифференцирования сложной функции получаем:

$$y'' = \frac{dz}{dy} y' = \frac{dz}{dy} z .$$

В силу этого данное уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{dz}{dy} z = -6y \cdot z^3.$$

Отсюда следует, что либо $z = 0$, а значит

$$y = C, \tag{68}$$

либо

$$\frac{dz}{dy} = -3y \cdot z^2 .$$

Разделяя переменные и интегрируя полученное уравнение, находим:

$$3y^2 + C_1 = \frac{1}{z} .$$

Следовательно,

$$z = \frac{1}{3y^2 + C_1} .$$

Возвращаясь к переменной y, имеем:

$$y' = \frac{1}{3y^2 + C_1} .$$

Интегрируя это уравнение путем разделения переменных, получаем общий интеграл уравнения:

$$y^3 + C_1 y = x + C_2 . \tag{69}$$

Таким образом, множество всех решений исходного уравнения задается соотношениями (68), (69).

2. Если уравнение не содержит в явном виде искомую функцию, т.е.

$$F(y, y', y'') = 0,$$

то порядок уравнения может быть понижен при помощи замены $y' = z(x)$.

Пример 17. Решить уравнение:

$$y'' = (y')^2 + 1.$$

В данном уравнении отсутствует в явном виде искомая функция. Сделаем замену $y' = z(x)$, получаем:

$$z' = z^2 + 1.$$

Разделяя в полученном уравнении переменные и затем интегрируя его, находим:

$$Z = \operatorname{tg}(x + C_1),$$

$$y' = \operatorname{tg}(x + C_1),$$

$$y = -\ln|\cos(x + C_1)| + C_2.$$

3. Порядок дифференциального уравнения, однородного относительно неизвестной функции и ее производных, т.е. удовлетворяющего условию:

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^m F(x, y, y', y''),$$

может быть понижен при помощи замены $y' = yz(x)$.

Пример 18. Решить уравнение:

$$y''y - (y')^2 - \frac{3yy'}{x} = (6x - 3x^2)y^2 .$$

Данное уравнение является однородным второй степени относительно y, y' и y''. Сделаем замену $y' = z(x)y$, имеем:

$$y'' = z'y + zy' = (z' + z^2)y .$$

На основании этого исходное уравнение принимает вид:

$$\left(z' - \frac{3z}{x} - 6x + 3x^2\right)y^2 = 0 .$$

Отсюда вытекает, что либо $y = 0$, либо

$$z' - \frac{3z}{x} - 6x + 3x^2 = 0 .$$

Решая полученное линейное уравнение, находим:

$$z = 3x^2 + 4C_1x^3 ,$$

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 + 4C_1x^3 ,$$

$$\ln|y| = x^3 + C_1x^4 + \ln|C_2| ,$$

$$y = C_2e^{C_1x^3 + x^4} . \tag{70}$$

Заметим, что соотношение (70) задает общее решение исходного уравнения, т.к. полученное выше частное решение $y = 0$ входит в (70) при $C_1 = 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие условия достаточны для существования решения задачи Коши дифференциального уравнения *n*-го порядка? Сколько решений может иметь задача Коши для дифференциального уравнения *n*-го порядка?
2. В чем заключен геометрический смысл теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка?
3. В каких случаях можно понизить порядок дифференциального уравнения?

§ 10. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

1. В § 6 мы научились решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Данный параграф посвящен линейным уравнениям более высоких порядков. Этот класс уравнений является очень важным, т.к. многие практические задачи либо описываются линейными уравнениями, либо могут быть приближенно решены при помощи линейных уравнений.

Определение. *Дифференциальное уравнение n-го порядка называется* ***линейным****, если оно имеет вид:*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_n(x)y = f(x), \tag{71}$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, ... ,$a_n(x)$, $f(x)$ – непрерывные функции.

Имеет место следующая

Теорема 4 (***существования и единственности***). *Пусть функции* $a_1(x)$, ... , $a_n(x)$, $f(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$. *Тогда для любой точки* $x_0 \in (a, b)$ *существует, причем единственное, решение* $y(x)$ *уравнения (71), определенное на отрезке* $[a, b]$ *и удовлетворяющее начальным условиям:*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Примем эту теорему без доказательства. В то же время отметим, что если в теореме 4 утверждалось существование и единственность решения в некоторой окрестности точки x_0, то в данной теореме утверждается существование и единственность решения линейного уравнения на всем промежутке $[a, b]$, т.е. утверждение теоремы носит уже не локальный, а глобальный характер.

Введем следующее обозначение:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y. \tag{72}$$

Заметим, что $L(y)$ часто называют ***линейным дифференциальным оператором n-го порядка***. Отметим свойство оператора $L(y)$, необходимое нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *– произвольные функции, имеющие производные до n-го порядка включительно,* C_1 *и* C_2 *– произвольные постоянные, тогда:*

$$L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2). \tag{73}$$

Справедливость этого утверждения легко установить непосредственной проверкой.

Используя принятые выше обозначения, уравнение (71) можно записать в следующем виде:

$$L(y) = f(x). \tag{74}$$

Уравнение

$$L(y) = 0 \tag{75}$$

называется ***линейным однородным уравнением***, соответствующим уравнению (75). В противоположность этому уравнение (74) (при $f(x) \not\equiv 0$) называется ***неоднородным***. Следующее утверждение связывает решения уравнений (74) и (75).

Теорема 5. *Общее решение неоднородного уравнения* (74) *есть сумма частного решения* $\bar{y}(x)$ *этого уравнения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения* (75).

Доказательство. Покажем сначала, что сумма $\bar{y}(x)$ и произвольного решения $y_0(x)$ однородного уравнения также является решением уравнения (74). Действительно, в силу леммы имеем:

$$L(\bar{y} + y_0) = L(\bar{y}) + L(y_0) = f(x) + 0 = f(x),$$

что и требовалось доказать. Теперь нам остается доказать, что всякое решение $y(x)$ неоднородного уравнения есть сумма $\bar{y}(x)$ и некоторого частного решения $y_0(x)$ уравнения (74). Имеем:

$$L(y - \bar{y}) = L(y) - L(\bar{y}) = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Следовательно, $y_0(x) = y(x) - \bar{y}(x)$ – решение уравнения (75), значит, $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$, что и завершает доказательство.

2. Отметим одно важное свойство линейных уравнений, часто используемое при нахождении решений.

Теорема 6. *Пусть* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ – *соответственно решения уравнений* $L(y) = f_1(x)$ *и* $L(y) = f_2(x)$, *тогда* $y_1(x) + y_2(x)$ *есть решение уравнения* $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$.

Действительно, $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = f_1(x) + f_2(x)$, что и утверждалось в теореме.

3. Рассмотрим уравнение Самуэльсона-Солоу:

$$p' = k(d(p) - s(p)), \tag{76}$$

моделирующее связь между изменением цены p и неудовлетворенным спросом $d(p) - s(p)$ (здесь $d(p)$ и $s(p)$ – соответственно величины спроса и предложения при цене p, $k > 0$). Предположим, что спрос и предложение задаются линейными функциями:

$$d(p) = a - bp,\ s(p) = m + np, \tag{77}$$

где a, b, m, n – некоторые положительные числа. С учетом (77) уравнение (76) примет вид:

$$p' = k(a - m) - k(n + b)p\,. \tag{78}$$

Уравнение (78) является линейным дифференциальным уравнением. Найдем решение соответствующего ему однородного уравнения. Имеем:

$$\frac{dp}{dt} = k(n+b)p\,; \qquad \frac{dp}{p} = k(n+b)dt\,;$$

$$\ln p = k(n+b)t + \ln C;$$

$$p(t) = C\, e^{k(n+b)t}. \tag{79}$$

В качестве частного решения уравнения (78) можно использовать стационарное равновесное решение:

$$p(t) = \overline{p}(= const)\,,$$

где $\overline{p}$ – корень уравнения $d(p) = s(p)$ (в этом случае обе части уравнения (78) будут равны нулю). Из (78) нетрудно найти, что:

$$\overline{p} = \frac{a-m}{b+n}\,.$$

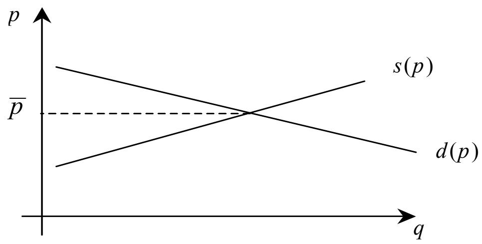

Рис. 12

Таким образом, общее решение уравнения (78) имеет вид:

$$p(t) = \frac{a-m}{b+n} + Ce^{k(n+b)t}\,. \tag{79}$$

Из (79), в частности, вытекает, что если $n > b$, то с течением времени интегральные кривые будут отдаляться от состояния равновесия $\overline{p}$. В случае $n = b$, $p(t)$ – постоянна. Если же $n < b$, то с течением времени интегральные кривые будут асимптотически приближаться к состоянию равновесия $\overline{p}$. Данную модель можно рассматривать как непрерывный аналог паутинной модели рынка.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение и приведите пример линейного дифференциального уравнения *n*-го порядка.
2. Дайте определение и приведите пример линейного дифференциального оператора.
3. Проверить справедливость леммы 1.

4. Какие дифференциальные уравнения n-го порядка называются линейными однородными? линейными неоднородными?
5. Сформулируйте и докажите теорему об общем решении неоднородного линейного уравнения.

§ 11. Линейные однородные уравнения. Фундаментальный набор решений

В данном параграфе мы остановимся на свойствах частного и общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка:

$$L(y) = 0.$$

1. **Лемма 2.** *Пусть* $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ – *произвольные решения линейного однородного дифференциального уравнения и* C_1, C_2, …, C_k – *произвольные постоянные*, *тогда линейная комбинация* $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ky_k(x)$ *также является решением этого уравнения.*

Действительно, на основании леммы 1 из предыдущего параграфа имеем:

$$L(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ky_k) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) + \ldots + C_kL(y_k) = 0\,,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из леммы 2 следует, что множество решений линейного однородного уравнения образует линейное пространство. Естественно, возникают вопросы: какова размерность этого пространства и как устроен его базис? Чтобы ответить на них, необходимо иметь критерий, дающий возможность определить является ли данная система решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$ линейно зависимой или нет. Один из способов, позволяющих это сделать, связан с так называемым определителем Вронского.

Пусть $y_1(x)$, ..., $y_k(x)$ – система, состоящая из k функций, тогда ***определитель Вронского*** этой системы имеет вид:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_k' \\ . & . & . & . \\ y_1^{(k)} & y_2^{(k)} & \cdots & y_k^{(k)} \end{vmatrix}. \tag{81}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 7. *Если функции* y_1, ..., y_k *линейно зависимы, то их определитель Вронского тождественно равен нулю*.

Доказательство. Пусть y_1, ..., y_k – линейно зависимы. Тогда одна из этих функций является линейной комбинацией остальных. Для определенности положим, что таковой является y_1. В этом случае первый столбец определителя Вронского будет представлять собой линейную комбинацию остальных столбцов, а следовательно, определитель тождественно равен нулю. Теорема доказана.

Теорема 8. *Если* $y_1(x)$, ..., $y_k(x)$ *– линейно независимые решения уравнения* (75), *то их определитель Вронского ни при одном значении x не обращается в нуль.*

Доказательство теоремы проведем от противного. Пусть существует точка x_0, в которой определитель Вронского равен нулю. Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_k y_k(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_k y_k'(x_0) = 0 \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\quad . \qquad\quad . \\ C_1 y_1^{(k)}(x_0) + C_2 y_2^{(k)}(x_0) + \ldots + C_k y_k^{(k)}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{82}$$

относительно искомых неизвестных чисел C_1, C_2, ..., C_k. Определителем этой системы является определитель Вронского в точке x_0. Так как по предположению он равен нулю, то система имеет ненулевое решение $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_k$. Рассмотрим функцию:

$$\varphi(x) = \overline{C}_1 y_1(x) + \overline{C}_2 y_2(x) + \ldots + \overline{C}_k y_k(x),$$

которая в силу леммы 1 является решением уравнения (75). При этом $\varphi(x) \neq 0$, так как в противном случае функции y_1, ..., y_k были бы линейно зависимы: одну из них, имеющую ненулевой коэффициент, можно было бы выразить в виде линейной комбинации остальных. С другой стороны, равенства (82) означают, что:

$$\varphi(x_0) = 0, \varphi'(x_0) = 0, \ldots, \varphi^{(k)}(x_0) = 0\,. \tag{83}$$

Но этим же начальным условиям удовлетворяет и другое решение уравнения (75), а именно, $y(x) = 0$. Это противоречит единственности решения задачи Коши для уравнения (75). Следовательно, $W(y_1, ..., y_k) \neq 0$ для всех x. Теорема доказана.

Определение. *Систему функций* $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$, *состоящую из n линейно независимых решений уравнения* (75), *будем называть* ***фундаментальным набором решений*** *этого уравнения.*

2. Ранее мы уже отмечали, что общее решение дифференциального уравнения n-го порядка зависит от n произвольных постоянных. С другой стороны, если $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ – решения уравнения (75), то функция

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots C_n y_n(x) \tag{84}$$

также является решением этого уравнения. Напрашивается вопрос: при каких условиях формулой (84) определяется общее решение линейного однородного уравнения? Ответ на этот вопрос дает основная теорема теории линейных однородных дифференциальных уравнений.

Теорема 9 (***об общем решении линейного однородного уравнения***). *Пусть* $y_1(x)$, ..., $y_n(x)$ – *фундаментальный набор решений уравнения* (75), *тогда общее решение этого уравнения задается формулой:*

$$y = C_1y_1 + ... + C_ny_n. \tag{85}$$

Доказательство. То, что функция $y(x)$, определяемая формулой (82), является решением уравнения (75), следует из леммы 2. Покажем теперь, что любое решение $\varphi(x)$ уравнения (75) представимо в виде линейной комбинации функций y_1, ..., y_n. Зафиксируем некоторую точку x_0. Введем следующие обозначения:

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = y_0 \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = y_0' \\ \quad . \qquad\quad . \qquad\quad . \qquad\quad . \qquad . \\ C_1y_1^{(n)}(x_0) + C_2y_2^{(n)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}. \tag{86}$$

Определителем этой системы является определитель Вронского для функций y_1, ..., y_n в точке x_0. Ввиду линейной независимости этих функций данный определитель не равен нулю. Следовательно, у системы (86) существует решение $(\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n)$.

Тогда функция

$$y(x) = \overline{C}_1y_1(x) + \overline{C}_2y_2(x) + \ldots + \overline{C}_ny_n(x),$$

как это вытекает из (86), удовлетворяет тем же начальным условиям. В силу единственности решения задачи Коши имеем:

$$\varphi(x) = y(x),$$

т.е. $\varphi(x)$ есть линейная комбинация функций y_1, ..., y_n. Теорема доказана.

Замечание 2. Из теоремы 9 следует, что множество решений линейного однородного уравнения образует n-мерное линейное пространство, а фундаментальный набор решений является его базисом.

Пример 19. Для уравнения

$$y'' - 4y = 0$$

функции $y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = e^{-2x}$ являются частными решениями. Эти решения линейно независимы, так как их определитель Вронского

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4$$

не равен нулю. Значит, y_1, y_2 образуют фундаментальный набор и общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какими свойствами обладает определитель Вронского? Что означает равенство его нулю?
2. Что называется фундаментальным набором решений однородного уравнения?
3. Сформулируйте и докажите теорему об общем решении линейного однородного уравнения.
4. Образует ли множество решений линейного однородного уравнения линейное пространство? Если да, то какова его размерность и как построить его?

§ 12. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Данный параграф посвящен нахождению решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1. Линейные однородные уравнения

1. Нахождение общего решения линейного однородного уравнения требует знания какого-либо фундаментального набора решений. Последнее в общем случае является довольно сложной задачей. Однако эта задача намного упрощается, если коэффициенты уравнения постоянны. Рассмотрим уравнение:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0, \tag{87}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ – некоторые постоянные.

Будем искать решение уравнения (87) в виде функции

$$y = e^{\lambda x}.$$

Тогда:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \cdots, y^n = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Подставляя выражения для y' и ее производных в уравнение (87), имеем:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1} y e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0.$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то это соотношение эквивалентно уравнению:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{88}$$

Определение. *Алгебраическое уравнение* (85) *называется* ***характеристическим уравнением*** *линейного однородного дифференциального уравнения* (87).

Замечание 1. Нами установлено соответствие между корнями характеристического уравнения и решениями уравнения (87). Так как корни характеристического уравнения могут быть комплексными, то необходимо внести ясность, что мы будем понимать в этом случае под $e^{\lambda x}$. Для любого комплексного числа $z=\alpha+i\beta$ положим по определению

$$e^{z}=e^{\alpha}\left(\cos\beta+i\sin\beta\right). \qquad (89)$$

Соотношение (89) носит название *формулы Эйлера*. Принимая во внимание соответствующие свойства комплексных чисел, нетрудно убедится, что определенная по формуле Эйлера функция комплексного аргумента обладает всем набором свойств, характерных для экспоненциальной функции. В частности для произвольных комплексных чисел v и u

$$e^{v}e^{u}=e^{u+v},\ \ \frac{e^{v}}{e^{u}}=e^{u-v}.$$

2. В дальнейшем для простоты изложения мы будем оперировать с уравнениями второго порядка, т.е. с уравнениями вида:

$$y''+py'+qy=0. \qquad (90)$$

Однако заметим, что полученные для этих уравнений результаты могут быть без труда перенесены на случай уравнений более высоких порядков.

При решении характеристического уравнения

$$\lambda^2+p\lambda+q=0.$$

могут возникнуть три случая.

Случай 1. Дискриминант D больше нуля. Тогда существуют два действительных и различных решения λ_1 и λ_2 характеристического уравнения. Соответствующие им решения уравнения (90)

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\ y_2=e^{\lambda_2 x}$$

линейно независимы. Действительно, их определитель Вронского:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x}\end{vmatrix}=\left(\lambda_2-\lambda_1\right)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$$

ввиду того, что $\lambda_1\neq\lambda_2$, отличен от нуля. Следовательно, y_1 и y_2 образуют фундаментальный набор и общее решение уравнения (89) имеет вид:

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}.$$

Пример 20. Решить уравнение:

$$y'' + y' - 2 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

являются числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -2$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x}.$$

Случай 2. $D < 0$. Характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Уравнения (90) имеет два линейно независимых комплексно сопряженных решения:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x},\ y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x},$$

или в соответствии с формулой Эйлера:

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),\ y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Чтобы получить действительные решения, заменим y_1 и y_2 их линейными комбинациями

$$y_1^* = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad y_2^* = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2),$$

представляющими собой соответственно действительную и мнимую часть y_1.

Таким образом, мы получили два линейно независимых действительных решения:

$$y_1^* = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2^* = e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{91}$$

Следовательно, общее решение в этом случае имеет вид:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right). \tag{92}$$

Пример 21. Решить уравнение:

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

будут $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. В данном случае $\alpha = 1$, $\beta = 1$, так что общим решением данного дифференциального уравнения будет

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Случай 3. $D = 0$. У характеристического уравнения существует единственный корень $\lambda = -\frac{p}{2}$, которому соответствует решение $y_1 = e^{-\lambda x}$. Но для построения общего решения нам необходимо еще одно линейно независимое с y_1 решение уравнения (90). Покажем, что таковым является функция

$$y_2 = xe^{\lambda x}.$$

Действительно,

$$y_2' = \lambda xe^{\lambda x} + e^{\lambda x},\ y_2'' = \lambda^2 xe^{\lambda x} + 2xe^{\lambda x}.$$

Подставляя выражения для y, y' и y'' в уравнение (90), имеем:

$$e^{\lambda x}\left[x(\lambda^2 + p\lambda + q) + 2\lambda + p\right] = 0.$$

Учитывая, что λ является корнем характеристического уравнения и при этом $\lambda = -\frac{p}{2}$, мы видим, что последнее равенство выполняется тождественно, т.е. y_2 – решение уравнения (90). Покажем теперь, что y_1 и y_2 – линейно независимы. Имеем:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1+\lambda x)e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0.$$

Следовательно, y_1 и y_2 – линейно независимы и образуют фундаментальный набор. Таким образом, общим решением в этом случае будет:

$$y = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x).$$

Пример 22. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 6y + 9 = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

имеет единственный корень $\lambda = -3$. Поэтому, общее решение имеет вид:

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x).$$

3. Сформулируем теперь *алгоритм решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.*

1) Составить характеристическое уравнение и найти его корни.
2) Построить фундаментальную систему решений, поставив в соответствие каждому действительному корню характеристического уравнения λ кратности k совокупность из k линейно независимых частных решений:

$$y_1 = e^{\lambda x},\ y_2 = xe^{\lambda x} \cdots,\ y_k = x^{k-1}e^{\lambda x} \qquad (93)$$

и каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ кратности k совокупность из $2k$ линейно независимых решений:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos \beta x,\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos \beta x, \cdots,\ y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos \beta x\ ,$$

$$y_{k+1} = e^{\alpha x}\sin \beta x,\ y_{k+2} = xe^{\alpha x}\sin \beta x, \cdots,\ y_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin \beta x\ . \qquad (94)$$

3) По формуле (85) выписать общее решение уравнения.

Пример 23. Решить уравнение:

$$y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + 2y' - y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1=0.$$

После несложных тождественных преобразований получаем:

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)^3=0.$$

Данное уравнение имеет два корня: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1$. Причем, кратность λ_2 равна 3. Следовательно, общим решением исходного уравнения будет:

$$y = e^x\left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right) + C_4e^{-x}\ .$$

Пример 24. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 0.$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

находим $\lambda_1 = 2; \lambda_{2,3} = \pm i$. Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{2x} + C_2\cos x + C_3\sin x.$$

2. Линейные неоднородные уравнения

1. Для отыскания решения неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_ny = f(x) \qquad (95)$$

так же, как и в § 6, мы можем применить *метод вариации постоянных*. Продемонстрируем это на примере уравнения второго порядка

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (96)$$

Будем искать решение в виде:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \tag{97}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – фундаментальные набор решений соответствующего однородного уравнения, а $C_1(x)$, $C_2(x)$ – искомые функции. Из (97) находим:

$$y' = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2'.$$

Потребуем дополнительно, чтобы:

$$C_1'\,y_1 + C_2'\,y_2 = 0. \tag{98}$$

Тогда получим:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2'.$$

Следовательно:

$$y'' = C_1'\,y_1' + C_2'\,y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''.$$

Подставляя найденные значения для y, y' и y'' в уравнение (96), имеем:

$$C_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + C_2(y_2'' + py_2' + qy_2) + C_1'y_1' + C_2'\,y_2' = f(x).$$

Оба выражения, заключенные в скобки, равны нулю, так как y_1 и y_2 являются решениями однородного уравнения (90). Следовательно, мы получим уравнение:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Таким образом, неизвестные функции C_1 и C_2 должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x) \end{cases}. \tag{99}$$

Определителем этой системы является определитель Вронского, который отличен от нуля в силу линейной независимости y_1 и y_2. Следовательно, из системы (99) мы можем однозначно определить функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Проинтегрировав их, мы найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$, а затем по формуле (96) найдем и решение уравнения (97).

Пример 25. Решить уравнение:

$$y'' + 3y' - 4y = 120e^{2x}.$$

Соответствующее однородное уравнение имеет линейно независимые решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-4x}$ ($\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -4$ – корни характеристического уравнения). Потому решение этого неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-4x}.$$

Для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ решим систему (99), которая в нашем случае примет вид:

$$\begin{cases} e^x C_1'(x) + e^{-4x} C_2'(x) = 0 \\ e^x C_1'(x) - 4e^{-4x} C_2'(x) = 30e^{2x} \end{cases}.$$

Получим:

$$C_1(x) = 6e^x + \overline{C}_1,\ C_2(x) = -e^{6x} + \overline{C}_2,$$

где $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ – произвольные постоянные. Таким образом, общим решением искомого уравнения будет:

$$y = 5e^{2x} + \overline{C}_1 e^x + \overline{C}_2 e^{-4x}.$$

2. При специальном виде правой части $f(x)$ уравнения (95) методика отыскания частного решения неоднородного уравнения, изложенная выше, может быть заменена более простыми приемами. Опишем их вкратце.

В случае, когда коэффициенты левой части уравнения (95) постоянны, а правая часть имеет специальный вид:

$$f(x) = e^{ax}\left(P_n(x)\cos bx + Q_k(x)\sin bx\right), \tag{100}$$

где $P_n(x)$ и $Q_k(x)$ – многочлены от x степени соответственно n и k, для отыскания частного решения уравнения (95) удобнее всего воспользоваться ***методом неопределенных коэффициентов***. Он заключается в следующем. Если число $\gamma = a + bi$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде:

$$y = e^{ax}\left(\overline{P}_m(x)\cos bx + \overline{Q}_m(x)\sin bx\right), \tag{101}$$

где $\overline{P}_m(x)$ и $\overline{Q}_m(x)$ – многочлены степени $m = \max\{k, n\}$, коэффициенты которых необходимо определить путем подстановки неизвестной функции y в уравнение (95). Если же γ является корнем характеристического уравнения кратности l, то частное решение ищется в форме:

$$y = x^l e^{ax}\left(\overline{P}_m(x)\cos bx + \overline{Q}_m(x)\sin bx\right). \tag{102}$$

Этот случай часто называют ***резонансным***.

Пример 26. Решить уравнение:

$$y'' + 5y' + 6y = 56e^{5x}.$$

В соответствии с теоремой 6 общее решение данного линейного неоднородного уравнения представляет собой сумму некоторого частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = -3$. Следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения будет:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Теперь найдем частное решение. Так как правая часть уравнения имеет вид (100), то мы можем воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. В нашем случае $a = 5$, $b = 0$; $P_n(x) = 1$, $Q_n(x) = 0$. Учитывая то, что $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены нулевой степени и что число $\gamma = 5$ не является корнем характеристического уравнения, частное решение будем искать в виде:

$$y = Ae^{5x}\ (A = const).$$

Здесь $\overline{P}_0(x) = A$ (общий вид многочлена нулевой степени).

Находим:

$$y' = 5e^{5x};\ y'' = 25e^{5x}.$$

Подставляя y, y' и y'' в исходное уравнение, имеем:

$$56Ae^{5x} = 56e^{5x}.$$

Отсюда $A = 1$. Таким образом, частным решение исходного уравнения будет:

$$y = e^{5x}.$$

А, следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$y = e^{5x} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Пример 27. Найти общее решение уравнения:

$$y''' + y'' - 4y' - 4 = 10 \sin x.$$

Имеем $a = 0$, $b = 1$; $P_n(x) = 0$, $Q_n(x) = 10$. Число $\gamma = i$ не совпадает с корнями $\lambda_{1,2} = \pm 2$ и $\lambda_3 = -1$ характеристического уравнения, поэтому частное решение будем искать в виде:

$$y = A \sin x + B \cos x\ (A, B = const).$$

Отсюда получаем:

$$y' = A \cos x - B \sin x,$$

$$y'' = -A \sin x - B \cos x,$$

$$y''' = -A \cos x + B \sin x.$$

Подставляя выражения для искомой функции и ее производных в исходное уравнение, находим:

$$(5B - 5A)\sin x - (5B + 5A)\cos x = 10\sin x.$$

Так как это равенство выполняется тождественно, то:

$$\begin{cases} 5B - 5A = 10 \\ 5B + 5A = 0 \end{cases};\ \begin{cases} A = -1 \\ B = \ \ 1 \end{cases}.$$

Таким образом, общим решение данного уравнения будет:

$$y = \cos x - \sin x + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}.$$

Пример 28. Решить уравнение:

$$y'' + y = x^2 + 2x\, e^x\ .$$

Так как правая часть данного линейного неоднородного уравнения представляет собой сумму двух выражений вида (100), то в соответствии с теоремой 6 его частное решение будем искать в виде суммы $y_1 + y_2$ частного решения y_1 уравнения

$$y'' + y = x^2 \tag{103}$$

и частного решения y_2 уравнения

$$y'' + y = 2x\, e^x. \tag{104}$$

Начнем с уравнения (103). В этом случае $a = 0$, $b = 0$; $P_2(x) = x^2$, $Q(x) = 0$. Число $\gamma = 0$ не совпадает с корнями $\lambda_{1,2} = \pm i$ характеристического уравнения, поэтому частное решение мы будем искать в форме:

$$y = Ax^2 + Bx + C\ (A, B, C = const).$$

Имеем $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$. Подставляя в уравнение (103), получим:

$$2A + Ax^2 + Bx + C = x^2,$$

или

$$(A - 1)\, x^2 + Bx + C + 2A = 0.$$

Следовательно:

$$\begin{cases} A - 1 = 0 \\ B = 0 \\ C + 2A = 0 \end{cases},\quad \text{т.е.} \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases}.$$

Отсюда находим частное решение уравнения (103):

$$y = x^2 - 2. \qquad (105)$$

Теперь рассмотрим уравнение (104). Имеем $a = 1$, $b = 0$; $P_2(x) = 2x$, $Q(x) = 0$. Число $\gamma = 1$ не совпадает с корнями $\lambda_{1,2} = \pm i$ характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в форме:

$$y = (Mx + K)e^x \; (M, K = const).$$

Находим:

$$y' = (Mx + K + M)e^x,$$

$$y'' = (Mx + K + 2M)e^x.$$

Подставляя в уравнение (104), получим:

$$(2Mx + 2K + 2M)e^x = 2x\, e^x.$$

$$\begin{cases} 2M = 2 \\ 2M + 2K = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} M = 1 \\ K = -1 \end{cases}.$$

Отсюда получаем частное решение уравнения (104):

$$y = (x - 1)e^x,$$

Следовательно, общим решением исходного уравнения будет:

$$y = x^2 - 2 + (x - 1)e^x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Пример 29. Решить уравнение:

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

В данном случае $a = 1$, $b = 0$; $P_n(x) = 1$, $Q_k(x) = 0$. Число $\gamma = 1$ совпадает с корнем характеристического уравнения $\lambda = 1$, который имеет кратность 2 (резонансный случай). Частное решение исходного уравнения будем искать в виде:

$$y = Ax^2e^x.$$

Имеем:

$$y' = 2Axe^x + Ax^2e^x; \; y'' = (2A + 4Ax + Ax^2)e^x.$$

Подставляя полученные выражения в исходное уравнение, находим:

$$2Ae^x = e^x; \; A = 0{,}5.$$

Таким образом, общим решением данного уравнения является:

$$y = (0{,}5x^2 + C_1x + C_2)e^x.$$

Пример 30. Решить уравнение:

$$y^{IV} + 3y'' - 4y = e^{2x}(42\sin x + 64\cos x).$$

Имеем $a = 2$, $b = 1$; $P_n(x) = 64$, $Q_k(x) = 42$. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4 = 0$$

имеет корни: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$, не совпадающие с числом $\gamma = 2+i$, поэтому частное решение будем искать в виде:

$$y = e^{2x}(A\sin x + B\cos x)\ (A, B = const).$$

Находим:

$$y' = e^{2x}((2B - A)\sin x + (B + 2A)\cos x),$$

$$y'' = e^{2x}((3B - 4A)\sin x + (4B + 3A)\cos x),$$

$$y''' = e^{2x}((4B - 7A)\sin x + (7B + 4A)\cos x),$$

$$y^{\mathrm{IV}} = e^{2x}((B - 18A)\sin x + (18B + A)\cos x).$$

Подставляя выражения для y, y'' и y^{IV} в исходное уравнение, получаем:

$$e^{2x}((6B - 30A)\sin x + (30B - 4A)\cos x) = e^{2x}(42\sin x + 64\cos x).$$

Следовательно:

$$\begin{cases} 6B - 30A = 42 \\ 30B - 4A = 64 \end{cases}.$$

Решением этой системы является пара $A = -1$, $B = 2$. Таким образом, общим решением исходного уравнения будет:

$$y = e^{2x}(2\cos x - \sin x) + C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется характеристическим уравнением линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами? Чему равна степень характеристического уравнения?
2. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения 2-го порядка в случае, когда его характеристическое уравнение имеет: действительные корни ? комплексно-сопряженные корни? кратный корень?
3. Опишите способ нахождения частного решения неоднородного уравнения решения при помощи метода вариации постоянной.
4. В каких случаях используется метод неопределенных коэффициентов для решения неоднородного линейного дифференциального уравнения? Что такое резонансный случай?

§ 13. Системы дифференциальных уравнений

1. Решение той или иной задачи может потребовать нахождения не одной, а сразу нескольких неизвестных функций. Если каждое из этих уравнений является дифференциальным, т.е. имеет вид соотношения, связывающего неизвестные функции $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ и их производные, то говорят о ***системе дифференциальных уравнений***. Ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений первого порядка, у которых число неизвестных функций совпадает с числом уравнений. Это системы вида:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = 0, \\ \vdots \\ F_n(x, y_1, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n') = 0. \end{cases} \tag{106}$$

Замечание 1. Часто при рассмотрении систем дифференциальных уравнений в качестве аргумента используют время t. В этом случае производные неизвестных функций принято обозначать через $\dot{y}_1(t), \cdots, \dot{y}_n(t)$.

Отметим некоторые специальные формы записи систем дифференциальных уравнений. Говорят, что система записана в ***нормальной форме*** (или в ***форме Коши***), если она приведена к виду:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \cdots, y_n), \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \cdots, y_n). \end{cases} \tag{107}$$

Если же система преобразована к виду:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \cdots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \cdots, y_n)} = \ldots = \ = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \cdots, y_n)} = \frac{dx}{g(x, y_1, \cdots, y_n)}, \tag{108}$$

то мы будем говорить, что она записана в ***симметричной форме***.

Например, система

$$\begin{cases} \dfrac{y_1'}{4} + \sqrt{y_1} + 5(y_2 x)^2 = 0, \\ y_2' - 3y_1\sqrt{y_2} - x^4 = 0 \end{cases}$$

в нормальной и симметрической формах соответственно выглядит так:

$$\begin{cases} y_1' = -4\sqrt{y_1} - 20(y_2 x)^2, \\ y_2' = 3y_1\sqrt{y_2} + x^4. \end{cases}$$

$$\left\{ \frac{dy_1}{-4\sqrt{y_1} - 20(y_2 x)^2} = \frac{dy_2}{3y_1\sqrt{y_2} + x^4} = \frac{dx}{1}. \right.$$

На системы дифференциальных уравнений естественным образом обобщается постановка задачи Коши для одного уравнения. Так, в случае системы (107) задача Коши состоит в нахождении решения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ \cdots,\ y_n(x_0) = y_n^0, \tag{109}$$

где $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ – заданные числа. Для случая системы может быть доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши, аналогичная теореме 1 из § 2.

2. К системам дифференциальных уравнений первого порядка в известном смысле сводятся уравнения (и системы уравнений) любого порядка. Проиллюстрируем это на примере уравнения третьего порядка. Пусть дано уравнение:

$$y''' = f(x, y, y', y'').$$

Если обозначить функции y' и y'' соответственно через u и v, то уравнение можно заменить системой

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = v \\ v' = f(x, y, u, v), \end{cases}$$

состоящей из трех уравнений первого порядка с тремя неизвестными функциями $y(x)$, $u(x)$, $v(x)$. Аналогичное представление допускает любое другое дифференциальное уравнение (или система уравнений).

§ 14. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

1. Общие сведения о линейных системах

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением так называемых ***линейных систем***. Это системы дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{110}$$

где коэффициенты a_{ij} и f_i –некоторые функции независимой переменной x. Будем считать их непрерывными, тогда для данной системы заведомо выполняются условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Если все $f_i \equiv 0$, то система называется ***однородной***, в противном случае она называется ***неоднородной***. Система

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n, \end{cases} \tag{111}$$

называется ***однородной системой, соответствующей неоднородной системе*** (110).

При изучении линейных систем удобно использовать матричные обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \; Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}; \; Y' = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \\ \vdots \\ y'_n(x) \end{pmatrix}; \; F = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

позволяющие записать систему (110) в виде одного матричного уравнения:

$Y' = AY + F$. (111)

Например, система

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 5y_2 - x^2, \\ y_2' = 4y_1 - 2y_2 + 3x^4. \end{cases}$$

в матричной записи выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 \\ 3x^4 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что так же как и в случае линейных уравнений, общее решение неоднородной системы представляет собой сумму частного решения этой системы и общего решения соответствующей ей однородной системы. В свою очередь, общее решение однородной системы имеет вид:

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + \ldots + C_nY_n, \tag{112}$$

где $C_1, \ldots, C_n$– произвольные постоянные, а

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \ldots, \; Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

– произвольные линейно независимые решения, называемые *фундаментальным набором решений* этой системы. Критерием линейной независимости этих решений является неравенство нулю определителя Вронского:

$$W(Y_1,\cdots,Y_n)=\begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (113).$$

2. Метод сведения линейной системы к одному уравнению более высокого порядка

Один из методов интегрирования линейной системы заключается в сведении системы к одному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией (о сведении одного уравнения произвольного порядка к системе уравнений первого порядка было сказано выше). Продемонстрируем это на примере системы двух уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + q_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + q_2(x), \end{cases} \qquad (114)$$

Дифференцируя (по x) обе части первого уравнения системы (114), находим:

$$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}y_2' + a_{11}'y_1 + a_{12}'y_2 + q_1',$$

откуда, заменяя производные y_1', y_2' их выражениями из самой системы, имеем:

$$y_1'' = a_{11}(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + q_1) + a_{12}(\alpha_{21}y_1 + a_{22}y_2 + q_2) +$$

$$+ a_{11}'y_1 + a_{12}'y_2 + q_1'.$$

Группируя в правой части, получим уравнение вида:

$$y_1'' = b_1y_1 + b_2y_2 + d_1, \qquad (115)$$

где коэффициенты b_1, b_2 и d_1 определенным образом выражаются через коэффициенты a_{ij} и q_1 и их производные (записывать эти выражения не будем). Комбинируя уравнение (115) с первым уравнением системы (114), получим:

$$\begin{cases} y_1' - q_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_1'' - d_1 = b_1y_1 + b_2y_2. \end{cases} \qquad (116)$$

Предположим, что в рассматриваемой области изменения x определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Тогда систему (116) можно решить относительно y_1 и y_2, т.е. выразить y_1 и y_2 через y_1'. и y_1''. В результате приходим к уравнениям вида:

$$y_1 = ky_1' + ly_1'' + p, \qquad (117)$$

$$y_2 = my_1' + sy_1'' + v, \qquad (118)$$

(выражения для k, l, m, s, p, v приводить не будем). Первое из них представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с одной неизвестной функцией $y_1(t)$. К нему приложима вся теория, изложенная в § 10 и § 11. Заметим, что если в исходной системе (114) все коэффициенты a_{ij} постоянны, то уравнение (117) также является уравнением с постоянными коэффициентами; для решения таких уравнений имеется эффективный метод, изложенный в § 12.

Пример 32. Решить систему:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 + 2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2. \end{cases}$$

Дифференцируя обе части первого уравнения, имеем:

$$y_1'' = 3y_1' - 2y_2 = 3(3y_1 - 2y_2 + 2) - 2(2y_1 - y_2) = 5y_1 - 4y_2 + 6.$$

В комбинации с первым уравнением данной системы это приводит к системе:

$$\begin{cases} y_1' - 2 = 3y_1 - 2y_2 \\ y_1'' = 5y_1 - 4y_2. \end{cases}$$

Отсюда находим выражения для y_1 и y_2 через y_1' и y_1'':

$$y_1 = 2y_1' - y_1'' - 4, \tag{119}$$

$$y_2 = \frac{5}{2}y_1' - \frac{3}{2}y_1'' - 1. \tag{120}$$

В результате приходим к уравнению второго порядка для неизвестной функции $y_1(t)$:

$$y_1'' - 2y_1' + y_1 = -4.$$

Решая это уравнение известным способом, получим:

$$y_1 = (C_1 + tC_2)e^t - 4,$$

после чего из (120) находим:

$$y_2 = \left(C_1 - \frac{C_2}{2} + C_2 t\right)e^t - 1.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие системы дифференциальных уравнений называются линейными? Какие существуют формы записи таких систем?
2. Запишите линейную систему в матричном виде.
3. Опишите алгоритм метода сведения линейной системы к одному уравнению более высокого порядка.

§ 15. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1. Однородные линейные системы

1. Рассмотрим однородную линейную систему (111). В матричном виде она записывается следующим образом:

$$Y' = AY. \tag{121}$$

Если все элементы a_{ij} матрицы A постоянны, то для решения системы можно использовать методы линейной алгебры. Прежде всего, заметим, что однородная система имеет очевидное частное решение:

$$y_1(x) \equiv 0,\ \ldots,\ y_n(x) \equiv 0.$$

Это решение называется *тривиальным* (*нулевым*). Интерес представляют, конечно, нетривиальные решения. Будем искать такие решения в виде:

$$y_1 = p_1 e^{\lambda t}, \cdots,\ y_n = p_2 e^{\lambda t} \tag{122}$$

или, используя матричную запись, в виде:

$$Y = Pe^{\lambda t}, \tag{123}$$

где:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

– ненулевая матрица (вектор) с постоянными элементами.

Имеем:

$$Y' = \lambda P e^{\lambda t}.$$

Подставляя выражения для Y и Y' в уравнение (121), получим:

$$\lambda P e^{\lambda t} = P e^{\lambda t},$$

откуда после сокращения на $e^{\lambda t}$, находим:

$$AP = \lambda P. \tag{124}$$

Это уравнение говорит о том, что λ является собственным значением матрицы A, а P – собственным вектором, соответствующим λ.

Определение. *Характеристическое уравнение матрицы A*:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{125}$$

называется ***характеристическим уравнением*** *однородной линейной системы* (6.121) *с постоянными коэффициентами*.

Замечание 1. Напомним читателю, что для нахождения собственного вектора P, соответствующего собственному значению λ. матрицы A, необходимо найти решение следующей алгебраической системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{126}$$

2. Так же, как и в случае линейных уравнений, имея корни характеристического уравнения, мы можем построить общее решение однородной системы. Для простоты изложения продемонстрируем это на примере систем двух уравнений с двумя неизвестными, т.е. систем вида.

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases} \tag{127}$$

Однако заметим, что полученные в этом случае результаты могут без труда быть перенесены на случай систем большего числа уравнений.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

системы (127) является алгебраическим уравнением второго порядка. При его решении могут возникнуть три случая.

Случай 1. Собственные значения λ_1 и λ_2 действительные и различные. Тогда соответствующие им собственные векторы P_1 и P_2 будут действительными и линейно независимыми. Определяемые ими два частных решения уравнения (121)

$$Y_1 = P_1 e^{\lambda_1 t}, \quad Y_2 = P_2 e^{\lambda_2 t}$$

также будут линейно независимы, так как определитель Вронского

$$W(Y_1, Y_2) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Общее же решение, как это следует из (112) имеет вид:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2, \tag{128}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 33. Решить систему:

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 + 6y_2 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Здесь:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы A имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 6 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0.$$

Его корни – $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 4$. Найдем теперь собственные векторы, отвечающие найденным собственным значениям.

Для $\lambda = 5$ получаем следующую систему:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ее решением будет:

$$p_1 = 3p_2.$$

Полагая $p_2 = 1$, находим $p_1 = -3$. Таким образом:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично в случае $\lambda = 4$, получаем:

$$P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, частными решениями системы являются:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x}, Y_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Общее решение в матричной записи имеет вид:

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x},$$

а в развернутой форме оно запишется следующим образом:

$$y_1(x) = -3C_1e^{5x} - 2C_2e^{4x},\ y_2(x) = C_1e^{5x} + C_2e^{4x}.$$

Случай 2. Собственные значения λ_1 и λ_2 комплексно сопряжены: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, где $\beta \neq 0$. Покажем, что соответствующие им собственные векторы также будут комплексно сопряжены. Действительно, пусть P – собственный вектор, отвечающий λ_1 (разумеется, комплексный). Тогда из (124) имеем:

$$\overline{A}\,\overline{P} = \overline{\lambda}_1\overline{P}$$

(черта обозначает операцию комплексного сопряжения) или, учитывая, что $\overline{A} = A$ (матрица A состоит из действительных чисел) и $\overline{\lambda}_1 = \lambda_2$,

$$A\overline{P} = \lambda_2\overline{P}\ .$$

Таким образом, вектор $\overline{P}$ является собственным, отвечающим собственному значению λ_2 и, следовательно, частные решения $Y_1 = Pe^{\lambda_1 t}, Y_2 = \overline{P}e^{\overline{\lambda}_1 t}$ комплексно сопряжены. Чтобы получить действительные решения, заменим Y_1 и Y_2 их линейными комбинациями

$$Y_1^* = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2), \qquad Y_2^* = \frac{1}{2i}(Y_1 - Y_2),$$

которые, как нетрудно видеть, представляют собой соответственно действительную и мнимую части Y_1. Итак, общее решение в этом случае имеет вид:

$$Y = C_1Y_1^* + C_2Y_2^*.$$

Пример 34. Решить систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -3y_1 + y_2. \end{cases}$$

Решая характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0,$$

находим $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = 1 - 2i$. Соответствующими им собственными векторами будут:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим частное решение, соответствующее λ_1:

$$Y_1 = e^{(1+2i)x}\begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

На основании формулы Эйлера получаем:

$$Y_1 = e^x(\cos 2x + i\sin 2x)\begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$Y_1 = e^x\begin{pmatrix} \sin 2x - i\cos 2x \\ 2\cos 2x + 2i\sin 2x \end{pmatrix} = e^x\begin{pmatrix} \sin 2x \\ 2\cos 2x \end{pmatrix} + ie^x\begin{pmatrix} -\cos 2x \\ 2\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Вычислив действительную и мнимую части Y_1, находим два линейно независимых решения исходного уравнения:

$$Y_1^* = e^x\begin{pmatrix} \sin 2x \\ 2\cos 2x \end{pmatrix}, \qquad Y_2^* = e^x\begin{pmatrix} -\cos 2x \\ 2\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение в матричной записи имеет вид:

$$Y = C_1e^x\begin{pmatrix} \sin 2x \\ 2\cos 2x \end{pmatrix} + C_2e^x\begin{pmatrix} -\cos 2x \\ 2\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Отсюда:

$$y_1(x) = C_1e^x\sin 2x - 2C_2e^x\cos 2x, \quad y_2(x) = 2C_1e^x\cos 2x + 2C_2e^x\sin 2x.$$

Случай 3. Характеристическое уравнение имеет единственный корень λ (кратности 2), которому соответствуют два линейно независимых собственных вектора P_1 и P_2 (т.е. кратность корня совпадает с числом линейно независимых собственных векторов). Векторы P_1 и P_2 порождают два линейно независимых решения:

$$Y_1 = e^{\lambda t}P_1, \qquad Y_2 = e^{\lambda t}P_2\,,$$

и общее решение, так же как и в случае 1, находится по формуле (128).

Замечание 2. Представляем читателю возможность доказать самостоятельно, что для системы двух уравнений данный случай может иметь место только лишь для систем вида:

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 \\ y_2' = \lambda y_2. \end{cases}$$

Случай 4. Характеристическое уравнение имеет единственный корень λ (кратности 2), которому с точностью до постоянного множителя соответствует один собственный вектор P_1 (т.е. кратность корня больше числа линейно независимых собственных векторов). В этом случае для отыскания решения целесообразно применить *метод неопределенных коэффициентов*, который мы уже использовали при решении линейных дифференциальных уравнений. Согласно этому методу общее решение необходимо искать в форме:

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda x}(c_{11} + c_{12}x), \\ y_2 = e^{\lambda x}(c_{21}x + c_{22}x), \end{cases} \qquad (129).$$

где постоянные c_{ij} требуют определения путем подстановки этих выражений в исходную однородную систему.

Пример 35. Решить систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

имеет единственный корень $\lambda = 2$ (кратности 2). Ему соответствует единственный собственный вектор

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому решение в этом случае будем искать в виде:

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}(c_{11} + c_{12}x), \\ y_2 = e^{2x}(c_{21} + c_{22}x). \end{cases}$$

Подставляя выражения для y_1 и y_2 в исходную систему, находим:

$$\begin{cases} e^{2x}(2c_{11} + c_{12} + 2c_{12}x) = e^{2x}(c_{11} + c_{21} + (c_{12} + c_{22})x), \\ e^{2x}(2c_{21} + c_{22} + 2c_{22}x) = e^{2x}(3c_{21} - c_{11} + (3c_{22} - c_{12})x). \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} 2c_{11} + c_{12} = c_{11} + c_{21}, \\ 2c_{12} = c_{12} + c_{22}, \\ 2c_{21} + c_{22} = 3c_{21} - c_{11}, \\ 2c_{22} = 3c_{22} - c_{12}. \end{cases}$$

Решая ее, получаем:

$$\begin{cases} c_{11} = C_1, \\ c_{12} = C_2, \\ c_{21} = C_1 + C_2, \\ c_{22} = C_2, \end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x}(C_1 + C_2 x), \\ y_2 = e^{2x}(C_1 + C_2 + C_2 x). \end{cases} \tag{130}$$

Замечание 3. Для решения однородных систем в случае, когда корень характеристического уравнения λ кратный и ему соответствует единственный собственный вектор P_1, может быть также применен ***метод присоединенных векторов***. Суть его такова. Пусть P_2 – вектор-столбец, являющийся решением уравнения

$$AP_2 = \lambda P_2 + P_1, \tag{131}$$

тогда однородная система (127) имеет два линейно независимых решения:

$$Y_1 = e^{\lambda x} P_1\ ,\ Y_2 = e^{\lambda x}(xP_1 + P_2).$$

Покажем, что Y_2 является решением. Имеем:

$$Y_2' = e^{\lambda x}(\lambda x P_1 + \lambda P_2 + P_1).$$

Учитывая, что P_1 – собственный вектор, а P_2 – удовлетворяет условию (131), получаем:

$$Y_2' = e^{\lambda x}(xAP_1 + AP_2) = e^{\lambda x} A(xP_1 + P_2) = AY_2.$$

Нетрудно также убедится, что Y_1 и Y_2 – линейно независимы. Следовательно, они образуют фундаментальный набор решений, и общее решение может быть найдено по формуле (128).

В общем случае корню характеристического уравнения λ кратности $k > 1$, имеющему один собственный вектор P_1, соответствует k линейно независимых решений:

$$Y_1 = e^{\lambda x} P_1,\ Y_2 = e^{\lambda x}(xP_1 + P_2),\ Y_3 = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{2!}P_1 + \frac{x}{1!}P_2 + P_3\right), \ldots$$

$$Y_k = e^{\lambda x}\left(\frac{x^k}{k!}P_1 + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}P_2 + \ldots + \frac{x}{1!}P_{k-1} + P_k\right), \tag{132}$$

где присоединенные векторы $P_2, P_3, \ldots, P_k$ являются последовательными решениями следующих алгебраических систем:

$$AP_2 = \lambda P_2 + P_1, \tag{133}$$

$$\vdots$$

$$AP_k = \lambda P_k + P_{k-1}.$$

Пример 36. Решить методом присоединенных векторов систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Данная система рассматривалась в примере 35, где было установлено, что характеристическое уравнение имеет единственный корень λ = 2-кратности 2, которому соответствует единственный собственный вектор

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С учетом этого соотношения (130) примут вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где p_{21} и p_{22} – элементы вектора P_2. Они равносильны уравнению

$$p_{22} = 1 - p_{21},$$

здесь в качестве свободной переменной выбрана p_{21}. Таким образом, у нас имеется некоторый произвол в выборе вектора P_2. Полагая $p_{21} = 0$, получаем $p_{22} = 1$. Следовательно:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По формулам (132) находим фундаментальный набор решений системы:

$$Y_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}.$$

Общее же решение в матричной форме имеет вид:

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Нетрудно убедится, что оно совпадает с решением, полученным в примере 35 (см. соотношение (130)).

3. Как отмечалось выше, методы решения, разработанные для решения однородных систем из двух уравнений, могут быть перенесены на случай систем большего числа уравнений. Продемонстрируем это на примерах.

Пример 37. Решить систему:

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 2y_2 - 2y_3 \\ y_2' = 2y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_3' = 2y_1 - 2y_2 + y_3. \end{cases}$$

Составим характеристическое уравнение системы:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Раскрывая определитель, получаем:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9 = 0.$$

Данное уравнение после несложных преобразований принимает вид:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0\,.$$

Отсюда находим $\lambda_1 = 1$ (простой корень), ему соответствует собственный вектор:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и $\lambda_2 = 3$ (корень кратности 2), которому соответствуют два линейно независимых собственных вектора:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Пример 38. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 - 4y_3 \\ y_3' = 4y_1 + 2y_2 - 3y_3. \end{cases}$$

$$y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 2,\ y_3(0) = 3.$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0.$$

Его корнями будут $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. Им соответствуют следующие собственные векторы:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$Y = C_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-x} + C_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{x} + C_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{3x}. \qquad (133)$$

Полагая $x = 0$ в (133) и принимая во внимание начальные условия, мы приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} C_2 + C_3 = 2, \\ C_1 + C_3 = 2, \\ C_1 + C_2 + C_3 = 3. \end{cases}$$

Решая ее, находим:

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 1, \\ C_3 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, решением задачи Коши будет:

$$Y = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^{-x} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{x} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{3x}.$$

Пример 39. Решить систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 - y_3 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 \\ y_3' = y_1 + 3y_2 - 2y_3. \end{cases}$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

находим $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, $\lambda_3 = 2$. Соответствующими им собственными векторами будут:

$$P_1 = \begin{pmatrix}1-i\\1+i\\2\end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix}1+i\\1-i\\2\end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим частное решение, соответствующее λ_1:

$$Y_1 = e^{ix}\begin{pmatrix}1-i\\1+i\\2\end{pmatrix}.$$

Оно является комплексным. Для нахождения действительных решений вычислим действительную и мнимую части Y_1. На основании формулы Эйлера

$$Y_1 = (\cos x + i\sin x)\begin{pmatrix}1-i\\1+i\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin x + \cos x + i(\sin x - \cos x)\\ \sin x - \cos x + i(\sin x + \cos x)\\ 2\cos x + 2i\sin x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin x + \cos x\\ \sin x - \cos x\\ 2\cos x\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}\sin x - \cos x\\ \sin x + \cos x\\ 2\sin x\end{pmatrix}$$

Отсюда получаем два линейно независимых решения исходного уравнения:

$$Y_1^* = \begin{pmatrix}\sin x + \cos x\\ \sin x - \cos x\\ 2\cos x\end{pmatrix}, \qquad Y_2^* = \begin{pmatrix}\sin x - \cos x\\ \sin x + \cos x\\ 2\sin x\end{pmatrix}.$$

Вместе с частным решением:

$$Y_3 = e^{2x}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

соответствующим вектору P_3 , они образуют фундаментальный набор решений системы. Таким образом, общее решение имеет вид:

$$Y = C_1\begin{pmatrix}\sin x + \cos x\\ \sin x - \cos x\\ 2\cos x\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}\sin x - \cos x\\ \sin x + \cos x\\ 2\sin x\end{pmatrix} + C_3 e^{2x}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Пример 40. Решить систему:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 - y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = 2y_1 + 2y_3. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение системы

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$

имеет единственный корень $\lambda = 2$ кратности 3, которому соответствует единственный собственный вектор:

$$P_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}.$$

В этом случае целесообразно применить метод присоединенных векторов (см. замечание 3 данного параграфа). В соответствии с этим методом первоначально мы должны найти решение системы матричных уравнений (133). Решением первого уравнения системы (133) является собственный вектор P_1. Второе уравнение системы $AP_2 = \lambda P_2 + P_1$ равносильно следующей алгебраической системе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Одним из решений этой системы является вектор:

$$P_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В свою очередь, решая систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

соответствующую матричному уравнению $AP_3 = 2P_3 + P_2$, находим:

$$P_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, как это следует из (132), фундаментальный набор решений данной системы имеет вид:

$$Y_1=e^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \ Y_2=e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2x+1 \\ 2x+2 \end{pmatrix},\ \ Y_3=e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ x^2+x \\ x^2+2x \end{pmatrix}.$$

А общим решением исходной системы дифференциальных уравнений будет:

$$Y=C_1e^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}+\ C_2e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2x+1 \\ 2x+2 \end{pmatrix}+C_3e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ x^2+x \\ x^2+2x \end{pmatrix}.$$

2. Неоднородные линейные системы

1. Для решения неоднородных линейных систем применяются методы, аналогичные методам, используемым для решения неоднородных линейных уравнений. Одним из таких методов является хорошо известный нам *метод вариации постоянных.* Продемонстрируем его суть на следующем примере.

Пример 41. Решить систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 8 + e^{-x}\ln x \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 + 12 - e^{-x}\ln x. \end{cases}$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2-3\lambda-4=0,$$

находим корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$. Собственными векторами, отвечающими найденным собственным значениям, будут соответственно:

$$P_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение соответствующей однородной системы имеет вид:

$$\widetilde{Y}=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-x}+C_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}e^{4x}.$$

Решение неоднородного уравнения в соответствии с метод вариации постоянной будем искать в форме:

$$Y=C_1(x)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-x}+C_2(x)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}e^{4x}.$$

Для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ подставим выражение для Y в исходную систему, получим:

$$\begin{cases}C_1'e^{-x}+2C_2'e^{4x}=8+e^{-x}\ln x\\-C_1'e^{-x}+3C_2'e^{4x}=12-e^{-x}\ln x.\end{cases}$$

Отсюда находим:

$$\begin{cases}C_1'=\ln x\\C_2'=4e^{-4x}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}C_1(x)=x\ln x-x+\widetilde{C}_1\\C_2(x)=-e^{-4x}+\widetilde{C}_2.\end{cases}$$

где $\widetilde{C}_1,\widetilde{C}_2$ – произвольные постоянные. Таким образом, решение исходной системы будет:

$$Y=\begin{pmatrix}x\ln x-x+\widetilde{C}_1\\-x\ln x+x-\widetilde{C}_1\end{pmatrix}e^{-x}+\begin{pmatrix}2(-e^{-4x}+\widetilde{C}_2)\\3(-e^{-4x}+\widetilde{C}_2)\end{pmatrix}e^{4x}.$$

2. В случае, когда столбец свободных членов системы имеет специальный вид:

$$F=e^{ax}\,(P_m(x)\cos bx+Q_k(x)\sin bx),$$

где $P_m(x)$ и $Q_k(x)$ – векторы-столбцы, элементами которых являются многочлены от x степени, не превышающей соответственно n и k, для отыскания частного решения уравнения целесообразно воспользоваться *методом неопределенных коэффициентов*. Для систем он имеет определенную специфику. Суть его такова.

Если число $\gamma = a + bi$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде:

$$Y = e^{ax}\left(\widetilde{P}_m(x)\cos bx + \widetilde{Q}_m(x)\sin bx\right),$$

где $\widetilde{P}_m(x)$ и $\widetilde{Q}_m(x)$ – вектор-столбцы, элементами которых являются многочлены от x степени $m = \max\{k, n\}$.

Если же γ является корнем характеристического уравнения кратности l (*резонансный случай*), то частное решение ищется в форме:

$$Y = e^{ax}\left(\widetilde{P}_{m+l}(x)\cos bx + \widetilde{Q}_{m+l}(x)\sin bx\right).$$

Пример 42. Решить систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_2 + 2x \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2 + 1. \end{cases}$$

Решая характеристическое уравнение системы

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0,$$

находим его корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$. Собственными векторами, отвечающими найденным собственным значениям, будут соответственно:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение однородной системы, соответствующей данной неоднородной, имеет вид:

$$\widetilde{Y} = C_1\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-x} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4x}.$$

Теперь найдем частное решение. В нашем случае элементы столбца свободных членов представляют собой многочлены степени, не превышающей 1, и, так как число γ (= 0) не совпадает с корнями характеристического уравнения, то частное решение неоднородной системы будем искать в виде:

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} px + c \\ qx + d \end{pmatrix},$$

где p, q, c и d – некоторые постоянные. Для их определения подставим выражение для $\bar{Y}$ в исходную систему. Получим:

$$\begin{cases} p = px + c + 3qx + 3d + 2x \\ q = 2px + 2c + 2qx + 2d + 1. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} p = c + 3d \\ 0 = p + 3q + 2 \\ q = 2c + 2d + 1 \\ 0 = 2p + 2q. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим $p = 1$, $q = -1$, $c = -2$ и $d = 1$. Следовательно:

$$\widehat{Y} = \begin{pmatrix} x - 2 \\ -x + 1 \end{pmatrix}.$$

Так как общее решение неоднородной системы Y представляет собой сумму частного решения $\widehat{Y}$ и общего решения $\widetilde{Y}$ соответствующей однородной системы, то окончательно получаем:

$$Y = \begin{pmatrix} x - 2 \\ -x + 1 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

Пример 43. Решить систему:

$$\begin{cases} y_1' = -4y_1 + y_2 + e^x \\ y_2' = -5y_1 + 2y_2 + 5e^x. \end{cases}$$

Решим характеристическое уравнение системы:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0.$$

Его корнями будут $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Им соответствуют собственные векторы:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общее решение соответствующей однородной системы имеет вид:

$$\widetilde{Y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x}.$$

Теперь найдем частное решение. В данном случае число $\gamma = 1$ совпадает с корнем λ_1 характеристического уравнения (резонансный случай). Так как элементы столбца свободных членов представляют собой многочлены нулевой степени, частное решение неоднородной системы будем искать в виде:

$$\widehat{Y} = \begin{pmatrix} px + c \\ qx + d \end{pmatrix} e^x \quad ,$$

где p, q, c и d – некоторые постоянные. Подставим выражение для $\widehat{Y}$ в исходную систему. Имеем:

$$\begin{cases} (px + c + p)e^x = (-4px - 4c + qx + d + 1)e^x \\ (qx + d + q)e^x = (-5px - 5c + 2qx + 2d + 5)e^x. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} p = -4p + q \\ c + p = -4c + d + 1 \\ q = -5p + 2q \\ d + q = -5c + 2d + 5. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$$\begin{cases} p = 1 \\ q = 5 \\ d = 5c. \end{cases}$$

Полагая $c = 1$, получаем $d = 5$. Следовательно:

$$\widehat{Y} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 5x+5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$Y = \begin{pmatrix} x+1 \\ 5x+5 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3x}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое решение однородной линейной системы называется тривиальным?
2. Дайте определение характеристического уравнения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами.
3. Приведите возможные случаи решения однородной линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами из двух уравнений с двумя неизвестными функциями.
4. Охарактеризуйте методы решения неоднородной линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами.

§ 16. Разностные уравнения

1. Общие понятия и примеры

1. **Определение.** *Уравнение вида:*

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}) = 0, \tag{134}$$

*где k – фиксированное, а n – произвольное натуральное число, y_n, $y_{n+1}, \ldots, y_{n+k}$ – члены некоторой числовой последовательности, называется **разностным уравнением k-го порядка.***

Решить разностное уравнение означает найти его *общее решение,* т.е. все последовательности $y_n = y(n)$, удовлетворяющие уравнению (134).

Разностные уравнения используются в моделях экономической динамики с дискретным временем, а также для приближенного решения дифференциальных уравнений.

Некоторые типы разностных уравнений нам знакомы еще из школьной математики. Так, например, разностное уравнение второго порядка

$$2y_{n+1} = y_n + y_{n+2}$$

задает признак арифметической прогрессии. Его решением является последовательность $y_n = a_1 + d(n-1)$, где a_1 и d – произвольные действительные числа. Аналогично уравнение

$$y_{n+1}^2 = y_n \cdot y_{n+2}$$

определяет признак геометрической прогрессии, и его решением является последовательность $y_n = b_1 q^{n-1}$, где b_1 и q – произвольные действительные числа.

Между теориями разностных и дифференциальных уравнений прослеживается определенная аналогия. Если в уравнении (134) произвести формальную замену:

$$n \mapsto x,\ y_n \mapsto y(x),\ y_{n+1} \mapsto y'(x),\ \ldots,\ y_{n+k} \mapsto y^{(k)}(x), \tag{135}$$

то определение разностного уравнения трансформируется в общее определение обыкновенного дифференциального уравнения порядка k. Проведя формальную замену (135), нетрудно получить ***нормальную форму*** записи разностного уравнения:

$$y_{n+k} = f(n, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k-1}). \tag{136}$$

Аналогичным образом определяется и ***задача Коши*** – как задача нахождения решения уравнения (136), удовлетворяющего начальным условиям:

$$y(n_0) = a_0,\ y(n_0+1) = a_1\ , \ldots,\ y(n_0+k-1) = a_{k-1}. \tag{137}$$

Ниже будет показано, что решения соответствующих классов дифференциальных и разностных уравнений (например, линейных) осуществляется схожими методами.

Имеет место

Теорема 10. *Решение* $y_n = y(n)$ *задачи Коши* (136), (137) *при* $n \ge n_0$ *определено однозначно.*

Доказательство. Подставляя значения для $y(n_0)$, $y(n_0+1)$, … , $y(n_0+k-1)$ из (137) в (136), мы находим $y(n_0+k)$. Это, в свою очередь, дает нам возможность определить $y(n_0+k+1)$. Продолжая этот процесс, можно рекуррентным способом по формуле (136) найти любое значение $y(n)$ при $n \ge n_0$. Теорема доказана.

Следует, однако, заметить, что нахождения общего решения разностного уравнения в отличие от задачи Коши является гораздо более сложной задачей.

2. Линейные разностные уравнения

1. **Определение.** *Разностное уравнение вида*

$$a_k(n)\, y_{n+k} + \ldots + a_1(n)\, y_{n+1} + a_0(n)\, y_n = f(n), \tag{138}$$

где a_0 ,a_1,…, a_k, f *– некоторые функции от* n ($a_0 \ne 0$, $a_k \ne 0$), *называется* ***линейным разностным уравнением k-го порядка.***

Введем следующее обозначение:

$$L(y) = a_k y_{n+k} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n. \qquad (139)$$

Это выражение называется ***линейным разностным оператором k-го порядка***.

С учетом этих обозначений уравнение (139) может быть записано в виде:

$$L(y) = f(n). \qquad (140)$$

Уравнений уравнение

$$L(y) = 0 \qquad (141)$$

называется ***линейным однородным разностным уравнением***, соответствующим уравнению (140). Само же уравнение (141) (при $f(n) \not\equiv 0$) называется ***неоднородным***.

Проведя рассуждения, аналогичные использованным в § 10 и § 11, нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Теорема 11 (*об общем решении линейного неоднородного уравнения*). *Общее решение линейного неоднородного разностного уравнения* (140) *есть сумма частного решения* $\bar{y}(n)$ *этого уравнения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения* (140).

Теорема 12 (*об общем решении линейного однородного уравнения*). *Пусть* $y^{(1)}(n), \ldots, y^{(k)}(n)$ *– система, состоящая из k линейно независимых решений линейного однородного разностного уравнения, тогда общее решение этого уравнения задается формулой:*

$$y(n) = C_1 y^{(1)}(n) + \ldots + C_k y^{(k)}(n). \qquad (142)$$

Множество решений линейного однородного разностного уравнения k-го порядка образует k-мерное линейное пространство, а любой набор $y^{(1)}(n), \ldots, y^{(k)}(n)$ из k линейно независимых решений (называемый *фундаментальным набором*) является его базисом. Признаком линейной независимости решений $y^{(1)}(n), \ldots, y^{(k)}(n)$ однородного уравнения является неравенство нулю ***определителя Казоратти***:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(k)} \\ y_{n+1}^{(1)} & y_{n+1}^{(2)} & \cdots & y_{n+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n+k}^{(1)} & y_{n+k}^{(k)} & \cdots & y_{n+k}^{(k)} \end{vmatrix}, \qquad (143)$$

который является аналогом определителя Вронского в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. В случае, когда коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_k$ являются постоянными, методы решения линейного однородного разностного уравнения

$$a_k y_{n+k} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0 \qquad (144)$$

во многом аналогичны методам решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Действительно, будем искать решения уравнения в виде:

$$y_n = \lambda^n\,, \tag{145}$$

где $\lambda \neq 0$ – некоторая постоянная. Подставляя выражение для y_n из (145) в (144), находим:

$$a_k\lambda^{n+k} + a_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \ldots + a_1\lambda^{n+1} + a_0\lambda^n = 0\,.$$

Разделим обе части этого уравнения на λ^n, получим:

$$a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0\,. \tag{146}$$

Уравнение (146) называется ***характеристическим уравнением*** однородного линейного разностного уравнения.

Так же, как и в случае линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, знание корней характеристического уравнения, позволяет построить общее решение однородного разностного уравнения. Для простоты изложения продемонстрируем это на примере уравнения второго порядка:

$$ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0\,,\ a \neq 0, c \neq 0\,. \tag{147}$$

Однако заметим, что полученные в этом случае результаты могут быть без труда перенесены на случай уравнений более высокого порядка. В зависимости от значения дискриминанта $D = b^2 - 4ac$

$$a\lambda^2 + b\lambda + cy = 0 \tag{148}$$

характеристического уравнения возможны следующие случаи.

Случай 1. $D > 0$. Характеристическое уравнение имеет два действительных и различных корня – λ_1 и λ_2. Тогда $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Действительно, если хотя бы один корень равен нулю, то коэффициент и $c = \lambda_1\lambda_2$ также будет равен нулю, что противоречит определению линейного разностного уравнения второго порядка. Корням λ_1 и λ_2 характеристического уравнения соответствуют два решения:

$$y_n^{(1)} = \lambda_1^n\,,\ y_n^{(2)} = \lambda_2^n$$

уравнения (147). Покажем, что эти решения линейно независимы. Для этого вычислим определитель Казоратти:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^n\lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1}\lambda_2^n = \lambda_1^n\lambda_2^n(\lambda_2 - \lambda_1)\,.$$

Так как корни λ_1 и λ_2 различны, то $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, следовательно, $\Delta \neq 0$, а значит, решения линейно независимы. В этом случае общее решение уравнения имеет вид:

$$y(n) = C_1 \lambda_1^{\ n} + C_2 \lambda_2^{\ n}, \tag{149}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пример 44. Решить уравнение:

$$y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = 0.$$

Составим характеристическое уравнение, имеем:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0.$$

Оно имеет два действительных различных корня: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -5$. Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y_n = C_1 + C_2 (-5)^n.$$

Случай 2. $D < 0$. Характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня – λ_1 и λ_2, которые, используя тригонометрическую форму записи, могут быть представлены следующим образом:

$$\lambda_1 = r(\cos\phi + i\sin\phi),\ \lambda_2 = r(\cos\phi - i\sin\phi),$$

где r – модуль λ_1, а φ – его аргумент. Соответствующие решения разностного уравнения также комплексно сопряжены и на основании формулы Муавра имеют вид:

$$y_n^{(1)} = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi),\ y_n^{(2)} = r^n(\cos n\phi - i\sin n\phi).$$

Чтобы получить действительные решения, заменим $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$ их линейными комбинациями:

$$z_{\rm n}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(y_{\rm n}^{(1)} + y_{\rm n}^{(2)}\right),\quad z_{\rm n}^{(2)} = \frac{1}{2i}\left(y_{\rm n}^{(1)} - y_{\rm n}^{(2)}\right).$$

Таким образом, мы получили два линейно независимых действительных решения:

$$z_n^{(1)} = r^n \cos n\phi,\ z_n^{(2)} = r^n \sin n\phi.$$

Таким образом, в данном случае общее решение имеет вид:

$$y_n = r^{\ n}(C_1 \cos n\phi + C_2 \sin n\phi).$$

Пример 45. Решить уравнение:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$$

имеет два комплексно сопряженных корня – $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i$ и $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}i$, которые могут быть записаны как:

$$\lambda_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ \lambda_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Следовательно, общим решением исходного уравнения будет:

$$y_n = 2^n\left(C_1\cos\frac{n\phi}{3} + C_2\sin\frac{n\phi}{3}\right).$$

Случай 3. $D = 0$. Оба корня характеристического уравнения действительны и равны $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda)$. Покажем, что в этом случае кроме решения

$$y_n^{(1)} = \lambda^n,$$

существует еще одно решение, линейно независимое с $y_n^{(1)}$. Действительно, нетрудно убедится, что таковым является:

$$y_n^{(2)} = n\lambda^n.$$

Сначала докажем, что $y_n^{(2)}$ является решением уравнения (148). В самом деле, подставляя выражение для $y_n^{(2)}$ в уравнение (148) , получим:

$$a(n+2)\lambda^{n+2} + b(n+1)\lambda^{n+1} + cn\lambda^n = \lambda^n\left(a(n+2)\lambda^2 + b\lambda(n+1) + cn\right) =$$

$$= \lambda^n(n(a\lambda^2 + b\lambda + c) + 2a\lambda^2 + b\lambda) = 0$$

в силу того, что $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ и $\lambda = -\dfrac{b}{2a}$. Вычислим теперь определитель Казоратти, имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^n & n\lambda^n \\ \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{n+1} \end{vmatrix} = \lambda^{2n+1} \neq 0,$$

так как $\lambda \neq 0$. Следовательно, частные решения $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$ линейно независимы, и общее решение уравнения (148) имеет вид:

$$y_n = \lambda^n(C_1 + nC_2).$$

Пример 46. Решить уравнение:

$$y_{n+2} + 6y_{n+1} + 9y_n = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

имеет единственный действительный корень $\lambda = -3$. Следовательно, общее решение исходного уравнения таково:

$$y_n = (-3)^n (C_1 + nC_2).$$

3. Для нахождения решения неоднородного линейного разностного уравнения, так же как и в случае линейных дифференциальных уравнений, используется *метод неопределенных коэффициентов*, основанный на подборе частного решения неоднородного уравнения по виду правой части $f(n)$.

Пример 47. Решить уравнение:

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = 64 \cdot 5^n.$$

Будем искать частное решение в виде:

$$y(n) = p5^n.$$

Подставляя это выражение в наше уравнение, получим:

$$p(25 + 10 - 3)5^n = 64 \cdot 5^n.$$

Следовательно, $p = 2$, а значит,

$$y(n) = 2 \cdot 5^n.$$

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0,$$

находим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Таким образом, общее решение уравнения имеет вид:

$$y_n = 2 \cdot 5^n + C_1 + C_2(-3)^n.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение и приведите пример разностного уравнения n-го порядка.
2. Как связаны между собой общее и частное решения одного разностного уравнения?
3. Чему равна степень характеристического уравнения линейного однородного разностного уравнения n-го порядка?
4. Какой вид имеет общее решение линейного однородного разностного уравнения 2-го порядка в случае, когда его характеристическое уравнение имеет действительные корни? комплексно-сопряженные корни? кратный корень?
5. В каких случаях используется метод неопределенных коэффициентов для решения неоднородного линейного разностного уравнения и в чем его суть? Что такое резонансный случай?

§ 17. Модели экономической динамики с дискретным временем

1. Модель Самуэльсона–Хикса

1. В данном параграфе мы рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение разностных уравнений. Начнем с *модели делового цикла Самуэльсона-Хикса* (*динамического варианта модели Кейнса*). Эта модель основывается на уже упоминавшемся выше *принципе акселерации* (см. § 4), то есть на предположении, что объемы инвестирования прямо пропорциональны приросту национального дохода. Данное предположение характеризуется следующим уравнением:

$$I(t) = V\left(Y(t-1) - Y(t-2)\right), \tag{150}$$

где коэффициент $V > 0$ – фактор акселерации, $I(t)$ – величина инвестиций в период *t*, $Y(t-1), Y(t-2)$ – величины национального дохода соответственно в $(t-1)$-м и $(t-2)$-м периодах. Предполагается также, что спрос на данном этапе зависит от величины национального дохода на предыдущем этапе, т.е.:

$$C(t) = aY(t-1) + b. \tag{151}$$

Условие равенства спроса и предложения имеет вид:

$$Y(t) = I(t) + C(t). \tag{152}$$

Подставляя в (152) выражение для $I(t)$ из (150) и выражение для $C(t)$ из (151), находим:

$$Y(t) = (a+V)Y(t-1) - VY(t-2) + b. \tag{153}$$

Уравнение (153) известно, как *уравнение Хикса.* Оно представляет собой неоднородное линейное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (если предположить, что на протяжении рассматриваемых периодов величины a и V постоянны).

Замечание 1. Мы можем легко найти частное решение уравнения (153), если положим, что:

$$Y(t) = Y(t-1) = Y(t-2) = Y^*, \tag{154}$$

т.е. использовав в качестве частного решения равновесное решение $Y^* = const$. Из (153) в силу (154) имеем:

$$Y^* = (a+V)Y^* - VY^* + b,$$

откуда:

$$Y^* = b(1-a)^{-1}. \tag{155}$$

Заметим также, что выражение $(1-a)^{-1}$ в формуле (155) носит название *мультипликатора Кейнса* и является одномерным аналогом *матрицы полных затрат*.

Пример 48. Рассмотрим модель Самуэльсона–Хикса при условии, что $a = 0{,}5; V = 0{,}5; b = 4$. В этом случае уравнение (153) принимает вид:

$$Y(t) - Y(t-1) + 0{,}5Y(t-2) = 4 .$$

Его частным решением будет:

$$y(t) = \frac{4}{1-0{,}5} = 8 .$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \lambda + 0{,}5 = 0 .$$

Имеем:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, общим решением соответствующего однородного уравнения является:

$$\widetilde{Y}(t) = \left(\sqrt{2}\right)^t \left(C_1\cos\frac{t\pi}{4} + C_2\sin\frac{t\pi}{4}\right).$$

Следовательно, общим решением уравнения будет:

$$Y(t) = 8 + \left(\sqrt{2}\right)^t \left(C_1\cos\frac{t\pi}{4} + C_2\sin\frac{t\pi}{4}\right).$$

Замечание 2. В зависимости от значений a и V возможны четыре типа динамики. Она может быть растущей или затухающей и при этом иметь или не иметь колебательный характер. Так, в рассмотренном выше примере динамика носила колебательный характер с возрастающей амплитудой. Мы рекомендуем читателю самостоятельно определить виды динамики в зависимости от a и V.

2. Паутинная модель рынка

При помощи разностных уравнений можно дать трактовку процессов сходимости и расходимости в паутинных моделях рынка. Для упрощения выкладок предположим, что спрос и предложение задаются линейными функциями, но при этом спрос зависит от цены в данный момент времени, а предложение зависит от цены на предыдущем этапе, т.е.:

$$d_t = a - bp_t ,\ s_t = m + np_{t-1} , \tag{156}$$

где a, b, m, n – положительные действительные числа.

Таким образом, если $s_t = d_t$, то

$$a - m = bp_t + np_{t-1} . \tag{157}$$

Уравнение (157) представляет собой линейное разностное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. В качестве частного решения можно использовать равновесное решение:

$$p_t = \overline{p} = const\,. \tag{158}$$

Действительно, подставив выражение для p_t из формулы (158) в (157), легко получить, что:

$$\overline{p} = \frac{a-m}{b+n}\,. \tag{159}$$

Решая характеристическое уравнение

$$b\lambda + n = 0\,,$$

находим $\lambda = -\frac{n}{b}$. Следовательно:

$$p_t = C_1\left(-\frac{n}{b}\right)^t + \frac{a-m}{b+n}\,. \tag{160}$$

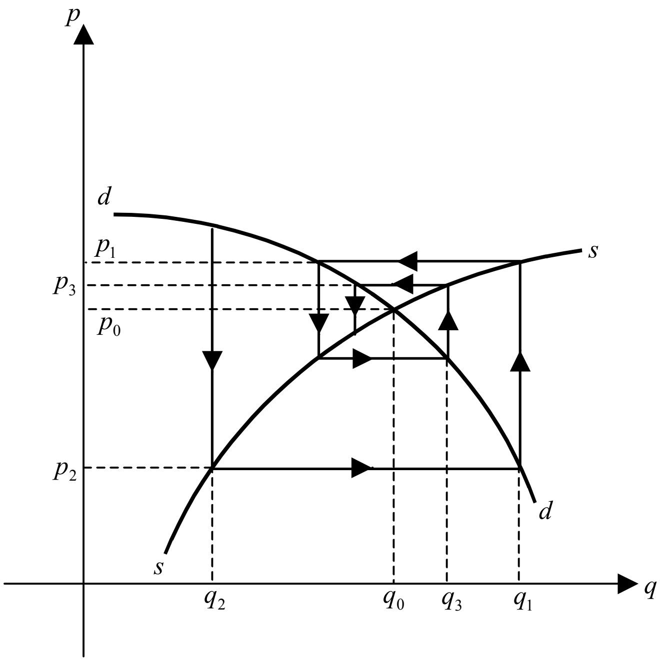

Рис. 13.

Таким образом, из (160) вытекает, что динамика цен носит колебательный характер. При этом, если $n < b$, то последовательность цен $\{p_t\}$ будет сходиться к равновесному состоянию (рис. 13), если $n > b$, то с течением времени последовательность $\{p_t\}$ будет удаляться от равновесного состояния (рис. 14), если же $n = b$, то будут иметь место циклические колебания цены относительно равновесного состояния.

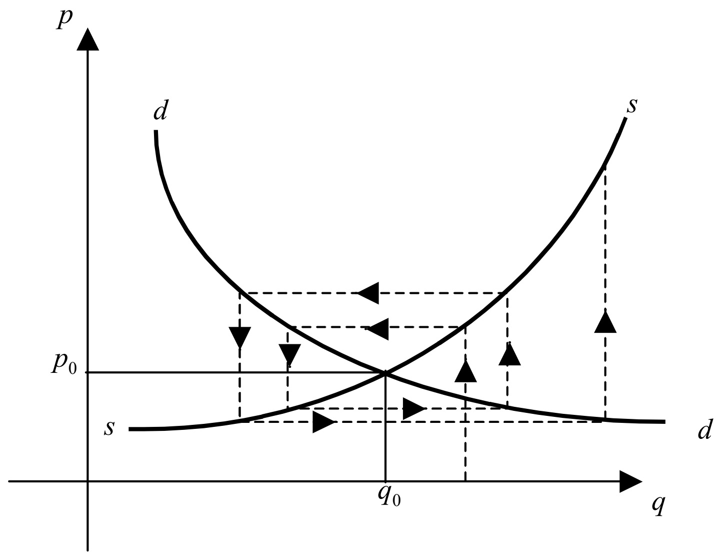

Рис. 14.

3. Задача об определении текущей стоимости купонной облигации

Пусть F – номинальная стоимость купонной облигации (т.е. денежная сумма, выплачиваемая эмитентом в момент погашения, совпадающего с концом последнего купонного периода), K – величина купона (т.е. денежная сумма, выплачиваемая в конце каждого купонного периода), $P(n)$ – текущая стоимость облигации в конце n-го купонного периода, k – число купонных периодов. Пусть также r – процентная ставка за один купонный период, выраженная в частях. Предполагается, что она неизменна в течение всего срока обращения облигации. Вышеперечисленные величины связаны между собой следующими соотношениями:

$$P(k) = F\,; \tag{161}$$

$$P\,(n+1) + K = (1+r)P(n). \tag{162}$$

Таким образом, задача об определении текущей стоимости купонной облигации сводится к решению задачи Коши (161), (162) для неоднородного линейного разностного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами. В качестве частного решения выберем равновесное решение:

$$P(n+1) = P(n) = P^*. \tag{163}$$

Подставив выражение для $P(n)$ из формулы (162) в (162), получаем:

$$P^* = \frac{K}{r}\,. \tag{164}$$

Заметим, что величина K/r есть не что иное, как текущая стоимость бесконечной ренты, т.е. сумма, которую необходимо уплатить в настоящий момент, чтобы в течение бесконечно длительного времени получать сумму K через каждый промежуток времени t при процентной ставке r . Действительно:

$$\frac{K}{r}=\frac{K}{1+r}+\frac{K}{(1+r)^2}+\frac{K}{(1+r)^3}+\cdots \quad .$$

В справедливости этого равенства легко убедиться, посчитав сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, находящейся в правой части формулы.

Решив характеристическое уравнение

$$\lambda-(1-r)=0\,,$$

находим:

$$P(n) = C(1+r)^n + (K/r)\ . \tag{165}$$

Полагая в соотношениях (165) $n = k$ и учитывая (162), имеем:

$$C = (F - K/r)\ (1+r)^{-k}. \tag{166}$$

Из (165) в силу (166) следует, что последовательность $P(n)$ будет возрастающей, если номинальная стоимость облигации выше чем стоимость бесконечной ренты, убывающей, если она меньше, и постоянной, если они равны.

Литература

Меньшиков И.С. Финансовый анализ ценных бумаг. М.: Финансы и статистика, 1998.

Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений: Учебное пособие. М.: Наука, 1978.

Самарский А.А. Введение в численные методы: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1987.

Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений: Учебник для вузов. М.: Физматгиз, 1958.

Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: Учебник: В 2 ч. М.: Финансы и статистика, 1998, 2000. Ч. 1.

Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике: Учебник: В 2 ч. М.: Финансы и статистика, 1999. Ч. 2.

Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения: Учебник для вузов. М.: Наука, 1998.

Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.

Учебное издание

Екатерина Константиновна Васенкова
Елена Сергеевна Волкова
Игорь Георгиевич Шандра

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Курс лекций

Художественный редактор	*В.А. Селин*
Компьютерная верстка	*Л.Б. Галкиной*
Корректор	*Т.Н. Кузнецова*

Лицензия ИД № 01322 от 24.03.2000.

Подписано в печать 28.10.2002.
Формат 60x84/16. Гарнитура Times.
Усл. п.л. 6,74. Усл.-кр. отт. 6,97. Уч.-изд. л. 2,74.
Тираж 1500 экз.

ФИНАНСОВАЯ АКАДЕМИЯ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
125468, Москва, Ленинградский проспект, 49

Отпечатано в типографии "Нефтяник"
Москва, Софийская наб., 26