В. П. Кирлица

РУКОВОДСТВО К
РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 51-7:336(075.8)
ББК 22.1я73
К43

Рекомендовано ученым советом специального факультета бизнеса и информационных технологий и ученым советом факультета прикладной математики и информатики БГУ

Автор: канд. физ.-мат. наук, доц. каф. мат. моделирования и анализа данных БГУ *В. П. Кирлица*
Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. А. Медведев*

Кирлица, В. П.
К43 Финансовая математика : рук. к решению задач : учеб. пособие / В. П. Кирлица. – Мн. : ТетраСистемс, 2005. – 192 с.
ISBN 985-470-354-1.

Книга является пособием для выполнения лабораторных и практических занятий по курсам "Методы финансово-экономического управления", "Моделирование финансового рынка", "Актуарный анализ" и спецкурсам по финансово-экономическим расчетам.

Предназначена для студентов и магистрантов, обучающихся по финансово-экономическим специальностям; для слушателей факультетов переподготовки и повышения квалификации по этим специальностям, а также работников финансово-кредитных учреждений, предпринимателей, желающих самостоятельно выполнять финансово-экономические расчеты.

УДК 51-7:336(075.8)
ББК 22.1я73

Учебное издание

Кирлица Валерий Петрович

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА
Руководство к решению задач

Учебное пособие

Ответственный за выпуск *С.В. Процко*

Подписано в печать с готовых диапозитивов 29.09.2005. Формат 84×108 1/32.
Бумага для офсетной печати. Гарнитура Antiqua. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,08.
Уч.-изд. л. 9,6. Тираж 2000 экз. Заказ 2410.

Научно-техническое общество с ограниченной ответственностью "ТетраСистемс".
ЛИ № 02330/0056815 от 2 марта 2004 г.
220116, г. Минск-116, а/я 139 (тел. 219-74-01; e-mail: tetra@litera.by; http://www.ts.by).

Республиканское унитарное предприятие «Издательство "Белорусский Дом печати"».
220013, г. Минск, пр. Независимости, 79.

ISBN 985-470-354-1

Посвящается 35-летию факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета

ПРЕДИСЛОВИЕ

Финансово-экономическое образование будущих экономистов, финансистов немыслимо без овладения ими методов количественного финансового анализа. Финансы, образно говоря, это кроветворная система любой рыночной экономики. Методами финансово-экономических расчетов должны владеть не только руководители предприятий, фирм, экономисты, бухгалтера и банковские работники, но, желательно, и каждый грамотный человек. Трудно представить образованного, современного человека, который проживет жизнь и ни разу не обратится за услугами в банк, не будет использовать кредиты для строительства жилья, приобретения бытовых товаров. Овладение финансовой грамотностью, хотя бы в минимальном объеме, поможет, на наш взгляд, облегчить жизнь человека в современном, бурно меняющемся мире.

В данном учебном пособии рассматриваются, так называемые, динамические финансовые расчеты, которые учитывают временную ценность денег. Учет временного фактора состоит в начислении процентов на денежные величины. Основным принципом динамических финансовых расчетов является *принцип временной ценности денег*: сумма денег, которой мы владеем теперь всегда более ценна, чем та же сумма, которая гарантированно может быть получена в будущем. Это вполне и понятно, ведь деньги можно заставить "работать", например, поместив их в банк под определенный процент. Американцы не зря говорят: "время – деньги".

При подготовке данного учебного пособия автор использовал свой, более чем десятилетний, опыт чтения лекций, проведения практических и лабораторных занятий по финансово-экономическим расчетам со студентами и магистрантами факультета прикладной математики и информатики, экономического факультета, специального факультета бизнеса и информационных технологий Белорусского государственного университета. В настоящее время имеется довольно большое число монографий и учебных пособий на русском языке, посвященных финансово-экономическим расчетам. Часть из них приведена в цитируемом списке литературы [1–19, 22–26]. Большое число простых иллюстративных примеров с их подробными решениями, приводимых в упомянутых учебных пособиях и сборниках задач, несомненно, способствует лучшему пониманию теоретического материала. Однако опыт первых лет проведения практических и лабораторных занятий по курсу финансовой математики показал, что в сборниках задач, а их в цитируемом списке литературы всего три [8, 15, 22], мало задач и примеров, ориентированных на подготовку математиков-финансистов, способных решать сложные задачи финансового анализа. Наличие вычислительной техники, пакетов прикладных программ типа EXCEL, MATHEMATICA, MATHCAD, позволяет освободиться от рутинных вычислений и сосредоточиться на выборе наилучшего, из нескольких вариантов, решения финансовой задачи. Это важно, поскольку, если есть несколько вариантов реализации одного и того же финансового проекта, то, как правило, один из вариантов бывает лучше по затратам либо по прибылям, чем другие. Необходимость в подборе таких задач и примеров побудила автора подготовить и издать "Практикум на ЭВМ по финансово-экономическим расчетам" [11]. Так же, под руководством автора данного учебного пособия, на кафедре математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета был разработан специализированный пакет программ по *финансово-экономическим расчетам* (ФЭР), который успешно использовался при проведении практических и лабораторных занятий. Ограниченность объема страниц для издания "Практикума на ЭВМ по финансово-экономическим расчетам" не позволила автору включить в него образцы решения типовых задач и примеров к каждому параграфу.

Этот недостаток, с методической точки зрения, преодолен при подготовке к изданию данного учебного пособия " Финансовая математика: руководство к решению задач". В конце каждого параграфа приводится решение ряда типовых задач, что позволяет решать и другие, аналогичные либо более сложные задачи. Все задачи и примеры (а их в учебном пособии 349) снабжены ответами либо методическими рекомендациями по их решению. Задачи и примеры, включенные в учебное пособие, в основном, оригинальные. Наличие ответов к задачам и примерам позволяет производить самоконтроль правильного выбора метода решения задачи.

Отметим один важный момент,который по мнению автора, отличает некоторые задачии данного учебного пособия от задач и примеров, рассмотренных в [8, 15, 22]. В рыночных условиях функционирования экономики не все параметры финансовой операции могут быть точно определены. Если нет никакой дополнительной информации о их поведении, то никаких обоснованных выводов об итоге финансовой операции сделать нельзя. Нужна дополнительная, априорная информация о поведении не вполне определенных параметров. В данном учебном пособии рассмотрены и исследованы, насколько позволил объем издания, некоторые из подобных ситуаций. Для этого недетерминированные параметры финансовой операции предлагается рассматривать как случайные величины с заданными либо оцененными законами распределения вероятностей. Методы получения (прогнозирования) таких законов распределения вероятностей в данном учебном пособии не обсуждаются. При таких априорных предположениях, естественно, что и интересующая исследователя характеристика финансовой операции будет также случайной величиной. В данной ситуации можно вычислить среднее, ожидаемое значение, дисперсию финансовой характеристики, а также вероятность попадания ее в заданный интервал. Наличие таких числовых характеристик – это важная информация о поведении планируемой финансовой операции. В каждой главе учебного пособия содержатся задачи подобного типа. Если не удается аналитически вычислить числовые характеристики результата финансовой операции при сделанных априорных предположениях, то в этом случае приходится их оценивать, моделируя значения соответствующих случайных величин (ставок процентов, продолжительности операции, денежных сумм). При моделировании выборочных значений случайных величин можно воспользоваться пакетом прикладных программ СТАТМОД, описанным в [21]. Методы моделирования случайных величин и статистического анализа результатов моделирования изложены в [20, 21].

Данное учебное пособие состоит из семи глав, в которых рассмотрены основные разделы стандартного курса по финансовой математике. Детальное описание рассматриваемых типов задач и примеров каждой главы представлено в оглавлении. В начале каждого параграфа кратко излагается необходимый теоретический материал и приводятся основные формулы. Нумерация формул в каждой главе автономная. При необходимости ссылки на формулу из другой главы указывется, в какой главе она находится. В конце каждого параграфа приводится решение типовых задач и примеров. Начало решения примера помечается символом ▶, а окончание решения – символом ■. В конце каждой главы содержится перечень задач и примеров для самостоятельного решения. Все они, в конце учебного пособия, снабжены ответами либо методическими указаниями по их решению.

Автор выражает глубокую благодарность профессору *Ю.С. Харину* за помощь и содействие в издании данного учебного пособия, за обсуждение материала рукописи и сделанные ценные замечания.

Предложения и замечания просьба направлять автору по адресу: факультет прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет, пр. Ф. Скорины,4, Минск,220050, Республика Беларусь; тел. +375 17 2095530; e-mail:kirlitsa@bsu.by.

Глава 1

НАЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ

Введем обозначения, которые будем использовать в дальнейшем: P – первоначальная сумма долга; S – наращенная сумма ссуды (депозита или других инвестиционных денежных средств); n – срок ссуды или финансового соглашения в годах; I – процентные деньги за весь срок финансового соглашения.

1.1. Формулы наращения и дисконтирования

Под ***наращенной суммой*** S ссуды, депозита и любого другого вида финансовой операции понимают первоначальную величину P вместе с начисленными на нее процентами I к концу срока финансового соглашения, т.е. $S = P + I$. Расчет процентных денег I зависит от вида применяемой ставки и условий наращения. Для годовой ставки i простых процентов наращенная сумма S за n лет

$$S = P(1 + n \cdot i), \tag{1}$$

где $1 + n \cdot i$ – ***множитель наращения***, а годовая ставка i простых процентов (*rate of interest*) определяется как отношение процентных денег, полученных за год, к первоначальной сумме P, т.е.

$$i = \frac{I}{P} = \frac{S - P}{P}. \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что процентный доход, полученный за год, $I = P \cdot i$, а за n лет он будут в n раз больше, т.е. базой для начисления процентов служит первоначальная величина P. Если срок финансового соглашения n измеряется не в годах, а в днях t, то в (1) в качестве n следует взять $n = \frac{t}{K}$, где K – так называемая ***временная база***, т.е. число дней в году, $K = 360, 365(366)$. Если временная база $K = 360$ дней (12 месяцев по 30 дней), то говорят, что в формуле (1) используют ***обыкновенные,*** или ***коммерческие*** проценты (*ordinary interest*); при использовании действительной продолжительности года, $K = 365(366)$, получают ***точные*** проценты (*exact interest*).

Подсчет числа дней t пользования ссудой может быть также двояким: точным и приближенным. При точном вычислении t берут фактическое число дней пользования ссудой. День выдачи и день погашения считают за один день. Для подсчета числа дней удобно пользоваться табл. 1, в которой приведены порядковые номера дней в году, при этом из порядкового номера дня погашения ссуды вычитают порядковый номер дня получения ссуды. При приближенном подсчете t считают, что в каждом полном месяце содержится по 30 дней. День получения и день погашения считают за один день.

Из возможных четырех вариантов наращения процентов на практике используют три:

а) ***точные проценты с точным числом дней ссуды.*** Этот вариант ($K = 365(366)$) дает самые точные результаты;

б) ***обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.*** Этот метод ($K = 360$), иногда называемый ***банковским***, распространен в ссудных операциях коммерческих банков. Он дает несколько больший результат, чем предыдущий метод;

в) ***обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.*** Такой метод ($K = 360$) применяется тогда, когда не требуется большой точности, например при промежуточных расчетах.

Разрешая формулу (1) относительно P, получаем современное значение (*present value*) наращенной суммы S:

$$P = S(1 + n \cdot i)^{-1}, \tag{3}$$

где $(1 + n \cdot i)^{-1}$ – ***дисконтный множитель*** по ставке простых процентов.

Понятие современной величины, играющее фундаментальную роль в финансовых вычислениях, можно обобщить и

Таблица 1

Порядковые номера дат в году

Дни	Месяцы											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	-	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	-	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	-	90	-	151	-	212	243	-	304	-	365

вычислить современное значение на промежуточный момент n_1, $0 < n_1 < n$:

$$P = S(1 + (n - n_1) \cdot i)^{-1}. \qquad (4)$$

Формулу (1) можно обобщить на случай, когда ставка процентов i меняется кусочно-постоянным образом от одного интервала к другому: на интервале длительностью n_k действует ставка простых процентов i_k, $k = \overline{1,m}$; $n = \sum_{k=1}^{m} n_k$. В этом случае

$$S = P\left(1 + \sum_{k=1}^{m} n_k \cdot i_k\right). \qquad (5)$$

Разрешая формулу (5) относительно P, можно определить современное значение наращенной суммы S по переменной ставке простых процентов.

Начисление процентов на первоначальную величину P не является единственно возможным способом начисления процентов. Если за базу для начисления процентов взять не P, а наращенную сумму S, то приходим к определению ***годовой банковской учетной ставки:***

$$d = \frac{I}{S} = \frac{S - P}{S}, \qquad (6)$$

где $I = S - P$ – процентные деньги, полученные за год.

Из (6) вытекает, что процентные деньги за год $I = d \cdot S$, а за n лет они будут в n раз больше: $I = S - P = ndS$, т.е. базой для начисления процентов служит наращенная сумма S. Из последней формулы получаем, что современная величина S, определенная в момент времени n, в начальный момент времени составляет значение

$$P = S\,(1 - n \cdot d), \qquad (7)$$

где $1 - n \cdot d$ – ***дисконтный множитель по банковской учетной ставке*** d.

Формулу (7) иногда называют формулой для определения величины ссуды, выдаваемой с ***удержанием процентов вперед***. Формула (7) используется при ***учете векселей***, причем $n = \frac{t}{K}$, где t – число дней от момента учета до даты погашения векселя, а временная база K, как правило, равна 360 дней. Наращение по банковской учетной ставке d, как следует из (7), вычисляем по формуле

$$S = P(1 - n \cdot d)^{-1}, \qquad (8)$$

где $(1 - n \cdot d)^{-1}$ – ***множитель наращения по банковской учетной ставке***.

Формулы (7), (8) имеют смысл для $n < \frac{1}{d}$. Дисконтирование S можно проводить по переменной годовой банковской учетной ставке

$$P = S\left(1 - \sum_{k=1}^{m} n_k \cdot d_k\right), \qquad (9)$$

где d_k – банковская учетная ставка, действующая на интервале длительностью n_k, $n = \sum_{k=1}^{m} n_k$.

Годовые ставки процентов i и d называют ***ставками простых*** процентов, поскольку соответствующие процессы наращения и дисконтирования по этим ставкам развиваются линейно.

В долгосрочных финансово-кредитных операциях ($n > 1$), если проценты не выплачиваются сразу же после их начисления, а присоединяются к сумме долга (капитализируются), как правило, применяют сложные проценты (*compound interest*). База для начисления сложных годовых процентов увеличивается в конце каждого года, и процесс увеличения суммы долга обычно происходит ускоренно.

Наращенная сумма долга по годовой ставке сложных процентов за n лет определяется формулой

$$S = P(1 + i)^n, \qquad (10)$$

где $(1 + i)^n$ – ***множитель наращения по годовой ставке сложных процентов***.

Из (10) вытекает, что современная величина

$$P = S(1+i)^{-n}, \qquad (11)$$

где $(1+i)^{-n}$ – ***дисконтный множитель по годовой ставке сложных процентов.***

Если ставка сложных процентов меняется от периода к периоду (на периоде длительностью n_k действует ставка сложных процентов i_k), наращенная сумма

$$S = P \cdot \prod_{k=1}^{m}(1+i_k)^{n_k}. \qquad (12)$$

Разрешая формулу (12) относительно P, можно найти современную величину S по ***плавающей ставке*** сложных процентов.

Если срок n для начисления сложных процентов не является целым числом, т.е. $n = a + b$, где a – целое число лет, а b – дробная часть года, $0 < b < 1$, то для вычисления наращенной суммы можно использовать два метода. Согласно ***общему*** методу расчет ведется непосредственно по формуле (10). По ***смешанному*** методу за целое число лет начисляют сложные проценты, а за дробную часть года – простые, т. е.

$$S_1 = P(1+i)^a(1+b \cdot i). \qquad (13)$$

Смешанный метод дает большее значение наращенной суммы, чем общий метод, $S_1 > S$.

В современных условиях проценты могут капитализироваться по сложной годовой ставке j не один, а m раз в году, через равные промежутки времени $1/m$. В таком случае для вычисления наращенной суммы можно использовать формулу (10), в которой под ставкой i следует понимать ставку процентов за период j/m, а n будет обозначать число $n \cdot m$ таких периодов, т.е.

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}. \qquad (14)$$

где $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}$ – ***множитель наращения по номинальной ставке j с m-разовым начислением процентов в году.***

Из (14) получаем, что современная величина S равна

$$P = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}, \qquad (15)$$

где $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m \cdot n}$ – ***дисконтный множитель по номинальной ставке j.***

Если устремить m к бесконечности, то промежуток $1/m$ между начислениями процентов будет стягиваться к нулю, и проценты будут начисляться непрерывно. Для того чтобы отличить непрерывную ставку от дискретной, номинальную ставку j обозначим через δ. Ставку δ называют ***непрерывной ставкой процентов*** или ***силой роста***. В результате предельного перехода в (14), (15) получаем

$$S = P \cdot e^{\delta \cdot n}, \; P = S \cdot e^{-\delta \cdot n},$$

где $e^{\delta \cdot n}$, $e^{-\delta \cdot n}$ соответственно ***множители наращения и дисконтирования по годовой постоянной ставке непрерывных процентов*** δ.

Если сила роста изменяется во времени, т.е. $\delta = \delta(t)$, то наращенная сумма и современная стоимость определяются как

$$S = P \cdot e^{\int_0^n \delta(t)dt}, \quad P = S \cdot e^{-\int_0^n \delta(t)dt}. \qquad (16)$$

По аналогии с номинальной ставкой сложных процентов вводится ***номинальная учетная ставка*** f с m-разовым дисконтированием в году, т.е. каждый раз по ставке f/m. В таком случае

$$P = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m \cdot n}, \; S = P\left(1-\frac{f}{m}\right)^{-m \cdot n}, \qquad (17)$$

где $\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m \cdot n}$, $\left(1-\frac{f}{m}\right)^{-m \cdot n}$ – соответственно, ***дисконтный множитель и множитель наращения.***

Пример 1.1.1. На годовой депозит можно положить денежные средства под 10% годовых, а на полугодовой – под 9,75% годовых. Что выгоднее, положить свободные денежные средства на годовой депозит, или два раза воспользоваться полугодовым депозитом, не снимая проценты? Чему будет равна выгода, если имеется 100 тыс. $ и одним потерянным днём при переоформлении депозита можно пренебречь?

▶ Если денежные средства положить на годовой депозит, то наращенная сумма $S = 100 \cdot 1{,}1 = 110$ тыс. $. Если два раза воспользоваться полугодовым депозитом, то наращенная сумма $S_1 = 100\left(1+\frac{0{,}0975}{2}\right)^2 = 109{,}98766$ тыс. $. Выгоднее воспользоваться годовым депозитом и выигрыш $S - S_1 = 12{,}34$ $. ■

Пример 1.1.2. На сумму долга в течение 4 лет начисляются проценты по ставке 9% годовых. Насколько возрастёт наращенная сумма, если проценты будут капитализироваться поквартально?

▶ При ежегодной капитализации процентов множитель наращения равен $1{,}09^4$, а при ежеквартальной капитализации – $\left(1+\frac{0{,}09}{4}\right)^{16}$, т.е. он будет больше в 1,011363032 раза. Наращенная сумма увеличиться на 1,136%. ■

1.2. Определение срока платежа и уровня процентных ставок

При разработке условий финансовых операций часто сталкиваются с необходимостью определения одного из параметров сделки: продолжительности ссуды, или уровня процентной ставки при условии, что остальные параметры фиксированы. Подобные задачи легко решаются, если формулы наращения разрешить относительно интересующего нас параметра. Так, исходя из формулы (10), годовая ставка сложных процентов $i = \left(S/P\right)^{1/n} - 1$.

Пример 1.2.1. Через сколько лет первоначальная сумма депозита возрастёт в два раза, если на вложенные средства начисляется 9,75% годовых и: а) используются простые проценты, б) сложные проценты с полугодовой капитализацией?

▶ Для простых процентов множитель наращения $1 + n \times 0{,}0975 = 2$, т.е. $n = 10{,}256$ года. При использовании сложных процентов множитель наращения $\left(1+\frac{0{,}0975}{2}\right)^{2n} = 2$, т.е. $n = \ln 2 : \left(2\ln\left(1+\frac{0{,}0975}{2}\right)\right) = 7{,}281$ года. ■

Пример 1.2.2. По трёхмесячному депозиту назначена ставка 10,2% годовых. Какую ставку годовых процентов следует назначить на месячные депозиты, чтобы последовательное переоформление этих депозитов привело бы к такому же результату, что и использование трёхмесячного депозита, если пренебречь двумя днями, которые теряются при переоформлении депозитов ($K = 360$)?

▶ Приравняем соответствующие множители наращения: $1 + \frac{0{,}102}{4} = \left(1+\frac{i}{12}\right)^3$. Отсюда получаем, что $i = 0{,}101145077 \approx 10{,}11\%$. ■

1.3. Эквивалентность процентных ставок

В финансовых операциях могут участвовать различные виды процентных ставок. Одну процентную ставку можно эквивалентным образом выразить через другую ставку процентов. Такое эквивалентное преобразование производится на основе равенства соответствующих множителей наращения. Так, номинальной ставке j с m-разовым начислением процентов в году соответствует эквивалентная годовая ставка простых процентов $i = \frac{1}{n}\left[\left(1+j/m\right)^{m \cdot n} - 1\right]$.

Если за периоды $n_1, n_2, \ldots, n_m$ начисляются простые проценты по ставкам $i_1, i_2, \ldots, i_m$, тогда за весь срок наращения

$n = \sum_{S=1}^{m} n_S$ эквивалентная ***средняя ставка*** i_0 ***простых процентов*** равна

$$i_0 = \frac{\sum_{S=1}^{m} n_S \cdot i_S}{n}. \tag{18}$$

Аналогичным образом получим ***среднюю учетную ставку***

$$d_0 = \frac{\sum_{S=1}^{m} n_S \cdot d_S}{n} \tag{19}$$

и ***среднюю ставку сложных процентов***

$$i_0 = \left(\prod_{S=1}^{m}(1+i_S)^{n_S}\right)^{1/n} - 1. \tag{20}$$

Пример 1.3.1. Кредит выдан под 12,5 сложных годовых процентов. Каков должен быть уровень эквивалентной ставки простых годовых процентов ($K = 360$) при сроке кредита: а) 8 лет, б) 7 месяцев?

▶ а) Из равенства множителей наращения $1{,}125^8 = 1 + 8 \cdot i_n$ имеем:

$$i_n = 0{,}195723 = 19{,}5723\%.$$

б) Аналогично получаем: $1{,}125^{7/12} = 1 + \frac{7}{12} \cdot i_n$, $i_n = 0{,}121924 = 12{,}1924\%$. ■

Пример 1.3.2. Вексель учтён в банке по годовой учётной ставке 20% за 187 дней до его погашения. Оценить в виде годовой ставки простых процентов ($K = 365$) доходность этой финансовой операции для банка.

▶ Приравняем соответствующие множители наращения: $\left(1 - \frac{187}{360} \cdot 0{,}2\right)^{-1} = 1 + \frac{187}{365} \cdot i_n$. Имеем $i_n = 0{,}22629 = 22{,}629\%$. ■

1.4. Конверсия платежей

В финансовой практике часто возникают случаи, когда одно финансовое обязательство следует заменить другим. Такая замена осуществляется на основе принципа ***финансовой эквивалентности обязательств***. Эквивалентными считаются такие платежи, которые будучи "приведенными" к некоторой ***базисной дате*** по ставке процентов, удовлетворяющей обе стороны, оказываются равными. Исходя из этого принципа, получают ***уравнение эквивалентности*** (*equation of value*), в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к базисной дате, равна сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате.

Наиболее простой вид принимает уравнение эквивалентности при ***консолидации*** платежей, когда платежи $S_1, S_2, ..., S_m$ со сроками оплаты соответственно $n_1, n_2, \dots, n_m$ заменяются одним в сумме S_0 и сроком оплаты n_0. Здесь возможны две постановки задачи: если задается срок n_0, то находится сумма S_0 и наоборот. При заданном n_0, если консолидация производится по ставке простых процентов i, размер консолидированного платежа

$$S_0 = \sum_j S_j(1+t_j i) + \sum_k S_k(1+t_k i)^{-1}, \tag{21}$$

где S_j – платежи со сроками оплаты $n_j < n_0$, $t_j = n_0 - n_j$; S_k – платежи со сроками оплаты $n_k > n_0$, $t_k = n_k - n_0$.

Формула (21) получена из уравнения эквивалентности, в котором в качестве базисной даты выбрано n_0. Формулы, аналогичные формуле (21), можно записать и для случаев, когда консолидация платежей производится на основе банковской учетной ставки и ставки сложных процентов (надо учесть, что в этих случаях в формуле (21) изменятся множители наращения и дисконтные множители).

Если требуется определить время n_0 оплаты консолидированного платежа S_0, составляем уравнение эквивалентности, выбрав в качестве базисной даты начало отсчета. Разрешив уравнение эквивалентности относительно n_0, для ставки простых процентов i (ставки "приведения") получаем

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{Q} - 1\right), \qquad Q = \sum_j S_j (1 + n_j i)^{-1}. \qquad (22)$$

Очевидно, что формула (22) имеет смысл только для $S_0 \geq Q$, т.е. если размер консолидированного платежа не будет меньше "барьерного" значения Q. Таким же образом определяют время оплаты, если консолидация платежей производится на основе банковской учетной ставки и ставки сложных процентов.

Пример 1.4.1. Имеются три векселя с датами погашения, указанными в скобках, на сумму 12,5 тыс. (8.04), 7,25 тыс. (15.07) и 10,3 тыс. $ (23.11). Решено заменить их одним векселем на основе банковской учётной ставки 7 % годовых с оплатой 3.03. Какую сумму следует поставить в новом векселе, если базовой для расчёта выбрана дата 3.03?

▶ Пусть S – сумма нового векселя. Составим уравнение эквивалентности:

$$12{,}5\left(1 - \frac{98-62}{360}\cdot 0{,}07\right) + 7{,}25\left(1 - \frac{196-62}{360}\cdot 0{,}07\right) + $$
$$+ 10{,}3\left(1 - \frac{327-62}{360}\cdot 0{,}07\right) = S.$$

Проведя расчёты, получим S = 29242,86$. ■

Пример 1.4.2. Платежи в сумме 8,25 тыс., 10,05 тыс. и 25,45 тыс. $ со сроками оплаты соответственно через 2; 3,5 и 4 года должны быть заменены одним платежом, содержащим целое число тысяч долларов. Замена производится на основе сложной ставки 8,75% годовых. Чему равна минимальная допустимая сумма платежа и через какой срок он должен быть оплачен?

▶ Обозначим через S сумму заменяемого платежа, через n – срок оплаты этой суммы. Запишем уравнение эквивалентности, выводя все платежи на начало отсчёта: $8{,}25 \cdot 1{,}0875^{-2} + 10{,}05 \cdot 1{,}0875^{-3{,}5} + 25{,}45 \cdot 1{,}0875^{-4} = S \cdot 1{,}0875^{-n}$. Логарифмируя обе части этого уравнения, получаем

$$n = \frac{\ln P - \ln 32{,}66474069}{\ln 1{,}0875}. \qquad (23)$$

Формула (23) имеет смысл только тогда, когда $S \geq 32{,}66474$ тысяч. Следовательно, требуемая сумма S = 33 тысячи. Подставляя это значение в формулу (23), имеем n = 0,122 года. ■

1.5. Наращение и конверсия валюты

Если имеются свободные денежные средства в рублях или СКВ, то можно нарастить их, положив на депозит. При возможности свободного обмена рублевых средств на СКВ и наоборот это можно сделать двояким образом: непосредственно положить денежные средства на депозит или положить их на депозит, обменяв на другую валюту. Возникает вопрос, какой из этих двух возможных способов обеспечит больший прирост денежной массы. Рассмотрим эту задачу без учета инфляции для варианта СКВ → Руб. → Руб. → СКВ, в случае, когда наращение идет по ставке простых процентов [23]. Вариант Руб. → СКВ → СКВ → Руб. и наращение по сложным процентам можно рассмотреть аналогично.

Введем обозначения: n – срок депозита; K_0 – курс обмена в начале операции (курс СКВ в рублях); K_1 – курс обмена в конце операции; i – ставка простых процентов для рублевой массы; j – ставка простых процентов для конкретного вида СКВ.

При двойном конвертировании (обмен валюты на рубли, наращение процентов на эту сумму и конвертирование в исходную валюту) наращенная сумма в валюте будет равна

$$S = PK_0(1 + n \cdot i)\frac{1}{K_1}.$$

При прямом помещении на депозит получаем $S_1 = P(1 + nj)$. Найдем "барьерное" значение $\overline{K_1}$ обменного курса K_1, при котором $S = S_1$, т.е. для обменного курса $\overline{K_1}$ оба способа наращения эквивалентны:

$$\overline{K_1} = \frac{K_0(1 + n \cdot i)}{1 + n \cdot j}.$$

Если ожидаемый курс обмена $K_1 < \overline{K_1}$, то двойное конвертирование валюты выгоднее, чем прямое помещение валюты на депозит. Для $K_1 > \overline{K_1}$ ситуация будет прямо противоположной. Курс обмена заранее неизвестен, однако его можно спрогнозировать, опираясь на динамику обменного курса в предыдущие периоды [21].

Пример 1.5.1. Планируется поместить на 3 месячный депозит 2000$ на рублёвый либо валютный вклад. В начале депозитной операции обменный пункт продавал 1$ за 1600 руб., а скупал по 1500 руб. Годовые процентные ставки по 3 месячным депозитам составляли 220% по рублёвым вкладам и 15% по валютным (российские данные середины 1994 г.). Какая форма помещения денежных средств предпочтительнее, если ожидается, что за 3 месяца курс покупки 1$ в обменном пункте возрастёт на: а) 13,8%, б) 41,88%?

▶ а) Обменный курс в начале операции $K_0 = 1500$ руб., в конце – $K_1 = 1600 \cdot 1{,}138 = 1820{,}8$ руб. Наращенная сумма депозита при двойной конверсии валюты $S = \dfrac{PK_0(1+ni)}{K_1} = \dfrac{2000 \cdot 1500(1+0{,}25 \cdot 2{,}2)}{1820{,}8} = 2553{,}82\$$. При использовании валютного депозита $S_1 = P(1 + n \cdot j) = 2000(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}15) = 2075$ \$. Выгоднее применить двойную конверсию валюты.

б) Обменный курс в конце операции $K_1 = 1600 \cdot 1{,}4188 = 2270{,}08$ руб. Остальные параметры те же, что и в а). В этом случае $S = 2048{,}39$ \$. Выгоднее валютный депозит. ■

Пример 1.5.2. Пусть выполняются условия предыдущего примера 1.5.1. За предыдущие 8 месяцев, предшествующие началу депозитной операции, курс продажи долларов в обменных пунктах рос и составил следующий временной ряд: 810, 880, 1010, 1105, 1210, 1295, 1398, 1507 рублей. Основываясь на линейном прогнозе курса доллара, установить, что выгоднее: поместить денежные средства на долларовый или рублёвый депозит с двойной конверсией валюты. Чему будет равна наращенная сумма депозита при наилучшем варианте помещения денежных средств?

▶ Формула линейной регрессии: $y = A + Bx$, где x – номер месяца, а y – соответствующий обменный курс. Основываясь на линейном прогнозе [21], строим оценки для параметров регрессии: $\overline{A} = 701{,}0833333$; $\overline{B} = 100{,}1166667$. Тогда обменный курс в конце операции $K_1 = 701{,}0833333 + 100{,}1166667 \cdot 12 = 1902{,}48$ \$. При использовании валютного депозита $S_1 = 2075$ \$ (см. пример 1.5.1). Наращенная сумма при двойной конверсии валюты $S = 1500 \cdot 2000 \times (1 + 0{,}25 \cdot 2{,}2) \cdot \dfrac{1}{1902{,}48} = 2444{,}18$ \$. Следовательно, выгоднее использовать двойную конверсию валюты. ■

1.6. Наращение и инфляция

Наращенная сумма ссуды, депозита с учетом инфляции определяется как $C = \dfrac{S}{J_p}$, где J_p – ***индекс цен***, а S – наращенная сумма, измеренная по номиналу.

Под темпом инфляции понимают относительный прирост цен за период, обозначим его через h. Измеряется темп инфляции в процентах. Между индексом цен j_p и темпом инфляции h существует следующая связь: $h = (j_p - 1) \cdot 100$, $j_p = 1 + h/100$. Так как инфляция является цепным процессом, т.е. цены в период t повышаются на h_t процентов относительно уровня, сложившегося в периоде $t - 1$, то индекс цен за n таких периодов равен ***произведению*** цепных индексов цен:

$$J_p = \prod_{t=1}^{n}\left(1 + \frac{h_t}{100}\right).$$

Если наращение по ссуде ведется по ставке простых процентов i, то реальная покупательная способность наращенной суммы S ссуды C равна:

$$C = \frac{P(1 + n \cdot i)}{j_p},$$

где n – срок финансовой операции, а j_p – индекс цен за тот же период. Если наращение ведется по ставке сложных процентов i, то реальная, потребительская ценность наращенной суммы S равна:

$$C = \frac{P(1+i)^n}{j_p}.$$

Ставку процентов i, которая только компенсирует инфляцию ($S = C$), обозначим через i^*. Если наращение по ссуде длительностью n производится по ставке простых процентов, то $i^* = \frac{j_p - 1}{n}$. Если же наращение по ссуде производится по ставке сложных процентов, то $i^* = \sqrt[n]{j_p} - 1$. Ставку процентов i, превышающую i^*, называют *положительной ставкой процентов*. Если же $i < i^*$, то ставка i – *отрицательная ставка процентов*.

Для компенсации обесценивания денег, банки увеличивают ставку процентов i на величину так называемой *инфляционной премии*. Итоговую ставку, которая подавляет инфляцию и обеспечивает прирост реальной денежной массы в заданном темпе i, обозначим через r. Такую ставку r называют *брутто-ставкой* (в англоязычной финансовой литературе такую ставку часто называют номинальной ставкой). Если наращение по ссуде длительности n ведется по простым процентам и i – заданный темп роста реальной суммы, то $r = \frac{1}{n}(j_p(1 + n \cdot i) - 1)$, если же наращение осуществляется по сложным процентам, то $r = \sqrt[n]{j_p} - 1$.

Определим теперь доходность по ссуде с учетом действия инфляции, т.е. так называемую реальную ставку процентов i_p. Если r – объявленная норма доходности по ссуде (брутто-ставка), то, при наращении по простым процентам,

$$i_p = \frac{1}{n}\left(\frac{1 + n \cdot i}{j_p} - 1\right).$$

Если же наращение происходит по ставке сложных процентов, то

$$i_p = \frac{1 + r}{\sqrt[n]{j_p}} - 1.$$

Пример 1.6.1. Ожидается, что в следующие 3 месяца темп инфляции составит соответственно 18, 20 и 21% за каждый месяц. Какую годовую ставку простых процентов следует назначить на трёхмесячный кредит, чтобы реальный прирост денежной массы составил 5% годовых при $K = 360$?

▶ Индекс цен за 3 месяца $j_p = 1{,}18 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}21 = 1{,}71336$. Если r – требуемая годовая ставка простых процентов, которая подавляет инфляцию и обеспечивает рост реальной денежной массы в заданном темпе 5% годовых, то эта ставка должна удовлетворять соотношению $(1 + 0{,}25 \cdot r)/1{,}71336 = 1 + 0{,}25 \cdot 0{,}05$. Отсюда имеем $r = 2{,}939108 = 293{,}9108\%$. ■

Пример 1.6.2. Ставка процентов по трёхмесячному депозиту составляет 36% годовых, $K = 360$. Ожидается, что месячные темпы инфляции составят соответственно 3,1; 3,3 и 3,4%. Какая реальная доходность, в виде годовой ставки простых процентов, инвестирования средств?

▶ Индекс цен за 3 месяца $j_p = 1{,}031 \cdot 1{,}033 \cdot 1{,}034 = 1{,}101233782$. Реальная годовая ставка простых процентов i_p должна удовлетворять соотношению: $\frac{1 + 0{,}25 \cdot 0{,}36}{1{,}101233782} = 1 + 0{,}25 \cdot i_p$. Отсюда получаем: $i_p = -0{,}040804349 \approx -4{,}08\%$. ■

1.7. Финансовые операции со случайными параметрами

Величина наращенной суммы является функцией трех параметров: первоначальной суммы, ставки процентов и продолжительности ссуды. Если речь идет о конкретной операции, которую планируется осуществить в будущем, то значение параметров либо части из них бывает точно неизвестно. В таком случае можно считать, что эти не определенные точно параметры являются случайными величинами с заданными либо спрогнозированными законами распределения вероятностей. Тогда наращенная сумма S будет также случайной величиной.

Финансиста или экономиста прежде всего будет интересовать среднее (ожидаемое) значение величины S, т.е. ее математическое ожидание $E\{S\}$. Важной характеристикой S является также ее дисперсия $D\{S\}$ или среднеквадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$. Чем меньше σ, тем более предсказуемым, менее рискованным является значение наращенной суммы. В финансовой литературе значение σ часто принимают за меру ***риска*** финансовой операции.

Наиболее полной вероятностной характеристикой наращенной суммы S является ее функция распределения вероятностей. Если удается аналитически вычислить функцию распределения S, то через нее можно легко подсчитать вероятность попадания S в заданный интервал и другие числовые характеристики, такие как $E\{S\}$ и σ.

Если функцию распределения S не удается вычислить, то в этом случае для оценки числовых характеристик S, как правило, используют методы статистического моделирования [20, 21] и пакеты прикладных программ для моделирования случайных элементов, например ППП СТАТМОД [21].

Приведем некоторые результаты для случая, когда наращенная сумма зависит от случайной ставки процентов.

Для годовой случайной ставки простых процентов i, принимающей на интервале $[0, n]$ заранее неизвестное значение, функция распределения наращенной суммы (1) имеет вид [11]

$$F_S(x) = F_i\left(\frac{x-p}{p \cdot n}\right), \tag{24}$$

где $F_i(x)$ – функция распределения ставки процентов i.

Для годовой номинальной случайной ставки процентов, принимающей постоянное значение на интервале $[0, n]$ с m-разовым начислениям процентов в году функция распределения наращенной суммы

$$F_S(x) = F_j\left(m\left(\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{m \cdot n}} - 1\right)\right), \tag{25}$$

где $F_j(x)$ – функция распределения номинальной ставки процентов j.

Используя формулы (24), (25), можно подсчитать все числовые характеристики наращенной суммы S.

Наращенная сумма для переменной ставки простых процентов определяется формулой (5). Будем считать, что ставки процентов $i_1, i_2, ..., i_m$ являются независимыми в совокупности случайными величинами. Если $i_1, i_2, ..., i_m$ – дискретные случайные величины, то и наращенная сумма S будет также дискретной случайной величиной и вычисление числовых характеристик S не представляет принципиальной трудности. Вычисление числовых характеристик S для дискретных случайных ставок простых процентов $i_1, i_2, ..., i_m$ реализовано в ППП ФЭР.

Если ставки простых процентов $i_1, i_2, ..., i_m$ являются независимыми в совокупности абсолютно-непрерывными случайными величинами, можно найти плотность распределения наращенной суммы S, последовательно применяя формулу свертки для плотностей [20, 21]. В частности, для двух интервалов постоянства ($m = 2$) значений ставок простых процентов, распределенных по равномерному закону, т.е. для $i_1 \in R(a_1, b_1)$, $i_2 \in R(a_2, b_2)$, i_1, i_2 – независимые случайные величины, плотность распределения S имеет "трапецеидальный" вид [11]:

$$P_s(x) = \begin{cases} 0, & x \le t_1, \\ \dfrac{x-t_1}{d \cdot P^2}, & t_1 \le x \le t_2, \\ \dfrac{m_1 - n_1 \cdot a_1 - n_2 \cdot a_2}{d \cdot P}, & t_2 \le x \le t_3, \\ \dfrac{t_4 - x}{d \cdot P^2}, & t_3 \le x \le t_4, \\ 0, & x \ge t_4 \end{cases} \tag{26}$$

где $m_1 = \min\{n_1 a_1 + n_2 b_2,\ n_1 b_1 + n_2 a_2\}$; $d = n_1 \cdot n_2 (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$; $t_1 = P(1 + n_1 a_1 + n_2 a_2)$; $t_2 = P(1 + m_1)$; $t_3 = P(1 + \max\{n_1 a_1 + n_2 b_2,$ $n_1 b_1 + n_2 a_2\})$, $t_4 = P(1 + n_1 b_1 + n_2 b_2)$.

Используя формулу (26), легко можно подсчитать вероятность попадания S в заданный интервал $[S_1, S_2] \subset [t_1, t_4]$, среднее значение S и риск для S.

Рассмотрим теперь случай, когда среди ставок простых процентов $i_1, i_2, ..., i_m$, определенных соответственно на интервалах длительностью $n_1, n_2, ..., n_m$, одна часть ставок процентов описывается абсолютно непрерывными распределениями, а другая – дискретными распределениями и ставки i_1, i_2, ..., i_m – независимые в совокупности случайные величины. Последовательно используя формулу свертки для плотностей, линейную комбинацию абсолютно-непрерывных случайных величин сведем к одной абсолютно-непрерывной случайной величине. А так как линейная комбинация дискретных, случайных величин является дискретной, случайной величиной, то, не ограничивая общности рассуждений, можно рассмотреть случай двух интервалов постоянства ставок процентов i_1, i_2. Для определенности рассуждений предположим, что i_1 имеет плотность распределения $p_{i_1}(x)$, а i_2 – дискретная, случайная величина, имеющая следующее распределение:

I_2	r_1	r_2	...	r_s
P	p_1	p_2	...	p_s

Используя формулу полной вероятности, получаем, что функция распределения наращенной суммы имеет вид [11]

$$F_s(x) = \sum_{j=1}^{s} p_j F_{i_1}\left(\frac{x - P(1 + n_2 \cdot r_j)}{P \cdot n_1}\right). \tag{27}$$

Формула (27) позволяет легко вычислить вероятность попадания наращенной суммы в заданный интервал $[S_1, S_2]$: $P(S_1 \le S \le S_2) = F_s(S_2) - F_s(S_1)$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда ставки простых процентов $i_1, i_2, ..., i_m$, определенные на интервалах длительностью $n_1, n_2, ..., n_m$, связаны ***цепной марковской зависимостью***. Пусть интервал $[0, n]$ разбит точками $0 = t_1 < t_2 < ... < t_{m+1} = n$ на подинтервалы длиной $n_j = t_{j+1} - t_j$, $j = \overline{1, m}$. На интервале $[0, n]$ задан ***тренд*** $f(t)$, определяющий общую тенденцию изменения процентных ставок. Ставка простых процентов i_j, принимающая постоянное значение на интервале $[t_j, t_{j+1})$, $j = \overline{1, m}$, складывается из значения $f(t_j)$ тренда в начале интервала и ***маржи*** ε_{ξ_j}, т.е. $i_j = f(t_j) + \varepsilon_{\xi_j}$, где ξ_j, $j \in \{1, 2, ..., m\}$ –

однородная цепь Маркова с N состояниями $\{1, 2, ..., N\}$, начальным распределением вероятностей

$$P\{\xi_1 = \lambda\} = \pi_\lambda \ge 0,\ \lambda = \overline{1, N},\ \sum_{\lambda=1}^{N} \pi_\lambda = 1$$

и матрицей вероятностей одношаговых переходов

$$P = (p_{ks}),\ P\{\xi_{j+1} = s | \xi_j = k\} = p_{ks},\ \sum_{s=1}^{N} p_{ks} = 1,\ k = \overline{1, N},$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ – заданные значения маржи.

Среднее значение наращенной суммы (5) равно [11]:

$$E\{S\} = \sum_{\xi_1=1}^{N} \sum_{\xi_2=1}^{N} \cdots \sum_{\xi_m=1}^{N} P(1 + n_1 i_{\xi_1} + n_2 i_{\xi_2} + \cdots + n_m i_{\xi_m}) \pi_{\xi_1} \cdot p_{\xi_1, \xi_2} \cdots p_{\xi_{m-1}, \xi_m}. \tag{28}$$

Можно также вычислить дисперсию S и вероятность попадания S в заданный интервал.

Для ставок сложных процентов $i_1, i_2, ..., i_m$, связанных цепной марковской зависимостью, среднее значение наращенной суммы (12) определяется формулой, аналогичной формуле (28), если в ней множитель $(1 + n_1 i_{\xi_1} + n_2 i_{\xi_2} + \cdots + n_m i_{\xi_m})$ заменить на множитель $(1 + i_{\xi_1})^{n_1} \cdot \ldots \cdot (1 + i_{\xi_m})^{n_m}$.

Вычисление числовых характеристик S для ставок простых и сложных процентов, связанных цепной зависимостью Маркова, реализовано в ППП ФЭР.

Естественно, здесь рассмотрены лишь простейшие постановки задач со случайными параметрами, возникающих в финансовой математике.

Пример 1.7.1. Планируется в начале следующего года положить в банк 1200$ на 2 года. Ожидается, что годовая ставка сложных процентов с равной вероятностью будет находиться в интервале [8%, 9%]. Вычислите вероятность того, что наращенная сумма S будет лежать в интервале 1400$ – 1420$, S_{min}, S_{max}, $E\{S\}$ и риск σ данной финансовой операции.

▶ Наращенная сумма $S = 1200(1 + i)^2$. Очевидно, что $S_{\min} = 1200(1 + 0{,}08)^2 = 1399{,}68\$$, $S_{\max} = 1200(1 + 0{,}09)^2 =$

$= 1425{,}72$ \$. Используя формулу (24), получаем функцию распределения наращенной суммы: $F_S(x) = F_i\left(\sqrt{\frac{x}{1200}} - 1\right)$, где $F_i(x)$ – функция распределения случайной величины i. Тогда $P\{1400 \le S \le 1420\} = F_i\left(\sqrt{\frac{1420}{1200}} - 1\right) - F_i\left(\sqrt{\frac{1400}{1200}} - 1\right) = \frac{1}{0{,}01}\left(\sqrt{\frac{1420}{1200}} - \sqrt{\frac{1400}{1200}}\right) = 0{,}76878$. Плотность распределения S равна: $p_S(x) = p_i\left(\sqrt{\frac{x}{1200}} - 1\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1200x}} = \left(0{,}4\sqrt{3x}\right)^{-1}$, $1399{,}68 \le x \le 1425{,}72$. Поскольку плотность распределения S определена, то, действуя по обычным правилам теории вероятностей, вычисляем $E\{S\} = 1412{,}68$ \$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}} = 7{,}51691$ \$. ■

Пример 1.7.2. Планируется положить в начале года на годовой депозит 950 тыс. рублей. Банк оставляет за собой право корректировать в начале каждого квартала ставку процентов по вкладам. В первом квартале годовая ставка процентов $i_1 = 16\%$ годовых. Эксперты считают, что годовые ставки процентов i_2, i_3, i_4, используемые соответственно, во втором, третьем и четвёртом кварталах – дискретные, независимые случайные величины:

i_2, %	16	15,5
P	0,5	0,5

i_3, %	15,5	15
P	0,4	0,6

i_4, %	15	14,5
P	0,3	0,7

Вычислить вероятность попадания наращенной суммы S в интервал [1097 тыс.; 1098 тыс.], $S_{\min}$, $S_{\max}$, $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

▶ Так как ставки процентов i_2, i_3, i_4 являются независимыми случайными величинами, то наращенная сумма S будет дискретной случайной величиной с рядом распределения вероятностей:

S, тыс.	1096,0625	1097,25	1098,4375	1094,875
P	0,44	0,29	0,06	0,21

Отсюда видно, что $S_{\min} = 1094{,}875$ тыс., $S_{\max} = 1098{,}4375$ тыс.

Вероятность попадания наращенной суммы в заданный интервал равна 0,29. Используя ряд распределения S, находим $E\{S\} = 1096{,}3$ тыс.; $\sigma = \sqrt{D\{S\}} = 0{,}99348$ тыс. ■

1.8. Задачи и примеры

1.1. Ссуда в размере 125 тыс. \$ выдана 16.01 по 10.11 включительно, под 5,75% простых годовых, год високосный. Насколько больше будет наращенная сумма ссуды при использовании ***обыкновенных*** процентов по сравнению с наращенной суммой при использовании ***точных*** процентов, если продолжительность пользования ссудой вычисляется точно?

1.2. Ссуда в 225 тыс. \$, с удержанием процентов вперед, выдана 18.01 по 19.08 включительно, под 8,25 обыкновенных, простых годовых процентов, год не високосный. Какую сумму на руки получит должник 18.01?

1.3. Владелец векселя на 175,5 тыс. \$ с датой погашения 30.10 решил учесть его в банке 17.05. Банк A согласен учесть вексель по ставке 8,5%, а банк B – по ставке 8,4% годовых. Какой банк предпочтет держатель векселя и почему? Какую сумму условно потеряет векселедержатель, если он выберет неправильную тактику? Временная база $K = 360$ дней.

1.4. Цена товара увеличилась на 25%. Насколько процентов её необходимо уменьшить, чтобы получить первоначальную цену?

1.5. На сумму в 2255\$ в течение 8 месяцев начисляются простые проценты. Базовая ставка 5% годовых повышается каждый месяц, начиная со второго, на 0,5%, временная база $K = 360$. Чему будут равны наращенная сумма и средняя процентная ставка?

1.6. Какую сумму следует положить на депозит 18.03 под 8,75 простых годовых процентов, чтобы 14.11 накопить 1800\$, если используются: а) точные проценты, б) используются обыкновенные проценты? ($K = 365$).

1.7. Какая должна быть ставка простых годовых процентов для того, чтобы сумма долга, взятого 11.04, увеличилась бы на 25% к 17.12, если используются: а) точные проценты; б) обыкновенные проценты? ($K = 365$).

1.8. По годовому депозиту назначена ставка 12% годовых. Какую ставку годовых процентов нужно назначить на полугодовой депозит, чтобы последовательное переоформление полугодового депозита привело бы к такому же результату, что и при использовании годового депозита? ($K = 360$).

Указание: пренебречь одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита.

1.9. Кредит в сумме 100 тыс. $ предоставлен 15.01 под 9,5 простых годовых процентов. С какого момента долг превысит 105 тыс. $, если начисляются: а) точные проценты, $K = 365$; б) обыкновенные проценты?

1.10. Кредит в сумме 120 тыс. $ выдан 10.01 по 16.09 включительно, под 10,5% годовых (обыкновенные проценты). В счет погашения долга 21.05 уплачено 80 тыс. $. Какую сумму нужно вернуть 16.09?

Указание: использовать правило *торговца*, т.е. сумму в 80 тыс. $ "вывести" на дату 16.09.

1.11. На первоначальную сумму в 580$ в течение 2,5 лет начисляются проценты по годовой ставке 8,75%. Насколько больше будет наращенная сумма, вычисленная по смешанному методу, чем по общему методу, если $K = 360$ дней?

1.12. Через сколько лет первоначальная сумма увеличится в 1000 раз, если на нее начисляются сложные годовые проценты по ставке 12% при: а) начислении процентов в конце года; б) ежемесячном начислении процентов?

1.13. Запас древесины лесного массива в данный момент, оценивается в 1 млн. м^3. Каков будет запас древесины через 50 лет при годовой силе роста 10%?

1.14. На первоначальную сумму в течение 5 лет начисляются сложные годовые проценты по ставке 12% раз в конце года. Во сколько раз вырастет наращенная сумма, если проценты будут начисляться ежемесячно?

1.15. На пять лет под 8,5 сложных годовых процентов выдана ссуда в 1000$. В счет погашения долга в конце второго года внесено 1100$, которые пошли на уплату процентов, накопленных к этому сроку, а остальная сумма – на

погашение основного долга, т.е. использовался *актуарный метод* погашения задолженности. Какую сумму следует уплатить в конце пятого года, чтобы полностью погасить задолженность?

1.16. Кредит выдан на 5 лет под 8% годовых, начисление процентов в конце года. Какую номинальную годовую ставку процентов необходимо назначить, чтобы получить к концу пятого года ту же наращенную сумму при поквартальном начислении процентов? Будет ли зависеть эта номинальная ставка от срока ссуды?

1.17. На сумму долга в течение 2 лет начисляются сложные проценты по ставке 8,7% годовых. Сколько раз в году нужно начислять проценты по той же ставке, чтобы за 2 года наращенная сумма выросла бы не менее чем на 0,45%?

1.18. Кредит в сумме 2500 $ выдан на 8 лет. Сложная ставка годовых процентов менялась от периода к периоду: на протяжении первых 3 лет действовала ставка 7,5%, в следующие 3 года – 8%, в последнем периоде – 8,2%. Какую сумму нужно вернуть в конце восьмого года? Чему равна средняя ставка сложных процентов?

1.19. Чему будет равна годовая ставка сложных процентов, эквивалентная ставке непрерывных процентов из задачи **1.13**?

1.20. Министр финансов Российской Федерации Б. Федоров, выступая в Думе в январе 1995 г., отметил, что месячный темп инфляции в России составляет 5%, и предупредил, что если такой темп инфляции сохранится, то в год он составит около 80%. Оппоненты обвинили Б. Федорова в том, что он "плохо" считает: говорит о 80%, а не о 60%. Кто же прав? Чему же точно равен темп инфляции за год при постоянном месячном темпе в 5%?

1.21. Остров Манхэттен был "куплен" в 1624 г. у индейского вождя за 24 $ ([23], с. 37). Стоимость земли этого острова 350 лет спустя оценивалась в 40 млрд. $. При какой ставке годовых процентов возможен такой рост?

1.22. На годовом рублевом депозите ставка процентов составляет 45% годовых. Месячный темп инфляции в первом полугодии был постоянен и составил 4,7% в месяц, во втором полугодии – 5% в месяц. Во сколько раз возрастет реальная наращенная сумма депозита за год?

1.23. Месячные темпы роста инфляции за предшествующие полгода характеризуются следующим рядом: 3,05, 3,07, 3,24, 3,29, 3,42, 3,53%, т.е. отмечался устойчивый рост инфляции. Исходя из линейного прогноза месячных темпов инфляции, укажите годовую ставку простых процентов, обеспечивающую реальный рост долга по трехмесячному кредиту в 3,5% годовых.

1.24. Свободные денежные средства в сумме 300 тыс. рублей планируется поместить на трёхмесячный депозит. В данный момент обменный пункт покупает доллары по 2150 руб., а продает по 2165 руб. Ставка процентов по трёхмесячным депозитам составляет: 14% годовых по рублёвым вкладам и 3% годовых по долларовым. Что выгоднее, использовать рублёвый депозит или долларовый с двойной конверсией валюты, если предполагается, что курс покупки долларов за 3 месяца вырастает на 4%? Чему будет равна потеря при неправильной тактике вложения денежных средств?

1.25. На депозит на 3 месяца положили 1 млн. руб. под 36% годовых, K = 360. Проценты простые. Есть основания считать, что с равной вероятностью темп инфляции за это время составит от 2 до 4%. Чему будет равно среднее ожидаемое значение реальной наращенной суммы депозита?

1.26. Исходя из условий предыдущей задачи подсчитайте вероятность попадания реальной наращенной суммы в интервал от 1049000 руб. до 1065000 руб.

1.27. Планируется положить на трехмесячный депозит 10 млн. руб. В данный момент курс покупки доллара составляет 30 110 рублей. За предыдущие 10 месяцев курс доллара рос и составил следующий временной ряд (в рублях): 15500, 21000, 22800, 24850, 26730, 26980, 27180, 27430, 27880, 28800. Ставка процентов на рублевом депозите – 50%, а на долларовом – 5% годовых. Основываясь на степенном прогнозе [21] курса доллара, решить вопрос, что выгоднее: поместить денежные средства на рублевый или долларовый депозит с двойной конверсией? Чему будет равна наращенная сумма депозита при наилучшем варианте помещения денежных средств?

1.28. На первоначальную сумму денег в течение n лет начисляются сложные проценты по годовой ставке 10%.

Насколько процентов возрастет сумма при переходе к ежедневной капитализации процентов (K = 365) для: а) n = 4; б) n = 8?

1.29. На начальную сумму в 1000 $ в течение 4 лет начисляются каждые полгода сложные проценты по номинальной ставке 5%. Насколько увеличится или уменьшится наращенная сумма, если номинальная ставка и число периодов капитализации процентов возрастут вдвое?

1.30. Начальное значение силы роста равно 8%. Ежегодный абсолютный прирост составлял 2% в течение 5 лет, затем в течение последующих 5 лет происходило линейное падение силы роста на 1% в год. Чему будет равен множитель наращения за 10 лет?

1.31. Четыре платежа: 10,5 тыс., 12 тыс., 8,4 тыс. и 7,25 тыс. $ со сроками оплаты соответственно 3.03; 8.04; 17.06; 13.09 (год не високосный) решено заменить одним платежом, выплачиваемым 15.08. При такой замене стороны согласились использовать годовую ставку простых процентов – 6,5%. В качестве базовой даты можно выбрать любую из дат оплаты платежей. Какую базовую дату следует выбрать, чтобы консолидированный платеж: а) был минимальным; б) был максимальным? Определите величину консолидированного платежа для каждого из вариантов.

1.32. Четыре платежа из условий предыдущей задачи решено консолидировать в один платеж S, выплачиваемый 1.03. При консолидации используется ставка 9,25 простых годовых процентов. Базовая дата – 1.03; временная база K = 365 дней. Какова величина S?

1.33. По условиям предыдущей задачи консолидация платежей производится на основе банковской учетной ставки 9,25% годовых, K = 365 дней. Какова величина S?

1.34. Ссуда в размере 100 тыс. $ выдана на 90 дней под 8,5% точных, простых годовых процентов, K = 366 дней. Однако она не была возвращена в намеченный срок, а была погашена спустя 13 дней, не считая даты погашения. Какую сумму следует вернуть, если за просроченное время на сумму возврата долга начислялись точные, простые проценты по ставке 10 % годовых?

2 Зак. 2410

1.35. При сохранении условий задачи **1.31** четыре платежа решено погасить одним платежом в сумме 38,5 тыс. $. Консолидация производится на основе годовой ставки в 6,5 простых процентов. Определите дату уплаты консолидированного платежа.

1.36. Имеются три векселя с датами погашения, указанными в скобках, на сумму 12,5 тыс. (8.04); 7,25 тыс. (15.07) и 10,3 тыс. $ (23.11). Решено учесть их в банке 3.03. Банк учитывает векселя по ставке 8,2% годовых со сроками до погашения от 250 до 360 дней, по ставке 7,8% со сроками до погашения от 130 до 249 дней и по ставке 6% годовых для векселей со сроками погашения от 30 до 129 дней. Какую сумму получит владелец векселей, если учтет их одновременно в банке, $K = 360$?

1.37. Три векселя (условия их погашения приведены в задаче **1.36**) решено заменить одним векселем в сумме 31 тыс. $ на основе банковской учетной ставки 8,2% годовых, $K = 360$. Укажите дату погашения этого векселя.

1.38. Три векселя (условия их погашения приведены в задаче **1.36**) решено заменить одним векселем, в котором необходимо указать целое число тысяч долларов. Замена производится на основе банковской учетной ставки 8,2% годовых, $K = 360$. Каково минимальное допустимое значение этой суммы, при которой возможна подобная замена? Укажите дату погашения векселя с найденным значением минимально допустимой суммы.

1.39. Платежи в сумме 8,25 тыс., 10,05 тыс. и 25,45 тыс. $ со сроками оплаты соответственно через 2; 3,5 и 4 года решили заменить одним платежом в сумме S, выплачиваемым через 4,5 года. Подобная замена производится по сложной ставке 8,75% годовых.. Чему равна сумма S? Зависит ли сумма S от выбора базовой даты?

1.40. Платежи из предыдущей задачи решили заменить одним платежом в размере 44 тыс. $ на основе сложной ставки 8,75% годовых. Через сколько лет должен быть оплачен этот консолидированный платеж?

1.41. Имеется обязательство оплатить 16.03 $S_1 = 8{,}4$ тыс. $, 5.06 $S_2 = 16{,}3$ тыс. $ и 20.11 $S_3 = 7{,}2$ тыс. $. Решено на основе простой ставки процентов 6,5 годовых ($K = 365$)

изменить порядок оплаты: 30% от $S_1 + S_2 + S_3$ выплачивается 15.07, а остальная задолженность R гасится 30.11. Определить величину R для случая, когда: а) в качестве базовой даты берется 15.07; б) базовая дата – 30.11.

1.42. По финансовому обязательству необходимо оплатить 120 тыс. $ через 4,5 года. На основе сложной ставки процентов 9,5 годовых решено изменить порядок оплат: задолженность погашается тремя равными частями S_0 через год, два и три года. Чему равно S_0?

1.43. Фирма планирует через месяц положить в банк на депозит часть своих доходов на 6 месяцев под 10 простых годовых процентов. Предполагается, что удастся положить в банк некоторую сумму от 100 до 200 тыс. $. Требуется определить вероятность попадания наращенной суммы S в интервал [150 тыс. $, 210 тыс. $], $S_{\min}$, $S_{\max}$, $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$ для следующих двух ситуаций: а) первоначальная сумма P имеет равномерное распределение в интервале [100 тыс., 200 тыс.]; б) сумма P распределена по "треугольному" распределению в интервале [100 тыс., 200 тыс.], т.е. максимальное значение плотности распределения вероятностей соответствует середине интервала, на концах интервала ее значение равно нулю.

1.44. Фирма планирует положить через месяц на депозит 100 тыс. $ на полгода. Ориентируясь на то, что в данный момент на такую сумму денег начисляют 10 простых годовых процентов, можно предположить, что ставка процентов будет находиться в интервале [9,9%, 10,1%]. Вычислить вероятность попадания наращенной суммы S в интервал [104,95 тыс. $, 105тыс. $], $S_{\min}$, $S_{\max}$, $E\{S\}$, σ для следующих двух ситуаций: а) ставка процентов равномерно распределена в интервале [9,9%, 10,1%]; б) ставка процентов распределена по "треугольному" распределению в интервале [9,9%, 10,1%].

1.45. Некто имеет 900 $. Что для него выгоднее, положить эту сумму в банк на год под 8% годовых или купить за 900 $ вексель с номиналом 950 $ и погашением через год? Чему равна доходность покупки векселя, измеренная в виде годовой ставки процентов?

1.46. Вексель был куплен за 850 $. Через 3 месяца он был продан за 920 $. Какова доходность этой операции купли-продажи, измеренная в виде годовой ставки простых процентов, $K = 360$?

1.47. Финансовый директор фирмы планирует через месяц положить на депозит в банк 50 тыс. либо 100 тыс. $ на полгода. Годовая ставка простых процентов i зависит от размера суммы. Совместное распределение начальной суммы P и ставки процентов i приведено в табл. 1.1.

Таблица 1.1

P, тыс. $	i, %	Вероятность
50	2	0,1
	3	0,1
	4	0,4
100	4	0,05
	6	0,3
	8	0,05

Определите вероятность попадания наращенной суммы S в интервал [60 тыс. $, 103 тыс.$], $S_{\min}$, $S_{\max}$, $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

1.48. Вексель в сумме 1200$ должен быть оплачен через 160 дней. Какую сумму P_1 в среднем получит владелец векселя, если учтет его в банке через 15 дней? Есть основания считать, что с равной вероятностью учетная ставка будет лежать в пределах 6–7% годовых. Какова вероятность, что полученная сумма P будет лежать в пределах 1168–1170 $? Чему будет равен риск σ данной финансовой операции? Временная база – 360 дней.

1.49. Запланировано в начале второго квартала положить в банк 100 тыс. $ до конца года. Обычно в данном банке ставки процентов по краткосрочным кредитам корректируют в начале каждого квартала. Есть основания считать, что годовые ставки простых процентов i_2, i_3, i_4, соответственно, во втором, третьем и четвертом кварталах являются независимыми случайными величинами с дискретными распределениями:

i_2, %	6	6,1	6,2
P	0,8	0,1	0,1

,

i_3, %	6	6,1
P	0,7	0,3

,

i_4, %	6	6,2
P	0,6	0,4

Вычислите вероятность попадания наращенной суммы S в интервал [104550$, 104600$], $S_{\min}$, $S_{\max}$, $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

1.50. Планируется положить через некоторое время в банк на депозит 1 млн. $ сроком на 1 год. Ожидается, что с равной вероятностью в первом полугодии простая процентная ставка будет находиться в пределах 5–6% , а во втором полугодии – в пределах 5,5–7%. К концу срока депозита определите характеристики наращенной суммы S: $S_{\min}$, $S_{\max}$, $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$, вероятность попадания S в интервал [1,055 млн. $, 1,06 млн. $].

1.51. Планируется через месяц положить на год в банк 1 млн. $. Предполагается, что в первые полгода простая годовая ставка процентов будет постоянной и будет описываться равномерно распределенной случайной величиной в интервале [6%, 7%], во втором полугодии с равной вероятностью может принять значения 7,5% и 8%. Вычислить вероятность попадания наращенной суммы S в интервал [1,06 млн. $; 1,07 млн. $], $S_{\min}$, $S_{\max}$, $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

1.52. В начале следующего года планируется положить на депозит 500 тыс. $ на год. Простая годовая ставка процентов может меняться в начале каждого квартала. Эксперты считают, что годовые ставки процентов $i_1 - i_4$, используемые, соответственно, в первом – четвертом кварталах, являются независимыми равномерно распределенными величинами в интервалах [6%; 6,5%], [6,25%; 7%], [6,75%; 8%], [7,5%; 8,5%]. Смоделируйте выборку объема 100 из распределения величин $i_1 - i_4$ и на ее основе оцените среднее значение наращенной суммы, вероятность попадания наращенной суммы в следующий интервал [534 тыс. $, 537 тыс. $].

1.53. Предполагается положить на депозит 100 тыс. $ либо на год, с вероятностью 0,7 под 6% годовых, либо на два года, с вероятностью 0,2 под 6,5% годовых или на три года с вероятностью 0,1 под 7% годовых. Определите среднее значение наращенной суммы S, вероятность попадания S в интервал [107 тыс. \$, 120 тыс. \$], $S_{\min}$, $S_{\max}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

1.54. Планируется в начале следующего года положить в банк 200 тыс. $ на 3 года под сложные проценты. Ставка процентов в банке корректируется в начале года и затем, на протяжении всего года, остается постоянной. Есть основания считать, что годовая ставка процентов $i(t) = f(t) + \xi_t$, где $f(t) = 0{,}05 + 0{,}001t$ – тренд, характеризующий общую тенденцию изменения ставок процентов, ξ_t – маржа, изменяющаяся по цепной зависимости Маркова, с двумя состояниями. Значение $t = 0$ соответствует началу начисления процентов. В первом состоянии ξ_t принимает значение 0,005, во втором – значение 0,01. Вектор начальных состояний $\pi = (1;\ 0)$, матрица одношаговых переходов имеет следующие компоненты: $p_{11} = 0{,}8$; $p_{12} = 0{,}2$; $p_{21} = 0{,}1$; $p_{22} = 0{,}9$. Определите $S_{\min}$, $S_{\max}$ наращенной суммы S, вероятность попадания S в интервал [235,6 тыс. \$, 236,7 тыс. \$], среднее значение S, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

1.55. В условиях предыдущей задачи вектор начальных состояний $\pi = (0{,}8;\ 0{,}2)$ и неизвестно, с какого состояния начинает свое движение цепь Маркова. Остальные условия остаются неизменными. Определите те же характеристики S, что и в предыдущей задаче.

1.56. В условиях задачи **1.54** годовая ставка сложных процентов корректируется в начале каждого полугодия. Остальные условия те же, что и в **1.54.** Вычислите параметры наращенной суммы S из задачи **1.54.**

Указание: воспользоваться ППП ФЭР.

1.57. Планируется в начале следующего года положить в банк на депозит 200 тыс. $ на три квартала. Ставка простых процентов корректируется в начале каждого квартала и в течение квартала остается постоянной. Есть основания считать, что годовая ставка $i(t) = f(t) + \xi_t$, где $f(t) = 0{,}05 + 0{,}001 \cdot t$ – тренд; ξ_t – маржа, изменяющаяся по цепной зависимости Маркова. Параметры цепи те же, что и в задаче **1.54.** Вычислите параметры наращенной суммы S: $S_{\min}$, $S_{\max}$, вероятность попадания S в интервале [208200\$, 208500\$], среднее значение S и риск финансовой операции $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$.

1.58. В условиях предыдущей задачи ставка простых процентов корректируется в начале каждого месяца и в течение месяца остается постоянной, $K = 360$. Вычислите параметры наращенной суммы S из задачи **1.57.**

Глава 2

ПОСТОЯННЫЕ ФИНАНСОВЫЕ РЕНТЫ

Поток платежей, все члены которого постоянные положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют ***постоянной финансовой рентой*** или просто ***рентой***.

Рента характеризуется следующими параметрами: ***член ренты*** – размер отдельного платежа; ***период ренты*** – временной интервал между двумя последовательными платежами; ***срок ренты*** – время от начала первого периода ренты до конца последнего; ***ставка процентов***, по которой производятся начисления на платежи.

По количеству выплат в году ренты делятся на годовые (выплаты раз в конце года, для рент ***постнумерандо***) и p-срочные (p – количество выплат в году).

По количеству начислений процентов на протяжении года различают ренты с ежегодным начислением, с начислением m раз в году, с непрерывным начислением.

Ренты с бесконечным числом выплат называются ***вечными рентами***.

Если срок ренты начинается сразу же после подписания контракта, такая рента называется ***немедленной***; если устанавливается льготный период после подписания контракта, в течение которого рента не выплачивается, такая рента называется ***отложенной*** или ***отсроченной***.

Если платежи выплачиваются в конце периода, то такая рента называется ***обыкновенной*** или ***постнумерандо***, если в начале периода, то говорят о ренте ***пренумерандо***.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются ***наращенная сумма*** и ***современная величина***.

Наращенная сумма (*amount of an annuity*) – сумма всех членов потока платежей с начисленными на них процентами к концу срока действия ренты.

Современная величина (*present value*) – сумма всех членов потока платежей, дисконтированных на начало отсчета.

2.1. Наращенная сумма ренты постнумерандо

Наращенная сумма S p-срочной ренты с m-разовым начислением процентов в году по номинальной ставке j определяется по формуле:

$$S = R \cdot s^{(p)}_{m\cdot n;\frac{j}{m}}, \tag{1}$$

где R – годовой член ренты;

$$s^{(p)}_{m\cdot n;\frac{j}{m}} = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m\cdot n} - 1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]} \text{ –} \tag{2}$$

коэффициент наращения ренты, $n \cdot p$ – целое число.

Переходя в формулах (1), (2) к пределу при $m \to \infty$, получим наращенную сумму p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов по годовой ставке $j = \delta$:

$$S = R \cdot s^{(p)}_{n;\delta}, \quad s^{(p)}_{n;\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{p\left(e^{\delta/p} - 1\right)}. \tag{3}$$

Пример 2.1.1. В течение 30 лет создается пенсионный фонд. На поступившие средства начисляются сложные проценты по ставке 8,5% годовых. Сумма годовых взносов составляет 200 \$. Определите величину фонда для следующих ситуаций: а) взносы и начисление процентов в конце года; б) взносы в конце каждого полугодия, начисление процентов в конце года; в) взносы и начисление процентов в конце каждого квартала; г) взносы в конце каждого полугодия, непрерывное начисление процентов по годовой ставке 8,5%.

▶ а) В данном примере $n = 30$, $j = 0{,}085$. Поскольку взносы и начисление процентов в конце года, то $p = m = 1$. Тогда в силу формул (1), (2) имеем:

$$S = 200\frac{(1+0{,}085)^{30}-1}{0{,}085} = 24842{,}95\ \$.$$

б) Теперь $p = 2$, $m = 1$ и, используя формулы (1), (2), получаем:

$$S = 200\frac{(1+0{,}085)^{30}-1}{2(\sqrt{1+0{,}085}-1)} = 25360{,}09\ \$.$$

в) Полагая $p = m = 4$ в формулах (1), (2), получим:

$$S = 200\frac{\left(1+\dfrac{0{,}085}{4}\right)^{120}-1}{0{,}085} = 26987{,}01\ \$.$$

г) В данном случае $p = 2$ и используются непрерывные проценты. Тогда, в силу формул (3) имеем:

$$S = 200\frac{e^{0{,}085\cdot 30}-1}{2(e^{0{,}085/2}-1)} = 27195{,}25\ \$.\ ■$$

2.2. Современная величина ренты постнумерандо

Современная величина A p-срочной ренты с m-разовым начислением процентов в году по номинальной ставке j определяется по формуле

$$A = R\cdot a^{(p)}_{m\cdot n;\frac{j}{m}}, \qquad (4)$$

где R – годовой член ренты;

$$a^{(p)}_{m\cdot n;\frac{j}{m}} = \frac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{p\left[\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]} \qquad (5)$$

коэффициент приведения ренты, $n\cdot p$ – целое число.

Переходя в формулах (4), (5) к пределу при $m\to\infty$, получим формулы для современной величины p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов по годовой ставке $j = \delta$:

$$A = R\cdot a^{(p)}_{n;\delta}, \quad a^{(p)}_{n;\delta} = \frac{1-e^{-\delta\cdot n}}{p\left(e^{\delta/p}-1\right)}. \qquad (6)$$

Пример 2.2.1. Какую сумму необходимо 40-летнему мужчине вносить на протяжении 20 лет в конце года на счет под 8% годовых, чтобы затем, после достижения пенсионного возраста в 60 лет, на протяжении 20 лет в конце каждого месяца снимать по 200 $? На остаток на счете начисляется 8% годовых и счет должен быть исчерпан за 20 лет.

▶ Определим современную величину пенсионных выплат ($R = 200\cdot 12$; $n = 20$, $p = 12$, $m = 1$): $A = 200 \times$ $\times\, 12\dfrac{1-1{,}08^{-20}}{12(1{,}08^{1/12}-1)} = 24415{,}55\ \$$. Эту сумму мужчина должен накопить в течение 20 лет, внося на счет в конце каждого года сумму R: $24415{,}55 = R\cdot s_{20;8}$. Таким образом

$$R = \frac{24415{,}55}{s_{20;8}} = \frac{24415{,}55\cdot 0{,}08}{1{,}08^{20}-1} = 533{,}53\ \$.\ ■$$

2.3. Определение параметров рент постнумерандо

Один из неизвестных параметров ренты R, n, j или δ можно определить, если формулы для наращенной суммы (1), (3) или современной величины (4), (6) разрешить относительно неизвестного параметра.

При расчете срока ренты n следует принимать во внимание следующие обстоятельства. Расчетное значение n, как правило, будет дробным числом. Округлению до ближайшего меньшего числа подлежит число периодов ренты np. В результате такого округления будет возникать недоплата, которую компенсируют либо увеличением первого взноса, либо увеличением размера члена ренты.

Если заданной является современная величина A, то положительное значение n существует лишь для $R > Ap\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p}-1\right]$ или для $R > Ap\left(e^{\delta/p}-1\right)$.

Ставку процентов j или δ находят как результат приближенного решения соответствующего уравнения одним из методов: ***дихотомии, линейной интерполяции, Ньютона – Рафсона*** [23].

Пример 2.3.1. За какой срок можно накопить 100 тыс. $, если в конце каждого года на счет вносится 15 тыс. $ и на собственные средства начисляются раз в конце года сложные проценты по ставке 8,75% годовых? На сколько нужно увеличить годовые выплаты, чтобы не было недоплаты?

▶ Наращенная сумма S = 100 тыс., R =15 тыс., i = 0,0875. Срок финансовой операции n определим из соотношения: $100 = 15\frac{1{,}0875^n-1}{0{,}0875}$. Отсюда получаем:

$$n = \frac{\ln\left(1+\frac{100\cdot 0{,}0875}{15}\right)}{\ln 1{,}0875} = 5{,}478 \text{ года.}$$

Если требуется накопить указанную сумму за целое число лет, то округляем найденное значение n до ближайшего меньшего целого числа n_1 = 5 лет. В этом случае годовой платеж $R_1 = \frac{100}{s_{5;8,75}}$ = 16,79269 тыс. $, т.е. годовые выплаты нужно увеличить на 1792,69 $. ■

Пример 2.3.2. Долг в сумме 370 тыс. $ погашается в течение 5 лет равными платежами с годовой выплатой по 85 тыс. $. Чему будет равна эффективность займа в виде годовой ставки сложных процентов, если платежи производятся: а) в конце года; б) в начале года; в) в конце каждого месяца?

▶ а) Годовую ставку i сложных процентов найдем из соотношения: $370 = 85 \cdot a_{5;\,i} = 85\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}$. Это уравнение нелинейное относительно i и разрешить его относительно

неизвестного параметра i можно только лишь численно, используя известные методы приближенного решения уравнений. В итоге получаем: i = 0,0480477 = 4,80477%.

б) Так как выплаты производятся в начале каждого года, то, используя формулу (12), найдем годовую ставку процентов i из уравнения: $370 = 85 \cdot \frac{1-(1+i)^{-5}}{i} \cdot (1+i)$. Численное решение данного уравнения дает следующий результат: i= 0,0745163 = 7,45163%.

в) В данном случае аналогичное уравнение трансформируется к виду: $370 = 85 \cdot a_{5;i}^{(12)} = 85\frac{1-(1+i)^{-5}}{12((1+i)^{1/12}-1)}$. Результат численного решения этого уравнения следующий: i = 0,0573869 = 5,73869%. ■

2.4. Наращенная сумма и современная стоимость других видов постоянных рент

Рассмотрим ренты, которые отличаются от рассмотренных выше по применяемым процентным ставкам, срокам платежей, способу начисления процентов, моментом производства платежей.

Рента с простыми процентами. Современную величину A и наращенную сумму p-срочной ренты продолжительностью n лет с годовой ставкой простых процентов i и годовым членом R определяют по формулам

$$A = \frac{R}{p}\sum_{k=1}^{np}\left(1+\frac{i\cdot s}{p}\right)^{-1}, \quad S = R\cdot n\left[1+\frac{(np-1)i}{2p}\right]. \qquad (7)$$

Смешанные ренты. Срочные ренты (p > 1), у которых на платежи в пределах года начисляют простые проценты, а за годовые периоды – сложные, называют ***смешанными*** рентами. Современную величину $A_{см.}$ и наращенную сумму $S_{см.}$ таких рент определяют по формулам

$$A_{см.} = R_1 \cdot a_{n;i}, \quad S_{см.} = R_1 \cdot s_{n;i}, \quad R_1 = R\left[1+\frac{(p-1)i}{2p}\right], \qquad (8)$$

где R – годовой член ренты, $a_{n;\,i}$, $s_{n;\,i}$ – коэффициенты приведения и наращения обычных годовых рент ($p = m = 1$), i – годовая ставка процентов.

Рента с периодом, превышающим год. Пусть период ренты $r > 1$, проценты начисляются раз в конце года по ставке i годовых, платеж в конце периода равен R_r, срок ренты n кратен r. Тогда наращенная сумма S и современная величина A равны:

$$S = R_r \frac{s_{ni}}{s_{ri}},\ A = R_r \frac{a_{ni}}{s_{ri}}. \tag{9}$$

Вечная рента. Рента, число выплат которой бесконечно, называется ***вечной*** рентой. Современная величина A_∞ ***вечной*** p-срочной ренты, с m-разовым начислением процентов в году по номинальной ставке j с годовым членом R

$$A_\infty = \frac{R}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1\right]}. \tag{10}$$

Отложенная рента. Начало действия ***отложенной***, или ***отсроченной,*** ренты начинается спустя t лет после подписания финансового контракта. Очевидно, что запаздывание на t лет в выплате платежей по сравнению с обычной рентой не влияет на величину наращенной суммы отложенной (отсроченной) ренты. По иному обстоит дело с современной величиной отложенной ренты: она равна дисконтированному значению современной величины немедленной ренты (период дисконтирования равен величине t отсрочки платежей). Дисконтный множитель должен соответствовать применяемым процентным ставкам и способу начисления процентов. Так, например, наращенная сумма S_t и современная величина A_t отложенной p-срочной ренты постнумерандо с m-разовым начислением процентов в году равны:

$$S_t = S,\ A_t = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-tm}, \tag{11}$$

где S и A – наращенная сумма и современная величина соответствующей немедленной ренты постнумерандо.

Рента пренумерандо. Ренты с выплатами в начале периода называются рентами ***пренумерандо***. При вычислении наращенной суммы и современной величины ренты пренумерандо можно использовать следующий прием. Все выплаты путем наращения вывести на конец соответствующих периодов и к вновь полученной ренте постнумерандо применить обычные формулы для вычисления наращенной суммы и современной величины ренты.

Так, например, наращенная сумма $\ddot{S}$ и современная величина $\ddot{A}$ p-срочной ренты пренумерандо, с m-разовым начислением процентов в году равны:

$$\ddot{S} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}},\ \ddot{A} = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}, \tag{12}$$

где S и A – наращенная сумма и современная величина соответствующей ренты постнумерандо.

Из этих формул следует, что наращенная сумма и современная величина рент пренумерандо больше соответствующих величин рент постнумерандо.

Ренты с платежами в середине периодов. Если поступления от произведенных инвестиций распределяются более или менее равномерно на протяжении периода, используют ренты с выплатами в середине периодов. В подобных ситуациях для уменьшения погрешности вычислений рекомендуется суммы поступлений за период относить к середине этого периода.

Наращенная сумма $S_{1/2}$ и современная величина $A_{1/2}$ p-срочной ренты с m – разовым начислением процентов в году равны:

$$S_{1/2} = S\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{2p}},\ A_{1/2} = A\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{2p}}, \tag{13}$$

где S и A – наращенная сумма и современная величина p-срочной ренты постнумерандо с m-разовым начислением процентов в году.

Ренты со случайными параметрами. В ряде случаев, когда один или несколько параметров ренты заранее не известны, их можно рассматривать как случайные величины с заданным или прогнозируемым законом распределения. Наращенная сумма и современная величина ренты в этом случае будут также случайными величинами. В таком случае естественно вести речь о вычислении среднего значения и дисперсии наращенной суммы или современной величины ренты. Если эти значения не удается вычислить аналитически, их можно оценить, моделируя значения соответствующих случайных величин.

Пример 2.4.1. Фонд создается в течение 6 лет. На собранные средства начисляется 9,2% годовых. Годовые платежи в сумме 36 тыс. $ поступают в конце каждого квартала. Первые 4 года использовалась смешанная форма начисления процентов, затем она была отменена. Чему равна наращенная сумма фонда в конце шестого года?

▶ Впервые четыре года использовалась смешанная форма начисления процентов. Поэтому, в силу формулы (8), находим наращенную сумму фонда к концу четвертого года ($p = 4$): $S_1 = 36 \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot 0{,}092}{8}\right) \cdot s_{4;9,2} = 36 \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot 0{,}092}{8}\right) \cdot \frac{1{,}092^4 - 1}{0{,}092} =$ $= 170{,}81545$ тыс. Чтобы получить сумму фонда к концу шестого года, оставшиеся два годовых платежа и S_1 выведем, путем наращения, на финальную дату и просуммируем: $S =$ $= 170{,}81545 \cdot 1{,}092^2 + 36 \cdot s_{2;9,2}^{(4)} = 281{,}5539$ тыс. ■

Пример 2.4.2. Участок сельскохозяйственных угодий может приносить ежегодный доход в 200 тыс. $ в конце каждого года, если на удобрения в начале года тратить по 2 тыс. $. В какую сумму следует оценить этот участок при нормативе доходности в 12% годовых?

▶ Доходы по 200 тыс. в год (со знаком плюс) образуют вечную ренту, расходы по 2 тыс. в год (со знаком минус) образуют вечную ренту пренумерандо. Стоимость участка – это современная величина A этих рент с учетом знака соответствующих членов. Используя формулу (10) с $m = p = 1$, получим: $A = \frac{200}{0{,}12} - 2 - \frac{2}{0{,}12} = 1648$ тыс. $. ■

Пример 2.4.3. Фонд будет создаваться 4 года, годовые взносы в фонд в конце года составляют по 100 тыс. $. Годовые ставки процентов в фонде – i_2, i_3, i_4, начисляемые соответственно во втором, третьем и четвертых годах, заранее не известны. Есть основание считать, что они являются независимыми случайными величинами с распределениями вероятностей:

i_2, %	7	8
P	0,5	0,5

i_3, %	8	8,5
P	0,2	0,8

i_4, %	8,5	9,5
P	0,6	0,4

Для наращенной суммы фонда S вычислите: $S_{\min}$, $S_{\max}$, $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$, $P\{400$ тыс. $\le S \le 455$ тыс.$\}$.

▶ Всего имеется восемь вариантов комбинаций значений ставок процентов i_2, i_3, i_4. Например, при $i_2 = 0{,}07$, $i_3 = 0{,}08$, $i_4 = 0{,}085$ сумма фонда S примет следующее значение: $S_1 = 100 + 100 \cdot 1{,}085 + 100 \cdot 1{,}085 \cdot 1{,}08 + 100 \cdot 1{,}085 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}07 =$ $= 451{,}0626$ тыс. Значение S_1 реализуется с вероятностью $p_1 = 0{,}085 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}07 = 0{,}06$. Аналогичным образом можно вычислить остальные значения S_i, $i = 2,...,8$, которые может принимать значение фонда S. Итак, S – случайная величина с рядом распределения вероятностей:

S, тыс.	451,0626	452,185575	452,2344	453,3628
P	0,06	0,24	0,06	0,24

S, тыс.	454,2982	455,431525	455,4808	456,6196
P	0.04	0,16	0,04	0,16

Так как закон распределения случайной величины S известен, то теперь нетрудно вычислить все числовые характеристики S: $S_{\min}$ =451062,6 $, $S_{\max}$ = 456619,6 $, $E\{S\}$ = 453848,77 $, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$ =5139,98 $, $P\{400$ тыс. $\le S \le 455$ тыс.$\}$ = 0,64. ■

2.5. Финансовые ренты в страховании

В страховании и при анализе некоторых инвестиционных проектов используются *условные ренты*, в которых число выплат заранее неизвестно и зависит от наступления некоторого случайного события. Рассмотрим, как используются такие ренты в страховом деле.

Краткосрочное страхование жизни. Это страхование на один год. Дисконтирование страховых выплат не производится. Согласно договору страхования некоторое лицо (страхователь) выплачивает наперед страховой компании (страховщику) некоторую сумму a, называемую *страховой премией*. Страховщик обязуется выплатить наследникам застрахованного *страховую сумму* b в конце года в случае его смерти и не выплатит ничего, если застрахованный останется живым. Следует отметить, что сумма b намного превышает размер страховой премии a, т.е. $b >> a$.

Пусть ξ – случайная величина, означающая величину иска, предъявляемого страховой компании. Ряд распределения вероятностей этой случайной величины следующий:

ξ	0	b
P	p_x	q_x

Здесь x – возраст застрахованного, p_x – вероятность того, что он проживет еще, по крайней мере, один год, а q_x – вероятность того, что он умрет в течение года, после покупки страхового полиса. Значение вероятностей p_x и q_x можно получить из анализа так называемых *таблиц смертности*, которые построены на основе статистического анализа достаточно большой представительной выборки отдельных социальных групп населения. Основное содержание таких таблиц – это численность l_x людей каждого возраста x, оставшихся в живых из первоначальной совокупности в 100000. Среднее значение величины ξ (ее математическое ожидание) равно $E\{\xi\} = b \cdot q_x$.

Введем новую случайную величину η, описывающую доход страховой компании от заключенного договора, $\eta = a - \xi$.

Средний доход компании – это математическое ожидание $\eta : E\{\eta\} = a - E\{\xi\} = a - b \cdot q_x$. Очевидно, средний доход должен быть неотрицательным, т. е. $a \geq b \cdot q_x$. Наименьшее возможное значение премии при этом равно $a_0 = b \cdot q_x = E\{\xi\}$. Значение a_0 соответствует нулевой средней прибыли страховой компании и называется *нетто-премией*. В действительности реальная премия a должна быть больше a_0, так как премия должна включать в себя, помимо "чистой" премии a_0, доход компании и все расходы по ведению дела.

Если N – общее число застрахованных в возрасте x лет, то сумма S выплат всем застрахованным будет равна

$$S = \sum_{i=1}^{N} \xi_i,$$

где ξ_i – иск i-го человека.

Пусть K – капитал, который получила компания от N застрахованных, т. е. $K = N \cdot a$. Очевидно, если $S \leq K$, то страховая компания успешно выполнит свои обязательства. Если $S > K$, то страхование N лиц будет убыточным для компании.

Вычислим вероятности этих событий. Будем предполагать, что число N застрахованных достаточно велико и случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ независимы и одинаково распределены. Тогда, в силу центральной предельной теоремы, нормированная сумма S_0 таких случайных величин будет иметь асимптотически нормальное распределение с математическим ожиданием ноль и дисперсией равной единице, т.е. при $N \to \infty$

$$P\{S_0 < x\} \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds, \qquad (15)$$

где

$$S_0 = \frac{S - E\{S\}}{\sqrt{D\{S\}}}.$$

Таким образом, в силу (15), вероятность неразорения компании равна:

$$P\{S \le K\} = P\left\{S_0 \le \frac{K - E\{S\}}{\sqrt{D\{S\}}}\right\} = \Phi\left(\frac{K - E\{S\}}{\sqrt{D\{S\}}}\right). \quad (16)$$

Так как по предположению все иски одинаково распределены, то

$$E\{S\} = N \cdot E\{\xi\} = N \cdot b \cdot q_x; D\{s\} = N \cdot D\{\xi\} = N \cdot b^2 \cdot p_x \cdot q_x.$$

Зададим теперь уровень β, не выше которого допускается убыточная деятельность. Естественно, уровень β должен быть достаточно мал (обычно полагают β равным 0,05; 0,01; 0,001). Например, при $\beta = 0{,}001$ в среднем, в одном случае из тысячи, компания будет нести убытки. Пусть x_α – квантиль уровня $\alpha = 1 - \beta$ функции распределения $\Phi(x)$ (α – уровень не разорения компании). Тогда из (16) следует, что

$$x_\alpha = \frac{(a - b \cdot q_x) \cdot \sqrt{N}}{b \cdot \sqrt{p_x \cdot q_x}},$$

или

$$a = \left(q_x + x_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_x \cdot q_x}{N}}\right) \cdot b. \quad (17)$$

Разность $a - a_0$ называется *страховой надбавкой* или *надбавкой за безопасность*, а величина $\theta = (a - a_0)/a_0$ – *относительной надбавкой за безопасность*. Величина премии a связана с величиной θ соотношением: $a = a_0 \cdot (1 + \theta)$. Из (17) следует, что

$$\theta = x_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_x}{N \cdot q_x}}. \quad (18)$$

Пусть задан уровень не убыточности α и x_α – квантиль порядка α стандартного нормального распределения. Тогда

$$x_\alpha = \frac{K - E\{S\}}{\sqrt{D\{S\}}}, K = E\{S\} + x_\alpha \cdot \sqrt{D\{S\}}. \quad (19)$$

Рассмотрим ситуацию, когда в страховой компании застраховано m однородных групп, состоящих из $N_1, N_2, \ldots, N_m$ человек. Вероятности умереть в течение года, для этих лиц,

равны, соответственно, $q_1, q_2, \ldots, q_m$. В случае смерти в течение года компания выплачивает, соответственно, суммы $b_1, b_2, \ldots, b_m$ наследникам застрахованных и не платит ничего, если страховое событие не произошло.

Математическое ожидание суммарного иска, который может быть предъявлен компании, составит величину

$$E\{S\} = \sum_{k=1}^{m} N_k \cdot b_k \cdot q_k \quad (20)$$

и равно сумме нетто-премий для каждой группы.

Дисперсия суммарного иска равна:

$$D\{S\} = \sum_{k=1}^{m} N_k \cdot b_k^2 \cdot p_k \cdot q_k, \quad (21)$$

а капитал, полученный компанией, составит, согласно (19), величину

$$K = E\{S\} + x_\alpha \cdot \sqrt{D\{S\}}. \quad (22)$$

Страховые премии для лиц, входящих в различные группы, выразим через нетто-премии и относительную надбавку за безопасность:

$$a_1 = a_{01} \cdot (1 + \theta) = b_1 \cdot q_1 \cdot (1 + \theta), \ \ldots, \ a_m = b_m \cdot q_m \cdot (1 + \theta), \quad (23)$$

где

$$\theta = \frac{K - E\{S\}}{E\{S\}}, \quad (24)$$

а $E\{S\}$ определяется формулой (20), а K – формулой (22).

Таблицы смертности и коммутационные числа. При расчете страховых премий необходимо знать значение вероятностей дожития до определенного возраста или, наоборот, смерти в каком-то возрасте. Эти данные получают из *таблиц смертности* – числовых моделей процесса вымирания первоначальной совокупности людей в 100000 человек (такие таблицы публикуются, например, в журнале "Вестник статистики"). Основное содержание данных таблиц – количество l_x лиц возраста x, оставшихся в живых из первоначальной совокупности в 100000 и количество d_x, умерших в течение года после достижения x лет. Обозначим через q_x — вероятность умереть в течение года после достижения x лет, а через p_x — вероятность прожить, по крайней мере, еще один год лицу в возрасте x лет. Очевидны следующие соотношения:

$$d_x = l_x - l_{x+1}, q_x = \frac{d_x}{l_x}, p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Вероятность $p_{x,n}$ дожить от возраста x до $x + n$ равна:

$$p_{x,n} = \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

А вероятность $q_{x,n}$ умереть в возрасте от x до $x + n$ лет равна:

$$q_{x,n} = 1 - p_{x,n} = \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{j=x}^{x+n-1} d_j.$$

Для удобства проведения расчетов при работе с условными рентами используют *коммутационные функции (числа)*

$$D_x = l_x \cdot \nu^x, \; N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j C_x = d_x \cdot \nu^{x+1}, \; M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j,$$

$$\nu = (1+i)^{-1}, \tag{25}$$

где i — ставка дисконтирования, а ω — предельный возраст в таблице смертности (например, $\omega = 110$). Если в условных рентах платежи производятся p раз в году, то для рент постнумерандо используются коммутационные числа

$$N_x^{(p)} = N_x + \frac{p-1}{2 \cdot p} \cdot D_x, \tag{26}$$

а для рент пренумерандо — числа

$$\ddot{N}_x^{(p)} = N_x - \frac{p-1}{2 \cdot p} \cdot D_x. \tag{27}$$

Долгосрочное страхование. Страхование на дожитие. Долгосрочное страхование — это страхование на n лет ($n > 1$). Для данного вида страхования применяется принцип *временной ценности* денег путем дисконтирования денежных

величин. Самая простая схема долгосрочного страхования жизни — *страхование на дожитие.*

Суть этого вида страхования состоит в следующем. Лицо в возрасте x лет заключает договор со страховой компанией о том, что при достижении им возраста t лет ($t = x + n$), лицо получит сумму b. В случае же его смерти в интервале (x, t) компания не платит ничего. Найдем размер a страховой премии.

Пусть ξ — дискретная случайная величина, означающая современную стоимость индивидуального иска:

ξ	0	$b \cdot \nu^n$
P	$q_{x,n}$	$p_{x,n}$

Среднее значение этой величины $E\{\xi\} = b \cdot \nu^n \cdot p_{x,n}$.

Введем в рассмотрение случайную величину $\eta = a - \xi$ — современная стоимость дохода компании от заключенного договора. Средний доход страховой компании от индивидуального договора

$$E\{\eta\} = a - E\{\xi\} = a - b \cdot \nu^n \cdot p_{x,n}.$$

Значение нетто-премии a_0, соответствует нулевому среднему доходу, т.е.

$$a_0 = b \cdot \nu^n \cdot p_{x,n} = E\{\xi\}.$$

Значение нетто-премии a_0 можно выразить через коммутационные числа:

$$a_0 = b \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \nu^n = b \cdot \frac{l_{x+n} \cdot \nu^{n+x}}{l_x \cdot \nu^x} = b \cdot \frac{D_t}{D_x}. \tag{28}$$

Пусть на дожитие застрахована однородная социальная группа лиц в возрасте x лет численностью N (N — достаточно большое число), а $S = \xi_1 + \ldots + \xi_N$ — современная стоимость суммарного иска этой группы людей. Вероятность не разорения компании, в силу центральной предельной теоремы, будет выражаться формулой (16), в которой теперь изменяются значения математического ожидания и дисперсии. Формула (17) была получена из формулы (16). Можно и теперь воспользоваться формулами (17), (18), если в них произвести следующие замены: $p_x \to q_{x,n}$; $q_x \to p_{x,n}$; $b \to b \cdot v^n$. В результате получим:

$$a = \left(p_{x,n} + x_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_{x,n} \cdot q_{x,n}}{N}} \right) \cdot b \cdot v^n, \tag{29}$$

$$\theta = x_\alpha \cdot \sqrt{\frac{q_{x,n}}{N \cdot p_{x,n}}}, \tag{30}$$

где

$$p_{x,n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_t}{l_x}, q_{x,n} = 1 - p_{x,n}.$$

Формула (29) дает величину страховой премии при заданном уровне не разорения α, а формула (30) определяет относительную надбавку за безопасность.

Страхование жизни на период n лет. При этом виде страхования выплата страховой суммы производится в год смерти застрахованного (в конце года), если застрахованный умер в течение срока действия договора, т.е. в течение n лет. Если же застрахованный прожил эти n лет, то компания не платит ничего.

Пусть a – цена страхования, т.е. страховая премия, ξ – современная стоимость случайного иска, а $\eta = a - \xi$ – современная стоимость дохода компании от индивидуального договора. Случайная дискретная величина ξ задается следующим рядом распределения вероятностей (31):

ξ	0	$b \cdot v$	$b \cdot v^2$	...	$b \cdot v^n$
P	$P_{x,n}$	$\frac{d_x}{l_x}$	$\frac{d_{x+1}}{l_x}$	...	$\frac{d_{x+n-1}}{l_x}$

Здесь $\frac{d_x}{l_x}$ – вероятность того, что застрахованный умрет в течение первого года действия договора и т.д. Числовые характеристики этой случайной величины таковы:

$$E\{\xi\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{b \cdot v^j \cdot d_{x+j-1}}{l_x}. \tag{32}$$

$$D\{\xi\} = E\{\xi^2\} - (E\{\xi\})^2, E\{\xi^2\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{b^2 \cdot v^{2j} \cdot d_{x+j-1}}{l_x}. \tag{33}$$

Нетто-премия данного договора a_0 соответствует нулевому среднему доходу компании, т.е. $E\{\eta\} = 0$. Значит $a_0 = E\{\xi\}$.

Пусть в компании застраховалось достаточно большое число N лиц в возрасте x лет однородной социальной группы и α – уровень надежности страхования в данной компании. Тогда страховая премия будет определяться формулой:

$$a = E\{\xi\} + x_\alpha \cdot \sqrt{\frac{D\{\xi\}}{N}}, \tag{34}$$

где математическое ожидание и дисперсия определяются формулами (32), (33). Относительная надбавка за безопасность

$$\theta = \frac{a - E\{\xi\}}{E\{\xi\}}. \tag{35}$$

Полное страхование жизни. Это предельный случай страхования на период n лет, когда n таково, что $x + n = \omega + 1$, где ω – предельный возраст жизни. Для того чтобы воспользоваться формулами (34), (35), в данном случае, в (32). (33) положим $n = \omega + 1 - x$. При этом вычисление $E\{\xi\}$ можно упростить, используя коммутационные числа M_x, D_x:

$$E\{\xi\} = \sum_{j=1}^{\omega+1-x} \frac{b \cdot v^{x+j} \cdot d_{x+j-1}}{l_x \cdot v^x} = \sum_{s=x}^{\omega} \frac{b \cdot v^{s+1} \cdot d_s}{D_x} = b \cdot \frac{M_x}{D_x}. \tag{36}$$

В этом случае величина нетто-премии a_0 будет определяться формулой (36).

Смешанное n-летнее страхование жизни. При этом виде страхования выплата страховой суммы b производится на условиях: 1) если застрахованный умер в течение срока действия договора (n лет), то страховое пособие выплачивается в момент смерти (точнее, в конце года), 2) если за этот период застрахованный не умер, то страховое пособие выплачивается в конце года $x + n$ (x – возраст застрахованного). Как видим, смешанное страхование – это комбинация n-летнего страхования жизни и страхования на дожитие.

В этом случае можно воспользоваться формулами (34). (35), если в ряде распределения вероятностей (31) значение 0 заменить на $b \cdot v^n$, так как теперь застрахованный, дожив до $x + n$ лет получает сумму b. Нетто-премию страхования a_0 можно вычислить по формуле (32), если к этому значению добавить слагаемое $b \cdot v^n \cdot p_{x,n}$.

Ренты в пенсионном страховании. Пенсионное страхование по существу представляет собой последовательно повторяемое страхование на дожитие. При расчете страховых премий можно было бы воспользоваться изложенным выше материалом по страхованию на дожитие. Однако, проще пользоваться соответствующими страховыми аннуитетами.

Определим вначале стоимость (нетто-премию) страхования *пожизненной пенсии*, выплачиваемой в размере b в конце каждого года для лица в возрасте x лет, начиная с возраста $x + n$. Нетто-премия – это математическое ожидание современной стоимости пенсионных выплат в размере b, в конце каждого года в интервале $[x + n, \omega]$, где ω – предельный возраст:

$$A_{x,n} = b \cdot \sum_{j=1}^{\omega-n-x} \frac{l_{x+n+j}}{l_x} \cdot v^{n+j} = b \cdot \sum_{j=1}^{\omega-n-x} \frac{l_{x+n+j}}{l_x \cdot v^x} \cdot v^{x+n+j} =$$

$$= b \cdot \frac{N_{x+n+1}}{D_x}. \qquad (37)$$

Когда пенсии выплачиваются p раз в году (обычно $p = 12$), тогда (37) трансформируется в формулу

$$A^{(p)}_{x,n} = b \cdot \frac{N^{(p)}_{x+n+1}}{D_x}. \qquad (38)$$

Если выплаты пенсий производятся в начале каждого периода, то вместо (38) нужно использовать формулу

$$\ddot{A}^{(p)}_{x,n} = b \cdot \frac{\ddot{N}^{(p)}_{x+n+1}}{D_x}. \qquad (39)$$

Ограниченные страховые аннуитеты. Пусть теперь, в отличие от пожизненного страхования пенсии, выплаты производятся не пожизненно, а в течение t лет, т. е. на интервале $[x + n, x + n + t]$. Лицо страхуется в возрасте x лет. В этом случае страховая премия

$${}_tA_{x,n} = b \cdot \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+t+1}}{D_x} \qquad (40)$$

обобщает формулу (37) ($N_\omega = 0$).

Рассрочка взносов. При страховании премии выплачиваются часто не в виде единовременных взносов, а в виде ряда последовательных платежей, т.е. выплата страховой премии происходит в рассрочку. В этом случае при расчете нетто-премии поступают следующим образом. Вычисляют современную величину рентных платежей в страховую компанию за период рассрочки и эту величину приравнивают к стоимости страхового аннуитета, вычисляемого по одной из формул (37) – (40). Из полученного равенства определяют годовые платежи, которые нужно вносить в страховую компанию в период рассрочки.

Например, если годовые взносы P (нетто-премии) вносятся в страховую компанию в конце каждого года (начиная с x лет) на протяжении m лет, а пожизненная выплата пенсии производится в начале каждого месяца, начиная с возраста $x + n$, то из формул (39). (40) получаем равенство:

$$P \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+m+1}}{D_x} = b \cdot \frac{\ddot{N}^{(12)}_{x+n+1}}{D_x}.$$

Отсюда находим

$$P = \frac{b \cdot \ddot{N}^{(12)}_{x+n+1}}{N_{x+1} - N_{x+m+1}}. \qquad (41)$$

Расчет размера пенсии по сумме взносов. Рассмотрим теперь случай, когда взносы страхователя в возрасте x лет поступают в течение k лет в начале каждого года переменными платежами: $P_1, P_2, ..., P_k$. Первый взнос P_1 – это единовременная страховая премия, обеспечивающая пенсию в размере b_1, второй взнос P_2 обеспечивает пенсию в размере P_2 и т. д. Пусть пенсия пожизненная и выплачивается в конце каждого месяца и $L = x + n$ – срок выхода на пенсию. Тогда для каждого взноса можно записать равенства:

$$P_j = b_j \cdot \frac{N_{L+1}^{(12)}}{D_{x+j-1}}, j = 1, 2, ..., k. \qquad (42)$$

Решая эти равенства, находим годовые платежи b_j, $j = 1, 2, ..., k$. Годовая, итоговая выплата пенсии $b = b_1 + b_2 + ... + b_k$, а выплата в конце каждого месяца – $b/12$.

Пример 2.5.1. Пусть в страховой компании застрахована однородная социальная группа лиц в возрасте 45 лет численностью 3500 человек на следующих условиях. Страхование на один год. В случае смерти застрахованного в течение этого года компания выплачивает его наследникам 100 тысяч условных единиц и не платит ничего, если застрахованный остался жив в течение года.

Определите страховую премию каждого участника этого договора, которая обеспечит вероятность не убыточной деятельности компании на уровне в 95%, если l_{45} = 91640,5, d_{45} = 366,2529 (данные из таблицы смертности).

▶ Вероятность смерти в течение года после 45 лет q_{45} = = 366,2529 : 91640,5 = 0,0039966, а квантиль $x_{0,95}$ = 1,645. Подставляя эти значения в фрмулы (17), (18), получаем:

$$a = \left(0,0039966 + 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,0039966 \cdot 0,9960034}{3500}}\right) \cdot 100 =$$

$$= 0,57509 \text{ тысяч},$$

$$\theta = 1,645 \cdot \sqrt{\frac{0,9960034}{3500 \cdot 0,0039966}} = 0,43895 = 43,895\%.$$

Нетто-премия a_0 = 100 · 0,003997 = 0,3997 тысяч, она на 43,895% меньше, чем страховая премия a.

Итак, покупка страхового полиса за 575,09 условных единиц обеспечит выплату страховой суммы в 100 тысяч в

случае смерти застрахованного. При этом вероятность убыточной деятельности страховой компании не превысит 5%. Если бы цена страхового полиса была бы равна нетто-премии 399,7, то в этом случае отсутствовала бы относительная надбавка за безопасность, т.е. θ = 0. А это влекло бы, что квантиль $x_\alpha = 0$, т.е. $\alpha = 0,5$. В этом случае вероятность убыточной деятельности компании составила бы 50%. ■

Пример 2.5.2. Страховая компания заключила договор страхования жизни с однородной социальной группой клиентов в 10000 человек сроком на один год. Возраст застрахованных – 65 лет. Условия страхования таковы. В случае смерти застрахованного от несчастного случая в течение года страховая компания выплачивает его наследникам 1 млн. условных единиц, а в случае смерти в течение года от естественных причин – 380 тысяч. Страховая компания не платит ничего, если застрахованный не умрет в течение года. Вероятность смерти от несчастного случая в таком возрасте оценивается в 0,0008.

Найдите размер страховой премии, обеспечивающей вероятность выполнения компанией своих обязательств не ниже 99%, если, согласно таблице смертности, l_{65} =75339,63; d_{65} = 1606,2618.

▶ Вероятность умереть от естественных причин в этом возрасте в течение года составляет q_{65} =1606,2618:75339,63= = 0,0213203. Ряд распределения вероятностей индивидуального иска (в тысячах), в данном случае, имеет вид:

ξ	0	1000	380
P	0,9778797	0,0008	0,0213203

Вычислим числовые характеристики ξ: $E\{\xi\} = 8,90171$ тысяч; $D\{\xi\}$ = 3799,416879. Учитывая, что $x_{0,99}$ = 2,33, имеем, согласно формуле (34):

$$a = 8,90171 + 2,33 \cdot \sqrt{\frac{3799,410879}{10000}} = 10,33791 \text{ тысяч}.$$

Нетто-премия составляет следующее значение: 8,90171 тысяч. Относительная надбавка за безопасность

$$\theta = \frac{10,33791 - 8,90171}{8,90171} = 0,1613 = 16,13\%. \blacksquare$$

Пример 2.5.3. В страховой компании застраховано 3000 человек однородной социальной группы в возрасте 35 лет, для которых вероятность умереть в течение года равна 0,00201, и группа в 2000 человек в возрасте 58 лет, соответствующая вероятность смерти которых в течение года – 0,01158. Компания выплачивает наследникам застрахованных первой группы 250 тысяч условных единиц, а второй группы – 180 тысяч, в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если застрахованный доживет до конца года.

Определите страховые премии для лиц каждой социальной группы, гарантирующие 95% вероятность выполнения страховой компанией своих обязательств. Изменятся ли страховые премии, если не будет солидарной ответственности страхователей между группами, а будет только солидарная ответственность внутри каждой группы?

▶ Квантиль $x_{0,95} = 1,645$. По формулам (20) – (22) находим:

$$E\{S\} = 3000 \cdot 250 \cdot 0,00201 + 2000 \cdot 180 \cdot 0,01158 =$$
$$= 5676,3 \text{ тысяч};$$

$$D\{S\} = 3000 \cdot 250^2 \cdot 0,99799 \cdot 0,00201 + 2000 \cdot 180^2 \times$$
$$\times 0,98842 \cdot 0,01158 = 1117812,035;$$

$$K = 5676,3 + 1,645 \cdot \sqrt{1117812,035} = 7415,50307 \text{ тысяч}.$$

Относительная надбавка за безопасность, в соответствии с формулой (24), равна

$$\theta = \frac{7415,50307 - 5676,3}{5676,3} = 0,306397315.$$

Наконец, по формуле (23) определяем страховые премии: $a_1 = 250 \cdot 0,00201 \cdot 1,306397313 = 0,65646$ тысяч, $a_2 = 180 \cdot 0,01158 \cdot 1,306397313 = 2,72305$ тысяч.

Как видим, пожилым людям придется платить намного больше, чем молодым. Выясним теперь вопрос, изменятся ли величины страховых премий, если солидарная ответственность страхователей будет только внутри данной группы?

Возьмем группу людей в возрасте 58 лет. Пусть солидарная ответственность страхователей будет только внутри этой группы. Повторяя аналогичные расчеты, но только для этой группы, получим:

$$E\{S\} = 2000 \cdot 180 \cdot 0,01158 = 4168;$$

$$D\{S\} = 2000 \cdot 180^2 \cdot 0,98842 \cdot 0,01158 = 741694,5533;$$

$$K = 4168,8 + 1,645 \cdot \sqrt{741694,5533} = 5485,50181 \text{ тысяч};$$

$$\theta = \frac{5485,50181 - 4168,8}{4168,8} = 0,31584672.$$

Тогда, $a_2 = 180 \cdot 0,01158 \cdot 1,31584672 = 2,74275$ тысяч, т. е. без "поддержки" более молодых людей им бы пришлось платить на 19,7 единиц больше.

Если бы солидарная ответственность страхователей была только внутри группы молодых людей, то, соответствующие расчеты дали бы: $E\{S\} = 1507,5$ тысяч, $D\{S\} = 376117,4813$; $K = 2516,35247$ тысяч, $\theta = 0,669222202$. Значит, $a_1 = 250 \cdot 0,00201 \cdot 1,669222202 = 0,83878$ тысяч. Это на 182,32 единицы больше, чем при солидарной ответственности застрахованных обеих групп. Принцип солидарной ответственности страхователей помогает уменьшить расходы по приобретению страхового полиса. ■

Пример 2.5.4. Однородная социальная группа в 3000 человек в возрасте 65 лет страхует свою жизнь на протяжении 5 лет на условиях. Если застрахованный умрет в течение этих 5 лет, то его наследникам выплачивается сумма в 250 тысяч условных единиц, если останется живым, то компания не платит ничего.

Определите величину страховой премии, обеспечивающей 95% вероятность выполнения компанией своих обязательств, если норматив доходности компании $i = 6\%$ годовых и используются следующие данные таблицы смертности: $d_{65} = 1606,2618$; $d_{66} = 1717,0334$; $d_{67} = 1832,0273$; $d_{68} = 1950,6476$; $d_{69} = 2072,1177$; $l_{65} = 75339,63$.

▶ Согласно формуле (32) и данным таблицы смертности, имеем:

$$E\{\xi\} = \frac{b}{l_{65}} \cdot (v \cdot d_{65} + v^2 \cdot d_{66} + v^3 \cdot d_{67} + v^4 \cdot d_{68} + v^5 \cdot d_{69}) =$$
$$= 25,46868 \text{ тысяч.}$$

В соответствии с формулой (33)

$$E\{\xi^2\} = \frac{b^2}{l_{65}} \cdot (v^2 \cdot d_{65} + v^4 \cdot d_{66} + v^6 \cdot d_{67} + v^8 \cdot d_{68} + v^{10} \cdot d_{69}) =$$
$$= 5360,762367;$$

$$D\{\xi\} = 5360,762367 - 25,46868^2 = 4712,108706.$$

Так как, $x_{0,95} = 1,645$, то по формуле (34) находим страховую премию

$$a = 25,46868 + 1,645 \cdot 1,645 \cdot \sqrt{\frac{4712,108706}{3000}} = 27,53032 \text{ тысяч.}$$

Относительная надбавка за риск при этом не велика:

$$\theta = \frac{27,53032 - 25,46868}{25,46868} = 0,08095 = 8,095\%. \blacksquare$$

Пример 2.5.5. Некоторое лицо в возрасте 36 лет страхует будущую выплату ежегодных пенсий в размере 2400 условных единиц. Пенсия будет выплачиваться с 55 лет. Норматив доходности в страховой компании – 6% годовых. Определите величину нетто-премии для следующих ситуаций: а) пенсия пожизненная, выплата пенсий в конце каждого года; б) пенсия пожизненная, выплата пенсий в конце каждого месяца; в) выплата пенсий в конце каждого года на протяжении 20 лет после наступления пенсионного возраста; г) пенсия пожизненная, выплата в начале каждого месяца и страховые премии выплачиваются в рассрочку на протяжении 5 лет, в конце каждого месяца. Коммутационные числа, участвующие в расчетах следующие: D_{36} = = 11539,7; D_{56} = 3277,32; N_{36} = 176406,99; N_{37} = 164867,29; N_{42} = 116583,74; N_{56} = 39525,92; N_{76} = 4243,47.

▶ а) В этом случае, в силу формулы (37),

$$A_{36,19} = 2400 \cdot \frac{N_{56}}{D_{36}} = \frac{2400 \cdot 39525,92}{11539,7} = 8220,51.$$

б) Воспользуемся формулой (38):

$$A_{36,19}^{(12)} = \frac{2400 \cdot N_{56}^{(12)}}{D_{36}} = \frac{2400 \cdot 41028,025}{11539,7} = 8532,91,$$

где

$$N_{56}^{(12)} = N_{56} + \frac{11}{24} \cdot D_{56} = 39525,92 + \frac{11 \cdot 3277,32}{24} = 41028,025.$$

в) В этом случае необходимо применить формулу (40):

$$_{20}A_{36,19} = 2400 \cdot \frac{N_{56} - N_{76}}{D_{36}} = \frac{2400 \cdot (39525,92 - 4243,47)}{11539,7} =$$
$$= 7337,96.$$

г) Применим формулу (41):

$$P = \frac{2400 \cdot \ddot{N}_{56}^{(12)}}{N_{37} - N_{42}} = \frac{2400 \cdot 38023,815}{164867,29 - 116583,74} = 1890,03.$$

Такую страховую премию следует выплачивать в конце каждого года на протяжении пяти лет. ■

Пример 2.5.6. Пусть на пенсионный счет страхователя (возраст 55 лет) в течение двух лет поступают взносы пренумерандо: 100 и 120 тысяч. Пенсия будет выплачиваться с 60 лет, пожизненно, в конце каждого месяца. Норматив доходности в страховой компании – 6% годовых. Определите размер месячных, пенсионных выплат. Для расчета используйте следующий ряд коммутационных чисел: D_{55} = = 3505,37; D_{56} = 3277,32; D_{61} = 2309,44; N_{61} = 25182,30.

▶ Пусть b_1, b_2 – годовые выплаты пенсий, порожденные последовательными взносами на пенсионный счет. Для определения величины b_1, воспользуемся формулой (42):

$$100 = b_1 \cdot \frac{N_{61}^{(12)}}{D_{55}} = b_1 \cdot \frac{26240,88333}{3505,37} = 7,485909713 \cdot b_1.$$

Отсюда получаем: b_1 = 13,35843 тысяч. Аналогично, для определения величины b_2, имеем равенство:

3 Зак. 2410

$$120 = b_2 \cdot \frac{N_{61}^{(12)}}{D_{56}} = b_2 \cdot \frac{26240,88333}{3277,32} = 8,006811459 \cdot b_2.$$

Получаем: $b_2 = 14,98724$ тысяч. Итоговая, годовая пенсионная выплата $b = b_1 + b_2 = 28,34567$ тысяч. Месячная выплата – 28,34567 : 12 = 2,36214 тысяч. ■

2.6. Задачи и примеры

2.1. На протяжении 25 лет создается резервный фонд. На поступающие в него средства начисляются сложные проценты по ставке 9,75% годовых. В течение первых 10 лет в конце каждого года в фонд вносили по 10 тыс. $, в течение последующих 10 лет – по 20 тыс. $ в конце года, а в последние 5 лет – по 25 тыс. $ в конце года. Чему будет равна сумма фонда через 25 лет?

2.2. Создается фонд в течение 5 лет. На поступающие в него средства начисляется 9,75% годовых. Сумма годового взноса – 1 тыс. $, проценты начисляются в конце года. Насколько увеличится наращенная сумма при: а) ежедневных взносах; б) ежедневной капитализации процентов; в) ежедневных взносах и ежедневной капитализации процентов? (K = 365 дней)

2.3. На протяжении 12 лет создается фонд. Взносы в него поступают в конце года в размере 8 тыс. $. В течение первых 4 лет на поступившие средства начислялись 8 % годовых, в последующие 4 года – 8,25% годовых и в последние 4 года – 8,75% годовых. Определите величину фонда.

2.4. В течение 12 лет создается фонд, на поступающие в конце года средства начисляется 9% годовых. Годовой взнос – 10 тыс. $. В первые 6 лет взносы поступали в конце года, в следующие 4 года – по полугодиям и в последние 2 года – в конце каждого квартала. Определите величину фонда.

2.5. На счет в банк, в течение 6 лет, в конце года поступает 15 тыс. $ и начисляется 9,5% годовых. Имеет смысл перейти к ежемесячным взносам в банк (в конце каждого месяца), если это приведет к 5% увеличению суммы счета к концу шестого года. Целесообразно ли увеличение частоты взносов?

2.6. На протяжении 15 лет создается фонд. На поступающие средства начисляется 9,25% годовых. В течение 10 лет в конце каждого полугодия в фонд вносили по 5 тыс. $. Затем в конце 12-го года было внесено 50 тыс. $, а в начале 14-го года – 100 тыс. $. Какова величина фонда к концу 15-го года?

2.7. Решено за 15 лет создать некоторый фонд. Взносы в конце каждого года составляют 10 тыс. $, на поступающие средства начисляется 10,5% годовых. Первые 8 лет взносы поступали согласно намеченному плану. Затем было решено изменить порядок взносов: в конце 10-го и в начале 14-го годов внести в фонд по равной сумме S_0, так, чтобы к концу 15-го года получить намеченную ранее сумму фонда. На суммы S_0 проценты начисляются по той же ставке, что и ранее. Чему равно значение S_0?

2.8. На счет в банк в течение 6 лет, под 10,2% годовых, в конце каждого полугодия вносили по 10 тыс. $. Для финансирования некоторого проекта с этого счета в конце 7-го и 8-го годов было снято по 40 тыс. $. Накопление денежных средств было продолжено на этом счете по той же ставке процентов. Начиная с конца 9-го года, на счет в конце года вносили по 40 тыс. $ в течение 5 лет. Какова сумма счета к концу 13-го года?

2.9. Некто, в возрасте 30 лет, решил создать фонд по дополнительной оплате к пенсии. Для этого было решено в течение 30 лет в конце каждого года вносить в банк по 500 $ под 6% годовых. Какую сумму можно будет снимать со счета ежемесячно, в конце каждого месяца, после достижения пенсионного возраста в 60 лет, чтобы на протяжении 20 лет полностью исчерпать накопленный фонд? На остаток средств в фонде начисляется 6% годовых.

2.10. Какую сумму ежегодно нужно вносить на счет в банке под 8,5% годовых, чтобы через 20 лет накопить 100 тыс. $, если: а) взносы в конце каждого полугодия; б) взносы в конце каждого месяца?

2.11. За какой срок можно накопить 100 тыс. $, если в конце каждого квартала на счет вносится 15 тыс. $ и на собранные средства начисляются проценты в конце каждого полугодия по ставке 8,75% годовых? На сколько нужно увеличить годовые выплаты, чтобы не было недоплаты?

2.12. В течение 8 лет создается фонд. Годовые взносы – в конце года по 12 тыс. \$; на собранные средства начисляется 10% годовых. В каком случае сумма фонда станет больше, если перейти к: а) ежемесячным взносам в конце каждого месяца; б) ежедневной капитализации процентов? (K = 365 дней)

2.13. В течение 8 лет создается фонд. Денежные поступления в фонд – в конце года равными суммами. На собранные средства в конце года начисляется 10% годовых. Насколько процентов возрастет наращенная сумма фонда при переходе к: а) поквартальным взносам в конце каждого квартала; б) поквартальному начислению процентов; в) поквартальным взносам и начислению процентов?

2.14. В течение 6 лет создается фонд, взносы в который поступают в конце каждого полугодия равными суммами. На поступившие средства в конце года начисляется 8,5% годовых. Насколько процентов возрастет сумма фонда в конце 6-го года при переходе к непрерывной капитализации процентов?

2.15. Планируется создать фонд взносами по 10 тыс. \$ в конце каждого года. Есть основания считать, что срок создания фонда и используемая годовая ставка процентов имеют следующее распределение вероятностей, приведенное в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Срок создания, года	Годовая ставка, %		
	7	8	8,5
Третий	0,2	0,1	0,05
Четвертый	0,05	0,1	0,15
Пятый	0,05	0,1	0,2

Для наращенной суммы фонда S вычислите: $S_{\min}$, $S_{\max}$, $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D\{S\}}$, $P\{40 \text{ тыс.} \le S \le 50 \text{ тыс.}\}$.

2.16. Продается некоторая фирма, приносящая ежегодный доход в 500 тыс. \$, и этот доход можно будет получать

в течение 50 лет. Какую цену следует добавить к стоимости недвижимости и оборудования фирмы исходя из ставки сложных процентов 8% годовых, чтобы получить полную стоимость фирмы, если доход получают: а) в конце каждого года; б) в конце каждого месяца?

2.17. Какую сумму разовым платежом нужно положить в банк под 8% годовых мужчине в возрасте 40 лет, чтобы по достижении им пенсионного возраста в 60 лет в течение 20 лет в начале каждого месяца снимать по 200\$, если проценты капитализируются: а) в конце года; б) в конце каждого полугодия?

2.18. Какую сумму разовым платежом нужно положить в банк мужчине в возрасте 60 лет, чтобы в течение 20 лет в конце каждого года снимать по 2 тыс. \$, если на остаток вклада меньше 10 тыс. \$ начисляется 5% годовых, больше или равно 10 тыс. \$ – 8% годовых?

2.19. Задолженность в 1 млн. \$ планируется погасить следующим образом: в течение 3 лет в конце года выплачивается по 2 тыс. \$, а остальной долг гасится равными суммами S_0 в конце пятого и седьмого годов. На остаток долга начисляется 7,5% годовых. Чему равно значение S_0?

2.20. Стоит ли покупать за 980\$ облигацию номиналом 1 тыс. \$ и длительностью 5 лет, если она в конце каждого полугодия дает 40\$ процентного дохода и в конце срока погашается по номиналу, если есть возможность поместить эти денежные средства в банк под 9% годовых?

2.21. Авиационная фирма может продать покупателю свою продукцию по одному из двух вариантов оплаты: а) через год выплачивается 20 млн. \$, затем с интервалом через год еще 4 платежа по 30 млн. \$; б) через год выплачивается 30 млн. \$, затем с интервалом в полгода 8 платежей по 10 млн. \$. Какой из вариантов более приемлем для покупателя, если он имеет возможность разместить денежные средства в банке под 8% годовых?

2.22. В аренду сдается оборудование стоимостью 1 млн. \$ сроком на 4 года. Остаточная стоимость оборудования в конце аренды оценивается в 500 тыс. \$. На профилактический осмотр и ремонт арендодатель тратит дополнительно по 200\$ в конце второго и третьего годов. Какую годовую арендную плату следует брать: а) в начале каждого года; б) в конце каждого года, чтобы обеспечить норматив рентабельности в 15% годовых?

2.23. Участок сельскохозяйственных угодий может приносить ежегодный доход, который можно рассматривать как случайную величину, равномерно распределенную в интервале [190 тыс. $, 220 тыс. $]. На удобрения в начале года необходимо тратить по 2 тыс. $. При нормативе доходности в 12% годовых назначьте среднюю цену за участок при условии, что ежегодные доходы являются независимыми в совокупности случайными величинами.

2.24. Имеются два варианта строительства и эксплуатации дороги: 1) в течение 2 лет ежемесячные инвестиции в строительство по 50 тыс. $ в конце каждого месяца, затем профилактический ремонт после 5 лет эксплуатации дороги. На ремонт в начале каждого из 3 месяцев выделяется по 20 тыс. $; 2) в течение 2 лет ежемесячные инвестиции в строительство по 80 тыс. $ в конце каждого месяца, затем профилактический ремонт после 10 лет эксплуатации дороги. На ремонт в начале каждого из 4 месяцев планируется выделить по 25 тыс. $. Временной горизонт эксплуатации дороги после завершения строительства — 50 лет для каждого из вариантов. Какой из вариантов наиболее экономичный, если банк согласен финансировать строительство и эксплуатацию дороги при помещении на его счет денежных средств под 9% годовых? Для выбранного варианта оцените современную стоимость строительства и эксплуатации дороги.

2.25. На аукцион выставляется нефтеносный участок, который при вложении в него по 250 тыс. $ в начале каждого квартала, в течение года, может в дальнейшем приносить ежегодный доход, в конце каждого года, в следующих размерах: первые 20 лет — по 10 тыс. $, в последующие 10 лет — по 1 млн. $. Оцените стартовую цену участка при нормативе доходности в 9% годовых.

2.26. В условия предыдущей задачи внесем изменения. Ежегодные доходы являются независимыми в совокупности случайными величинами. Они равномерно распределены в интервале [9 млн. $; 10 млн. $] на первом этапе эксплуатации длительностью 20 лет. На втором этапе эксплуатации длительностью 10 лет имеют дискретное распределение: 4 млн. $ с вероятностью 0,7 и 5,5 млн. $ с вероятностью 0,3. На последнем этапе длительностью 5 лет доход — это дискретная случайная величина со следующим распределением вероятностей: 2 млн. $ с вероятностью 0,6; 1 млн. $ с вероятностью 0,3 и 0,5 млн. $ с вероятностью 0,1. Оцените среднюю современную стоимость этого нефтеносного участка для ставки дисконтирования в 10% годовых.

2.27. Планируется на протяжении 10 лет создать фонд с ежегодными поступлениями по 100 тыс. $ в конце года. Какая должна быть ставка процентов, чтобы в фонде было накоплено 2,5 млн. $ при капитализации процентов: а) ежегодной; б) ежемесячной?

2.28. На протяжении 10 лет создается фонд с ежегодными поступлениями по 100 тыс. $ в конце года. На поступившие средства начисляется 8% годовых, если сумма не превышает 500 тыс. $, и 10% годовых, если сумма превышает 500 тыс. $. Чему будет равна сумма фонда через 10 лет?

2.29. Долг в сумме 200 тыс. $ должен быть погашен за 5 лет равными выплатами в конце каждого полугодия. На остаток долга начисляется 9,5% годовых. Определите величину разовой уплаты по погашению долга?

2.30. Долг в сумме 500 тыс. $, выданный под 8,7% годовых, гасится следующим образом: в течение 2 лет (льготный период) основной долг не гасится, затем сумма долга погашается равными платежами (постнумерандо) за 5 лет. Определите величину годовых платежей по погашению долга в течение пятилетнего периода, если: а) на протяжении льготного периода в конце года выплачиваются только проценты; б) проценты за льготный период присоединяются к сумме долга.

2.31. Долг в сумме 700 тыс. $ гасится равными платежами в конце каждого года на протяжении 4 лет, затем гасится также равными платежами, но возросшими на 30% по сравнению с первым периодом, в течение последующих 3 лет в конце каждого года. На остаток задолженности начисляется 9,25% годовых. Чему равна величина годового платежа по погашению долга в первом периоде?

2.32. Долг в сумме 400 тыс. $, выданный под 10% годовых, должен быть погашен за 8 лет равными платежами в конце каждого года. Однако после трех выплат, согласно достигнутой договоренности, остальную задолженность было решено погасить равными суммами S_0 в конце шестого, седьмого и восьмого годов по той же ставке процентов. Чему равно значение S_0?

2.33. За какой срок долг в сумме 525 тыс. $ может быть погашен годовыми платежами в 80 тыс. $ в конце каждого года, если на остаток долга начисляется 8,25% годовых? Если найденное значение округлить до ближайшего меньшего числа, то каким должен быть годовой член R по погашению долга, чтобы долг был погашен полностью?

2.34. Долг, в сумме 400 тыс. $, погашается в течение 6 лет равными платежами с годовыми выплатами по 90 тыс. $. Какой вариант погашения долга более выгоден для кредитора: а) погашение в конце каждого полугодия, начисление процентов на остаток долга в конце года; б) выплаты в конце года при ежемесячной капитализации процентов на остаток долга? Чему равна максимальная эффективность займа в виде годовой ставки сложных процентов?

2.35. Долг в размере 870 тыс. $ намечено погасить в течение 10 лет платежами постнумерандо, по 120 тыс. $ ежегодно. Первые четыре выплаты были сделаны согласно достигнутой договоренности. Затем было решено на 2 года отложить погашение задолженности и возобновить ее погашение равными выплатами постнумерандо, начиная с конца седьмого года. Какими должны быть погасительные платежи во втором периоде, чтобы намеченная ранее эффективность погашения ссуды не изменилась?

2.36. Фонд создается в течение 5 лет. На собранные средства начисляется 8,25% годовых. Годовые платежи по 24 тыс. $ поступают в конце каждого месяца. Насколько процентов возрастет наращенная сумма фонда, если перейти к смешанной форме начисления процентов?

2.37. В течение полутора лет создается фонд. Взносы в сумме 100 тыс. $ поступают в конце каждого месяца. На поступившие средства начисляется 7,5% годовых. Чему равна сумма фонда, если: а) начисляются простые проценты; б) сложные проценты?

2.38. В течение 10 лет создается фонд, годовые взносы в сумме 400 тыс. $ вносятся в конце каждого года под 12% годовых. На сколько можно уменьшить годовой взнос в фонд, чтобы получить ту же наращенную сумму, если взносы вносятся: а) в начале года; б) в начале каждого полугодия?

2.39. Долг в сумме 800 тыс. $ гасится равными выплатами в конце каждого года в течение 5 лет, на остаток долга начисляется 8,5% годовых. В каком случае годовые расходы по обслуживанию долга возрастут больше и на сколько, если: а) будет предоставлена годовая отсрочка по погашению долга, проценты за этот период присоединяются к сумме долга; б) ставка годовых процентов возрастет на 0,5%?

2.40. Оценить, косвенно, какую сумму завещал А.Б. Нобель на учреждение международных премий, если эта сумма была положена в банк под 10% годовых. Каждый год назначается шесть Нобелевских премий по 1 млн. $ и 1 млн. $ идет на организационные расходы.

2.41. Месторождение полезных ископаемых планируется эксплуатировать в течение 40 лет. Ожидается, что в первые 30 лет чистый годовой доход составит по 80 млн. $ за каждый год, а в последние 10 лет – по 40 млн. $ за каждый год. Оцените современную стоимость доходов от эксплуатации месторождения для ставки 10 % годовых.

Указание: воспользуйтесь теорией рент с выплатами в середине периодов.

2.42. Некоторую задолженность предлагается погасить в течение 5 лет одним из следующих способов: а) выплачивать в конце каждого года по 200 тыс. $; б) выплачивать в конце каждого полугодия по 97500 $. Для ставки дисконтирования 10% годовых определить, какой из этих способов в большей мере возмещает задолженность? Для какой ставки дисконтирования оба способа погашения задолженности будут равноценны?

2.43. Долг в сумме 800 тыс. $ должен быть погашен в течение 8 лет равными платежами в конце каждого года. На остаток долга начисляется 8% годовых. После 4 лет выплат, согласно намеченному плану погашения, должник, по согласованию с банком, решил гасить задолженность равными выплатами в конце каждого полугодия. Явившись в банк в конце седьмого года, должник решил оставшуюся задолженность погасить разовым платежом. Какую сумму ему нужно вернуть банку?

2.44. Кредит в сумме 700 тыс. $ выдан под 10% годовых. Планируется погасить задолженность, выплачивая по 68 тыс. $ в конце каждого года. За какой срок можно погасить задолженность? На сколько нужно увеличить намеченную сумму выплат, чтобы погасить задолженность не более чем за 8 лет?

2.45. В 1984 г. на химическом заводе в городе Бхопала (Индия) произошла крупная авария, повлекшая человеческие жертвы. Владелец предприятия, корпорация "Юнион карбайд", предложила в качестве компенсации 200 млн. $, выплачиваемых в течение 35 лет поквартально. Если бы правительство Индии согласилось с этим предложением, то какую сумму следовало бы поместить корпорации в банк под 10% годовых, чтобы произвести эти выплаты?

2.46. Продается участок земли, который может давать два урожая в год (через полгода). Для севооборота поочередно выращивают культуры двух типов A и B. Чистый доход, который можно получить от продажи собранного урожая, оценивается в 1280 $ для культуры типа A и в 2000 $ для культуры типа B. Какую цену следует назначить на данный участок земли при нормативе доходности в 12% годовых?

2.47. В страховой компании застрахована однородная социальная группа лиц в возрасте 53 года численностью 3000 человек. Страхование производится на один год. В случае смерти застрахованного в течение года страховая компания выплачивает его наследникам 120 тысяч условных единиц и не платит ничего, если застрахованный остается живым в течение года.

Определите страховую премию a каждого участника этого страхового договора, которая обеспечит вероятность выполнения компанией своих обязательств на уровне 95%, если l_{53} = 87791,26; d_{53} = 665,0646.

2.48. Страховая компания заключила договор страхования жизни с однородной социальной группой в 8000 человек на один год. Возраст застрахованных – 43 года. В случае смерти застрахованного в течение года от несчастного случая страховая компания выплачивает его наследникам 800 тысяч условных единиц, а в случае смерти от естественных причин – 400 тысяч. Страховая компания не платит ничего, если застрахованный не умрет в течение года. Вероятность смерти от несчастного случая, в таком возрасте, оценивается в 0,0007.

Найдите размер страховой премии a, обеспечивающий вероятность не убыточной деятельности компании в 95%, если, согласно таблице смертности, l_{43} = 92299,23; d_{43} = 317,7619.

2.49. В страховой компании застраховано 1000 человек однородной социальной группы в возрасте 27 лет, для которых вероятность умереть в течение года равна 0,0013288, и группа в 4000 человек в возрасте 48 лет, соответствующая вероятность смерти которых – 0,0050436. Страховая компания выплачивает наследникам застрахованных первой группы – 300 тысяч условных единиц, а второй группы – 160 тысяч, в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если застрахованный доживет до конца года.

Определите страховые премии a_1, a_2 социальной группы, гарантирующие 99% вероятность выполнения страховой компанией своих обязательств.

2.50. Однородная социальная группа в 1000 человек в возрасте 70 лет страхует свою жизнь на протяжении 5 лет на следующих условиях. Если застрахованный умрет в течение этих 5 лет, то его наследникам страховая компания выплачивает сумму в 250 тысяч условных единиц, если останется живым, то компания не платит ничего.

Определите величину страховой премии a, обеспечивающей 95% вероятность выполнения компанией своих обязательств, если норматив доходности компании i = 8% годовых и используются следующие данные таблицы смертности: d_{70} = 2195,4578; d_{71} = 2319,4639; d_{72} = 2442,6884; d_{73} = 2563,4258; d_{74} = 2679,705; l_{70} = 66161,54.

2.51. Некоторое лицо в возрасте 46 лет страхует будущую выплату ежегодных пенсий в размере 2500 условных единиц. Пенсия будет выплачиваться с 60 лет. Норматив доходности в страховой компании – 6% годовых. Определите величину нетто-премии a_1 пожизненной пенсии, если пенсия будет выплачиваться помесячно, в начале каждого месяца. Насколько меньше будет нетто-премия a_2 такой пенсии, если пенсия будет выплачиваться в конце каждого месяца? В расчетах используйте следующие коммутационные числа: N_{61} = 25182,39; D_{46} = 6255,74; D_{61} = 2309,44.

2.52. Пусть на пенсионный счет страхователя (возраст 50 лет) в течение трех лет поступают взносы пренумерандо: 80, 120 и 160 тысяч условных единиц. Пенсия будет выплачиваться с 55 лет пожизненно, в конце каждого месяца. Норматив доходности в страховой компании – 6% годовых.

Определите размер месячных пенсионных платежей. Для расчета используйте следующий ряд коммутационных чисел: D_{50} = 4859,3; D_{51} = 4557,1; D_{52} = 4271,55; D_{56} = = 3277,32; N_{56} = 39525,92.

Глава 3

ПЕРЕМЕННЫЕ ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ

В финансовой практике часто приходится оперировать с потоками платежей, члены которых изменяются во времени. Поток платежей, члены которого изменяются в соответствии с каким-либо заданным законом развития, называется ***переменной рентой***. Если такого закона развития нет, то соответствующая последовательность платежей представляет собой ***нерегулярный поток платежей***.

Обобщающие характеристики ***нерегулярного потока платежей***, такие как наращенная сумма и современная величина, могут быть получены только путем прямого счета: наращения либо дисконтирования всех членов данного ряда платежей.

3.1. Потоки с разовыми изменениями платежей

Пусть общая продолжительность ренты равна n, этот срок разбит на k участков длительностью n_j, в каждом из которых член ренты постоянен и равен R_j, а ставка процентов принимает значение i_j, $j = \overline{1,\ k}$. Наращенная сумма годовой ренты при начислении процентов раз в году

$$S = R_1 s_{n_1;\,i_1}(1+i_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(1+i_k)^{n_k} + R_2 s_{n_2;\,i_2}(1+i_3)^{n_3}\cdot\ldots\cdot(1+i_k)^{n_k} + \cdots + R_k s_{n_k;\,i_k}. \quad (1)$$

Современная величина такой ренты

$$A = R_1 a_{n_1;\,i_1} + R_2 a_{n_2;\,i_2}(1+i_1)^{-n_1} + \cdots + R_k a_{n_k;\,i_k}(1+i_{k-1})^{-n_{k-1}}\cdot\ldots\cdot(1+i_1)^{-n_1}. \quad (2)$$

Формулы (1), (2) могут быть применены и для p-срочных рент, в этом случае вместо коэффициентов $s_{n_j;i_j}$, $a_{n_j;i_j}$ следует использовать коэффициенты $s^{(p)}_{n_j;i_j}$, $a^{(p)}_{n_j;i_j}$, $j=\overline{1,\ k}$.

Пример 3.1.1. Фонд в сумме 1 млн. \$ должен быть создан за 10 лет. Первые 5 лет в фонд в конце каждого года вносится по 60 тыс. \$, на поступившие средства начисляется 10% годовых. Последние 5 лет в фонд в конце каждого года вносится по 61 тыс. \$ и в этот период на денежные суммы начисляется по 11% годовых. Какую сумму нужно внести в фонд в конце десятого года, чтобы в фонде была накоплена намеченная сумма?

▶ Обозначим через S_I наращенную сумму фонда к концу пятого года: $S_I = 60 \cdot s_{5;10} = 60\dfrac{1{,}1^5-1}{0{,}1} = 366{,}306$ тыс. \$. Платежи с годовым взносом в 61 тыс. \$ образуют ренту, наращенная сумма которой $S_2 = 61 s_{4;11} = 61\dfrac{1{,}11^4-1}{0{,}11} =$ $= 287{,}29359$ тыс. \$. Если R – окончательный взнос в фонд, то он должен удовлетворять уравнению: $1000 = S_1 \cdot 1{,}11^5 +$ $+ S_2 \cdot 1{,}11 + R = 366{,}306 \cdot 1{,}11^5 + 287{,}29359 \cdot 1{,}11 + R$. Из этого уравнения получаем: $R = 63{,}8572$ тыс. \$. ■

Пример 3.1.2. Задолженность в сумме 800 тыс. \$ гасится платежами в конце каждого года на протяжении 7 лет. Первые четыре года выплачивается по 100 тыс. \$. Какие годовые выплаты должны производиться в последние три года, чтобы долг был полностью погашен, если на остаток долга начисляется 6% годовых?

▶ Если R – годовые выплаты в последние три года, то, очевидно, должно выполняться уравнение: $800 = 100 \cdot a_{4;6} +$ $+ R \cdot a_{3;6} \cdot 1{,}06^{-4}$. А так как $a_{4;6} = 3{,}465105613$; $a_{3;6} =$ $= 2{,}673011949$, то $R = \dfrac{(800-346{,}5105613)\cdot 1{,}06^4}{2{,}673011949} = 214{,}18534$ тыс. \$. ■

3.2. Рента с постоянным абсолютным приростом платежей

Пусть платежи производятся не один, а p раз в году, причем каждый раз они изменяются по ***арифметической прогрессии***: $R_j = R + (j-1)\dfrac{a}{p}$, где R_j – величина платежа в периоде с номером j; R – величина первого платежа; a – абсолютный прирост платежей за год. Тогда современная величина такой ренты вычисляется по формуле

$$A = \left[Rp + \frac{a}{(1+i)^{1/p}-1}\right] a^{(p)}_{n;i} - \frac{na(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}, \tag{3}$$

где i – годовая ставка процентов, по которой на платежи начисляются проценты, а n – срок ренты. Наращенная сумма данной ренты

$$S = A(1+i)^n. \tag{4}$$

При $p = 1$ формулы (3), (4) обращаются в известные результаты, приведенные в монографии [23].

Формулы (3), (4) получены для рент постнумерандо. Для рент пренумерандо можно использовать формулы (3), (4), если предварительно все платежи, выплачиваемые в начале периодов, вывести на конец соответствующих периодов путем их наращения по ставке процентов i.

Часто при анализе переменных рент может возникнуть задача определения первого члена ренты R или его прироста a при условии, что все остальные параметры ренты заданы.

Пример 3.2.1. Долг в сумме 180 тыс. \$ должен быть погашен за 6 лет по схеме возрастающей ренты, члены которой изменяются по арифметической прогрессии, причем первая выплата равна 50 тыс. \$. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка – 7,2% в год. Определите сумму всех процентных платежей.

▶ По условию, годовые выплаты изменяются линейно, т.е. $R(t) = 50 + a \cdot t$, где a – абсолютный прирост платежей за год. Неизвестный прирост a платежей за год найдем из уравнения (3): $180 = \left(50 + \frac{a}{0{,}072}\right)a_{6;7,2} - \frac{6 \cdot a \cdot 1{,}072^{-6}}{0{,}072}$. Учитывая, что $a_{6;7,2} = 4{,}737251764$, получаем: $a = -5{,}22378$ тыс. \$. Итак, $R(t) = 50 - 5{,}22378 \cdot t$, $t = 1, 2, ..., 6$. Сумма всех платежей $R(1) + ... + R(6) = 221{,}6433$ тыс. \$. Если из этой суммы вычесть первоначальную сумму долга, то получим сумму всех выплаченных процентов: $221{,}6433 - 180 = 41{,}6433$ тыс. \$. ■

Пример 3.2.2. Решено в течение 10 лет создать фонд в сумме 1 млн. \$. На денежные средства, поступающие в фонд в конце каждого года, начисляется 8,75% годовых. Первый взнос в фонд составляет 80 тыс. \$. По схеме возрастающей или убывающей арифметической прогрессии платежей можно создать фонд? Определите сумму взносов в фонд.

▶ Воспользуемся формулами (3), (4), полагая в них $p = m = 1$, $R = 80$, $n = 10$, $S = 1000$, $i = 0{,}0875$: $1000 = \left(80 + \frac{a}{0{,}0875}\right)\frac{1{,}0875^{10} - 1}{0{,}0875} - \frac{10 \cdot a}{0{,}0875}$. Это уравнение линейное относительно неизвестного параметра a. Решая его, получаем: $a = -3{,}50896$ тыс. \$. Так как прирост платежей за год отрицательный, то фонд можно создать только по схеме убывающей арифметической прогрессии платежей. Сумма взносов в фонд $(80 + (80 - 9 \cdot 3{,}50896)) : 2 = 64{,}20968$ тыс. ■

3.3. Рента с постоянным относительным изменением платежей

Пусть платежи производятся не один, а p раз в году, причем каждый раз они изменяются по ***геометрической прогрессии***:

$$R_j = Rq^{j-1}, \quad j = \overline{1, np},$$

где R – величина первого платежа; q – постоянный относительный темп роста за период длительностью $\frac{1}{p}$.

Проценты на поступающие платежи начисляются раз в году. Тогда современная величина такой ренты

$$A = R\frac{q^{np}(1+i)^{-n} - 1}{q - (1+i)^{1/p}}, \tag{5}$$

а наращенная сумма

$$S = A(1+i)^n. \tag{6}$$

Пример 3.3.1. Текущая задолженность равна 300 тыс. \$. Решено погасить ее в течение 8 лет по схеме возрастающей ренты, члены которой возрастают по геометрической прогрессии, увеличиваясь за год на 10%. Погашение основного долга начинается с конца третьего года. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка – 5,5% в год. Первые 2 года выплачиваются только проценты в конце каждого года. Определите сумму всех выплат B по погашению долга и общую сумму процентных платежей I.

▶ Поскольку первые два года погашались только процентные платежи, то к началу третьего года основной долг остался прежним. Погашение основного долга производилось платежами, возрастающими в геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1{,}1$, т.е. $R_j = R \cdot 1{,}1^{j-1}$, $j = 1, 2, ..., 6$, где R – величина первого платежа. В силу формулы (5), имеем: $300 = R\frac{1{,}1^6 \cdot 1{,}055^{-6} - 1}{1{,}1 - 1{,}055} = R \cdot 6{,}32927185$. Следовательно, $R = 47{,}39882$ тыс. \$. Сумма B всех выплат по погашению долга равна: $B = 2 \cdot 300 \cdot 0{,}055 + \frac{47{,}39882 - 47{,}39882 \cdot 1{,}1^6}{1 - 1{,}1} = 398{,}71081$ тыс. \$. Сумма всех процентных платежей $I = 398{,}71081 - 300 = 98{,}71081$ тыс. \$. ■

Пример 3.3.2. Решено в течение 3 лет создать фонд в размере 100 тыс. \$ по схеме возрастающих в геометрической прогрессии взносов, поступающих в начале каждого года. Первый взнос составляет 20 тыс. \$. Насколько процентов должны возрастать последующие платежи, чтобы фонд был создан, если на поступающие платежи начисляется 10,2% годовых?

▶ Пусть q – знаменатель геометрической прогрессии. Наращивая все платежи на конец третьего года и суммируя их, получим: $20 \cdot 1{,}102^3 + 20 \cdot q \cdot 1{,}102^2 + 20 \cdot q^2 \cdot 1{,}102 = 100$. Относительно q – это квадратное уравнение. Решая его, получим: $q = 1{,}353311446$. Следовательно, платежи должны возрастать на 35,33% за год. ■

3.4. Непрерывные постоянные потоки платежей

Если на протяжении всего срока ренты поступления платежей происходит непрерывно, то имеют ***дело с постоянной непрерывной рентой***. Такую ренту можно рассматривать как предельный случай p-срочной ренты при $p \to \infty$. Переходя к пределу при $p \to \infty$ в формулах для наращенной суммы и современной величины p-срочной ренты, с m-разовым начислением процентов в году, получаем:

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{m\ \ln(1+j/m)},\quad A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{m\ \ln(1+j/m)}, \tag{7}$$

где R – годовой член; j – годовая ставка процентов.

Если наряду с непрерывными выплатами непрерывно начисляются проценты, то формулы для обобщающих характеристик такой ренты получаем из формулы (7), устремляя m к бесконечности и заменяя j на δ:

$$S = R\frac{e^{\delta n}-1}{\delta},\quad A = R\frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}, \tag{8}$$

где δ – постоянная ставка непрерывных процентов.

Пример 3.4.1. За какой срок наращенная сумма фонда вырастет в 10 раз по сравнению с годовой суммой взноса R, если годовые взносы поступают непрерывно и равномерно в пределах года и всего периода? На взносы начисляются непрерывные проценты по годовой ставке 9,2%. Насколько дольше происходил бы указанный рост, если бы годовые взносы R поступали раз в конце года и на поступающие платежи начислялись сложные годовые проценты по той же ставке 9,2?

► При непрерывном и равномерном поступлении денежных средств и непрерывном начислении процентов наращенная сумма ренты вычисляется по формуле (8). Из этой формулы получаем, учитывая, что $\frac{S}{R} = 10$:

$$n = \frac{\ln\left(1+\frac{S\cdot\delta}{R}\right)}{\delta} = \frac{\ln(1+10\cdot 0{,}092)}{0{,}092} = 7{,}09 \text{ года.}$$

Если бы процесс формирования фонда был дискретным, то $S = R\frac{(1+i)^n-1}{i}$. Отсюда $n = \frac{\ln\left(1+\frac{S\cdot i}{R}\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln 1{,}92}{\ln 1{,}092} = 7{,}41$ года.

Как видим, процесс удлинился бы на 0,32 года. ■

Пример 3.4.2. По оценкам, нефтеносный участок может давать на протяжении 5 лет годовой доход в 245,5 тыс. $, который будет поступать непрерывно и равномерно как в пределах года, так и всего периода. Бурение скважин обойдется в 100 тыс. $. Имеет смысл эксплуатировать этот участок, если приведенные доходы в 10 раз превысят расходы при условии, что доходы капитализируются поквартально по номинальной годовой ставке 8,25%. Стоит ли приступать к бурению скважин?

► Так как доходы распределены непрерывно и равномерно, то, в силу формул (7), современная стоимость доходов A равна:

$$A = 245{,}5\ \frac{1-\left(1+\frac{0{,}0825}{4}\right)^{-4\cdot 5}}{4\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}0825}{4}\right)} = 1007{,}79 \text{ тыс. \$.}$$

Величина A более чем в 10 раз превышает расходы по бурению скважин. ■

3.5. Непрерывные переменные потоки платежей

В пункте 3.4 годовая сумма ренты R равномерно распределялась на протяжении всего года. Однако на практике, особенно в инвестиционных процессах, этот поток платежей может существенно изменяться во времени. Если этот поток платежей непрерывен и описывается функцией $R(t)$, то наращенная сумма по непрерывной ставке δ за срок n

$$S = \int_0^n R(t)e^{\delta(n-t)}dt, \tag{9}$$

а современная величина такого потока

$$A = \int_0^n R(t)e^{-\delta t}dt. \tag{10}$$

Для ***линейно изменяющегося непрерывного потока платежей*** $R(t) = R + at$ формулы (9), (10) трансформируются в формулы:

$$S = \left(R + \frac{a}{\delta}\right)s_{n;\delta} - \frac{a}{\delta}n, \quad A = Se^{-\delta n}. \tag{11}$$

Для ***экспоненциального потока платежей*** $R(t) = \mathrm{Re}^{bt}$

$$S = R\frac{e^{(b-\delta)n} - 1}{b - \delta}e^{\delta n}, \quad A = Se^{-\delta n}. \tag{12}$$

Пример 3.5.1. Планируется, что в течение 5 лет выпуск продукции будет увеличиваться непрерывно и линейно с годовым приростом 0,625 млн. руб., базовый выпуск – 20 млн. руб. Определите суммарный стоимостной объем выпуска продукции за пять лет с начисленными процентами по непрерывной годовой постоянной ставке 8,5%.

▶ Пусть $R(t)$ – стоимостной объем выпуска продукции в момент времени t. По условию $R(t) = 20 + 0{,}625 \cdot t$. По формулам (11) суммарный объем продукции вместе с начисленными процентами равен:

$$S = \int_0^5 (20 + 0{,}625t)e^{0{,}085\cdot(5-t)}dt =$$

$$= \left(20 + \frac{0{,}625}{0{,}085}\right)\frac{e^{0{,}085\cdot 5} - 1}{0{,}085} - \frac{0{,}625 \cdot 5}{0{,}085} = 133{,}65712 \text{ млн. \$}. \ ■$$

Пример 3.5.2. Капиталовложения оцениваются в сумме 2 млн. руб., начальная отдача составляет 500 тыс. руб. Отдача от инвестиций увеличивается линейно и непрерывно в течение 5 лет с годовым приростом по 20 тыс. в год. Какова доходность инвестиций, измеренная в виде непрерывной годовой процентной ставки δ?

▶ По условиям примера отдача от инвестиций $R(t) = 500 + 20 \cdot t$, где t – время финансовой операции, $A = 2000$ тыс. руб. Из формул (11) следует: $2000 = \int_0^5 (500 + 20t)e^{-\delta t}dt = 500\frac{1 - e^{-\delta\cdot 5}}{\delta} + \left(\frac{1 - e^{-\delta\cdot 5}}{\delta} - 5e^{-5\delta}\right)\frac{20}{\delta}$. Это уравнение нелинейное относительно δ. Численное решение этого уравнения дает следующий результат: $\delta \in [13\%; 14\%]$. ■

3.6. Задачи и примеры

3.1. Задолженность в сумме 800 тыс. \$ гасится в течение 8 лет. На остаток задолженности в течение первых 4 лет начисляется 10% годовых. Годовые выплаты в конце года в этот период составляют по 100 тыс. \$. В последние 4 года на остаток задолженности начисляется 11% годовых, а задолженность гасится в конце каждого года выплатами по 110 тыс. \$. Остаток непогашенной задолженности возвращается в конце восьмого года. Какую сумму нужно уплатить по погашению задолженности в конце восьмого года?

3.2. Задолженность в сумме 400 тыс. \$ гасится в течение 4 лет возрастающими платежами в конце каждого года. Каждый год платежи увеличиваются на 20 тыс. \$, на остаток задолженности начисляется 8% годовых. Какова должна быть сумма первого платежа, чтобы долг был полностью погашен?

3.3. За 6 лет должен быть создан фонд в сумме 400 тыс. \$. На поступающие средства начисляется 10% годовых. Намечено каждый год увеличивать взносы, поступающие в фонд в конце года на 10 тыс. \$. Какую первоначальную сумму нужно внести в фонд?

3.4. На разработку и освоение нефтяного месторождения затрачено 100 тыс. \$. Планируется, что доходы от эксплуатации месторождения в конце каждого года составят по 30 тыс. \$ в первые пять лет, по 20 тыс. \$ в последующие 5 лет и по 10 тыс. \$ в последние 5 лет. При норме доходности 30% годовых окупят ли доходы произведенные затраты?

3.5. В условиях предыдущей задачи рассчитайте эффективную ставку инвестирования средств в эксплуатацию месторождения в виде годовой ставки сложных процентов. Вычисления произведите с точностью до 0,5%.

3.6. Ссуда в размере 200 тыс. \$ выдана на 3 года под 11% годовых и должна быть погашена разовым платежом в конце третьего года. Для погашения задолженности должник решил создать погасительный фонд, размещая денежные средства в банке под 11,5% годовых. В течение первого года он вносил в банк по 5 тыс. \$ в конце каждого месяца, на протяжении второго года – по 15 тыс. \$ в конце каждого квартала. Какую сумму ему нужно внести в банк через 2,5 года, чтобы суммы погасительного фонда было достаточно для погашения долга? В расчетах используются сложные ставки процентов.

3.7. Фонд в сумме 750 тыс. \$ должен быть создан за 6 лет. Для этого в банк в конце каждого года вносили по 100 тыс. \$ на протяжении первых трех лет, затем по 110 тыс. \$ в конце каждого года в последние 3 года. Под какую годовую ставку процентов в банке размещались денежные средства? Вычисления произвести с точностью до 0,1%.

3.8. В банке в конце каждого года размещают денежные средства под 10% годовых для создания фонда. Первые 4 года вносили по 50 тыс. \$ ежегодно, затем – по 100 тыс. \$ ежегодно. Через сколько лет сумма, накопленная в фонде, впервые превысит 1 млн. \$?

3.9. Создается фонд, взносы в который вносят в конце каждого года на протяжении 8 лет. Первые 5 лет планируется вносить по 100 тыс. \$, в последние три года – по 200 тыс. \$. Ожидается, что первые 4 года годовая ставка процентов будет 8% с вероятностью 0,8 и 8,5% с вероятностью 0,2. Затем, последние 4 года ставка процентов будет постоянной и будет принимать значение 8,5% с вероятностью 0,7 и 9% с вероятностью 0,3. Для наращенной суммы фонда S определить следующие характеристики: $E\{S\}$, $D\{S\}$, $S_{\min}$, $S_{\max}$, $P\{1530 \text{ тыс.} \le S \le 1550 \text{ тыс.}\}$.

3.10. Создается фонд, денежные средства в который вносятся в конце года под 8,5% годовых. В 5 первых лет в фонд вносили по 100 тыс. \$. Затем в течение 2 лет выплаты в фонд не проводились. Начиная с конца восьмого года, выплаты были возобновлены в размере 120 тыс. \$ ежегодно. Чему будет равна сумма фонда на конец десятого года?

3.11. Задолженность в сумме 720 тыс. \$ погашается по частям платежами в конце года. На остаток задолженности начисляется 7,2% годовых. Первые 3 года в счет погашения задолженности вносилось по 100 тыс. \$, из которых 90 тыс. шло на погашение основного долга. Затем в течение 2 лет в конце каждого года выплачивались только процентные платежи. Начиная с конца шестого года, стали погашать задолженность, выплачивая сумму R в конце каждого года. Чему равно значение R, если задолженность должна быть полностью погашена к концу восьмого года?

3.12. В условиях предыдущей задачи найти R, если на протяжении 2 лет, когда не гасилась основная задолженность, проценты не выплачивались, а присоединялись к сумме долга.

3.13. На протяжении 8 лет создается фонд. На счет фонда внесено 100 тыс. \$ в конце первого года, 200 тыс. \$ – в конце третьего года, 250 тыс. \$ – в конце пятого года, 280 тыс. \$ – в конце седьмого года и через полгода – 250 тыс. \$. На собранные средства в течение первых 4 лет начислялось 8% годовых, в последние 4 года – 8,5% годовых. Какова сумма фонда к концу восьмого года, если на собранные средства начислялись сложные проценты?

3.14. Задолженность в сумме 750 тыс. \$ погашается нерегулярными выплатами: 100 тыс. \$ в конце 1,5 года, 200 тыс. \$

в конце третьего года, 250 тыс. $ через 3,5 года после получения ссуды. На остаток задолженности начисляется 7,2% годовых. Какую сумму нужно вернуть в конце четвертого года, чтобы полностью погасить задолженность?

3.15. Долг в сумме 653 тыс. $ должен быть возвращен по частям за 6 лет. В течение первых 2 лет в счет погашения задолженности намечено выплачивать по 80 тыс. $ в конце каждого полугодия, в последующие 2 года – по 90 тыс. $ в конце каждого полугодия. На последнем этапе планируется выплачивать равные суммы R в конце каждого квартала, чтобы полностью погасить задолженность. Чему должно быть равно значение R, если на остаток долга начисляется 9,2% годовых, $K = 360$? Какую сумму единовременным платежом должен выплатить должник, чтобы полностью погасить долг: а) в конце третьего года; б) в конце 4,25 года?

3.16. Имеются два варианта строительства и эксплуатации здания. По первому варианту капитальные затраты на строительство составят 200 тыс. $. Эксплуатационные и ремонтные расходы: первые 20 лет – по 2 тыс. $ в конце каждого года, в следующие 20 лет – по 4 тыс. $ в конце каждого года и последние 20 лет – по 8 тыс. $ в конце каждого года. По второму варианту капитальные затраты составят 250 тыс. $, что приведет к уменьшению соответствующих затрат на эксплуатацию и ремонт в 2 раза по сравнению с первым вариантом. Для ставки сравнения $i = 10\%$ годовых вычислите удельный вес современной стоимости затрат на эксплуатацию и ремонт по отношению к капитальным затратам на строительство: $\frac{A_m}{K_m}$, где A_m – современная стоимость; K_m – капитальные затраты; m – номер варианта. Для какого варианта удельный вес затрат по эксплуатации и ремонту будет меньше?

3.17. Оборудование, стоимостью 450 тыс. $, планируется эксплуатировать в течение 10 лет, после чего оно будет заменено на аналогичное, стоимость которого, по оценкам экспертов, возрастет на 10%. Для замены оборудования ускоренно создается амортизационный фонд, взносы в который в конце каждого года увеличиваются на 2,5 тыс. $. На

собранные средства в амортизационном фонде начисляется 7,25% годовых. Какова должна быть величина первого взноса в фонд?

3.18. Планируется, что в период освоения месторождения полезных ископаемых годовые доходы, приведенные на конец года, будут линейно возрастать на 1 млн. $ в год в течение трех лет, затем в течение 10 лет доходы будут постоянны. В период истощения ископаемых, длительность которого 5 лет, годовые доходы будут сокращаться на 2 млн. $ в год. Чему равна современная стоимость всех доходов от эксплуатации месторождения при нормативе доходности 20% годовых, если первый годовой доход оценивается в 10 млн. $?

3.19. При сохранении условий предыдущей задачи оцените с точностью до 0,5% эффективность инвестирования 20 млн. $ в разработку месторождения в виде годовой ставки сложных процентов.

3.20. Ипотечная ссуда в 80 тыс. $ выдана на 10 лет под 12% годовых. Погашение ссуды в конце каждого месяца. Первые 4 года долг погашается ускоренно: каждый месяц сумма погасительного платежа возрастает в 1,00407 раза по сравнению с предыдущим месяцем. В последние 6 лет ежемесячные суммы погасительных платежей постоянны. Чему равна сумма первого погасительного платежа?

3.21. Планируется, что в период освоения газового месторождения годовых доходы, приведенные на конец года, будут возрастать в 1,1 раза по сравнению с предыдущим годом в течение 3 лет. Затем в течение 12 лет доходы будут постоянны. В период истощения месторождения годовые расходы будут линейно сокращаться на 3 млн. $ в год в течение 5 лет. Чему равна современная стоимость всех доходов от эксплуатации месторождения при нормативе доходности в 25% годовых, если первый годовой доход оценивается в 12 млн. $?

3.22. В условиях предыдущей задачи оцените с точностью до 0,5%, эффективность инвестирования 15 млн. $ в разработку месторождения в виде годовой ставки сложных процентов.

3.23. Текущая задолженность равна 250 тыс. $. Решено погасить ее в течение 10 лет по схеме возрастающей ренты, члены которой изменяются по арифметической прогрессии, причем абсолютный прирост за год равен половине первого члена. Погашение основного долга начинается с конца третьего года. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка – 6,5% в год. Первые 2 года выплачиваются только проценты в конце каждого года. Определите сумму всех выплат B по погашению долга и сумму процентных платежей I.

3.24. При сохранении условий предыдущей задачи определите те же значения B и I, если в течение первых двух лет проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга.

3.25. Текущая задолженность равна 300 тыс. \$. Решено погасить ее в течение 8 лет по схеме возрастающей ренты, члены которой возрастают по геометрической прогрессии, увеличиваясь за год на 10%. Погашение основного долга начинается с конца третьего года. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка – 5,5% в год. Первые 2 года проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга. Определите сумму всех выплат B по погашению долга и общую сумму процентных платежей I.

3.26. Долг в сумме 720 тыс. \$ должен быть погашен за семь лет по схеме возрастающей ренты, члены которой изменяются по геометрической прогрессии, причем первая выплата равна 80 тыс. \$. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка – 6,1% в год. Определите сумму всех процентных платежей I.

3.27. Долг в сумме 300 тыс. \$ должен быть погашен за 6 лет платежами в конце года. Первая выплата равна 85 тысяч \$. Далее, долг может гаситься последовательностью платежей, изменяющейся либо по арифметической, либо по геометрической прогрессии. На остаток долга начисляются 7,2% в год. По какой схеме платежей сумма процентных платежей будет больше и насколько?

3.28. Решено погасить долг в сумме 520 тыс. \$ рентными платежами, убывающими по арифметической прогрессии, абсолютное годовое уменьшение платежей составляет 10 тыс. \$, срок погашения – 8 лет. Платежи и начисление процентов

на остаток долга производятся в конце года, ставка – 6,5% в год. Определите сумму всех процентных платежей P. Увеличится или уменьшится сумма процентных платежей и на сколько, если долг будет погашаться по схеме возрастающей арифметической прогрессии с тем же абсолютным приростом?

3.29. В условиях предыдущей задачи ответьте на те же вопросы при условии, что долг гасится по схеме платежей, изменяющихся по геометрической прогрессии. Относительное годовое изменение платежей составляет 10% .

3.30. Задолженность в сумме 270,4 тыс. \$ необходимо погасить за 4 года серией платежей, убывающих в геометрической прогрессии и вносимых в конце года. Первый взнос в счет погашения равен 100 тыс. \$, на остаток долга начисляется 11% годовых. Насколько процентов k должен убывать каждый платеж, чтобы долг был полностью погашен? Вычисления произвести с точностью до 0,5%.

3.31. Амортизационный фонд в сумме 263 тыс. \$ должен быть ускоренно создан за 4 года взносами, поступающими в конце года и образующими возрастающую геометрическую прогрессию. На средства, аккумулируемые в фонде, начисляется 9% годовых. Первый взнос в фонд составил 50 тыс. \$. Насколько процентов k должен возрастать каждый последующий взнос, чтобы фонд был создан? Вычисление произвести с точностью до 0,5%.

3.32. Планируется в течение 8 лет путем нерегулярных взносов создать фонд, на поступающие средства будут начисляться 10% годовых. В конце второго года планируется внести 240 тыс. \$, в конце пятого – 180 тыс. \$, в конце седьмого года – 360 тыс. \$. В силу непредвиденных обстоятельств, с равной вероятностью, намеченные суммы могут отклоняться от своего номинала в положительную и отрицательную сторону не более чем на 5%. Смоделируйте 100 реализаций намечаемых выплат и по ним оцените среднюю сумму фонда, ее дисперсию и вероятность попадания суммы фонда в интервал (1010 тыс. \$, 1100 тыс. \$). Чему равны S_{min} и S_{max} наращенной суммы фонда?

3.33. В разработку месторождения полезных ископаемых вложено 2,5 млн. \$. Ожидается, что на протяжении первых пяти лет ежегодные доходы составят по 4 млн. $ в год, в следующие пять лет – по 3 млн. $ в год и в последние пять лет – по 1 млн. $ в год. Доходы поступают непрерывно и равномерно в пределах соответствующих периодов. При нормативе доходности в 20% годовых оцените, на сколько приведенные доходы превысят затраты на разведку и разработку месторождения.

3.34. В условиях предыдущей задачи оцените, насколько процентов возрос приведенный доход от эксплуатации месторождения при непрерывном и равномерном распределении доходов в пределах года по сравнению со случаем, когда соответствующие доходы поступали бы в конце каждого года.

3.35. Планируется, что в течение 3 лет выпуск продукции будет расти непрерывно и линейно. Базовый объем выпуска продукции составляет 10 млн. руб. Каким должен быть годовой прирост продукции, чтобы суммарный стоимостной объем выпуска продукции за три года с начисленными процентами по непрерывной годовой ставке 8% составил бы 40 млн. руб.?

3.36. Планируется эксплуатировать месторождение полезных ископаемых в течение 33 лет. Доход $R(t)$ в течение всего периода будет поступать непрерывно. В период освоения месторождения в течение 3 лет $R(t) = 500 + 50 \cdot t$, где 500 тыс. $ – первоначальная сумма дохода, 50 тыс. $ – ежегодный прирост. При достижении проектной мощности планируется получать ежегодно по 650 тыс. $ в течение 20 лет, причем, в течение каждого года и всего периода доход будет поступать равномерно и непрерывно. По мере истощения месторождения доход будет экспоненциально падать в течение 10 лет, т.е. $R(t) = 650 \cdot e^{-0,1(t-23)}$. Для непрерывной годовой постоянной ставки $\delta = 8\%$ рассчитайте современную величину дохода за весь период эксплуатации месторождения.

3.37. Создается фонд в течение 7,5 лет. Взносы в фонд поступают в конце каждого квартала и возрастают каждый раз на 5%, первый взнос – 70 тысяч $. На поступающие платежи начисляются проценты по ставке 8,75 годовых, проценты капитализируются по полугодиям. Определите величину фонда.

3.38. Создается амортизационный фонд в течение 6,5 лет. На поступающие платежи начисляются сложные проценты по ставке 7,5 годовых. В течение первых 4 лет взносы поступали в конце каждого квартала и возрастали каждый раз на 5%, а проценты капитализировались по полугодиям. Первый взнос составил 570 $. В последние 2,5 года взносы вносились в конце каждого месяца и возрастали на 1% по отношению к предыдущему взносу, а проценты капитализировались поквартально. Определите величину фонда.

3.39. Стабилизационный фонд в сумме 387 тысяч $ должен быть создан за 4,25 года. Платежи в фонд поступают в конце каждого квартала и возрастают каждый раз на 3%. На поступающие платежи начисляются сложные проценты по ставке 7,25% годовых и капитализируются по полугодиям. Определите величину первого взноса в стабилизационный фонд.

3.40. Запланировано создать фонд в течение 2,5 лет в размере 10 тысяч $ поквартальными платежами постнумерандо, возрастающими в геометрической прогрессии. Первый взнос составил 500 $. На поступающие платежи начисляется 8,6% годовых, проценты капитализируются по полугодиям. Насколько процентов должен возрастать каждый последующий платеж, чтобы фонд был создан? Вычисления проведите с точностью до 0,01%.

3.41. Планируется создать за три года и один квартал фонд в размере 26700 $ взносами в конце каждого месяца, возрастающими в геометрической прогрессии на 1% за месяц. Первый взнос составил 500 $. По какой годовой ставке процентов на взносы должны начисляться проценты с капитализацией по полугодиям, чтобы фонд был создан? Вычисления проведите с точностью до 0,01%.

3.42. Фонд в размере 108 тысяч $ должен быть создан взносами, поступающими в конце каждого полугодия и возрастающими каждый раз на 0,5%. Первый взнос составил 10 тысяч. На поступающие платежи начисляется восемь сложных годовых процентов с поквартальной капитализацией процентов. За какой срок (в полугодиях) может быть создан фонд? Насколько при этом нужно увеличить первый взнос в фонд?

3.43. Создается резервный фонд на протяжении 6,5 лет. На поступающие платежи начисляется 8% годовых. В первые 4,5 года взносы вносились в конце каждого квартала по схеме возрастающей геометрической прогрессии. Причем, каждый последующий платеж увеличивался на 2%. Первый взнос составил 1000 $. В этот период проценты капитализировались по полугодиям. В последующие два года было решено перейти на схему платежей, изменяющихся по арифметической прогрессии с приростом каждого последующего платежа на 100 $, платежи полугодовые, а капитализация процентов годовая. Какова величина фонда?

3.44. Долг, в сумме 13780 $, должен быть погашен за 2,5 года платежами вносимыми в конце каждого квартала. Каждый последующий платеж должен быть больше предыдущего на 2%. На остаток долга начисляется 7,8% годовых, проценты капитализируются по полугодиям. Какова величина R первого платежа, идущего на погашение долга? Сколько всего процентов в сумме будет выплачено за весь срок?

3.45. Долг, в сумме 10770 $, должен быть погашен платежами выплачиваемыми в конце каждого квартала, последующие платежи убывают на 1% относительно предыдущего. Первый платеж, идущий на погашение долга, составил 1000 $. За какой срок (в кварталах) может быть погашен долг, если на остаток долга начисляется 7,8% годовых и проценты капитализируются каждые полгода? Насколько нужно увеличить первый платеж, чтобы не было недоплаты?

3.46. Задолженность в 120 тысяч $ планируется погашать полугодовыми платежами возрастающими каждый раз на 1%. Первый платеж, идущий в счет погашения долга, должен быть равен целому числу тысяч. На остаток долга начисляется 8,4% годовых и проценты капитализируются поквартально. Чему должен быть равен минимальный размер первого платежа R, чтобы продолжительность погашения долга не превосходила 10 лет?

3.47. Долг, в сумме 10000 $, должен быть погашен за 1,5 года платежами, выплачиваемыми в конце каждого месяца. На остаток долга начисляется 8,2% с полугодовой капитализацией процентов. В каком случае суммарная выплата процентов будет меньше, если: а) каждый последующий платеж будет возрастать на 2%, б) будет убывать на 1%? Чему будет равна минимальная сумма выплаченных процентов?

3.48. Сумма ипотечного долга составляет 400 тысяч условных единиц. Долг должен быть погашен платежами, в конце каждого месяца, за 240 месяцев (20 лет), по схеме платежей с постоянным увеличением расходов по обслуживанию долга (graduated payment mortgage). При этом, в первом периоде длительностью 60 месяцев, каждый последующий платеж растет на 0,03%. В последние 180 месяцев выплаты были постоянны. Какова величина первого платежа, если на остаток долга начисляется 10% годовых и проценты капитализируются в конце каждого года?

3.49. Мужчина, в возрасте 30 лет, решил создать фонд к дополнительной оплате к пенсии. Для этого он решил вносить на счет в банк, под 9% годовых, платежи, возрстающие каждый раз на 0,5%, на протяжении 5 лет. Первый взнос составил 50 $. Какую сумму он сможет снимать со счета в банке равными суммами R в начале каждого месяца на протяжении 20 лет, если, после достижения им пенсионного возраста в 60 лет, на остаток счета в банке начисляется 8% годовых? Какова величина аналогичных платежей R_1, если, на тех же условиях, мужчина начал создавать фонд в возрасте 40 лет?

3.50. Создается фонд к дополнительной оплате к пенсии. Мужчина желает получать в начале каждого месяца по 200 $ на протяжении 15 лет, после достижения им пенсионного возраста в 60 лет. Для этого он начал создавать этот фонд в возрасте 45 лет в течение 3 лет, внося на счет в банк платежи, в конце каждого месяца. Платежи возрастают каждый раз на 1%. На собранные средства банк начисляет 9,8% годовых, а после достижения пенсионного возраста – 9%. Какова величина первого взноса R в фонд? На сколько можно было бы уменьшить R, если бы фонд начал создаваться на два года раньше на тех же условиях?

Глава 4

КОНВЕРСИЯ РЕНТ

В финансовой практике приходится иметь дело со случаями, когда необходимо изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату рент, т.е. необходимо ***конвертировать*** ренту. В самом простом случае конверсия ренты сводится к замене ренты единовременным платежом, т.е. по существу является ***выкупом ренты***. В таком случае вместо ренты выплачивается современная ее стоимость (см. главы 2, 3). Естественно, что процентная ставка, по которой вычисляется современная стоимость ренты, должна удовлетворять обе стороны, участвующие в финансовой операции.

Простым вариантом конверсии является замена единовременного платежа рентой. К подобной замене прибегают всегда, когда необходимо некоторый товар купить в ***рассрочку***. Задача в данном случае сводится к расчету параметров современной величины ренты. Такие задачи обсуждались в главах 2, 3.

4.1. Изменение параметров рент

Изменение параметров ренты фактически означает замену одной ренты на другую. Ставку процентов, характеризующую ренту, обычно стремятся не менять, так как изменение ставки процентов фактически означает нарушение финансовых отношений сторон. Параметры ренты изменяют на основе принципа ***финансовой эквивалентности*** сторон, выражающегося в том, что современные величины рент, до и после изменения параметров, должны быть равны.

Если исходная рента заменяется на отложенную на t лет ренту длительностью n лет с годовым членом R и p-разовыми выплатами в году с m-разовым начислением процентов в году по годовой ставке j, то, исходя из принципа финансовой эквивалентности, имеем равенство

$$A = R\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot n}}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]}\cdot\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m\cdot t}, \qquad (1)$$

где A – современная величина исходной ренты, вычисленная по годовой ставке j с m-разовым начислением процентов в году.

Если один из параметров R, n, p, t заменяющей ренты неизвестен, то его можно определить из равенства (1). При этом надо иметь в виду, что $n \cdot p$ – это целое число. Поэтому соответствующие значения n и p, найденные из равенства (1), должны быть округлены до ближайшего меньшего целого значения $n \cdot p$, а недоплата, возникшая из-за округления, должна быть компенсирована, например, путем увеличения R. Следует также учитывать, что не для всех наборов параметров заменяющей ренты уравнение (1) может быть разрешено относительно одного из неизвестных параметров.

Подобные рассуждения можно обобщить на случай, если исходная рента конвертируется в нерегулярный поток платежей, члены которого изменяются по известному закону (см. главу 3).

Пример 4.1.1. Решено за 8 лет создать фонд в сумме 800 тыс. $ путем равных годовых платежей постнумерандо, на поступающие платежи начисляется 8,75% годовых. Четыре года платежи в фонд выплачивались согласно намеченному графику. Затем, в силу некоторых обстоятельств, в течение последующих двух лет платежи в фонд не поступали. После двух лет перерыва в выплатах в фонд решено вносить в фонд в конце каждого полугодия по 50 тыс. $. Выплаты в фонд прекращаются, как только накопленная сумма фонда превысит 800 тыс. $. На сколько лет больше придется создавать фонд по отношению к намеченному сроку в 8 лет?

4 Зак. 2410

▶ Согласно намеченного графика годовые платежи $R = \frac{S}{s_{n;i}} = \frac{800 \cdot 0{,}0875}{1{,}0875^8 - 1} = 73{,}19925$ тыс. \$. К концу четвертого года была накоплена сумма $S_1 = R \cdot s_{4;8,75} = 73{,}19925 \frac{1{,}0875^4 - 1}{0{,}0875} =$ $= 333{,}51737$ тыс. \$. После изменения намеченного графика выплат фонд будет создаваться в течение k лет, причем $2 \cdot k$ должно быть целым числом. Исходя из условий примера, имеем неравенство: $S_1 \cdot 1{,}0875^{k-4} + 100 \cdot s^{(2)}_{k-6;8,75} \geq 800$ или $333{,}51737 \cdot 1{,}0875^{k-4} + 50 \frac{1{,}0875^{k-6} - 1}{\sqrt{1{,}0875} - 1} \geq 800$. При $k = 8{,}5$ данное неравенство не выполняется, а при $k = 9$ выполняется. Фонд будет создан на год позже. ■

Пример 4.1.2. Долг в сумме 481,75 тысяч \$ должен быть погашен за 8 лет равными срочными платежами в конце каждого года. На остаток долга начисляется 8,5% годовых. Первые три выплаты были сделаны по намеченному графику. Затем было решено погашать задолженность равными платежами в конце каждого квартала. Чему равна сумма поквартальных погасительных платежей? Насколько при этом будут меньше годовые платежи?

▶ Годовые погасительные платежи Y найдем из уравнения: $481{,}75 = Y a_{8;8,5}$. Имеем: $Y = 85{,}42904$ тыс. В счет погашения основного долга ушла сумма $85{,}42904 - 40{,}94875 =$ $= 44{,}48029$ тыс. Так как суммы, идущие на погашение основного долга, возрастают в геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1{,}085$, то эти суммы во втором и третьем годах, соответственно, равны 48,26111 и 52,36331 тыс. Остаток основного долга на начало четвертого года составил $481{,}75 - 44{,}48029 - 48{,}26111 - 52{,}36331 = 336{,}67529$ тыс. Обозначим через y поквартальные погасительные платежи. Очевидно, должно выполняться уравнение: $336{,}67529 = 4y a^{(4)}_{5;8,5}$. Решая это уравнение, получаем $y = 20710{,}24$ \$. Годовой платеж – 82840,96 \$, что на 2588,08 \$ меньше, чем было ранее. ■

4.2. Объединение рент

Особым случаем замены ренты является объединение рент в одну. Такая ситуация возникает, например, тогда, когда несколько фирм сливаются (объединяются) в одну. Задолженности этих фирм, погашаемые рентными платежами, фирма – правопреемница должна гасить своим рядом платежей.

При объединении (консолидации) нескольких рент в одну также исходят из принципа ***финансовой эквивалентности***, состоящего в том, что

$$\sum_{s=1}^{k} A_s = A, \qquad (2)$$

где A_s – современная величина s-ой ренты, вычисленная по единой ставке сравнения i либо по ставке i_s, характерной для этой ренты, а A – современная величина заменяющей ренты, вычисленная по ставке i, удовлетворяющей все стороны, участвующие в операции объединения.

Вопрос о ставках процентов, по которым производится дисконтирование в формуле (2), должен решаться на основе компромиссного решения, удовлетворяющего все стороны, участвующие в этой финансовой операции. Уравнение (2) предполагает, что начало срока действия всех рент совпадает. Если моменты начала рент не совпадают во времени, то, дисконтируя их современные величины на начало самой ранней ренты, получим необходимые для уравнения (2) значения современных величин.

При объединении рент могут встретиться самые различные постановки задач, которые необходимо решать исходя из равенства (2). Самые простейшие из них – определение размера члена заменяющей ренты и определение продолжительности заменяющей ренты при условии, что все характеристики рент, кроме искомой, заданы.

В финансовой практике возможен и обратный процесс, когда одну ренту надо расщепить на несколько рентных платежей. Такая ситуация возникает, например, тогда, когда фирма распадается на несколько предприятий, каждому из которых достается определенная доля долговых обязательств и эти обязательства надо гасить рентными платежами. При решении подобных задач также исходят из принципа финансовой эквивалентности, аналогичного уравнению (2).

Пример 4.2.1. Фирмы A и B "сливаются" с фирмой C. Полтора года назад фирма A взяла кредит в банке на сумму 500 тыс. $ на 4 года под 9% годовых с погашением равными выплатами в конце каждого полугодия. Фирма B в том же банке год назад взяла кредит на сумму 600 тыс. $ под 9% годовых на 5 лет с погашением равными выплатами в конце каждого года. Фирма C должна погасить долги фирм A и B в течение 6 лет равными платежами в конце каждого года при условии, что на остаток долга начисляется 9% годовых. Какую годовую сумму по оплате долга должна выплачивать фирма C, если к моменту объединения фирма A произвела три погасительных платежа, а фирма B – один? Расчеты проведите при условии, что долги фирм A и B на момент их объединения – это не погашенная основная задолженность по их первоначальным обязательствам.

▶ Пусть Y_A – годовые погасительные платежи фирмы A. Тогда $500 = Y_A \dfrac{1-1{,}09^{-4}}{2(\sqrt{1{,}09}-1)}$ и $Y_A = 152{,}0098$ тыс. Полугодовые платежи составляют 75,5049 тыс. Подсчитаем остаток основного долга фирмы A к моменту ее "слияния" с фирмой C. Процентные платежи за первые полгода составили $500(\sqrt{1{,}09}-1) = 22{,}01533$ тыс. В счет погашения основного долга, в конце первого полугодия, ушла сумма $75{,}5049 - 33{,}01533 = 53{,}4896$ тыс. К началу второго полугодия основной долг фирмы A составил $500 - 53{,}4896 = 446{,}5104$ тыс. За второе полугодие, в счет уплаты процентов, ушла сумма $446{,}5104 \times (\sqrt{1{,}09}-1) = 19{,}66014$ тыс., а на погашение основного долга – $(75{,}5049 - 19{,}6601) = 55{,}84476$ тыс. К началу третьего полугодия основной долг составил величину $446{,}5104 - 55{,}84476 = 390{,}66564$ тыс. За третье полугодие выплачены проценты в размере $390{,}66564(\sqrt{1{,}09}-1) = 17{,}20126$ тыс. и на погашение основного долга пошла сумма в $75{,}5049 - 17{,}20126 = 58{,}30364$ тыс. Тогда, сумма долга, которую должна погашать фирма C, равна $390{,}66564 - 58{,}30364 = 332{,}362$ тыс.

Аналогично можно посчитать, что сумма долга фирмы B, перешедшая к фирме C, равна 499,74453 тыс.

Суммарный долг фирмы C составит $332{,}362 + 499{,}74453 = 832{,}10653$ тыс. Если R – годовые платежи по погашению долга фирмы C, то $832{,}10653 = R a_{6,9}$. Отсюда получаем, $R = 185{,}49301$ тыс. ■

4.3. Задачи и примеры

▶ **4.1.** Здание стоимостью 100 млн. $ можно приобрести либо разовым платежом, либо в рассрочку на 10 лет с равными выплатами в конце каждого месяца. На остаток задолженности при покупке в рассрочку начисляется 8,5% годовых. Чему равны месячные погасительные платежи R и суммарные процентные платежи I, если здание приобретается в рассрочку?

4.2. На сколько возрастут или уменьшатся суммарные процентные платежи в условиях предыдущей задачи, если погасительные платежи при покупке в рассрочку будут линейно убывать в год на 5 тыс. $ при выплатах в конце года?

4.3. Задолженность в сумме 250 тыс. $ должна быть погашена за 8 лет равными выплатами в конце каждого месяца, на остаток долга начисляется 7,5% годовых. После 3 лет выплат, согласно первоначальной договоренности, клиент попросил в банке отсрочку на 2 года по погашению основного долга. За последние 3 года долг должен быть погашен равными поквартальными платежами. Чему равен размер поквартальных платежей R, выплачиваемых в конце каждого квартала, если: а) в течение двухлетнего льготного периода выплачиваются только процентные платежи в конце каждого года; б) в течение льготного периода процентные платежи не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга?

4.4. Долг в сумме 300 тыс. $ должен быть погашен за 10 лет равными выплатами в конце каждого года. На остаток долга начисляется 8,2% годовых. После трех лет выплат, согласно первоначальной договоренности, должник попросил в банке отсрочку на 3 года для погашения основного долга. После этой отсрочки остаток долга предлагается гасить полугодовыми платежами постнумерандо в размере 25 тыс. \$. Чему должно быть равно число полугодовых платежей n и чему равна недоплата b из-за округления n до целого числа, чтобы долг был полностью погашен, если: а) за время льготного трехлетнего периода процентные платежи периодически выплачивались в конце каждого года; б) процентные платежи за время льготного периода не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга?

4.5. Решено за 8 лет создать фонд в сумме 800 тыс. \$ путем равных годовых платежей постнумерандо, на поступающие платежи начисляется 8,75% годовых. Четыре года платежи в фонд выплачивались согласно намеченному графику. Затем, в силу некоторых обстоятельств, в течение последующих двух лет платежи в фонд не поступали. Чтобы накопить намеченную сумму к сроку, было решено в последние 2 года увеличить сумму годовых платежей. На сколько нужно увеличить сумму годовых платежей?

4.6. В условиях предыдущей задачи в последние 2 года создания фонда решено вносить в фонд в конце каждого полугодия по 75 тыс. \$. Насколько меньше или больше будет накопленная сумма фонда по отношению к намеченной сумме в 800 тыс. \$?

4.7. Фирмы A и B "сливаются" с фирмой C. Полтора года назад фирма A взяла кредит в банке на сумму 250 тыс. \$ на 4 года под 7,2% годовых с погашением равными выплатами в конце каждого полугодия. Фирма B в том же банке год назад взяла кредит на сумму 400 тыс. \$ под 8,3% годовых на 5 лет с погашением равными выплатами в конце каждого года. Фирма C должна погасить долги фирм A и B в течение 6 лет равными платежами в конце каждого года при условии, что на остаток долга начисляется 9% годовых. Какую годовую сумму по оплате долга должна выплачивать фирма C, если к моменту объединения фирма A произвела три погасительных платежа, а фирма B – один? Расчеты проведите при условии, что долги фирм A и B на момент их объединения – это не погашенная основная задолженность по их первоначальным обязательствам.

4.8. Амортизационный фонд должен быть создан за шесть лет в сумме 475 тыс. \$ посредством равных полугодовых взносов постнумерандо. На собранные средства начисляется 7,6% годовых. В силу некоторых обстоятельств взнос в фонд в конце третьего года был сделан в размере 75% планируемого. Для компенсации недоплаты предлагается последующие годовые запланированные взносы вносить в фонд ежемесячно, равными платежами постнумерандо. Будет ли при этом амортизационный фонд больше или меньше запланированного и насколько?

4.9. Облигация с номиналом 1 тыс. \$ и объявленной доходностью 9% годовых сроком погашения через 4 года куплена в момент ее выпуска 1 января. По облигации каждые полгода выплачивается купонный доход. Через некоторое время владелец облигации решил ее продать. Какую цену он назначит за облигацию при норме доходности 9% годовых, если: а) облигация продается 15.02 следующего года; б) продается 15.08 следующего года? Временная база $K = 360$ дней.

4.10. Для проведения профилактических ремонтов вновь построенного шоссе была выделена некоторая сумма денег, которую разместили в банке под 8,2% годовых. Ремонтные работы было решено проводить через каждые 5 лет и на эти цели выделять каждый раз по 20 тыс. \$. Временной горизонт ремонтного обслуживания шоссе – 50 лет. После 10 лет эксплуатации шоссе было решено профилактические ремонты проводить через каждые два года. Какую сумму нужно будет снимать со счета в банке на ремонтные работы, если для этих целей планируется расходовать каждые два года равные суммы?

4.11. Три фирмы A, B, C объединяются 1.01 в одну фирму D. Фирма A 4 года назад взяла в банке кредит на сумму 250 тыс. \$ на 7 лет (погашение задолженности равными уплатами в конце каждого года). Фирма B 3 года назад в том же банке взяла кредит на сумму 350 тыс. \$ на 8 лет с погашением долга в конце каждого полугодия равными выплатами. Фирма C 2 года назад в том же банке получила кредит на сумму 300 тыс. \$ на 7 лет и погашала его платежами в конце года, возрастающими каждый раз на 10 тыс. \$. Все три фирмы получали кредит под 10% годовых. Фирма D

должна погасить долги фирм A, B, C за 5 лет равными платежами в конце каждого года при условии, что на остаток долга начисляется 10% годовых. Какую сумму фирма D должна ежегодно возвращать банку?

4.12. В условиях предыдущей задачи фирма D решила разовым платежом 1.01 погасить долги фирм A, B, C. Какую сумму следует вернуть банку?

4.13. Амортизационный фонд в сумме 450 тыс. \$ должен быть создан за 8 лет равными годовыми платежами постнумерандо. На собранные средства начисляется 8,5% годовых. После двух выплат в фонд решено изменить порядок взносов: выплаты производятся через два года платежами постнумерандо, возрастающими каждый раз на 10 тыс. \$. Чему равна сумма взноса в фонд в конце четвертого года?

4.14. При тех же условиях что и в предыдущей задаче, сумма, внесенная в фонд в конце четвертого года, составила 100 тыс. \$. На сколько должен возрастать либо убывать этот платеж в дальнейшем, чтобы к концу срока в фонде была накоплена намеченная сумма в 450 тыс. \$?

4.15. Фирма A 1 января 1995 г. получила кредит в банке на 250 тыс. \$ на 5 лет под 9,8% годовых. Погашение кредита предусмотрено равными выплатами в конце года. В январе 1998 г. фирма A разделилась на три фирмы B, C, D, у которых соответственно остались 40, 25 и 35% непогашенного долга фирмы A. Этот долг должен быть погашен за 2 года. Фирма B погашает долг годовыми платежами, фирма C – полугодовыми, а фирма D – поквартальными платежами (все платежи постнумерандо). Определите сумму годовых платежей R_B, R_C, R_D фирм B, C, D.

4.16. Амортизационный фонд в сумме 875 тыс. \$ намечено создать за 5 лет путем равных взносов в конце каждого года. На созданные средства начисляется 9,5% годовых. После двух лет взносов в фонд решено ускорить создание фонда: взносы вносить в конце каждого полугодия, увеличивая выплаты каждый раз на 10 тыс. \$, по сравнению с прежним взносом. Создание фонда прекращается, как только сумма фонда превысит намеченный уровень. На сколько лет раньше будет создан фонд?

4.17. В условиях предыдущей задачи взносы в фонд после двух лет намечено производить по схеме возрастающей геометрической прогрессии, увеличивая каждую выплату на 10% по сравнению с предыдущим уровнем. На сколько лет раньше будет создан фонд?

4.18. Задолженность, в сумме 100 тыс. \$, должна быть погашена равными платежами R в конце каждого года за 3 года. На остаток задолженности начисляется 10% годовых. Однако, в силу некоторых обстоятельств, предполагается, что с равной вероятностью сумма первого погасительного платежа R_1 будет лежать в интервале $[0{,}9R;\ 1{,}1R]$, сумма второго погасительного платежа R_2, также с равной вероятностью, будет лежать в интервале $[0{,}8\ R;\ R]$. Последний погасительный платеж R_3 вносится таким, чтобы задолженность была полностью погашена. Считая, что платежи R_1 и R_2 являются независимыми равномерно распределенными случайными величинами, вычислите среднее значение R_3 и вероятность того, что $R_3 \geq R$.

4.19. Задолженность в сумме 85 тыс. \$ должна быть погашена за 5 лет равными платежами R в конце каждого года. На остаток задолженности начисляется 8,5% годовых. Однако в силу некоторых обстоятельств погасительные платежи могут отклоняться от намеченного уровня не более чем на 5% в положительную либо отрицательную сторону. Последний платеж должен быть таким, чтобы долг был полностью погашен. По 100 реализациям процесса погашения долга оцените среднее значение и дисперсию последнего платежа.

Глава 5

ПЛАНИРОВАНИЕ ПОГАШЕНИЯ ДОЛГОСРОЧНОЙ ЗАДОЛЖЕННОСТИ

Разработка плана погашения долгосрочной задолженности (займа) состоит в составлении графика периодических выплат платежей должником. Такие расходы должника обычно называют ***расходами по обслуживанию долга*** (*debt service*) или ***срочными уплатами***, поскольку они должны быть выплачены в оговоренные сроки. Срочные уплаты обычно включают как текущие процентные платежи, так и средства, предназначенные для погашения основного долга. Размеры срочных уплат существенно зависят от условий погашения долга, которые предусматривают: срок займа; продолжительность ***льготного периода*** (*grace period*); уровень и способ начисления процентов. На протяжении льготного периода, если он предусмотрен условиями займа, основной долг не гасится, но периодически выплачиваются проценты либо они присоединяются к сумме основного долга. В долгосрочных займах долг обычно погашается по частям, значительно реже — одним платежом в конце срока займа.

При определении размера срочных уплат будем использовать следующие основные обозначения: D — сумма первоначального долга; Y — размер срочной уплаты; I — проценты по займу; R — расходы по погашению основного долга, g — годовая ставка процентов по займу; n — срок займа; L — продолжительность льготного периода.

Если выплачиваются проценты и погашается основной долг, то, по определению, срочная уплата $Y = I + R$; если в льготном периоде периодически выплачиваются проценты, то в этом периоде $Y = I$.

Разработанный план погашения задолженности позволяет оценить стоимость долга на любой момент с учетом всех поступлений для его погашения. Это особенно важно, если

действующий план погашения задолженности в дальнейшем приходится пересматривать.

5.1. Формирование погасительного фонда

В этом пункте рассматриваются займы, которые погашаются разовым платежом в конце срока займа. При этом проценты выплачиваются периодически либо присоединяются к сумме основного долга. При значительной сумме займа и длительном его сроке разовое погашение займа весьма затруднительно. Обычная мера, к которой прибегают в данном случае, состоит в создании ***погасительного фонда*** (*sinking fund*).

Погасительный фонд создается из последовательных взносов должника (обычно на отдельный счет в банке), на которые начисляются проценты. Сумма, накопленная в фонде, должна быть равна сумме возвращаемого долга. Взносы в фонд могут быть как постоянными, так и переменными во времени.

Основной вопрос при формировании погасительного фонда — определение величины годового платежа, вносимого в фонд. Здесь можно воспользоваться теорией постоянных и переменных рент, рассмотренной в главах 2 и 3. Для простоты рассуждений рассмотрим случай постоянных платежей, вносимых в фонд в конце года.

Наиболее простой способ формирования погасительного фонда состоит в выплате постоянных ежегодных взносов R по ставке i процентов годовых на протяжении N лет. Пусть общий срок займа n лет; g — годовая ставка процентов по займу; L — продолжительность льготного периода; $n = L + N$. Поскольку фонд должен быть накоплен за N лет, взносы в фонд образуют постоянную ренту с параметрами R, N, i.

Если на протяжении всего срока займа в конце каждого года выплачиваются проценты, то срочные уплаты на протяжении льготного периода равны $Y = D \cdot g$, после окончания льготного периода $Y = Dg + D/s_{N;i}$.

Если условия займа предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга, то $Y = 0$ на протяжении льготного периода и $Y = D(1+g)^n / S_{N;i}$ в периодах после окончания льготного периода.

При создании погасительного фонда используются две процентные ставки – i и g. Очевидно, что создание фонда особенно выгодно должнику тогда, когда $i > g$, так как в этом случае он получает более высокие проценты, чем выплачивает сам.

Пример 5.1.1. Кредит в сумме 225 тыс. $ выдан на 4 года под 8,2% годовых и предусматривает погашение долга разовым платежом в конце срока кредита. Для погашения долга, спустя год, начал создаваться погасительный фонд, путем внесения на счет в банке равных годовых взносов в конце каждого квартала под 8% годовых. Определите размер годовых платежей в погасительный фонд, если: а) в конце каждого года возвращаются процентные платежи, б) процентные платежи не погашаются, а присоединяются к сумме долга. В каком случае размер годовых платежей в погасительный фонд будет больше и насколько?

▶ а) Так как проценты периодически выплачиваются, то к концу четвертого года в фонде должна быть накоплена сумма в 225 тыс. за три года, т.е. $225 = R \cdot s_{3;8}^{(4)}$, где R – годовой взнос в погасительный фонд. Следовательно, $R = 225 : s_{3;8}^{(4)} =$ $= 67{,}32031$ тыс.

б) Поскольку проценты присоединяются к сумме долга, то в погасительном фонде должна быть накоплена сумма $225 \cdot 1{,}082^4 = 308{,}3838$ тыс. Годовой взнос R находим из уравнения: $308{,}3838 = R \cdot s_{3;8}^{(4)}$. Годовой взнос, в данном случае, равен 92,26886 тыс., т.е. он больше на 24,94855 тыс., чем в первом случае. ■

Пример 5.1.2. Кредит в сумме 100 тыс. $ выдан на 6 лет под 8% годовых и предусматривает погашение долга разовым платежом в конце срока кредита вместе с начисленными процентами. Для погашения долга, спустя год, начал создаваться погасительный фонд путем равных годовых взносов под 8,2% годовых. В каком случае суммарные расходы должника будут больше и на сколько, если: а) платежи в фонд годовые, постнумерандо, образуют возрастающую

геометрическую прогрессию со знаменателями 1,1; б) платежи постнумерандо в фонд образуют убывающую арифметическую прогрессию с разностью 5 тыс. $?

▶ а) В конце шестого года необходимо погасить сумму в $100 \cdot 1{,}08^6 = 158{,}68743$ тыс. В соответствии с формулой (6) главы 3, имеем: $158{,}68743 = R\dfrac{1{,}1^5 - 1{,}082^5}{1{,}1 - 1{,}082} = R \cdot 7{,}084808429$, где R – первый взнос в погасительный фонд. Находим, $R = 22{,}39827$ тыс. Учитывая, что платежи возрастают в геометрической прогрессии, находим их сумму: $\dfrac{22{,}39827(1{,}1^5 - 1)}{0{,}1} =$ $= 136{,}74368$ тыс.

б) Используя формулу (4) из главы 3, получаем уравнение: $158{,}68743 = \left(R - \dfrac{5}{0{,}082}\right)s_{5;8{,}2} + \dfrac{5 \cdot 5}{0{,}082}$. Это уравнение линейное относительно R. Решая его, находим $R = 36{,}15565$ тыс. Сумма всех платежей, убывающих по арифметической прогрессии, равна: $\dfrac{(36{,}15565 + 16{,}15565) \cdot 5}{2} = 130{,}77825$ тыс. В варианте а) сумма платежей на 5,96543 тыс. больше, чем в варианте б). ■

5.2. Погашение основного долга равными суммами

При значительных размерах задолженности долг обычно погашается в рассрочку частями: погашение основного долга равными суммами либо погашение всей задолженности равными или переменными срочными уплатами. Рассмотрим первый способ погашения задолженности.

Пусть долг в сумме D погашается в течение n лет и в конце каждого года сумма основного долга уменьшается на одну и ту же величину $R = D/n$. Соответственно уменьшаются и выплачиваемые проценты, так как они начисляются на остаток основной задолженности. Если проценты и основной долг выплачиваются один раз в конце года, то срочная уплата Y_t в году t будет

$$Y_t = \frac{D}{n} + D\left(1 - \frac{t-1}{n}\right)g, \quad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1}$$

Если долг погашается p раз в году и с той же частотой капитализируются проценты, то можно воспользоваться формулой (1), заменив в ней n на np, а g на g/p. В этом случае t означает номер периода.

Из формулы (1) следует, что срочные уплаты в начале срока погашения выше, чем в конце этого срока, что не всегда удобно для должника.

Пример 5.2.1. Заем в сумме 185 тыс. \$ выдан на 5 лет под 7,2% годовых. Предусматривается погашение основного долга по займу равными годовыми платежами постнумерандо. Насколько уменьшится суммарная выплата процентов, если перейти к: а) поквартальному погашению и поквартальной капитализации процентов; б) ежемесячному погашению основного долга и ежемесячной капитализации процентов.

▶ Из формулы (1) следует, что процентные платежи убывают по арифметической прогрессии. Первый процентный платеж $185 \cdot 0{,}072 = 13{,}32$ тыс., а последний — $\frac{185 \cdot 0{,}072}{5} = 2{,}664$ тыс. Сумма всех процентных платежей равна 39,96 тыс.

а) При поквартальном погашении долга и начислении процентов, количество платежей $np = 20$. Воспользуемся формулой (1), положив в ней $g = 0{,}072:4 = 0{,}018$. Первый процентный платеж составляет $185 \cdot 0{,}018 = 3{,}33$ тыс., а последний — $185\left(1-\frac{19}{20}\right)0{,}018 = 0{,}1665$ тыс. Сумма процентных платежей, образующих арифметическую прогрессию, равна 34,965 тыс. Выплата процентных платежей уменьшится на $39{,}96 - 34{,}965 = 4{,}995$ тыс.

б) В этом случае число выплат и капитализаций процентов составит 60. Проценты, начисляемые за месяц, будут равны: $0{,}072 : 12 = 0{,}006$. Рассуждая так же, как и в пункте а), получим, что сумма всех процентных выплат — 33,855 тыс. Это на $39{,}96 - 33{,}855 = 6{,}105$ тыс. меньше. ■

5.3. Погашение долга равными срочными уплатами

В соответствии с этим методом расходы должника постоянны на протяжении всего срока погашения, т.е. $Y = I_t + R_t = \text{const}$, где I_t — процентные платежи, а R_t — сумма погашения основного долга в периоде t.

План погашения может быть разработан при условии, что заданы срок n погашения займа и величина Y расходов по обслуживанию долга.

При заданном сроке погашения займа в начале рассчитывается величина срочной уплаты

$$Y = \frac{D}{a_{n;\,g}}. \qquad (2)$$

Далее эта величина "расщепляется" на процентные платежи I_t и сумму погашения основного долга R_t. Можно показать [23], что

$$R_t = R_{t-1}(1+g), \; t = 2,\ 3,\ \ldots,\ n, \; R_1 = Y - Dg, \qquad (3)$$

т.е. происходит рост в геометрической прогрессии погашения основного долга. В связи с этим данный метод часто называют ***прогрессивным*** методом погашения задолженности.

Используя формулу (3), легко определить сумму погашенной основной задолженности W_t на конец года t:

$$W_t = R_1 \cdot s_{t;\,g}, \qquad (4)$$

где $s_{t;\,g}$ — коэффициент наращения постоянной ренты постнумерандо.

Из формулы (4) следует, что $D_t = D - W_{t-1}$.

Если начисление процентов и погашение долга осуществляются не один, а p раз в году и с той же частотой капитализируются проценты, то можно воспользоваться приведенными выше формулами (2) — (4), произведя в них замены: $n \to np,\ Y \to Y/p,\ g \to g/p$.

Если задана величина Y срочной уплаты, то на первом этапе разработки плана погашения долга необходимо определить срок его погашения. После того как найдено n, план погашения разрабатывается обычным образом, описанным выше. Разрешая формулу (2) относительно n, находим

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{Dg}{Y}\right)}{\ln(1+g)}. \qquad (5)$$

Из формулы (5) вытекает, что погасить задолженность можно лишь для $Y > Dg$.

Поскольку расчетное значение (5) обычно оказывается дробным числом, его округляют до ближайшего большего целого числа n_1. В годах $1, 2, \cdots, n_1 - 1$ срочные уплаты будут равны Y, а в году n_1 срочная уплата определяется из условия полного погашения долга.

Аналогичным образом разрабатывается план погашения и для случая, когда выплата процентов и погашение основного долга производятся не один, а несколько раз в году.

Пример 5.3.1. Заем в сумме 185 тыс. $ выдан на 5 лет под 7,3% годовых. Предусматривается погашение долга равными срочными уплатами в конце каждого года. В конце четвертого года должник решил погасить задолженность разовым платежом. Какую сумму он должен уплатить? Какую сумму процентных платежей он, при этом, сэкономит?

▶ Определим размер равных срочных уплат: $Y = 185 : a_{5;7,3} = 45{,}4828$ тыс. Процентные платежи за первый год составили $185 \cdot 0{,}073 = 13{,}505$ тыс., а в счет погашения основного долга пошла сумма $R_1 = 45{,}4828 - 13{,}505 = 31{,}9778$ тыс. За четыре года, в счет уплаты основного долга, было выплачено, в силу формулы (4), $W_4 = 31{,}9778 \cdot s_{4;7,3} = 142{,}61156$ тыс. Остаток основного долга на начало пятого года составил $D_5 = D - W_4 = 185 - 142{,}61156 = 42{,}38844$ тыс. Чтобы погасить задолженность разовым платежом, должник обязан уплатить $Y + D_5 = 87{,}87124$ тыс. При этом, будут сэкономлены процентные деньги: $2 \cdot 45{,}4828 - 87{,}87124 = 3{,}09436$ тыс. $. ■

Пример 5.3.2. Долг в 120 тыс. $ выдан под 8,2% годовых. Решено гасить долг равными срочными уплатами в 25 тыс. $, выплачиваемых в конце каждого года. За какой срок, в целых годах, можно погасить задолженность? Какова сумма последнего платежа?

▶ В силу формулы (5) $n = -\ln\left(1 - \frac{120 \cdot 0{,}082}{25}\right) : \ln 1{,}082 = 6{,}347$ года. Следовательно, долг можно погасить за 7 целых лет. Процентные платежи, за первый год, составили $120 \cdot 0{,}082 = 9{,}84$ тыс., а в счет погашения основного долга ушла сумма $R_1 = 25 - 9{,}84 = 15{,}16$ тыс. За шесть лет, в счет уплаты основного долга, была выплачена сумма $W_6 = R_1 \cdot s_{6;8,2} = 111{,}77507$ тыс. Следовательно, остаток основного долга на начало седьмого года составил сумму $120 - 111{,}77507 = 8{,}22493$ тыс. Этот остаток должен быть полностью погашен вместе с начисленными процентами $8{,}22493 \cdot 0{,}082 = 0{,}677444$ тыс., т.е. в последнем году должна быть выплачена сумма в 8899,37$. ■

5.4. Погашение долга переменными срочными уплатами

При составлении планов погашения задолженности условие $Y = \text{const}$ не всегда оказывается удобным, так как размеры срочных уплат могут быть, например, связаны с поступлением денежных средств из какого-либо источника и задаваться заранее как $Y_1, ..., Y_{n-1}$. Величина последней срочной уплаты Y_n не задается, она определяется из условия полного погашения долга в последнем периоде.

Расчет плана погашения задолженности происходит по рекуррентной схеме:

$$\begin{gathered} I_t = D_t g, \;\; R_t = Y_t - I_t, \;\; t = 1, 2, ..., n-1; \\ D_t = D_{t-1}(1+g) - Y_{t-1}, \;\; t = 2, ..., n; \;\; D_1 = D. \end{gathered} \qquad (6)$$

Величина срочной уплаты Y_n определяется из условия: $D_{n+1} = 0$, т.е. $Y_n = D_n(1+g)$.

Пример 5.4.1. Долг в 12480 $ выдан на четыре года под 6,5% годовых. В счет погашения долга планируется выплатить в конце первого года 4000 \$, в конце второго – 2000 \$ и в конце третьего года – 3000 \$. Определите общую сумму процентных платежей, выплаченных за весь срок.

▶ Пусть Y – погасительный платеж в конце четвертого года. Величину этого платежа найдем из уравнения: $12480 = 4000 \cdot 1{,}065^{-1} + 2000 \cdot 1{,}065^{-2} + 3000 \cdot 1{,}065^{-3} + Y \cdot 1{,}065^{-4}$. Из этого уравнения находим $Y = 5759{,}85$ \$. Сумма выплаченных процентов составит: $4000 + 2000 + 3000 + 5759{,}85 - 12480 = 2279{,}85$ \$. ■

5.5. Планы погашения долга в потребительском кредите

Пусть потребительский кредит в размере D выдан на n лет под i годовых простых процентов. В потребительском кредите (*consumer loan*) проценты начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу в момент открытия кредита. Образовавшаяся сумма долга погашается p раз в году (обычно $p = 12$) и каждый раз выплачивается сумма

$$Y = \frac{D(1 + ni)}{np}. \qquad (7)$$

Эта величина представляет собой срочную уплату. Однако при составлении плана погашения задолженности теперь нельзя воспользоваться результатами пункта 5.3, в котором проценты, в каждом периоде, начислялись на остаток фактической задолженности. Как же теперь расчленить Y на процентные платежи и сумму погашения основного долга? Для этого обычно применяют метод ***сумм чисел***. Согласно этому методу, сумма порядковых номеров выплат равна $q = pn(1 + np)/2$, процентные платежи за весь срок кредита $I = Dni$, а процентные платежи I_t и сумма погашения основного долга R_t в платеже с номером t составляют:

$$I_t = \frac{(np - (t - 1))I}{q}, \quad R_t = Y - I_t, \quad t = 1,\ 2,\ \cdots,\ np. \qquad (8)$$

Определим остаток задолженности на любой промежуточный период времени кредита. Необходимость в этом

может возникнуть, например, при досрочном погашении кредита. Сумма погашенного основного долга W_k на конец периода k, согласно формуле (8)

$$W_k = \sum_{s=1}^{k} R_s = Y \cdot k - \frac{I}{q}\left(npk - \frac{k(k - 1)}{2}\right), \quad k = 1,\ 2,\ \cdots,\ np. \qquad (9)$$

Остаток основного долга D_t на начало периода t

$$D_t = D - W_{t-1}. \qquad (10)$$

Пример 5.5.1. Потребительский кредит в сумме 15000 \$ выдан на 2 года под 12 простых годовых процентов ($K = 360$). Погашение долга ежеквартальное, согласно методу сумм чисел. Клиент, оплатив предыдущие шесть платежей, через месяц решил погасить задолженность разовым платежом. Какую сумму должен он выплатить?

▶ Ежеквартальная ставка процентов составляет 3%. Согласно формуле (7) ежеквартальная плата $Y = \frac{15000(1 + 8 \cdot 0{,}03)}{8} = 2325$. Сумма номеров порядковых выплат равна 36, процентные платежи за весь срок – 3600 \$. Сумма погашенного основного долга за шесть кварталов (смотри формулу (9)) равна: $W_6 = 2325 \cdot 6 - 100 \cdot 33 = 10650$ \$. Остаток основного долга на начало седьмого квартала равен $D_7 = 15000 - 10650 = 4350$ \$. Или с учетом наращения за один месяц по ставке 1% за месяц – $4350 \cdot 1{,}01 = 4393{,}5$ \$. Окончательная выплата должна составить 4393,5 \$. ■

5.6. Планирование погашения ипотечной ссуды

Ипотечная ссуда – это ссуда, выдаваемая под залог недвижимости (ипотека – слово греческого происхождения, означающее залог). При такой сделке должник передает залогодержателю право на преимущественное удовлетворение его требования из стоимости заложенного имущества в случае отказа от погашения или неполного погашения задолженности.

Существует несколько видов ипотечных ссуд, различающихся методами погашения задолженности. В данном пункте рассмотрим ***стандартную***, или ***типовую***, ипотечную ссуду и ***ссуду с ростом платежей***.

В ***стандартной ипотечной ссуде*** должник погашает долг обычно ежемесячно, и с той же частотой на остаток основной задолженности начисляются проценты по ставке $g/12$, где g – годовая ставка процентов по ссуде. Поэтому при составлении плана погашения стандартной ипотечной ссуды можно воспользоваться результатами пункта 5.3, положив в них $p = m = 12$. Месячная уплата y по погашению ссуды определяется формулой:

$$y = \frac{D \cdot g}{12(1 - (1 + \frac{g}{12})^{-12 \cdot n})}.$$

Ссуды с ростом платежей (*graduated payment mortgage*) предполагают постоянный рост месячных расходов должника в течение первых 5–10 лет. В оставшееся время погашение производится постоянными срочными уплатами. Такая схема платежей обычно приводит к эффекту ***отрицательной амортизации***, когда в течение первых месяцев основной долг не убывает, а наоборот возрастает.

Разделим весь срок в N месяцев погашения ссуды с ростом платежей на два интервала длительностью m и n месяцев. В первом периоде расходы растут с постоянным темпом q, $q > 1$, т.е. $y_t = yq^{t-1}$, $t = 1, 2, ..., m$, где y – расходы в первом месяце. Во втором периоде расходы должника постоянны: $y_t = yq^{m-1}$, $t > m$.

Если ссуда выдана под i годовых процентов, то согласно [23]

$$y = D : \left[\frac{\nu(q\nu)^m - \nu}{q\nu - 1} + q^{m-1}\nu^{m+1}\frac{\nu^n - 1}{\nu - 1}\right]$$
$$\nu = \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-1}. \qquad (11)$$

Формула (11) определяет расходы должника y_t, $t = 1, 2, ..., N$. При составлении плана погашения задолженности срочные

уплаты стандартным образом распределяются на выплату процентов и сумму погашения основного долга.

Пример 5.6.1. Для строительства жилья выдана стандартная ипотечная ссуда в 15000 \$ на 30 лет под 9% годовых с погашением в конце каждого месяца. Выплатив предыдущие платежи, должник решил погасить задолженность разовым платежом в конце 25 года выплат. Какую сумму ему нужно оплатить?

▶ Процентная ставка за месяц – 0,75%. Месячные погасительные платежи равны $y = \frac{1500}{a_{360;0,75}} = 120{,}69$ \$. Процентные платежи за первый месяц составят: $15000 \cdot 0{,}0075 = 112{,}5$ \$. В счет уплаты основного долга в конце первого месяца пойдет сумма $R_1 = 120 - 112{,}5 = 8{,}19$ \$. За 300 месяцев, в счет уплаты основного долга, внесена сумма $R_1 \cdot s_{300;0,75} = 9181{,}99$ \$. Непогашенная сумма основного долга на начало 301 месяца составила: $D_{301} = 15000 - 9181{,}99 = 5818{,}01$ \$. Итак, следует внести сумму $y + D_{301} = 5938{,}7$ \$. ■

Пример 5.6.2. В условиях предыдущего примера ипотечная ссуда погашается с ростом платежей в первые 10 лет, причем в этот период платежи ежемесячно растут на 2%. В последние 20 лет ежемесячные платежи постоянны. Определите сумму процентных платежей за весь срок ссуды.

▶ Воспользуемся формулой (11), положив в ней $m = 120$, $n = 240$, $q = 1{,}02$. Тогда величина первого месячного платежа составит сумму $y = 19{,}9$ \$. Величины постоянных, месячных платежей, в последние 20 лет, определяются величиной – $y \cdot q^{119} = 19{,}9 \cdot 1{,}02^{119} = 210{,}03$ \$.

Определим сумму погасительных платежей за первые 10 лет: $\frac{19{,}9 - 210{,}03 \cdot 1{,}02}{1 - 1{,}02} = 9716{,}53$ \$. Соответствующая сумма за последние 20 лет равна: $240 \cdot 210{,}03 = 50407{,}2$ \$. Всего за весь срок ссуды будет выплачено 60123,73 \$, а сумма процентных платежей составит $60123{,}73 - 15000 = 45123{,}73$ \$. ■

5.7. Льготные займы и кредиты

В ряде случаев долгосрочные займы и кредиты выдаются на льготных условиях. Низкая процентная ставка льготного займа (в сочетании с большим его сроком и льготным периодом) дает должнику существенную выгоду, а заимодавец несет условную потерю.

Условная потеря W заимодавца измеряется ***грант – элементом***, определяемым как разность между номинальной суммой займа D и современной величиной погасительных платежей и выплаченных процентов.

Основная проблема при вычислении грант – элемента – выбор надлежащей ставки процентов i для расчета современной величины платежей. Обычно в качестве такой ставки i выбирают преобладающую на рынке капиталов долгосрочную ставку процентов.

Пусть заем выдан на n лет, с льготным периодом L (если такой имеется), и предусматривает погашение долга равными срочными уплатами постнумерандо, проценты выплачиваются по ставке g. На денежном рынке доминирующей является ставка процентов i.

Если предусмотрен льготный период, в течение которого выплачиваются проценты в конце каждого года, то согласно [23]

$$W = D - D\left(\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}}(1+i)^{-L} + g a_{L;i}\right) \qquad (12)$$

В частном случае, когда льготного периода нет, т. е. $L = 0$, формула (12) принимает вид:

$$W = D - D \cdot \frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}}.$$

Если в льготном периоде проценты не выплачиваются, а присоединяются к основной сумме долга, то согласно [23]

$$W = D - D\frac{a_{n-L;i}}{a_{n-L;g}}\left(\frac{1+g}{1+i}\right)^{L}. \qquad (13)$$

Грант-элемент для беспроцентных займов ($g = 0$) можно вычислить по формулам (12), (13), если учесть, что $a_{n;0} = n$.

Пример 5.7.1. Льготный заем в сумме 100 млн. \$ выдан на 5 лет под 6% годовых и предусматривает льготный период в 7 месяцев. В течение льготного периода проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме основного долга. На финансовом рынке для такого срока кредита преобладающей ставкой процентов является ставка в 9% годовых. После окончания льготного периода заем должен гаситься равными месячными срочными платежами постнумерандо. Чему равна условная потеря W заимодавца?

▶ К концу седьмого месяца долг вырастет до $100 \cdot 1{,}06^{7/12} =$ $= 103{,}4574464$ млн. В течение $t = 4\frac{5}{12} = \frac{53}{12}$ лет долг погашается равными годовыми платежами. Величина годового платежа в этот период равна $Y = 103{,}4574464 : a^{(12)}_{t;6} = 26{,}63225377$ млн. Современная величина погасительных платежей по ставке в 9% годовых равна: $26{,}63225377 \cdot a^{(12)}_{t;9} \cdot 1{,}09^{-7/12} =$ $= 92{,}69967739$ млн. \$. Потеря W кредитора равна: $W = 100 -$ $- 92{,}69967739 = 7{,}30032261$ млн. \$. ■

Пример 5.7.2. Льготный заем в 85 млн. \$ выдан на 6 лет под 7% годовых и предусматривает погашение его срочными годовыми платежами постнумерандо. На кредитном рынке для таких сумм и сроков предоставления доминирующей ставкой является ставка в 9% годовых. Вычислите условную потерю заимодавца W, если погашение задолженности ведется срочными платежами, убывающими в арифметической прогрессии на 1 млн. \$ в год.

▶ Пусть Y_1 – первый погасительный платеж. Тогда, в силу формулы (3) из пункта 3, имеем уравнение: $85 =$ $= \left(Y_1 - \frac{1}{0{,}07}\right)a_{6;7} + \frac{6}{0{,}07 \cdot 1{,}07^6}$. Решая это уравнение относительно Y_1, находим $Y_1 = 20{,}13586014$ млн.

Вычислим теперь современную стоимость погасительных платежей для ставки в 9%. Опять, используя формулу (3) из пункта 3, получим: $A = \left(20{,}13586014 - \frac{1}{0{,}09}\right)a_{6;9} + \frac{6}{0{,}09 \cdot 1{,}09^6} =$ $= 80{,}23544456$ млн. Условная потеря кредитора $W = 85 -$ $- 80{,}23544456 = 4{,}76455544$ млн. \$. ■

5.8. Задачи и примеры

5.1. Кредит в сумме 100 тыс. \$ выдан на 6 лет под 8% годовых и предусматривает погашение долга разовым платежом в конце срока кредита вместе с начисленными процентами. Для погашения долга год спустя начал создаваться погасительный фонд путем равных годовых взносов под 8,2% годовых. Определить, на сколько уменьшаться суммарные взносы в фонд, если взносы в фонд будут поступать не ежегодно, а ежемесячно. Расчеты произведите для платежей: а) постнумерандо; б) пренумерандо.

5.2. В условиях предыдущей задачи проценты по кредиту периодически выплачиваются в конце каждого года. Определить суммарные расходы должника по обслуживанию долга, если а) погасительный фонд создается годовыми платежами постнумерандо, б) погасительный фонд создается месячными платежами пренумерандо.

5.3. Платежи в фонд (в условиях задачи **5.1**) изменяются по геометрической прогрессии и вносятся в конце года. Определить суммарные расходы должника по обслуживанию долга, если: а) платежи с каждым годом увеличиваются на 10%; б) убывают на 10%.

5.4. В условиях задачи **5.1** взносы в погасительный фонд – годовые, постнумерандо. Взносы в фонд в конце третьего года не были сделаны по какой-то причине. Для того чтобы погасить "недоплату", решено, начиная с конца четвертого года, увеличивать последующие выплаты в q раз. Чему должно быть равно значение q?

5.5. Проценты по кредиту (в условиях задачи **5.1**) периодически выплачиваются в конце года. Взносы в погасительный фонд намечено производить годовыми платежами постнумерандо. Однако после двух выплат в погасительный фонд последующие платежи стали снижаться на 5 тыс. \$ в год. Чему должен равняться последний взнос в погасительный фонд, чтобы долг был полностью погашен?

5.6. Проценты по кредиту периодически выплачиваются в конце года при сохранении условий задачи **5.1**. Однако какой будет ставка процентов в погасительном фонде через год, точно не известно. Считая, что ставка процентов в погасительном фонде примет значение 8,1% с вероятностью 0,1; 8,2% с вероятностью 0,8 и 8,3% с вероятностью 0,1, вычислить среднее значение и дисперсию расходов должника. Платежи в фонд поступают в конце года.

5.7. Кредит в сумме 273 тыс. \$ выдан на 7 лет под 9,2% годовых и предусматривает погашение основного долга равными суммами, выплачиваемыми вместе с процентами в конце каждого полугодия. Намеченные к погашению восьмой и девятый платежи не были сделаны по каким-то причинам. В дальнейшем график выплат был восстановлен, но при этом пришлось увеличить равные выплаты, идущие в счет погашения основного долга. На сколько пришлось увеличить разовые выплаты по погашению основного долга?

5.8. Три с половиной года платежи погашались по намеченному графику в условиях предыдущей задачи. Затем было решено оставшуюся задолженность погасить равными платежами S_0 в конце пятого и седьмого годов. Чему равно значение S_0?

5.9. Кредит в сумме 261,5 тыс. \$ выдан на 6 лет под 9,25% годовых и предусматривает погашение долга равными срочными уплатами постнумерандо в конце каждого года. Возрастут или уменьшатся (и на сколько) суммарные расходы должника по обслуживанию долга, если перейти к погашению основного долга равными суммами?

5.10. Решено погасить долг равными срочными платежами постнумерандо в конце каждого года (см. условия предыдущей задачи). После 3 лет погашения задолженности, согласно намеченному графику, было решено в течение последующих трех лет гасить основную задолженность равными полугодовыми платежами. Чему будут равны суммарные расходы должника по обслуживанию долга?

5.11. В условиях задачи **5.9** должник после 3 лет погашения задолженности по намеченному графику решил погасить всю оставшуюся задолженность разовым платежом в конце четвертого года. Какую сумму он должен выплатить?

5.12. Кредит в сумме 315,82 тыс. \$ выдан на 7 лет под 9,8% годовых. В счет погашения долга необходимо в конце первого года уплатить 40 тыс. \$, в конце второго – 50 тыс. \$, а остальной основной долг погашается равными годовыми выплатами постнумерандо. Чему равны суммарные расходы должника по обслуживанию долга за весь срок ссуды?

5.13. В условиях предыдущей задачи остальной долг должник должен погасить равными срочными уплатами, начиная с конца третьего года. Чему будут равны суммарные расходы должника по обслуживанию всего долга?

5.14. В условиях задачи **5.12**, начиная с конца третьего года, должник обязуется погасить остаток задолженности срочными платежами, изменяющимися по геометрической прогрессии. В каком случае и на сколько суммарные расходы должника будут больше, если срочные уплаты образуют: а) возрастающую прогрессию со знаменателем q = 1,1; б) убывающую прогрессию со знаменателем q = 0,85? Первые два платежа должник обязуется заплатить в таких же размерах, как и в задаче **5.12.**

5.15. Кредит выдан на условиях, оговоренных в задаче **5.12.** В каком случае суммарная выплата процентов по долгу будет меньше и на сколько, если долг гасится срочными уплатами, образующими: а) геометрическую прогрессию со знаменателем 1,1; б) убывающую арифметическую прогрессию с разностью 10 тыс. $? Выплаты по погашению долга годовые, постнумерандо.

5.16. Кредит в сумме 784 тыс. $ выдан на 9 лет под 9,8% годовых и предусматривает погашение долга равными срочными годовыми платежами постнумерандо. Должник после 3 лет оплаты долга по намеченному графику решил погасить остальную задолженность тремя равными суммами S_0 в конце пятого, седьмого и девятого годов. Чему равно значение S_0?

5.17. Кредит, в условиях предыдущей задачи, в течение первых 3 лет погашался равными срочными годовыми платежами постнумерандо, а в оставшийся период – равными годовыми суммами по погашению основного долга, которые выплачивались в конце года. Чему равна суммарная выплата процентов по долгу?

5.18. В задаче **5.16** кредит намечено погашать равными годовыми срочными уплатами. Насколько уменьшится суммарная выплата процентов, если перейти от платежей постнумерандо к платежам пренумерандо?

5.19. В задаче **5.16** кредит планируется погашать равными годовыми срочными уплатами постнумерандо, причем первая выплата будет осуществлена через 2 года после получения кредита. За год отсрочки платежей проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга. Чему будет равна суммарная выплата процентов по долгу?

5.20. Кредит в сумме 378,55 тыс. $ выдан на пять с половиной лет под 8,6% годовых. Планируется погашать его равными суммами, идущими на погашение основного долга. Выплаты по займу годовые постнумерандо, причем первая выплата будет произведена через полтора года после получения займа. Чему будет равна суммарная выплата процентов по кредиту, если за полгода отсрочки платежей проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга?

5.21. Кредит (с условиями погашения из предыдущей задачи) намечено погашать срочными, годовыми уплатами постнумерандо, изменяющимися по геометрической прогрессии. Чему будет равна суммарная выплата процентов по долгу, если: а) знаменатель прогрессии равен 1,1; б) знаменатель прогрессии равен 0,9?

5.22. Кредит выдан на условиях, описанных в задаче **5.20.** В каком случае расходы должника по обслуживанию долга будут меньше и на сколько, если срочные годовые расходы постнумерандо: а) возрастают в геометрической прогрессии со знаменателем 1,1; б) убывают по арифметической прогрессии с разностью 10 тыс. $?

5.23. Кредит (см. условия задачи **5.20)** погашается тремя нерегулярными платежами: первый платеж – в конце второго года в размере 50 тыс. $; второй платеж – в конце четвертого года в размере 100 тыс. $ и последний платеж – в конце срока ссуды. Погасительные платежи прежде всего идут на погашение основного долга, затем на выплату процентов. Какая сумма из последнего платежа пойдет на погашение основного долга?

5.24. Долг в сумме 400 тыс. $ выдан на 6 лет под 9,25% годовых и предусматривает погашение его тремя нерегулярными платежами: S_1 = 50 тыс. $ в конце второго года; S_3 = 100 тыс. $ в конце шестого года и второй платеж S_2 в конце четвертого с половиной года. Определите, какая сумма из платежа S_3 пойдет на выплату процентов? Погасительные платежи прежде всего идут на погашение основного долга.

5.25. Потребительский кредит в сумме 10 тыс. $ выдан на 3 года под 10 простых годовых процентов. Погашение долга ежемесячное, согласно методу сумм чисел. Клиент, оплатив предыдущие платежи, решил погасить задолженность разовым платежом в конце 15-го месяца. Какую сумму он должен выплатить?

5.26. В предыдущей задаче погашение процентов равномерное на протяжении всего срока кредита. Какова сумма разового платежа в конце 15-го месяца? Насколько меньше эта сумма аналогичной величины из предыдущей задачи?

5.27. Для строительства жилья предоставлена стандартная ипотечная ссуда в размере 380 млн. руб. под 10% годовых на 20 лет. Погашение долга ежемесячное. Должник решил погасить задолженность в конце десятого года разовым платежом. Какую сумму он должен уплатить?

5.28. В условиях предыдущей задачи ипотечная ссуда предусматривает рост платежей в течение 5 лет с ежегодным приростом в 5%. Во втором периоде, длительностью 180 месяцев, платежи постоянны. Определите максимальную сумму $D_{\max}$ основной задолженности и задолженность D_{239} на начало 239-го месяца.

5.29. Льготный заем в сумме 100 млн. $ выдан на 5 лет под 6% годовых и предусматривает льготный период в 7 месяцев, в течение которых ежемесячно выплачиваются проценты. На финансовом рынке для такого срока кредита преобладающей ставкой процентов является ставка в 9% годовых. После окончания льготного периода заем должен гаситься равными месячными срочными платежами постнумерандо. Чему равна условная потеря W заимодавца?

5.30. Условия получения и погашения льготного займа такие, как и в примере **5.29.** Насколько уменьшится условная потеря заимодавца, если погашение кредита начнется сразу же, без льготного периода?

5.31. Беспроцентный заем в сумме 2 млн. $ выдан на 2 года и предусматривает погашение долга в конце каждого месяца равными суммами. На финансовом рынке для такой суммы и такого срока займа доминирующей ставкой процентов является ставка в 8% годовых. Насколько возрастет условная потеря заимодавца, если он предоставит льготный период в 6 месяцев?

5.32. Льготный заем в 85 млн. $ выдан на 6 лет под 7% годовых и предусматривает погашение его срочными годовыми платежами постнумерандо. На кредитном рынке для таких сумм и сроков предоставления доминирующей ставкой является ставка в 9,5% годовых. Вычислите условную потерю заимодавца W, если погашение ведется срочными платежами возрастающими в геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1{,}1$.

5.33. Льготный заем в сумме 750 тыс. $ выдан на 7 лет под 5% годовых. Доминирующей ставкой на денежном рынке является ставка в 9,8% годовых. Долг погашается нерегулярными платежами: 200 тыс. $ в конце второго года; 300 тыс. $ в конце четвертого года, а остальная сумма выплачивается в конце кредита. Определите условную потерю W заимодавца.

5.34. Для строительства жилья предоставлена стандартная ипотечная ссуда в 15000 $ под 9% годовых. Погашение ежемесячное и с той же частотой на остаток долга начисляются проценты. Насколько месяцев должна быть предоставлена такая ссуда, чтобы в конце каждого месяца выплачивать по ссуде по 200 $? Насколько нужно увеличить месячные платежи, чтобы не было недоплаты?

Глава 6

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Доходы от финансово-кредитных операций имеют различную форму: проценты от выдачи ссуд, комиссионные, дисконт при учете векселей и т.д. В одной финансовой операции часто предусматривают два, а то и три источника дохода. Например, ссуда приносит кредитору проценты и комиссионные. В связи с тем, что источников дохода может быть несколько, возникает проблема измерения эффективности (доходности) финансовой операции с учетом всех источников дохода.

6.1. Чистый приведенный доход и внутренняя норма доходности финансовой операции. Уравнение баланса финансовой операции

Степень финансовой эффективности (доходности) операций, имеющих несколько источников дохода, обычно измеряется в виде годовой ставки сложных процентов.

Расчетная ставка процентов, измеряющая степень доходности, получила разные названия. Эту ставку называют ***эффективной***, ***полной доходностью*** (в русскоязычной литературе), ***внутренней нормой доходности*** (в англоязычной литературе). Эту ставку будем называть внутренней нормой доходности и обозначать *IRR* (*internal rate of return*).

Под внутренней нормой доходности будем понимать ту расчетную ставку сложных процентов *IRR*, при которой начисление процентов на инвестиции обеспечит выплату всех предусмотренных платежей.

Чем выше внутренняя норма доходности, тем эффективнее для инвестора финансовая операция. При неблагоприятных условиях *IRR* может быть нулевой или даже отрицательной величиной.

Для того чтобы сформулировать расчетные процедуры вычисления *IRR*, нам понадобится понятие ***чистой приведенной величины*** дохода, которое будет сформулировано ниже.

Финансовая операция может предусматривать неоднократные и разновременные переходы денежных сумм от одного владельца к другому. Рассматривая поток платежей с позиции одного из них, будем считать все поступления R_j в момент времени t_j, $j = 1, 2, ..., m$, положительными величинами, а все его выплаты I_s в момент времени τ_s, $s = 1, 2, ..., k$, – отрицательными.

Тогда величина

$$NPV = \sum_{j=1}^{m} R_j(1+i)^{-t_j} - \sum_{s=1}^{k} I_s(1+i)^{-\tau_s} \qquad (1)$$

называется ***чистой приведенной величиной*** дохода (*net present value*) по ставке сравнения i, т.е. формула (1) определяет современную величину потока платежей с учетом их знака.

Требование положительности *NPV* является обязательным при принятии решения о реализации финансовой операции кредитором.

Если *NPV* финансовой операции положительна, то такая операция в целом эффективна. Однако *NPV* не определяет степень эффективности финансовой операции. Эту роль выполняет *IRR*, определяемая как значение сложной ставки процентов, при которой значение *NPV* равно нулю. Таким образом, *IRR* – это корень уравнения:

$$NPV\ (IRR) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется ***уравнением баланса*** финансовой операции.

6.2. Вычисление эффективности простейших финансовых операций

В этом разделе рассматривается доходность таких простейших операций, как выдача ссуд под простые и сложные проценты, и учетных операций. В этих операциях, кроме начисления процентов, предусмотрен другой источник дохода – удержание комиссионных. В конце раздела рассматривается доходность операций купли–продажи векселей.

Пусть ссуда в размере D выдана на n лет под i годовых процентов и предусматривает погашение долга разовым платежом. При ее выдаче удержаны комиссионные за операцию в размере G, т.е. фактически выданная ссуда составляет значение $D - G$.

Если ссуда предусматривает начисление простых процентов, то из уравнения баланса (2) этой финансовой операции получаем

$$IRR = \left[\frac{D(1+ni)}{D-G}\right]^{1/n_1} - 1,$$

где $n = \frac{t}{K}$, $K = 360, 365(366)$; $n_1 = \frac{t}{K_1}$, $K_1 = 365(366)$, а t – количество дней, на которые предоставлена ссуда.

Если ссуда выдается под сложные проценты, то

$$IRR = \left[\frac{D}{D-G}\right]^{1/n_1}(1+i) - 1.$$

Если доход извлекается из операции учета по простой учетной ставке и, кроме того, удерживаются комиссионные в размере G, то

$$IRR = \left[\frac{D}{D(1-nd)-G}\right]^{1/n_1} - 1,$$

где $n = \frac{t}{360}$, а t – количество дней, за которые удерживаются проценты.

Если вексель через некоторое время после его покупки и до наступления срока погашения продан, то эффективность этой операции можно измерить в виде IRR.

Пусть номинал векселя равен S и он куплен по цене P_1 (по учетной ставке d_1) за t_1 дней до наступления срока погашения векселя. За t_2 дней до погашения вексель был продан по цене P_2 с дисконтированием по ставке d_2.

Разрешая уравнение (2) баланса данной финансовой операции относительно IRR, получаем

$$IRR = \left[\frac{P_2}{P_1}\right]^{\frac{K_1}{t_1-t_2}} - 1. \qquad (3)$$

Так как $P_i = S\left(1 - \frac{t_i d_i}{360}\right)$, $i = 1,2$, то, подставив эти значения в формулу (3), получаем

$$IRR = \left[\frac{360 - t_2 d_2}{360 - t_1 d_1}\right]^{\frac{K_1}{t_1-t_2}} - 1. \qquad (4)$$

Формула (4) выражает эффективность купли-продажи векселя через значения учетных ставок на момент покупки и продажи векселя.

Пример 6.2.1. Кредит в сумме 420 млн. руб. выдан на два года под 40 годовых сложных процентов и предусматривает разовое погашение долга. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 0,1% от суммы кредита. Кредит не был погашен в оговоренный срок. Должник попросил отсрочку с выплатой долга на полгода. Кредитор согласился с этой просьбой при условии, что на накопившуюся задолженность будут начисляться 45% годовых сложных процентов. Какова доходность данной финансовой операции для кредитора в виде годовой ставки сложных процентов?

▶ С учетом отсрочки, сумма долга составит величину $420 \cdot 1{,}4^2 \cdot \sqrt{1{,}45} = 991{,}2640657$ млн. руб. В виде комиссионных удержана сумма в 0,42 млн. руб. и должник получит 419,58 млн. руб. Если i – годовая ставка сложных процентов, то уравнение баланса данной финансовой операции следующее: $-419{,}58 + 991{,}2640657 \cdot (1 + i)^{-2,5} = 0$. Решая это уравнение, получим: $i = 0{,}41042$. Итак, доходность этой финансовой операции для кредитора составит 41,042%. ■

Пример 6.2.2. На депозит 17.03 положено 25,3 тыс. $ под 8,7 простых годовых процентов сроком до 18.09 включительно. Двадцать второго июля этот депозит был продан новому владельцу за 25,5 тыс. $. Определите доходность инвестирования средств в депозит для нового владельца в виде годовой ставки простых процентов, $K = 365$ дней.

▶ К 18.09 на депозите будет накоплена сумма в $25{,}3 \cdot \left(1 + \frac{185}{365}0{,}087\right) = 26{,}41563$ тыс. $. Доходность, для нового владельца, определяется уравнением баланса: $-25{,}5 + 26{,}41563 \cdot \left(1 + \frac{58}{365}i\right)^{-1} = 0$, где i – годовая ставка простых процентов, определяющая степень доходности. Из этого уравнения следует, что $i = 0{,}22597 = 22{,}597\%$. ■

6.3. Эффективность потребительского кредита

Погасительные платежи в потребительском кредите представляют собой p-срочную ренту с разовым платежом в размере Y, определяемым по формуле (7) из пункта 5.5.

Уравнение баланса (2) потребительского кредита будет иметь вид

$$-D + pYa_{n;i_1}^{(p)} = 0, \quad i_1 = IRR. \tag{5}$$

Из формулы (5) получаем

$$\frac{1-(1+i_1)^{-n}}{p\left[(1+i_1)^{1/p}-1\right]} = \frac{n}{1+ni}. \tag{6}$$

Уравнение (6) можно решить только численно относительно i_1 одним из приближенных методов.

Значение i_1 оказывается значительно больше объявленной ставки i, так как сумма основного долга с течением времени убывает, а проценты уплачены вперед.

Пример 6.3.1. Потребительский кредит выдан на три года под 9,6% годовых (простые проценты). Вычислите действительную эффективность $i_э$ этого кредита, если погашение задолженности поквартальное. Вычисление произведите с точностью до 0,01%, платежи по кредиту – постнумерандо.

▶ Для $n = 3$, $p = 4$, $i = 0{,}096$ уравнение (6) примет вид: $f(i_1) = \frac{1-(1+i_1)^{-3}}{4((1+i_1)^{1/4}-1)} = 2{,}329192547$. Подбором значений i_1 находим, что $f(0{,}17) = 2{,}345840574 > 2{,}329192547$, а $f(0{,}18) = 2{,}315978084 < 2{,}329192547$. Значит, $i_1 \in (17\%, 18\%)$ и точность вычислений составляет один процент. Методом деления отрезка пополам, производя последовательные вычисления, получаем, что $i_1 \in (17{,}55\%, 17{,}55625\%)$. Длина этого интервала составляет 0,00625%, что меньше 0,01%. ■

6.4. Эффективность погашения долгосрочных ссуд

Способ погашения долгосрочной задолженности (разовым платежом, равными суммами, равными срочными уплатами и т.д.) оказывает заметное влияние на эффективность финансовой операции для кредитора. Эффективность таких финансовых операций определяется из уравнения баланса.

Поясним процесс определения эффективности для ссуд, погашаемых равными срочными уплатами.

Пусть ссуда D выдана на n лет под i годовых процентов и предусматривает льготный период длительностью L. При выдаче ссуды удерживаются комиссионные в размере G.

Если в течение льготного периода выплачиваются только проценты, то уравнение баланса (2) принимает вид:

$$-(D-G) + Dia_{L;i_1} + \frac{Da_{n-L;i_1}}{a_{n-L;i}}(1+i_1)^{-L} = 0. \tag{7}$$

Если на протяжении льготного периода проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме основного долга, то уравнение баланса будет следующим:

$$-(D-G) + \frac{Da_{n-L;i_1}}{a_{n-L;i}}\left(\frac{1+i}{1+i_1}\right)^{L} = 0. \tag{8}$$

Внутренняя норма доходности находится как результат приближенного решения уравнений (7), (8) относительно i_1.

Пример 6.4.1. На три года выдана ссуда в 1 млн. руб. под 10% годовых. При выдаче ссуды удержаны комиссионные в размере 5% от суммы кредита. Вычислите эффективность данной финансовой операции для кредитора в виде годовой ставки сложных процентов $i_э$ для следующих ситуаций: а) основной долг погашается в конце срока, а проценты периодически выплачиваются в конце каждого года, б) основной долг погашается равными срочными платежами постнумерандо. Какой из способов погашения долга выгоднее кредитору?

▶ а) В данном случае уравнение баланса финансовой операции принимает вид: $(1 + i_э)^{-3} + 0{,}1 \cdot a_{3;i_э} - 0{,}95 = 0$. Решая его одним из приближенных методов, получаем, что $i_э = 0{,}12088 = 12{,}088\%$.

б) В этом случае уравнение баланса (7) финансовой операции с учетом того, что $L = 0$, примет вид: $a_{3;i_э} - a_{3;10} \cdot 0{,}95 = 0$ или $a_{3;i_э} = 2{,}362509391$. Численно решая это уравнение, имеем, что $i_э = 0{,}129664 = 12{,}9664\%$.

Из расчетов следует, что вариант б) выгоднее для кредитора. ■

6.5. Измерение эффективности инвестиционных проектов

Рассмотрим поток платежей из пункта 6.1 с позиции инвестора. Сохраним обозначения переменных, введенные в этом пункте. Тогда платежи I_s, $s = 1, 2, ..., k$, – это те денежные вложения, которые инвестор вкладывает (инвестирует) в промышленный, коммерческий или финансовый проект, а R_j, $j = 1, 2, ..., m$ – это чистая отдача (доход) от вложенных средств. В инвестиционных проектах отдачи обычно следуют после завершения инвестиций (либо часть из них получают до завершения инвестиций).

Планируя вложить денежные средства в некоторый проект, инвестор обычно рассматривает несколько вариантов

инвестирования средств и получения доходов от них. При этом его интересуют показатели, характеризующие степень доходности вложения денежных средств. Наиболее распространенными среди таких показателей являются: ***чистая приведенная величина*** дохода (*NPV*); ***внутренняя норма доходности*** (*IRR*); ***срок окупаемости*** (*payback method*) инвестиций и ***рентабельность*** (*profitability index*).

Первые два показателя: *NPV*, *IRR*, были введены в пункте 6.1 для потока платежей. Для инвестиционных проектов они вычисляются точно таким же образом. Рассмотрим два оставшихся показателя.

Срок окупаемости – один из наиболее часто применяемых показателей эффективности инвестиций. Различают ***не дисконтированный***, или ***упрощенный, срок окупаемости*** $n_у$ и ***дисконтированный срок окупаемости*** $n_{ок}$.

Упрощенный срок окупаемости не учитывает фактор времени. Пусть B – суммарные инвестиции, т.е. $B = I_1 + ... + I_k$. Введем суммы $S_\lambda = \sum_{j=1}^{\lambda} R_j$, причем $S_\lambda \le B < S_{\lambda+1}$. Тогда

$$n_у = t_\lambda - \tau_k + \frac{B - S_\lambda}{R_{\lambda+1}}(t_{\lambda+1} - t_\lambda). \tag{9}$$

Упрощенный срок окупаемости (9) показывает, через какой срок после окончания инвестиций t_k отдачи окупят суммарные вложения B. В экономически развитых странах показатель $n_у$ применяют в основном мелкие фирмы. С финансовых позиций более обоснованным является дисконтированный срок окупаемости.

Пусть i – ***ставка сравнения***, или ***ставка дисконтирования***, и B_1 – наращенная сумма инвестиций на конец инвестиционного процесса, т.е.

$$B_1 = \sum_{j=1}^{k} I_j (1 + i)^{\tau_k - \tau_j}. \tag{10}$$

Аналогично, определим суммы $S_\lambda = \sum_{j=1}^{\lambda} R_j (1 + i)^{-(t_j - \tau_k)}$, и пусть выполняются неравенства: $S_\lambda \le B_1 < S_{\lambda+1}$. Тогда

$$n_{\text{ок}} = t_\lambda - \tau_k + \frac{(B_1 - S_\lambda)(t_{\lambda+1} - t_\lambda)}{R_{\lambda+1}(1+i)^{-(t_{\lambda+1}-\tau_k)}}. \tag{11}$$

Основной недостаток срока окупаемости как меры эффективности инвестиций состоит в том, что он не учитывает весь период функционирования отдач и, следовательно, на него не влияют все те отдачи, которые лежат за пределами срока окупаемости. Поэтому срок окупаемости обычно используется лишь в виде ограничения при принятии решения: если срок окупаемости проекта больше, чем принятое ограничение, то он исключается из списка возможных инвестиционных проектов.

Определим ***рентабельность*** как отношение приведенных доходов к приведенным на ту же дату инвестиционным расходам и будем обозначать его как PI:

$$PI = \frac{\sum_{j=1}^{m} R_j (1+i)^{-t_j}}{\sum_{j=1}^{k} I_j (1+i)^{-\tau_j}}.$$

Если $PI = 1$, то это означает, что доходность капиталовложений точно соответствует нормативу рентабельности i и в этом случае $i = IRR$. При $PI < 1$ инвестиции нерентабельны, так как не обеспечивают заданный норматив i. При $PI > 1$ инвестиции рентабельны.

В приведенных показателях эффективности инвестиций участвуют отдачи R_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Однако они не всегда являются детерминированными величинами, поскольку предсказать точное их значение не всегда представляется возможным. В этом случае отдачи можно рассматривать как случайные величины с заданным или спрогнозированным законом распределения. Но тогда и показатели эффективности инвестиций будут случайными величинами и в этом случае надо оценить их среднее ожидаемое значение и дисперсию, или риск.

Пример 6.5.1. В некоторый проект инвестируется, в течение 2 лет, по 2 тыс. \$ в конце каждого месяца. После окончания инвестиционного периода проект начинает приносить чистую прибыль в размере 4 тыс. \$ в конце каждого квартала на протяжении 20 лет. Для норматива доходности в 10% годовых определите числовые характеристики, характеризующие степень доходности данного проекта: NPV, IRR, $n_у$, $n_{ок}$, PI.

▶ Чистый приведенный доход равен: $NPV = -24 \cdot a^{(12)}_{2;10} + 16 \cdot a^{(4)}_{20;10} = 73{,}1847$ тыс. \$.

Для того чтобы определить внутреннюю норму доходности $i_э$, составим уравнение баланса: $-24 \cdot a^{(12)}_{2;i_э} + 16 \cdot a^{(4)}_{20;i_э} = 0$. Численно решая это уравнение, находим, с точностью до одного процента, решение: $i_э = IRR \in (28\%, 29\%)$.

Суммарные инвестиции на конец второго года составили 48 тыс. Ежегодный чистый доход — 16 тыс. Ясно, что упрощенный срок окупаемости составит три года.

Вычислим дисконтированный срок окупаемости n_1. Наращенная сумма инвестиций, на конец второго года, составит величину $24 \cdot s^{(12)}_{2;10} = 52{,}67025$ тыс. Дисконтированный срок окупаемости определим из уравнения: $52{,}67025 = 16 \cdot a^{(4)}_{n_1;10}$. Решая это уравнение относительно n_1, получаем: $n_1 = 4{,}0082$ года. Итак, $n_{ок} = 4{,}0082$ года.

Индекс рентабельности PI равен: $PI \frac{16 \cdot a^{(4)}_{20;10} \cdot 1{,}1^{-2}}{24 \cdot a^{(12)}_{2;10}} = 2{,}662294848$. Итак, рентабельность составляет 166,23%. ■

6.6. Расчет платежей по аренде оборудования

Частным случаем производственных инвестиций является аренда оборудования (разовая инвестиция производится в самом начале операции). Для владельца оборудования важно правильно оценить величину арендных платежей, которые обеспечили бы ему доходность при заданном нормативе i годовых процентов. Если же владелец оборудования назначает арендные платежи исходя из каких-то соображений, то важно оценить доходность для него сдачи оборудования в аренду в виде годовой ставки сложных процентов.

Арендатор, если есть для него возможность купить это оборудование, должен для себя решить вопрос. Что лучше, с экономической точки зрения, арендовать оборудование или купить его?

Определение величины платежей за аренду оборудования. Если оборудование стоимостью P сдается в аренду на n лет, то размер годовых платежей R, выплачиваемых в конце каждого года и обеспечивающий заданный норматив доходности i при условии, что S – остаточная его стоимость в конце срока аренды, определяется формулой:

$$R = \frac{P - S(1+i)^{-n}}{a_{n;i}}. \tag{12}$$

Если арендные платежи выплачиваются не в конце каждого года, а образуют некоторую ренту, отличную от годовой ренты постнумерандо, то в этом случае в формуле (12) вместо коэффициента приведения ренты $a_{n;i}$ необходимо взять коэффициент приведения соответствующей ренты.

Учитываемый в расчетах норматив доходности i, естественно, должен быть больше нормы амортизации оборудования a. Разность $i - a$ дает реальную доходность аренды оборудования.

Эффективность сдачи оборудования для владельца. Если владелец оборудования назначает последовательность арендных платежей, то в этом случае возникает вопрос. Насколько эффективна (в виде годовой ставки сложных процентов) для него сдача оборудования в аренду? В этом случае годовую ставку сложных процентов i определяют из уравнения баланса платежей, связанных с арендой оборудования. Например, если арендная плата за год в размере R выплачивется p раз в году в виде ренты постнумерандо,то уравнение баланса имеет вид:

$$-P + R \cdot a_{n;i}^{(p)} + S(1+i)^{-n} = 0, \tag{13}$$

где S – остаточная его стоимость на конец аренды. Эффективность i сдачи оборудования в аренду определяется как решение уравнения (13) относительно i . Решение этого уравнения находится численно, используя один из приближенных методов решения.

Арендовать или покупать оборудование? Арендатор, если есть у него возможность купить в рассрочку оборудование, решает вопрос. Что для него экономически выгоднее, арендовать или купить оборудование? Данный вопрос, обычно, разрешается следующим образом. Вычисляются современные величины затрат по аренде и покупке оборудования. Причем дисконтирование потоков платежей осуществляется по ставке процентов i, доминирующей, на данный момент, на денежном рынке. Чтобы условия сравнения были одинаковы, из современной величины потока платежей по покупке оборудования следует вычесть современную стоимость остаточной стоимости S на момент окончания аренды. Тот вариант будет предпочтительнее, для которого современная стоимость потоков платежей будет меньшей.

Пример 6.6.1. Оборудование, стоимостью 10 млн. руб. сдается в аренду на 5 лет. Остаточная его стоимость на момент окончания аренды оценивается в 3 млн. рублей. Владелец оборудования планирует получать равные годовые платежи на протяжении всего срока аренды, исходя из норматива доходности в 20% годовых. Какова должна быть величина годовых платежей R по аренде оборудования, если три года выплаты осуществляются в конце каждого полугодия, а в оставшийся срок – в конце каждого квартала?

▶ Уравнение баланса платежей по аренде оборудования следующее: $-10 + R \cdot a_{3;20}^{(2)} + R \cdot a_{2;20}^{(4)} \cdot 1{,}2^{-3} + 3 \cdot 1{,}2^{-5} = 0$. Отсюда находим, R = 2,78749872 млн. рублей. ■

Пример 6.6.2. Пусть в условиях предыдущего примера владелец оборудования требует оплатить за аренду по 3 млн. руб. за каждый год, на протяжении трех лет, а затем годовые платежи должны быть увеличены на 5%. Какова доходность сдачи оборудования в аренду для владельца в виде годовой ставки сложных процентов?

▶ Пусть i – ставка сложных процентов, характерезующая эффективность аренды. Уравнение баланса, в условиях примера, принимает вид: $-10 + 3 \cdot a_{3;i}^{(2)} + 3 \cdot 1{,}05 \cdot a_{2;i}^{(4)} \cdot (1+i)^{-3} + 3(1+i)^{-5} = 0$. Решение этого уравнения, с точностью до 0,1%, дает результат: i = 0,234 = 23,4%. ■

Пример 6.6.3. Пусть условия аренды такие же, как и в примере **6.6.2.** Оборудование можно купить в рассрочку на 7 лет, выплачивая в конце каждого года равные платежи, на остаток долга начисляется 18,2% годовых. Оцените, что лучше, купить ли оборудование или арендовать его? Рыночная ставка процентов составляет 17,9%.

▶ Современная величина платежей по аренде $A_1 = 3 \cdot a^{(2)}_{3;17,9} + 3 \cdot 1{,}05 \cdot a^{(4)}_{2;17,9} \cdot 1{,}179^{-3} = 10{,}02192705$ млн. рублей. Если оборудование купить, то годовые платежи по оплате покупки составят $10/a_{7;18,2} = 2{,}63854393$ млн. рублей. За вычетом современной величины остаточной стоимости оборудования, современная стоимость расходов по покупке оборудования равна: $A_2 = 2{,}63854393 a_{3;17,9} - 3 \cdot 1{,}179^{-5} = 4{,}42921854$ млн. рублей.

Так как A_2 значительно меньше A_1, то экономически выгоднее купить оборудование. ■

Пример 6.6.4. Стоимость оборудования 10 млн. рублей. Оно сдается в аренду на 5 лет. Владелец оборудования желает получать равные годовые платежи в течение всего срока аренды и ориентируется на норматив доходности в 20% годовых. Прогнозируется, что остаточная стоимость оборудования S в конце срока аренды – случайная величина, равномерно распределенная в интервале [2,5 млн.; 3 млн.]. В первые три года выплаты в конце каждого полугодия, а в оставшийся срок – в конце каждого квартала. Определите числовые характеристики годовых платежей R по аренде оборудования: R_{min}, R_{max}, $E\{R\}$, $D\{R\}$, $P\{2{,}8 \text{ млн.} \le R \le 2{,}85 \text{ млн.}\}$.

▶ Уравнение баланса данной финансовой операции имеет вид: $-10 + R \cdot a^{(2)}_{3;20} + R \cdot a^{(4)}_{2;20} \cdot 1{,}2^{-3} + S \cdot 1{,}2^{-5} = 0$. Исходя из этого уравнения, получаем, что $R = 3{,}16964161 - 0{,}127380763 \cdot S$. Так как R линейно зависит от S, то годовая арендная плата будет случайной величиной, равномерно распределенной в интервале [2,78749872 млн.; 2,8511891 млн.]. Теперь можно вычислить все числовые характеристики R: $R_{min} = 2{,}78749872$ млн., $R_{max} = 2{,}8511891$ млн., $E\{R\} = 2{,}81934391$ млн., $D\{R\} = 0{,}00033804$ млн., $P\{2{,}8 \text{ млн.} \le R \le 2{,}85 \text{ млн.}\} = 0{,}785$. ■

6.7. Сравнение коммерческих контрактов. Метод критической точки

В коммерческой (торговой) практике часто возникают ситуации, когда один и тот же товар можно купить у разных продавцов в рассрочку. Кредит при такой сделке может предоставить как сам поставщик (продавец), так и третья сторона. При такой финансовой сделке покупатель товара должен не только ориентироваться на цену товара, но и учитывать условия кредитования. Так как преимущество варианта с низкой ценой товара может быть "перекрыто" невыгодными условиями кредитования и наоборот, выгодные условия кредитования могут быть "перечеркнуты" более высокой ценой товара.

При наличии нескольких поставщиков товара, каждый из которых предлагает свои условия продажи товара в кредит (цену и условия кредитования), у покупателя, естественно, возникает проблема выбора поставщика товара. В подобных ситуациях обычно применяют "классический" подход, предложенный еще в 19 веке экономистом Клаузбергом. Суть этого подхода состоит в следующем. Вычисляются современные величины потоков платежей, предусмотренных каждым коммерческим контрактом при одной и той же ставке сравнения. Предпочтительным, наиболее экономичным, для покупателя будет тот вариант коммерческого контракта, для которого соответствующая современная величина потока платежей будет минимальной.

При таком подходе к выбору наиболее экономичного варианта коммерческого контракта *центральным моментом* является выбор ставки процентов, по которой производится дисконтирование потока платежей. Выбор *ставки сравнения* в каждой конкретной ситуации – это дело экономического суждения и прогноза. Окончательное слово, при выборе ставки сравнения, принадлежит экспертам, которые должны учитывать все аспекты экономического развития в данный момент. В зарубежной финансовой практике при выборе ставки сравнения эксперты, в основном, ориентируются на существующий или ожидаемый усредненный уровень ссудного процента на финансовом рынке для аналогичных финансовых кредитов.

Сравнение коммерческих контрактов при разовой поставке товара. Пусть, для простоты рассуждений, авансовый платеж в размере Q выплачивается один раз в начале финансовой операции, связанной с покупкой товара в рассрочку. Затем, через t лет поставляется товар на сумму P. После этого, по условиям кредитования, может быть предоставлен льготный период (но не обязательно) длительностью L лет. В течение льготного периода процентные платежи могут либо периодически выплачиваться (например, в конце каждого года), либо присоединяться к сумме долга. После окончания льготного периода, долг погашается на протяжении n лет. На остаток долга начисляется i годовых процентов (для каждого контракта ставка кредитования i принимает свое значение).

Сумма долга D, по которой рассчитывают параметры кредитного соглашения, обычно, определяют на момент поставки товара, т.е. на момент времени t. Сумма D, вообще говоря, может быть рассчитана тремя способами: $D = P - Q$, $D = P - Q(1 + t \cdot i)$ и $D = P - Q(1 + i)^t$. В первом случае на авансовый платеж Q проценты не начисляются, во втором случае на авансовый платеж начисляются простые проценты по ставке i годовых, и в третьем случае – по ставке сложных процентов. Отталкиваясь от величины D, рассчитывают величину процентных платежей на протяжении льготного периода и величину погасительных платежей на протяжении n лет, когда будет погашаться основной долг и выплачиваться проценты. Будем полагать, что после окончания льготного периода, долг будет погашаться равными срочными уплатами k раз в году на протяжении n лет ($n \cdot k$ – целое число). На остаток долга начисляется i годовых процентов.

Если проценты за льготный период длительностью L начисляются по ставке сложных процентов и выплачиваются в конце льготного периода, то современная величина A потока платежей коммерческого контракта, вычисленная по ставке сравнения q, определяется по формуле:

$$A = Q + D \cdot \left((1 + i)^L - 1 + \frac{a^{(k)}_{n;q}}{a^{(k)}_{n;i}} \right) \cdot (1 + q)^{-(t+L)}. \qquad (14)$$

Если же проценты периодически выплачиваются на протяжение льготного периода m раз в году (предполагается, что $L \cdot m$ – целое число), то вместо (14) получим:

$$A = Q + D \cdot \left(i \cdot a^{(m)}_{L;q} + \frac{a^{(k)}_{n;q}}{a^{(k)}_{n;i}} \cdot (1 + q)^{-L} \right) \cdot (1 + q)^{-t}. \qquad (15)$$

Для каждого из вариантов коммерческих контрактов вычисляем по формулам (14) либо (15) современные величины потоков платежей и выбираем тот вариант, при котором соответствующая величина A принимает наименьшее значение. Этот вариант, с финансовых позиций, будет наиболее экономичным для покупателя.

Отметим, что для всех конкурирующих вариантов ставка сравнения q должна быть одна и та же, а параметры P, L, i, t, n, k, m могут варьировать от контракта к контракту.

Сравнение коммерческих контрактов в случае, когда поставка товара распределена во времени. Пусть условия коммерческого контракта предусматривают последовательность распределенных во времени поставок товара в объемах M_j в моменты времени t_j, $j = 1, 2, ..., m$, причем $t_1 < t_2 < ... < t_m = T$. Авансовые платежи Q_j выплачиваются в моменты времени τ_j, $j = 1, ... , k$, в любые моменты времени до срока T, причем $\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_k$. В этом случае сумма долга D рассчитывается на момент времени T. Если i – годовая ставка сложных процентов по условиям коммерческого контракта и на авансовые платежи начисляются проценты, то

$$D = \sum_{j=1}^{m} M_j \cdot (1 + i)^{T - t_j} - \sum_{j=1}^{k} Q_j \cdot (1 + i)^{T - \tau_j}. \qquad (16)$$

Если за этот период будут начисляться простые проценты, то в формуле (16) необходимо изменить соответствующим образом множители наращения.

Пусть, после времени T поставки последней партии товара, имеется, по коммерческому контракту, льготный период длительностью L, в течение которого проценты либо периодически выплачиваются, либо погашаются в момент времени $T + L$, т. е. в конце льготного периода. После окончания льготного периода долг D погашается в течение n лет, равными срочными уплатами k раз в году ($n \cdot k$ – целое число).

Если проценты за льготный период выплачиваются в конце этого периода и начисляются по сложной ставке процентов, то современная величина A потока платежей будет теперь равна:

$$A = \sum_{j=1}^{k} Q_j \cdot (1+q)^{-\tau_j} + D \cdot \left((1+i)^L - 1 + \frac{a_{n;q}^{(k)}}{a_{n;i}^{(k)}} \right) \cdot (1+q)^{-(T+L)}, \quad (17)$$

где q – ставка сравнения, одинаковая для всех сравниваемых вариантов коммерческих контрактов, а сумма долга D вычисляется по формуле (16).

Если же на протяжении льготного периода L проценты выплачиваются m раз в году (предполагаем, что $L \cdot m$ – целое число), то формула (17), в этом случае, трансформируется в формулу:

$$A = \sum_{j=1}^{k} Q_j \cdot (1+q)^{-\tau_j} + D \cdot \left(i \cdot a_{L;q}^{(m)} \cdot (1+q)^{-T} + \frac{a_{n;q}^{(k)}}{a_{n;i}^{(k)}} \cdot (1+q)^{-(T+L)} \right). \quad (18)$$

Естественно, мы не исчерпали все варианты погашения долга D, так как он может погашаться по различным схемам (платежи могут выплачиваться в начале периодов, быть переменными, проценты могут капитализироваться несколько раз в году и т. д.).

Частные случаи сравнения коммерческих контрактов. В частных случаях, когда нет полного набора условий погашения долга (отсутствуют авансовые платежи, льготный период, долг погашается вместе с процентами разовым платежом) можно вывести более простые формулы, существенно облегчающие выбор лучшего варианта для покупателя.

Наиболее простая постановка задачи заключается в сравнении двух вариантов контрактов, в которых предусматривается погашение долга вместе с процентами в конце срока кредитования. Пусть P_j, n_j и i_j – это, соответственно, цена товара, срок кредитования и ставка сложных годовых процентов за кредит для j-го варианта кредитования, $j = 1, 2$. Предположим, для определенности, что $P_1 < P_2$, а $i_1 > i_2$ (если

$i_1 < i_2$, то выбор очевиден: лучше первый вариант кредитования).

Если сроки кредитов одинаковы, $n_1 = n_2 = n$, то в этом случае, при выборе наиболее экономичного варианта покупки товара, можно обойтись без ставки сравнения q. В этом случае достаточно сравнить накопленные суммы долга за кредит S_1 и S_2. Выбор наименьшей величины между S_1 и S_2 зависит от срока n_0, при котором $S_1 = S_2$: $P_1 \cdot (1+i_1)^{n_0} = P_2 \cdot (1+i_2)^{n_0}$. Из этого равенства имеем:

$$n_0 = \frac{LnP_1 - LnP_2}{Ln(1+i_2) - Ln(1+i_1)}. \quad (19)$$

Выбор теперь прост: 1) если $n < n_0$, то лучше первый вариант кредитования, 2) если $n = n_0$, то оба варианта эквивалентны, 3) если $n > n_0$, то лучше второй вариант кредитования.

Немного сложнее задача выбора наилучшего варианта в случае, когда сроки кредитов не равны, $n_1 \neq n_2$. В этом случае обойтись сравниванием только наращенных сумм S_1 и S_2 нельзя, так как они относятся к разным моментам времени и имеют временную ценность. Здесь необходимо сравнивать дисконтированные значения A_1 и A_2 наращенных сумм S_1 и S_2, вычисленных по одной и той же ставке сравнения q:

$$A_1 = P_1 \cdot (1+i_1)^{n_1} \cdot (1+q)^{-n_1}, A_2 = P_2 \cdot (1+i_2)^{n_2} \cdot (1+q)^{-n_2}.$$

Наименьшее дисконтированное значение наращенной суммы и определит выбор наилучшего варианта для покупателя.

Метод критической точки. При выборе приемлемого для покупателя варианта коммерческого контракта может быть применен и другой метод, называемый *методом критической точки* (break-event point analysis). Суть этого метода состоит в следующем. Сравниваются два варианта покупки товара в кредит. Один из вариантов контракта принимается за *базовый* (допустим, первый вариант). Параметры базового варианта: P_1 – цена товара, i_1 – ставка процентов за кредит. Если один из двух параметров P_2, i_2 финансовой сделки у второго поставщика товара не фиксирован и есть возможность вести переговоры о его значении, то возникает возможность определить то его максимальное значение, при котором второй вариант контракта будет конкурентно способен с первым. Например, если ставка i_2 не определена, в этом случае есть возможность определить ставку i_2^0, при которой $A_1 = A_2$, где A_1 и A_2 – современные величины потоков платежей по первому и второму вариантам контрактов, вычисленные по ставке сравнения q. Теперь если $i_2 < i_2^0$, то второй вариант контракта будет более "привлекателен" для покупателя, чем первый. Аналогично, можно определить предельное значение цены P_2^0, если она не задана.

Найдем предельные значения i_2^0 и P_2^0 для самой простой ситуации, когда разовые расчеты по контрактам предусмотрены в конце срока сделки без авансовых платежей. В этом случае равенство $A_1 = A_2$ принимает вид:

$$P_1 \cdot \left(\frac{1+i_1}{1+q} \right)^{n_1} = P_2 \cdot \left(\frac{1+i_2}{1+q} \right)^{n_2}. \tag{20}$$

Разрешая (20) относительно i_2, находим:

$$i_2^0 = (1+q) \cdot \left(\frac{P_1}{P_2} \cdot \left(\frac{1+i_1}{1+q} \right)^{n_1} \right)^{\frac{1}{n_2}} - 1. \tag{21}$$

Если (20) разрешить относительно P_2, то

$$P_2^0 = P_1 \cdot \frac{(1+i_1)^{n_1}}{(1+i_2)^{n_2} \cdot (1+q)^{n_1 - n_2}}. \tag{22}$$

В частном случае, когда $n_1 = n_2 = n$, можно обойтись и без ставки сравнения q. В этом случае

$$i_2^0 = (1+i_1) \cdot \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{n}} - 1, \tag{23}$$

$$P_2^0 = P_1 \cdot \left(\frac{1+i_1}{1+i_2} \right)^{n}. \tag{24}$$

Перейдем к рассмотрению более сложных вариантов коммерческих контрактов, в которых имеется полный набор параметров финансовой операции. Пусть, например, пара-

метры базового варианта следующие: Q_1 – аванс, выплачиваемый в начале операции, P_1 – цена товара при разовой поставке в момент t_1, затем предоставляется льготный период на протяжении L_1 лет. После окончания льготного периода долг погашается на протяжении n_1 лет равными платежами k_1 раз в году ($n_1 \cdot k_1$ – целое число) и на остаток долга начисляются сложные проценты по ставке i_1 годовых. Параметры сравниваемого контракта такие же, только индекс 1 нужно заменить на индекс 2.

Вычислим современные величины потоков платежей для случая, когда проценты за льготный период выплачиваются в конце этого периода по сложной ставке процентов.

Приведем расчеты для базового варианта контракта. Как уже упоминалось выше, на момент t_1 поставки товара сумма долга D_1 может быть рассчитана тремя способами: $D_1 = P_1 - Q_1$, $D_1 = P_1 - Q_1 \cdot (1 + t_1 \cdot i_1)$, $D_1 = Q_1 \cdot (1+i_1)^{t_1}$, в зависимости от того, начисляются ли проценты (и какие) за время t_1 на авансовый платеж Q_1. Процентные платежи I_1, выплаченные в конце льготного периода, составят величину $I_1 = D_1 \cdot ((1+i_1)^{L_1} - 1)$. Годовые платежи равных срочных уплат $Y_1 = D_1 / a_{n_1;i_1}^{(k_1)}$. Тогда

$$A_1 = Q_1 + (I_1 + Y_1 \cdot a_{n_1;q}^{(k_1)}) \cdot (1+q)^{-(t_1+L_1)}. \tag{25}$$

Для сравниваемого варианта коммерческого контракта величина A_2 вычисляется по формуле аналогичной (25), если в ней индекс 1 заменить на индекс 2.

Из равенства современных величин A_1 и A_2 находим предельные значения P_2^0, i_2^0 одного из не заданных параметров сравниваемого контракта. Отметим, что равенство $A_1 = A_2$ линейно зависит от цены P_2 и легко разрешимо относительно этого параметра. Ставка процентов i_2, в указанное равенство, входит не линейно и ее значение i_2^0 можно найти лишь, используя численные методы.

Если на протяжении льготного периода L_1 проценты выплачиваются m_1 раз в году ($L_1 \cdot m_1$ – целое число), то в формуле (25) слагаемое $I_1 \cdot (1+q)^{-(t_1+L_1)}$ нужно поменять на слагаемое

$$D_1 \cdot i_1 \cdot a_{L_1;i_1}^{(m_1)} \cdot (1+q)^{-t_1}. \tag{26}$$

Ясно, что рассмотренные выше схемы платежей далеко не полностью исчерпывают возможные способы погашения задолженностей в коммерческих контрактах.

Пример 6.7.1. Первый продавец продает товар стоимостью в 200 тысяч $ на следующих условиях. Коммерческий кредит выдается под 9,9% годовых. Аванс в 10 тысяч выплачивается в момент подписания контракта, и на аванс начисляются сложные проценты. Товар поставляется через год. Затем следует льготный период в один год, проценты за который выплачиваются в конце периода. После окончания льготного периода долг погашается в течение 7 лет равными платежами в конце каждого полугодия.

Второй продавец тот же товар продает за 205 тысяч в рассрочку под 9,9% годовых на следующих условиях. Выплачивается аванс в 11 тысяч в самом начале сделки. На аванс начисляются простые проценты. Товар поставляется через 3 квартала. Затем следует льготный период в один год и квартал, в течение которого проценты выплачиваются поквартально. После окончания льготного периода долг погашается в течение 8 лет помесячными платежами.

Какого продавца выберет покупатель, если он будет ориентироваться на ставку сравнения в 10% годовых?

▶ Современную величину A_1 потока платежей по первому варианту контракта подсчитаем по формуле (14):

$$A_1 = 10 + (200 - 10,99)\cdot\left(0,099 + \frac{a^{(2)}_{7;10}}{a^{(2)}_{7;9,9}}\right)\cdot 1,1^{-1} = 198,31272.$$

Современную величину A_2 потока платежей по второму варианту контракта вычислим по формуле (15):

$$A_2 = 11 + (200 - 11\cdot(1 + 0,75\cdot 0,098))\times$$

$$\times\left(0,098\cdot a^{(4)}_{1;10} + \frac{a^{(12)}_{8;10}}{a^{(12)}_{8;9,8}}\cdot 1,1^{-1,25}\right)1,1^{-0,75} = 181,71382.$$

Следовательно, второй продавец товара предпочтительнее для покупателя, несмотря на то, что цена его товара на 5 тысяч дороже, чем у первого продавца. ■

Пример 6.7.2. Покупатель планирует купить в рассрочку партию товара у одного из двух поставщиков.

Первый продавец предлагает следующие условия кредитования. Кредит предоставляется под 8,6 годовых, сложных процентов. Товар поставляется тремя партиями, стоимость и время поставки которых следующие: M_1 = 10 тысяч через 3 месяца; M_2 = 15 тысяч через 6 месяцев; M_3 = 18 тысяч через 9 месяцев. Необходимо выплатить 3 авансовых платежа: в 6 тысяч через 2 месяца; в 5 тысяч через 4 месяца; в 4 тысячи через 8 месяцев. После поставки товара предоставляется льготный период по оплате долга на полгода. В течение этого периода проценты не выплачиваются и не гасится долг, а проценты выплачиваются в конце этого периода. После окончания льготного периода долг погашается в течение 5 лет равными полугодовыми платежами постнумерандо.

Условия продажи вторым поставщиком таковы. Ставка за кредит – 8,5 сложных, годовых процентов. Товар предлагается поставить двумя партиями на сумму по 22 тысячи каждая через полгода и год. Аванс в сумме 16 тысяч должен быть выплачен через 4 месяца. После поставки последней партии товара предоставляется льготный период на 3 месяца. В течение этого периода помесячно выплачиваются проценты по сложной ставке процентов. После льготного периода долг должен быть погашен за 6 лет равными срочными уплатами в конце каждого квартала. На остаток долга начисляются сложные проценты.

Для ставки сравнения в 9% годовых выберите наиболее экономичный вариант покупки товара.

▶ Вначале вычислим современную величину A_1 потока платежей по первому варианту коммерческого контракта. Для этого, по формуле (16), вычислим сумму долга на конец девятого месяца:

$$D = 10\cdot 1,086^{0,5} + 15\cdot 1,086^{0,25} + 18 - 6\cdot 1,086^{(0,75-1/6)} -$$

$$- 5\cdot 1,086^{(0,75-1/3)} - 4\cdot 1,086^{(0,75-2/3)} = 28,23545.$$

Теперь, используя формулу(17), вычислим A_1:

$$A_1 = 6 \cdot 1,09^{-1/6} + 5 \cdot 1,09^{-1/3} + 4 \cdot 1,09^{-2/3} +$$

$$+ 28,23545 \cdot \left(1,086^{0,5} - 1 + \frac{a^{(2)}_{5;9}}{a^{(2)}_{5;8,6}} \right) \cdot 1,09^{-1,25} = 40,73012.$$

Для второго варианта коммерческого контракта, соответственно, имеем:

$$D = 22 \cdot 1,085^{0,5} + 22 - 16 \cdot 1,085^{2/3} = 28,02165 \text{ тысяч.}$$

Для вычисления величины A_2 используем формулу (18):

$$A_2 = 22 \cdot 1,09^{-0,5} + 22 \cdot 1,09^{-1} +$$

$$+ 28,02165 \cdot \left(0,085 \cdot a^{(12)}_{0,25;9} \cdot 1,09^{-1} + \frac{a^{(4)}_{6;9}}{a^{(4)}_{6;8,5}} \cdot 1,09^{-1,25} \right) =$$

$$= 66,6238.$$

Итак, первый вариант коммерческого контракта значительно выгоднее для покупателя чем второй. ■

Пример 6.7.3. Товар можно купить у двух поставщиков в рассрочку на одинаковый срок. Кредиты погашаются вместе с процентами разовыми платежами в конце их сроков. Цены товаров и ставки годовых, сложных процентов у поставщиков следующие: $P_1 = 15$ тысяч, $i_1 = 3,5\%$; $P_2 = 14,5$ тысяч, $i_2 = 4,5\%$. Каким должен быть срок кредитования n_0, чтобы оба варианта были равнозначны для покупателя? Какого поставщика предпочтет покупатель, если срок кредита равен трем годам?

▶ Согласно формуле (19) имеем:

$$n_0 = \frac{Ln15 - Ln14,5}{Ln1,045 - Ln1,035} = 3,52573 \text{ года.}$$

Если срок кредита у обоих поставщиков равен трем годам, то так как $3 < n_0$, то покупатель предпочтет второго поставщика. ■

Пример 6.7.4. Сравним два варианта внешнеторгового соглашения: $P_1 = 100,5$ тысяч, $i_1 = 9,8\%$, $n_1 = 5$ лет и $P_2 = 106$ тысяч, $i_2 = 9\%$, $n_2 = 7$ лет. В обоих вариантах

кредиты, вместе с начисленными на них сложными процентами, погашаются в конце срока кредитования. Для ставки сравнения в 10% годовых выберите лучший вариант кредитования для покупателя. При какой ставке сравнения q_0 оба варианта кредитования будут эквивалентны?

▶ Вычислим дисконтированные значения наращенных сумм:

$$A_1 = 100,5 \cdot 1,098^5 \cdot 1,1^{-5} = 99,58968 \text{ тысяч,}$$

$$A_2 = 106 \cdot 1,09^7 \cdot 1,1^{-7} = 99,43575 \text{ тысяч.}$$

Следовательно, предпочтительнее второй вариант внешнеторгового соглашения для ставки сравнения в 10% годовых.

Для того, чтобы определить ставку q_0, будем исходить из равенства современных величин $A_1 = A_2$: $100,5 \cdot 1,098^5 \cdot (1+q)^{-5} = 106 \cdot 1,09^7 \cdot (1+q)^{-7}$. Из этого равенства следует, что

$$q_0 = \left(\frac{100 \cdot 1,09^7}{100,5 \cdot 1,098^5} \right)^{1/2} - 1 = 0,09915 = 9,915\%.$$

Значение $q_0 = 9,915\%$ близко ставке в 10%, по которой производилось сравнение двух вариантов. Этого и следовало ожидать, так как значения A_1 и A_2 близки друг к другу. ■

Пример 6.7.5. Первый продавец реализует товар на сумму в 1000 в рассрочку на 3 года под 7,6% годовых. Другой продавец тот же товар может продать за 11000 в рассрочку на 5 лет. В обоих случаях кредиты погашаются разовыми платежами в конце их сроков. Не выше какой предельной ставки i_2^0 должна быть цена кредита у второго продавца, чтобы его товар был более конкурентно способен, чем у первого? Вычисления проведите с точностью до 0,001% для ставки сравнения в 8% годовых.

▶ Предельную ставку для i_2 найдем из равенства современных величин наращенных сумм платежей: $10000 \cdot 1,076^3 \cdot 1,08^{-3} = 11000 \cdot (1+i_2)^5 \cdot 1,08^{-5}$. Отсюда получаем, что $i_2^0 = 0,05725 = 5,725\%$. Если $i_2 < 5,725\%$, то товар второго продавца будет более привлекателен для покупателей.

Изменим теперь условия задачи. Пусть цена товара у второго продавца не определена, а задана ставка процентов

i_2 = 7% годовых. Определим предельное значение цены товара P^0. Опять обратимся к равенству современных величин A_1 и A_2: $10000 \cdot 1{,}076^3 \cdot 1{,}08^{-3} = P_2 \cdot 1{,}07^5 \cdot 1{,}08^{-5}$. Отсюда находим: P^0 =10360,14, т.е. если $P_2 < 10360{,}14$, то второй продавец конкурентно способнее первого. ■

Пример 6.7.6. Условия базового варианта контракта следующие. Кредит для покупки товара на сумму в 15 млн. выдается под 10% годовых. Товар поставляется через год при выплате аванса в 1 млн. в начале сделки. На авансовый платеж начисляются простые проценты по той же ставке. После поставки товара предоставляется льготный период на полгода, в течение которого в конце каждого месяца выплачиваются проценты по сложной ставке. Далее кредит погашается в течение 5 лет поквартальными, равными платежами постнумерандо.

Второй поставщик того же товара может продать его за 16 млн. на следующих условиях. В начале сделки выплачивается аванс в 1,2 млн., проценты на аванс не начисляются. Товар поставляется через полгода. После поставки товара предоставляется льготный период на год, проценты за который выплачиваются в конце его срока по сложной ставке процентов. Затем долг погашается в течение 7 лет полугодовыми, равными платежами постнумерандо.

Для ставки сравнения в 11% годовых укажите предельное значение ставки i_2^0, при которой оба варианта поставки товара для покупателя будут эквивалентны. Вычисления проведите с точностью до 0,01%.

▶ В начале вычислим современную величину A_1 потока платежей для базового варианта контракта. Сумма долга на конец первого года $D_1 = 15 - 1{,}1 = 13{,}9$ млн. Годовые погасительные платежи на протяжении последних пяти лет равны: $Y_1 = \dfrac{13{,}9}{a_{5;10}^{(4)}} = 3{,}53678852$ млн. Тогда, в силу формулы (25) (с учетом формулы (26)), имеем:

$$A_1 = 1 + 13{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot a_{0{,}5;10}^{(12)} \cdot 1{,}11^{-1} + 3{,}53678852 \cdot a_{5;11}^{(4)} \cdot 1{,}11^{-1{,}5} = $$
$$= 13{,}23756046 \text{ млн.}$$

Для сравниваемого варианта контракта долг к концу полугодия будет равен: $D_2 = 16 - 1{,}2 = 14{,}8$ млн. Используя формулу (25), получим

$$A_2 = 1{,}2 + 14{,}8 \cdot i_2 \cdot 1{,}11^{-1{,}5} + \frac{14{,}8 \cdot a_{7;11}^{(2)}}{a_{7;i_2}^{(2)}} \cdot 1{,}11^{-1{,}5},$$

или

$$A_2 = 1{,}2 + i_2 \cdot 12{,}65543994 + \frac{122{,}4642002 \cdot ((1+i_2)^{1/2} - 1)}{1 - (1+i_2)^{-7}}.$$

Тогда равенство $A_1 = A_2$ приобретает вид:

$$12{,}03756046 = i_2 \cdot 12{,}65543994 + \frac{122{,}4642004 \cdot ((1+i_2)^{1/2} - 1)}{1 - (1+i_2)^{-7}}.$$

Решая это уравнение, получаем: $i_2^0 = 0{,}0696 = 6{,}96\%$. При такой ставке процентов сравниваемый вариант контракта будет эквивалентен базовому варианту. ■

6.8. Задачи и примеры

6.1. Ссуда в размере 380 млн. руб. выдана на квартал (четверть года) под 36 годовых простых процентов. При выдаче ссуды удержаны комиссионные в размере 5% от суммы ссуды. Определите внутреннюю норму доходности для кредитора в виде годовой ставки сложных процентов, если ссуда погашается разовым платежом.

6.2. Ссуда в условиях задачи **6.1** не была погашена вовремя. Должник попросил отсрочку для выплаты долга еще на 3 месяца. Кредитор согласился дать отсрочку при условии, что на накопившуюся задолженность в оставшийся период времени будут начисляться 40% годовых. Определите *IRR* для кредитора в этих условиях, если схема начисления простых процентов не изменилась.

6.3. В условиях задачи **6.1** должник в намеченный срок вернул только 40% от суммы долга. Остальная сумма долга была пролонгирована еще на три месяца под 40% годовых по той же схеме простых процентов. Определите IRR для кредитора в виде годовой ставки сложных процентов.

6.4. Кредит в сумме 420 млн. руб. выдан на два года под 40 годовых сложных процентов и предусматривает разовое погашение долга. При выдаче кредита удержаны комиссионные в размере 0,1% от суммы кредита. Определите IRR для кредитора.

6.5. Должник (в тех же условиях, что и в задаче **6.4**) смог оплатить в оговоренный срок лишь 50% от суммы долга. Оставшаяся задолженность должна быть оплачена через полгода при начислении на нее 45% годовых (простые проценты). Определите, чему будет равно значение IRR для кредитора в виде годовой ставки сложных процентов. Расчет проведите с точностью до 0,5%.

6.6. Вексель в сумме 61,5 тыс. $ погашается 31.12. Владелец векселя решил учесть его в банке 30.06. Банк учитывает векселя с таким сроком погашения по учетной ставке 8,5% годовых и за операцию учета удерживает 0,1% от суммы векселя. Чему равна внутренняя норма доходности для банка от такой операции учета?

6.7. Владелец векселя может учесть его в банке A либо в банке B. Атрибуты векселя и условия его учета в банке A описаны в предыдущей задаче. Банк B учитывает тот же вексель по учетной ставке 8% годовых, но за операцию учета берет 0,15% от суммы векселя. Какой банк предпочтет вексeледержатель?

6.8. Всероссийский биржевой банк (ВББ) выпустил 31 декабря 1991 г. депозитный сертификат достоинством 5 тыс. руб. с условиями: опцион на право покупки 50 руб.; сертификаты принимаются к оплате ВББ по номиналу до 30 декабря 1996 г. и по двойному номиналу с 31 декабря 1996 г. Определите доходность вложения денежных средств в такой сертификат в виде годовой ставки сложных процентов, если сертификат возвращается к оплате в ВББ: а) через 4,5 года; б) через 5 лет.

6.9. Вексель куплен по цене 180$ за 137 дней до его погашения. Через 62 дня его реализовали по цене 190$. Оцените в виде годовой ставки простых процентов доходность купли-продажи векселя. Временная база для начисления простых процентов K = 365 дней.

6.10. Вексель, выданный на сумму 182,4 тыс. $ с уплатой 30.10, был куплен за 180 тыс. $ 17.03. Затем владелец векселя учел его в банке по учетной ставке 3,2% 05.10. За операцию учета банк удержал 0,1% суммы векселя в виде комиссионных. Чему равна доходность купли-продажи векселя в виде годовой ставки простых процентов? Временная база учета K = 360, начисления простых процентов – 365 дней.

6.11. Потребительский кредит в сумме 8520$ выдан на три года под 9,6% годовых (простые проценты). Вычислите действительную эффективность $i_э$ этого кредита, если погашение задолженности полугодовое. Вычисление произведите с точностью до 0,1%, платежи по кредиту – постнумерандо.

6.12. Потребительский кредит выдан на три года под 8 простых годовых процентов и предусматривает погашение поквартальное, равными платежами постнумерандо. Первая выплата – через полгода после получения кредита. Чему равно значение IRR в виде квартальной ставки сложных процентов для этого кредита? Вычисления произведите с точностью до 0,1%.

6.13. Облигация с номиналом в 1 тыс. $ и сроком на 4 года, проценты по которой выплачиваются раз в конце года по норме 7,9%, куплена за 970$. Определите IRR инвестирования средств в эту облигацию? Вычисление проведите с точностью до 0,1%.

6.14. В условиях задачи **6.13** проценты по облигации выплачиваются в конце каждого полугодия. Определите IRR инвестирования средств в эту облигацию. Вычисление проведите с точностью до 0,05%.

6.15. Долгосрочный кредит в сумме 120 тыс. $ предоставлен на 10,5 лет под 9,8% годовых и предусматривает погашение долга равными годовыми суммами, идущими на погашение основного долга, выплаты – постнумерандо. Должнику предоставлен полугодовой льготный период, в течение которого проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга. При оформлении ссуды удержаны комиссионные в размере 0,1% от суммы кредита. Определите IRR для кредита в виде годовой ставки сложных процентов.

6.16. Насколько увеличится IRR в условиях задачи **6.15**, если комиссионные будут удерживаться в размере 0,5% от суммы кредита.

6.17. Предусматривается погашение кредита из задачи **6.15** равными срочными уплатами, остальные условия не меняются. Определите *IRR* для кредитора в этих условиях.

6.18. Портфель облигаций, приобретенный за 415 тыс. $, содержит облигации трех типов: *A*, *B*, *C*. Облигаций типа *A* куплено 1000 по цене 95$ за облигацию. Номинал облигации – 100 $, срок – 5 лет, купонный доход – 8% годовых, выплачиваемых в конце каждого года. Облигаций типа *B* куплено 1000 по цене 120 $ за облигацию. Облигации этого типа имеют номинал 200 $, срок – 8 лет. Купонный доход по этим облигациям не предусмотрен. Облигаций типа *C* приобретено 2000 по цене 100 $ за облигацию. Номинал облигации – 100 $, срок – 4 года, купонный доход – 9% годовых, выплачиваемых в конце каждого полугодия. Определите внутреннюю норму доходности (полную доходность) инвестирования средств в данный портфель в виде годовой ставки сложных процентов.

6.19. В инвестиционный проект вложено 100 млн. $ в конце первого года и 250 млн. $ в конце второго года. Планируется, что первая отдача от инвестиций будет получена в конце четвертого года в размере 150 млн. $. В последующие 4 года отдачи будут возрастать на 10 млн. $ в год. Достигнув максимального значения, они сохранятся на постоянном уровне в течение 5 лет. Наконец, в последующие пять лет будет наблюдаться падение уровня отдач на 5 млн. $ в год. Все отдачи планируется получать в конце года. При норме рентабельности в 9,8% годовых оцените показатели эффективности этого инвестиционного проекта.

6.20. Отдачи от инвестиций из предыдущей задачи могут отклоняться от планируемых значений на 1% в положительную либо отрицательную сторону. Считая, что эти отклонения являются независимыми равномерно распределенными случайными вычислениями, по 100 реализациям наборов отдач оцените значение показателей эффективности инвестиционного проекта.

6.21. Оборудование стоимостью 10 млн. рублей можно взять в аренду на 5 лет, выплачивая равные платежи за первые три года и равные годовые платежи за оставшийся период, но возросшие на 5% по сравнению с платежами в первом периоде. Причем, в первые три года выплаты производятся в конце каждого полугодия, а в оставшийся срок – в конце каждого квартала. Остаточная стоимость оборудования на конец аренды оценивается в 3 млн. рублей. Это же оборудование можно купить в рассрочку на 7 лет под 18,2% годовых, покрывая долг равными платежами в конце каждого года. Какова должна быть величина годовых арендных платежей, чтобы аренда была более привлекательна, чем покупка оборудования, если рыночная ставка процентов составляет 17,9% годовых?

6.22. Оборудование стоимостью в 2 млн. рублей сдано в аренду на 4,5 года. Требуемая доходность владельцем оборудования определена в 25% годовых. Остаточная стоимость оборудования на момент окончания аренды оценивается в 0,8 млн. рублей. Какова должна быть арендная годовая плата, которая обеспечит заданную доходность, если платежи вносятся в начале каждого месяца?

6.23. Пусть арендная плата за оборудование, в условиях примера **6.22**, установлена на уровне 500 тыс. рублей за каждый год, вносимых в начале каждого квартала. Какова действительная доходность этой финансовой операции для владельца, если норма амортизации равна 5,6%?

6.24. Оборудование стоимостью 6 млн. рублей сдается в аренду на 3,5 года. Арендная плата производится равными годовыми платежами в 1,8 млн. рублей вносится в конце каждого полугодия. Остаточная стоимость оборудования на конец срока аренда оценивается в 3 млн. с вероятностью 0,2, в 3,2 млн. с вероятностью 0,5 и в 3,4 млн. с вероятностью 0,3. В каких пределах может колебаться эффективность, в виде годовой ставки сложных процентов i, сдачи оборудования в аренду и чему равно ее среднее, ожидаемое значение?

6.25. Первый продавец может продать партию товара стоимостью в 300 тысяч $ в рассрочку на следующих условиях. Выдается коммерческий кредит под 9,6 годовых процентов. В самом начале операции выплачивается кредит в 50 тысяч. Товар поставляется через три месяца. На аванс начисляются простые проценты до момента поставки товара. После того как товар поставлен, предоставляется льготный период на один год, в течение которого в конце каждого квартала погашаются процентные платежи по сложной ставке процентов. После окончания льготного периода долг погашается в течение 5 лет полугодовыми платежами постнумерандо.

Второй продавец аналогичного товара может продать эту же партию товара за 305 тысяч в рассрочку на следующих условиях. Ставка процентов за кредит – 9,4 годовых процентов. Авансовый платеж в сумме 60 тысяч выплачивается через полгода. После этого через полгода поставляется вся партия товара. На авансовый взнос проценты не начисляются. После поставки товара предоставляется льготный период в полгода, проценты за который выплачиваются в конце периода по простой ставке процентов. После льготного периода долг должен быть погашен за 6 лет платежами в конце каждого квартала.

Для ставки сравнения в 9,7 годовых процентов укажите, какой продавец предпочтительнее для покупателя. Чему будет равна современная величина платежей по лучшему варианту покупки товара?

6.26. Первая судостроительная верфь может построить рыболовецкий траулер стоимостью в 10 млн. долларов и продать его в рассрочку на следующих условиях. Ставка процентов за кредит – 8 годовых процентов. Два авансовых платежа по 8% от стоимости судна выплачиваются в момент подписания контракта и через 8 месяцев. Судно будет поставлено заказчику через 15 месяцев после подписания контракта. На авансовые платежи начисляются простые проценты до момента поставки судна заказчику. После после поставки судна заказчику остаток долга погашается в течение 5 лет полугодовыми платежами.

Вторая судостроительная верфь за рыболовецкий траулер того же типа, стоимостью в 10,5 млн. долларов, требует оплату по следующей схеме. Судно будет продано в рассрочку под 7,5 годовых процентов. Аванс выплачивается через полгода в размере 15% от стоимости судна. Судно будет передано заказчику через 16 месяцев. До этого момента на авансовый платеж начисляются сложные проценты. После выполнения заказа предоставляется льготный период на полгода. Проценты за льготный период выплачиваются в конце его срока по ставке простых процентов. После льготного периода остаток долга погашается в течение 6 лет равными платежами в конце каждого месяца.

Определите, при ставке сравнения в 9 годовых процентов, какую судостроительную верфь выберет заказчик и чему будет равна современная величина платежей по этому заказу?

6.27. Покупатель может купить одну и ту же партию товара в рассрочку у одного из двух поставщиков.

Первый продавец предлагает следующие условия кредитования. Кредит предоставляется под 8 годовых процентов. Товар поставляется двумя партиями, стоимость которых и время поставки следующие: 15 тысяч через 3 месяца, 20 тысяч через 6 месяцев со дня подписания контракта. Выплачиваются два авансовых платежа: 2 тысячи через месяц и 3 тысячи через 4 месяца. На авансовые платежи и на суммы поставленного товара начисляются простые проценты до момента поставки последней партии товара. После 6 месяцев предоставляется льготный период в погода. За льготный период проценты выплачиваются в конце его срока по ставке простых процентов. Остаток долга, после окончания льготного периода, гасится в течение 6 лет равными полугодовыми платежами постнумерандо.

Второй поставщик предлагает следующие условия кредитования. Ставка процентов за кредит – 7,8 годовых процентов. Товар поставляется тремя равными партиями по 12 тысяч каждая с интервалом через 3 месяца. Выплачиваются авансовые платежи: 2 тысячи через 2 месяца и 4 тысячи через 5 месяцев после подписания контракта. На авансовые платежи и на суммы поставляемых товаров начисляются простые проценты до момента поставки последней партии товара. После поставки последней партии товара предоставляется льготный период в один год, проценты за который выплачиваются в конце каждого полугодия по простой ставке процентов. Остаток долга после льготного периода погашается в течение 7 лет в конце каждого года.

Для ставки сравнения в 7,9 годовых процентов выберите наилучший для покупателя вариант кредитования. Чему будет равна современная величина потока платежей по этому варианту?

6.28. Один и тот же товар можно купить у двух поставщиков в рассрочку под простые проценты на одинаковый срок. Кредиты погашаются разовыми платежами вместе с процентами в конце их срока действия. Цены товара и ставки простых, годовых процентов у поставщиков следующие: $P_1 = 16$ тысяч, $i_1 = 4\%$; $P_2 = 16{,}3$ тысячи, $i_2 = 2\%$, временная база $K = 365$ дней. Каким должен быть срок кредитования n_0, чтобы оба варианта кредитования были равнозначны для покупателя? Какого поставщика предпочтет покупатель, если срок кредита равен 320 дней?

6.29. Необходимо сравнить два варианта коммерческих контрактов, заключаемых по ставкам простых, годовых процентов. Цены товара и ставки процентов у поставщиков следующие: $P_1 = 80{,}325$ тысяч, $i_1 = 10{,}3\%$, $n_1 = 240$ дней; $P_2 = 80{,}586$ тысяч, $i_2 = 10{,}1\%$, $n_2 = 250$ дней, временная база $K = 366$ дней. Для ставки сравнения в 10 простых, годовых процентов выберите наилучший вариант коммерческого контракта для покупателя.

6.30. Первый продавец реализует свой товар на сумму в 12000 в рассрочку на 3 года под 8,5 сложных, годовых процентов. Погашение кредита производится разовым платежом в конце его срока.

Другой продавец тот же товар может продать за 12500 в рассрочку на 5 лет с погашением долга равными срочными уплатами в конце каждого полугодия. Не выше какой предельной ставки i_2^0 должна быть цена кредита у второго продавца, чтобы его товар был конкурентно способен с товаром первого продавца? Вычисления проведите с точностью до 0,01% для ставки сравнения в 9 годовых процентов.

6.31. Условия базового варианта контракта следующие. Кредит на сумму в 15,1 тысяч выдается под 9,9 годовых процентов. Товар поставляется через 1,5 года при выплате, в начале сделки, аванса в размере 10% от цены товара. На авансовый платеж начисляются сложные проценты по той же ставке процентов. Предоставляется льготный период на полгода после поставки товара. Проценты за льготный период начисляются по простой ставке процентов и погашаются в течение 4 лет поквартальными, равными платежами постнумерандо.

Второй поставщик того же товара может продать его в кредит за 15,85 тысяч на следующих условиях. Выплачивается аванс в 8% от цены товара через полгода после подписания контракта. После выплаты аванса товар поставляется через 3 месяца. На аванс начисляются простые проценты. После поставки товара остаток долга погашается в течение 7 лет полугодовыми, равными платежами постнумерандо.

Для ставки сравнения в 11 сложных, годовых процентов укажите предельное значение ставки i_2^0, при которой оба варианта поставки товара будут эквивалентны для покупателя. Вычисления проведите с точностью до 0,01%.

Глава 7

ФИНАНСОВЫЕ ОПЕРАЦИИ С ЦЕННЫМИ БУМАГАМИ

В данном разделе кратко рассмотрены математические модели определения доходности инвестирования средств в такие виды ценных бумаг как облигации, сертификаты и векселя. Доходность данных финансовых операций можно определить в виде годовых ставок простых, либо сложных процентов. Указанные показатели доходности получают из уравнений баланса финансовых операций. Приведены решения типовых задач этих финансовых операций.

7.1. Доходность облигаций

Наиболее распространенным видом ценных бумаг с фиксированным доходом являются облигации. Облигация – это ценная бумага, удостоверяющая то, что ее держатель предоставил заем эмитенту этой бумаги. Основные параметры облигации следующие: номинальная цена N, выкупная цена F либо правило ее определения, дата погашения, норма доходности (купонная ставка) g и сроки выплаты процентов. Поскольку номиналы облигаций существенно различаются между собой, то для сопоставления рыночных цен облигаций вводят такое понятие как курс облигаций. *Курс облигаций* $P_к$ – это процентное выражение покупной цены облигации по отношению к ее номиналу, т.е. $P_к = \frac{P}{N} \cdot 100$, где P – рыночная цена облигации. Если $P_к < 100$, то облигация покупается с дисконтом, если $P_к = 100$ – покупается по номиналу и, если $P_к > 100$, то она покупается с премией.

Доходность долгосрочных облигаций в большинстве случаев характеризуется *текущей* и *полной доходностью*. *Текущая доходность* i_t характеризует долю текущих поступлений за год по отношению к сделанным инвестициям. Однако этот показатель не учитывает второй источник дохода – изменение цены облигации за весь срок владения. *Полная доходность* – это внутренняя норма доходности (NPV) инвестиций, вложенных в данную облигацию. *Полная доходность* i – это годовая ставка сложных процентов, измеряющая реальную финансовую эффективность облигации с учетом всех видов доходности по ней. Часто полную доходность по облигации называют *ставкой (нормой) помещения* капитала.

Цена облигации P на рынке – это современная стоимость всех будущих доходов по ней, вычисленная по ставке помещения i.

Рассмотрим показатели доходности наиболее распространенных видов облигаций.

Облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов. Доход от облигаций этого вида получают только в виде выплаты процентов. Такие облигации называют *консолями* или *пожизненными рентами*.

Если выплата процентов производится p раз в году по ставке g/p, то доходность вечных облигаций в практике определяют как

$$i_t = \frac{N \cdot g}{P \cdot p} = \frac{g}{P_к \cdot p} \cdot 100, \qquad (1)$$

а связь между ценой облигации P и ставкой помещения i определяется соотношением

$$P = \frac{N \cdot g}{p((1+i)^{1/p} - 1)}. \qquad (2)$$

Следует отметить, что при $p \neq 1$, формула (1) дает несколько меньший результат, чем реальная эффективность, так как при этом не учитывается возможность реинвестирования полученных процентных средств.

Если перейти к курсовой стоимости $P_к$ облигации, то (2) можно записать в виде

$$P_к = \frac{100 \cdot g}{p((1+i)^{1/p} - 1)}. \qquad (3)$$

Задавая в формулах (2), (3) ставку помещения i можно вычислить (спрогнозировать) цену (курс) облигации.

Разрешая (2). (3) относительно ставки i, получим полную доходность по облигации данного вида:

$$i = \left(\frac{N \cdot g}{p \cdot P} + 1\right)^p - 1 = \left(\frac{100 \cdot g}{p \cdot P_к} + 1\right)^p - 1. \quad (4)$$

Облигации без выплаты процентов (дисконтные облигации). Данный вид облигаций обеспечивает лишь один источник получения дохода – разность между выкупной ценой облигации (обычно это ее номинал N) и ценой приобретения P. Ясно, что у таких облигаций P должно быть меньше выкупной цены и $P_к < 100$. Поскольку купонных доходов эти облигации не дают, то $i_t = 0$. Связь между ценой P (курсом) и ставкой помещения i бескупонной облигации определяется формулой:

$$P = N(1+i)^{-n}, \; P_к = 100(1+i)^{-n}, \quad (5)$$

где n – интервал времени между приобретением облигации и ее погашением. Решая (5) относительно i, находим ставку i помещения облигации:

$$i = \left(\frac{N}{P}\right)^{1/n} - 1, \; i = \left(\frac{100}{P_к}\right)^{1/n} - 1. \quad (6)$$

Облигации с выплатой процентов в конце срока. По облигациям данного вида проценты начисляются и выплачиваются в конце срока в виде одной суммы. Курс таких облигаций может отклоняться в любую сторону от 100. Поскольку периодической выплаты процентов по таким облигациям нет, то $i_t = 0$. В конце срока владелец облигации получает номинал вместе с процентами, поэтому связь между ценой приобретения P и ставкой помещения i имеет вид:

$$P = \frac{P_к \cdot N}{100} = N(1+g)^n \cdot (1+i)^{-n}. \quad (7)$$

Из равенства (7) находим:

$$i = \left(\frac{N}{P}\right)^{1/n} \cdot (1+g) - 1 = \left(\frac{100}{P_к}\right)^{1/n} \cdot (1+g) - 1. \quad (8)$$

Из (8) следует, если курс облигации меньше 100 (облигация приобретается с дисконтом), то $i > g$ и, наоборот, если курс больше 100 (облигация приобретается с премией), то $i < g$.

Облигации с периодической выплатой процентов, погашаемые в конце срока. По таким облигациям выплаты по купонам производятся p раз в году (чаще всего два раза, по полугодиям), каждый раз по ставке g/p. В конце срока она погашается по выкупной цене F (если $F = N$, то по номиналу, как это чаще всего и бывает). Текущая доходность таких облигаций в практике определяется по формуле (1). Для облигаций с периодической выплатой процентов p раз в году и погашением по выкупной цене F в конце срока при условии, что покупка облигации производится в момент получения купонного платежа, связь между ценой P и ставкой помещения i имеет вид:

$$P = F(1+i)^{-n} + N \cdot g \cdot a_{n;i}^{(p)}, \quad (9)$$

где n - срок от момента покупки облигации до ее погашения. Переходя в (9) к курсовой стоимости, имеем:

$$P_к = F_к \cdot (1+i)^{-n} + 100 \cdot g \cdot a_{n;i}^{(p)}, \quad (10)$$

где $F_к = \frac{F}{N} \cdot 100$ – курсовая стоимость выкупной цены. Значение ставки помещения i находим из (9), (10) численно, используя какой-нибудь приближенный метод решения.

Доходность облигаций с учетом налогообложения. В приведенных выше формулах не принималось во внимание удержание налогов на доход, который приносят облигации. Во многих странах доход, который приносят облигации, облагают налогом. Подоходным налогом обычно облагается только купонный налог, пусть q_1 – ставка этого налога. Если налогом облагается прирост капитала $N - P$, то часто ставка налога устанавливается по другой ставке q_2. Полную доходность, с учетом выплаты налогов, определяют точно так же, что и без учета налогообложения. Разница заключается лишь в том, что поток платежей, на основе которого рассчитывается ставка помещения, должен состоять из показателей чистых доходов. Так, например, для облигаций с купонными платежами и погашением в конце срока по номиналу N связь между ценой покупки P и ставкой помещения i следующая:

$$P = (N - (N - P)q_2)(1 + i)^{-n} + (1 - q_1)N \cdot g \cdot a_{n;i}. \quad (11)$$

Соотношение (11) можно выразить и через курсовую стоимость облигации $P_к$, деля обе части на N и умножая на 100,

$$P_к = \frac{100}{1 - q_2 \cdot (1 + i)^{-n}} \cdot ((1 - q_2)(1 + i)^{-n} + (1 - q_1)g \cdot a_{n;i}). \quad (12)$$

Ставка помещения i с учетом налогообложения – корень уравнений (11), (12) относительно i.

Цена займа для эмитента облигаций. В приведенных выше формулах доходность облигаций оценивалась с позиции инвестора, покупающего облигацию. Для эмитента облигаций эффективность привлечения денежных средств оценивается с диаметрально противоположной стороны, чем меньше ставка помещения, тем более привлекательна для эмитента акция по выпуску облигаций. Однако, при выпуске облигаций эмитент неизбежно несет дополнительные расходы (выплата сборов, налогов, комиссионных и т.д.), что сокращает сумму полученную при реализации облигаций. Цену выпуска займа для эмитента можно оценить в виде годовой ставки сложных процентов по расчетным формулам для определения ставки помещения, если в этих формулах из курса облигации вычесть относительную стоимость дополнительных расходов в расчете на 100 денежных единиц номинала.

Пример 7.1.1. Определите, что для инвестора выгоднее? Купить по курсу 95 облигацию номиналом в 1000 \$ в момент выплаты купонных полугодовых платежей по годовой ставке 4,5% за 3,5 года до ее погашения, или за ту же сумму купить вексель на 1065 \$ с оплатой через два года.

▶ Вычислим ставку помещения в облигацию, используя формулу (10) ($F_к$ = 100, p = 2): $95 = 100((1 + i)^{-3,5} + 0,045 \cdot a^{(2)}_{3,5;i})$. Решая это уравнение относительно i, получаем, с точностью до 0,1%, что i = 0,062 = 6,2%.

Если оценить эффективность покупки векселя за 950 \$ в виде годовой ставки сложных процентов i_1, то имеем равенство: $1065 = 950(1 + i_1)^2$. Откуда i_1 = 0,0588 = 5,88%.

Так как $i > i_1$, то средства выгоднее инвестировать в облигацию. ■

Пример 7.1.2. Государственная облигация в момент выпуска размещается по номиналу, гарантирует выплату полугодовых купонных платежей по годовой ставке 5,2% и погашается по номиналу через 3 года. Оцените курсовую стоимость вновь выпускаемой облигации акционерного общества с теми же параметрами, что и у государственной облигации, но с годовыми купонными платежами, чтобы полный доход по ней был в 1,2 раза больше дохода по государственной облигации.

▶ Полная доходность государственной облигации определяется, согласно (10), соотношением:

$$1 = (1 + i)^{-3} + 0,052 \cdot a^{(2)}_{3;i}.$$

Решение этого уравнения относительно i дает следующий результат, с точностью до 0,01%: i = 0,0527 = 5,27%.

Доходность облигации акционерного общества как менее надежная должна быть в 1,2 раза больше, т.е. $i_1 = 0,0527 \cdot 1,2 =$ $= 0,06324 = 6,324\%$. Используя эту ставку и формулу (10), оцениваем ее курсовую стоимость:

$$P_к = \left(1,06324^{-3} + 0,052 \cdot \frac{1 - 1,06324^{-3}}{0,063240}\right) \cdot 100 = 97,013.$$

Итак, курсовая стоимость должна быть на уровне 97. ■

Пример 7.1.3. Облигация приобретена за год до погашения по курсу 95,4. Купонные платежи – полугодовые, с годовой ставкой 6,5%. Облигация гасится с премией, $F_к$ = 105. Оцените банковскую годовую ставку процента на момент покупки облигации.

▶ Инвестор будет вкладывать деньги в облигации, если доходность вложений в облигации будет не меньше доходности депозитных вкладов. Банковская ставка процента должна быть равна (сопоставима) ставке помещения в облигацию. Из (10) имеем: $95,5 = 105(1 + i)^{-1} + 6,5 \cdot a^{(2)}_{1;i}$. Решая это уравнение относительно i, получаем, с точностью до 0,01%, i = 0,172 = 17,2%. На момент покупки облигации банковская ставка должна быть на уровне 17,2% годовых. ■

Пример 7.1.4. Облигация со сроком 5 лет, проценты по которой выплачиваются в конце каждого года по номе 7,2% годовых, куплена по курсу 95 и погашается по номиналу. На купонный доход начисляется налог по ставке 18%, а на прирост капитала – 20% годовых. Оцените полную доходность такой облигации с учетом налогообложения.

▶ Используя уравнение (12), получаем

$$95 = \frac{100}{1 - 0{,}2(1+i)^{-5}} \cdot (0{,}8(1+i)^{-5} + 0{,}82 \cdot 0{,}072 \cdot a_{5;i}).$$

Решение этого уравнения относительно i, с точностью до 0,1 %, дает результат: $i = 0{,}069 = 6{,}9\%$. ■

Пример 7.1.5. Акционерное общество выпускает облигации с купонной ставкой 7,2% и выплатой процентов по полугодиям, погашение через 5 лет по номиналу. Облигации размещаются на первичном рынке по номиналу.

Ровно два года назад это общество выпустило облигации той же длительности, но с купонной ставкой 7% и выплатой процентов по годам и погашением по номиналу. По какой курсовой стоимости необходимо продавать ранее выпущенные облигации, чтобы их инвестиционная привлекательность была бы такой, как и у вновь выпускаемых облигаций?

▶ Определим ставку помещения для вновь выпускаемых облигаций. Для этого воспользуемся уравнением (10), полагая в нем $P_к = F_к = 100$:

$$1 = (1+i)^{-5} + 0{,}072 \cdot a_{5;i}^{(2)}.$$

Решение этого уравнения, с точностью до 0,01%, дает $i = 0{,}0733 = 7{,}33\%$.

Чтобы у ранее выпущенных облигаций инвестиционная привлекательность была бы такой как и у вновь выпускаемых, необходимо все оставшиеся за три года платежа по ней дисконтировать на начало отсчета (дату выпуска новых облигаций) по ставке 7,33%. Используя (10), получаем курсовую стоимость ранее выпущенных облигаций:

$$P_к = (1{,}0733^{-3} + 0{,}07 \cdot a_{3;7{,}33}) \cdot 100 = 99{,}14.$$

Итак, ранее выпущенные облигации в момент выпуска новых облигаций следует продавать по курсу 99,14, что обеспечит равную инвестиционную привлекательность новых и старых облигаций. ■

7.2. Доходность купли-продажи финансовых инструментов

Краткосрочные финансовые инструменты денежного рынка, такие как сертификаты и векселя, могут покупаться и продаваться в пределах срока их обращения. Владелец при этом получает некоторый доход, а при неблагоприятных условиях – терпит убытки.

Сертификат – срочная ценная бумага выпускаемая банком на срок от 30 дней до года (3, 6, 9, 12 месяцев). Срок обращения сберегательных сертификатов может превышать год и ограничивается тремя годами. Размещаются сертификаты на первичном рынке, как правило, по номиналу N, проценты начисляются по простой годовой ставке i. Выплата процентов и погашение номинала сертификата производится в конце срока их обращения. Сертификат обеспечивает владельцу (бенефициару) доходность на уровне объявленной ставки i, если сертификат находится у владельца весь срок его обращения t дней.

Сертификаты являются объектом инвестиций и могут быть куплены, проданы на рынке ценных бумаг. Доходность данной финансовой операции может быть измерена в виде годовой ставки простых процентов $i_{эп}$, либо сложных процентов $i_э$.

Рассмотрим доходность купли-продажи сертификата в соответствии со сроками проведения этой операции. Возможны три варианта.

1. Сертификат покупается по номиналу N и продается за t_2 дней до его погашения по рыночной ставке i_2. Доходность этой операции, в виде годовой ставки простых процентов,

$$i_{эп} = \frac{P_2 - N}{N} \cdot \frac{365}{t - t_2}, \qquad (13)$$

где 365 – временная база, которая обычно используется при переводе количества дней в долю года. В формуле (13) эффективность выражается через номинал N сертификата и цену P_2 его продажи. Цену P_2 можно выразить через ставку простых процентов i_2, доминирующую на денежном рынке на момент продажи сертификата:

$$P_2 = \frac{365 + t \cdot i}{365 + t_2 \cdot i_2} \cdot N.$$

Подставляя это значение в (13), получим

$$i_{эп} = \frac{365}{t - t_2} \cdot \left(\frac{365 + t \cdot i}{365 + t_2 \cdot i_2} - 1 \right) \qquad (14)$$

В формуле (14) эффективность определяется через значения ставок i, i_2.

Эффективность финансовой операции можно выразить и через ставку сложных процентов

$$i_э = \left(\frac{P_2}{N} \right)^{\frac{365}{t - t_2}} - 1 = \left(\frac{365 + t \cdot i}{365 + t_2 \cdot i_2} \right)^{\frac{365}{t - t_2}} - 1. \qquad (15)$$

2. Сертификат покупается после выпуска за t_1 дней до погашения (i_1 – рыночная ставка на момент покупки) и погашается в конце срока. Ставки простых и сложных процентов, характеризующие эффективность инвестирования в сертификат, следующие:

$$i_{эп} = \frac{N(365 + t \cdot i)}{P_1 \cdot t_1} - \frac{365}{t_1} = i_1, \qquad (16)$$

$$i_э = \left(\frac{(365 + t \cdot i) \cdot N}{365 \cdot P_1} \right)^{\frac{365}{t_1}} - 1 = \left(\frac{365 + t_1 \cdot i_1}{365} \right)^{\frac{365}{t_1}} - 1. \qquad (17)$$

3. Сертификат покупается и продается в пределах срока обращения. Пусть сертификат покупается по цене P_1 (i_1 – ставка простых процентов на момент покупки) за t_1 дней до погашения, продается по цене P_2 (i_2 – ставка простых процентов на момент продажи) за t_2 дней до погашения. Ставки процентов, характеризующие эффективность, находятся из уравнения баланса этой финансовой операции и определяется формулами:

$$i_{эп} = \frac{365}{t_1 - t_2} \cdot \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) = \frac{365}{t_1 - t_2} \cdot \left(\frac{365 + t_1 \cdot i_1}{365 + t_2 \cdot i_2} - 1 \right) \qquad (18)$$

$$i_э = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{365}{t_1 - t_2}} - 1 = \left(\frac{365 + t_1 \cdot i_1}{365 + t_2 \cdot i_2} \right)^{\frac{365}{t_1 - t_2}} - 1. \qquad (19)$$

Перейдем теперь к анализу эффективности операции купли-продажи векселей.

Вексель – долговая расписка, в которой указана сумма N, которая должна быть выплачена в оговоренный срок. Векселя являются объектом купли-продажи на финансовом рынке.

Пусть вексель куплен по цене P_1 (d_1 – учетная ставка на момент покупки) за t_1 дней до погашения. За t_2 дней ($t_2 < t_1$) до погашения он был продан по цене P_2 (d_2 – рыночная учетная ставка на момент продажи). Исходя из уравнения баланса данной финансовой операции, ее эффективность определяется формулами:

$$i_{эп} = \frac{365}{t_1 - t_2} \cdot \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) = \frac{365}{t_1 - t_2} \cdot \left(\frac{360 - t_2 \cdot d_2}{360 - t_1 \cdot d_1} - 1 \right) \qquad (20)$$

$$i_э = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{365}{t_1 - t_2}} - 1 = \left(\frac{360 - t_2 \cdot d_2}{360 - t_1 \cdot d_1} \right)^{\frac{365}{t_1 - t_2}} - 1, \qquad (21)$$

где 360 – это временная база учета векселей.

Пример 7.2.1. Вексель, на сумму 20850000 рублей, куплен по цене 20250000 рублей за 150 дней до его погашения. Через 30 дней его реализовали по учетной ставке 5,25% годовых. Оцените доходность этой финансовой операции в виде годовых ставок простых и сложных процентов. Временная база учета по простым и сложным процентам – 365 дней.

▶ Цена продажи векселя составила $P_2 = 20850000 \times \times \left(1 - \frac{120}{360} \cdot 0{,}0525\right) = 20485125$ рублей. По условию примера $P_1 = 20250000$, $t_1 = 150$, $t_2 = 120$. Подставляя эти данные в формулы (20), (21), получим: $i_{эп} = 14{,}13\%$, $i_э = 15{,}08\%$. ■

Пример 7.2.2. Инвестор желает инвестировать 1000 $ в ценные бумаги и решает вопрос. Купить ли ему за эту сумму вексель в 1100 \$ с погашением через 2 года или приобрести облигацию за 1000 \$ с полугодовой выплатой процентов по ставке 4,4% годовых номиналом в 1000 \$, погашаемую через два года с премией 101? Какой вариант для инвестора предпочтительнее, если ориентироваться на эффективность в виде годовой ставки сложных процентов?

▶ Эффективность вложения денежных средств в вексель составит $i_э = \sqrt{\frac{1100}{1000}} - 1 = 0{,}0488 = 4{,}88\%$. Вычислим эффективность инвестирования средств в облигацию, опираясь на формулу (9): $1000 = 1010(1+i)^{-2} + 1000 \cdot 0{,}044 \cdot a^{(2)}_{2;i}$. Решение этого уравнения с точностью до 0,01% дает результат $i = i_э = 0{,}0494 = 4{,}94\%$. Это выше, чем 4,88%. Следовательно, предпочтительнее деньги вложить в покупку облигации. ■

Пример 7.2.3. Планируется 01.06 купить за 980 \$ вексель либо сертификат и продать финансовый инструмент через 30 дней. Параметры векселя: сумма в 1020 \$, выплачиваемая 15.08. Параметры сертификата: номинал 1000 \$, выпущен в обращение 15.05 с погашением по номиналу через 90 дней, объявленная ставка – 9,5% годовых. Предполагается, что на момент продажи финансового документа ставка простых процентов на финансовом рынке будет на уровне 9,8%, а банковская учетная ставка – 9,2% . Какой финансовый инструмент выгоднее купить?

▶ Определим доходность вложения средств в покупку-продажу векселя в виде годовой ставки простых процентов $i_{эп}$. Цена P_2, по которой вексель должен быть продан, определяется из равенства: $P_2 = 1020\left(1 - \frac{227-182}{360} \cdot 0{,}092\right) = 1008{,}27$, где 227 – порядковый номер 15.08, а 182 – порядковый номер 01.07. По условию задачи, цена покупки – $P_1 = 980$. Тогда, в силу формулы (20), $i_{эп} = \frac{365}{30}\left(\frac{1008{,}27}{980} - 1\right) = 0{,}351 =$ $= 35{,}1\%$.

Вычислим теперь доходность инвестирования в покупку-продажу сертификата. Порядковый номер 15.05 – 135, а порядковый номер даты погашения сертификата – 225. Так как ожидается, что 01.07 рыночная ставка простых процентов будет порядка 9,8%, то сертификат должен быть продан по цене $P_2 = 1000\left(1 + \frac{90}{365} \cdot 0{,}095\right)\left(1 + \frac{225-182}{365} \cdot 0{,}098\right)^{-1} = 1011{,}74$. Используя формулу (18), имеем $i_{эп} = \frac{365}{30}\left(\frac{1011{,}74}{980} - 1\right) = 0{,}394 =$ $= 39{,}4\%$. Следовательно, выгоднее вложить денежные средства в покупку-продажу сертификата. ■

Пример 7.2.4. Вексель на сумму 2080 \$ куплен за 2030 \$ 01.06. Вексель должен быть погашен 15.08. Планируется продать вексель за 45 дней до его погашения. Есть основания считать, что учетная ставка на момент продажи может с равной вероятностью принять любое значение из интервала [4%; 4,8%], т.е. иметь равномерное распределение на этом интервале. Оцените среднюю ожидаемую доходность операции купли-продажи векселя в виде годовой ставки простых процентов $i_{эп}$ и вероятность того, что $i_{эп} \in [22{,}5\%;\ 23\%]$.

▶ Порядковые номера дат продажи и погашения векселя указаны в решении предыдущего прмера. Цена P_2, по которой должен быть продан вексель, определяется соотношением: $P_2 = P_2(d) = 2080\left(1 - \frac{45}{360} \cdot d\right)$, где d – учетная ставка на момент продажи векселя. Так как P_2 линейно зависит от d и ставка d распределена равномерно в интервале [0,04; 0,048] то, как известно из курса теории вероятностей, цена P_2 так же будет равномерно распределена в интервале $[P_{21}, P_{22}]$, $P_{21} = P_2(0{,}048) = 2067{,}52$ \$, $P_{22} = P_2(0{,}04) = 2069{,}6$ \$. Доходность операции купли-продажи, в силу (20), равна $i_{эп} =$ $= \frac{365}{30}\left(\frac{P_2}{2030} - 1\right)$. Опять, $i_{эп}$ линейно выражается через случайную величину P_2, которая имеет равномерное распределение. Значит, ставка $i_{эп}$ также равномерно распределена в интервале $[i_1,\ i_2]$. Здесь $i_1 = \frac{365}{30}\left(\frac{2067{,}52}{2030} - 1\right) = 0{,}2249 =$ $= 22{,}49\%$. Аналогично, $i_2 = \frac{365}{30}\left(\frac{2069{,}6}{2030} - 1\right) = 0{,}2373 =$ $= 23{,}73\%$. Среднее, ожидаемое значение доходности равно $(22{,}49 + 23{,}37) : 2 = 22{,}93\%$, а $P(22{,}5\% \le i_{эп} \le 23\%) =$ $= \frac{0{,}5}{0{,}88} = 0{,}568$. ■

7.3. Диверсификация финансовых активов. Риск финансовой операции

В финансовом анализе часто приходится сталкиваться с неопределенностью исхода финансовых операций. Пример тому – инвестиции в ценные бумаги. Приобретая пакет ценных бумаг, инвестор не может гарантировать, какой доход он получит (возможно, потерпит убытки). В связи с этим возникает проблема измерения риска финансовой операции и управления, если возможно, этим риском.

В финансовом анализе термин "риск" понимается неоднозначно. Следует различать риск и неопределенность. Если результат финансовой операции можно рассматривать как случайную величину с заданным либо спрогнозированным законом распределения вероятностей, то в данной ситуации имеет место *риск* инвестирования средств в операцию и этот риск можно численно измерить. Если же никакой априорной информации об исходе финансовой операции нет, то мы находимся в условиях *неопределенности*, и в этом случае не представляется возможным измерить численно величину риска финансовой операции. Желание иметь наиболее прибыльный пакет ценных бумаг всегда сопряжено с риском потерпеть убытки. В практической финансовой деятельности стремятся либо компенсировать риск с помощью, так называемых, *рисковых премий*, либо, если есть возможность, *управлять риском*, уменьшая его. Управлять риском можно разными способами: заключать форвардные контракты, страховать финансовые операции, покупать валютные или процентные опционы и т. д. В инвестиционной деятельности общепринятым приемом, позволяющим уменьшить риск, является *диверсификация* капиталовложений, под которой понимают распределение общей суммы капиталовложений между несколькими проектами или объектами. Следует сказать, что диверсификация используется не только в финансовой, но и в других областях человеческой деятельности.

В инвестиционном анализе и в страховании величина риска часто измеряется с помощью таких числовых характеристик, как дисперсия и среднее квадратическое отклонение дохода от финансовой операции: $D\{\xi\}$ и $\sigma = \sqrt{D\{\xi\}}$,

где ξ – случайная величина, определяющая доход финансовой операции. Чем меньше эти характеристики, тем меньше показатели дохода будут отклоняться относительно средней величины дохода $E\{\xi\}$ и тем более предсказуемой, менее рискованным будет исход финансовой операции.

Определим теперь, как диверсификация позволяет уменьшить величину риска финансовой операции на примере формирования пакета (портфеля) ценных бумаг, состоящего из n видов ценных бумаг. Доход от одной ценной бумаги вида i представляет собой случайную величину ξ_i со средним значением $d_i = E\{\xi_i\}$. Суммарный доход портфеля, состоящего из n таких бумаг – случайная величина

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \xi_i, \tag{22}$$

где x_i – доля бумаги вида i в пакете. Очевидно, что $x_1 + ... + x_n = 1$. Средний доход, который будет давать этот портфель, равен:

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot d_i. \tag{23}$$

Дисперсия дохода (риск вложения средств в портфель) определяется формулой:

$$D\{\xi\} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sigma_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma_j, \tag{24}$$

где в двойной сумме $i < j$, $\sigma_i = \sqrt{D\{\xi_i\}}$, а r_{ij} – коэффициент корреляции доходов от бумаг видов i и j:

$$r_{ij} = \frac{E\{\xi_i \cdot \xi_j\} - E\{\xi_i\} \cdot E\{\xi_j\}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}.$$

Из формулы (24) следует, что управлять риском $D\{\xi\}$, т.е. уменьшать его величину, можно за счет выбора такой структуры портфеля, в котором будет как можно больше пар ценных бумаг с отрицательными коэффициентами корреляций между ними. В идеале (это реализуется лишь для простейшего набора ценных бумаг) можно добиться нулевого риска портфеля.

Минимизация риска. Определим структуру портфеля с минимальным риском. Предположим, что нет статистической зависимости между доходами от отдельных видов инвестиций. Обозначим через x^0 вектор $(x^0)^T = (x_1^0, ..., x_{n-1}^0)$ размерности $n-1$, а через $e^T = (1, ..., 1)$ – единичный вектор размерности $n-1$, через D – матрицу, у которой диагональные элементы

$$d_{ii} = 1 + \frac{\sigma_i^2}{\sigma_n^2}, i = 1, 2, ..., n-1,$$

а не диагональные элементы равны единице. Тогда оптимальный портфель имеет структуру:

$$x^0 = D^{-1} \cdot e, x_n^0 = 1 - e^T \cdot x^0. \quad (25)$$

Отметим, что структуру портфеля с наименьшим риском при наличии корреляции между доходами различных видов ценных бумаг можно определить. Однако формулы в данном случае громоздки, в силу чего они здесь не приводятся. В частном случае, когда $n = 2$ и доходы двух бумаг зависимы друг от друга, структура оптимального портфеля такова:

$$x_1^0 = \frac{1 - r_{12} \cdot \sqrt{D_{1/2}}}{1 + D_{1/2} - 2 \cdot r_{12} \cdot \sqrt{D_{1/2}}}, x_2^0 = 1 - x_1^0, D_{1/2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}. \quad (26)$$

Модель Марковица диверсификации портфеля ценных бумаг. Лауреат нобелевской премии по экономике Г. Марковиц предложил следующий подход к формированию оптимального портфеля ценных бумаг. Можно определить доли x_i^0 ценной бумаги i в портфеле так, чтобы этот портфель обеспечивал заданный уровень среднего дохода при минимизации его риска, т.е.

$$x^T d = A_0, x^T \cdot V \cdot x \xrightarrow{\quad} \min, \quad (27)$$

где $x^T = (x_1, ..., x_n), d^t = (d_1, ..., d_n), A_0$ – заданный уровень среднего дохода, $V = (V_{ij})$ – ковариационная матрица с элементами $V_{ij} = E\{(\xi_i - d_i)(\xi_j - d_j)\}$. Решение x^0 задачи (27) имеет вид:

$$x^0 = V^{-1} \cdot \frac{A_0 \cdot (e \cdot M_{12} - d \cdot M_1) + d \cdot M_{12} - e \cdot M_2}{M_{12}^2 - M_1 \cdot M_2}, \quad (28)$$

где

$$M_1 = e^T \cdot V^{-1} \cdot e, \ M_2 = d^T \cdot V^{-1} \cdot d,$$
$$M_{12} = e^T \cdot V^{-1} \cdot d, \ e^T = (1, ..., 1).$$

Пример 7.3.1. Необходимо сформировать портфель ценных бумаг, состоящий из бумаг двух видов. Доходности этих бумаг (в тысячах условных единиц) являются дискретными случайными величинами ξ_1 и ξ_2 со следующим совместным распределением вероятностей:

$\xi_1 \setminus \xi_2$	250	200	150
200	0,15	0,08	0,07
180	0,02	0,2	0,07
160	0,12	0,1	0,19

Определите: а) среднюю доходность и риск портфеля при условии, что бумаг первого типа в портфеле 30%, а второго типа – 70%; б) структуру портфеля с минимальным риском и его среднюю доходность при такой структуре; в) структуру портфеля, гарантирующего среднюю доходность в 180 тысяч при минимальном риске.

▶ Из совместного распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 следует, что их маргинальные распределения таковы:

ξ_1	200	180	160	ξ_2	250	200	150
P	0,3	0,29	0,41	P	0,29	0,38	0,33

Отсюда легко получаем, что $d_1 = 177{,}8$; $D\{\xi_1\} = 279{,}16$; $\sigma_1 = 16{,}70808188$; $d_2 = 198$; $D\{\xi_2\} = 1546$; $\sigma_2 = 39{,}31920065$.

Вычислим теперь коэффициент корреляции r_{12} между величинами ξ_1 и ξ_2. Из совместного рапределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 получаем, что $E\{\xi_1 \cdot \xi_2\} = 35350$. Тогда

$$r_{12} = \frac{35350 - 177,8 \cdot 198}{16,70808188 \cdot 39,3192065} = 0,221630759.$$

а) В силу формулы (23), средняя доходность портфеля $A = 0,3 \cdot 177,8 + 0,7 \cdot 198 = 191,94$ тысячи. Риск такого портфеля, с учетом формулы (24), следующий:

$$D\{\xi\} = 0,3^2 \cdot 279,16 + 0,7^2 \cdot 1546 +$$
$$+ 2 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,221630759 \cdot 16,70808188 \cdot 39,3192065 =$$
$$\sigma_2 = \sqrt{843,8163998} = 29,04851803.$$

б) Используя формулу (26), получим оптимальные веса бумаг первого и второго типов:

$$x_1^0 = \frac{1 - 0,221630759 \cdot \sqrt{\frac{279}{1546}}}{1 + \frac{279}{1546} - 2 \cdot 0,221630759 \cdot \sqrt{\frac{279}{1546}}} = 0,913003996,$$

$$x_2^0 = 0,086996004.$$

Средний доход такого портфеля

$$A^0 = 0,91303996 \cdot 177,8 + 0,08696004 \cdot 198 = 179,55659 \text{ тысяч.}$$

А риск равен

$$D\{\xi\} = 0,913003996^2 \cdot 279,16 + 0,086996004^2 \cdot 1546 +$$
$$+ 2 \cdot 0,913003996 \cdot 0,086996004 \cdot 0,221630759 \cdot 16,70808188 \times$$
$$\times 39,3192065 = 266,9428586,$$
$$\sigma = \sqrt{266,9428586} = 16,33838605.$$

в) Ковариация между доходами от бумаг первого и второго типов равна:

$$E\{(\xi_1 - d_1)(\xi_2 - d_2)\} = E\{\xi_1 \cdot \xi_2\} - d_1 \cdot d_2 =$$
$$= 35350 - 177,8 \cdot 198 = 145,6.$$

Матрица ковариаций

$$V = \begin{pmatrix} 279,16 & 145,6 \\ 145,6 & 1546 \end{pmatrix}.$$

Матрица обратная к ней

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 0,003769493842 & -0,0003550053709 \\ -0,0003550053709 & 0,0006806545285 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления оптимальной структуры портфеля, гарантирующего средний доход $A_0 = 180$ тысяч, воспользуемся формулой (28). Непосредственные вычисления показывают, что $M_1 = 120,853189$, $M_{12} = 0,671574582$. Подставляя теперь все данные в формулу (28), получим: $(x^0)^T =$ $= (0,89366914; 0,106747699)$, т.е. $x_1^0 = 0,893669614 \approx 89,37\%$; $x_2^0 = 0,106747699 \approx 10,67\%$. Однако сумма $x_1^0 + x_2^0$ не равна 100% (есть разница в 0,04%). Это объясняется ошибками округления при расчетах. Средний доход такого портфеля

$$A = 0,893669514 \cdot 177,8 + 0,106747699 \cdot 198 =$$
$$= 180,0305 \approx 180 \text{ тысяч.}$$

Этого и следовало ожидать. ■

Пример 7.3.2. Экспертным путем установлено, что отношения дисперсий доходов четырех ценных бумаг, составляющих портфель, следующие: $D_{1/4} = 1,8$, $D_{2/4} = 2$, $D_{3/4} = 0,7$. Доходы ценных бумаг не коррелируют между собой. Определите структуру такого портфеля с минимальным риском.

▶ По формуле (25) получим

$$x^0 = \begin{pmatrix} 2,8 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1,7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,159453304 \\ 0,143507973 \\ 0,41002278 \end{pmatrix},$$

$$x_4^0 = 1 - (0,159453304 + 0,143507973 + 0,41002278) =$$
$$= 0,287015943.$$

Итак, в портфель следует включить 15,95% бумаг первого типа, 14,35% – второго, 41% – третьего и 28,7% – четвертого типа. ■

7.4. Задачи и примеры

7.1. Пожизненная рента, приносящая 5,3% ежегодного дохода, куплена по курсу 95. Какова текущая и действительная эффективность инвестиций в данную ценную бумагу в виде годовой ставки сложных процентов, если: а) проценты выплачиваются раз в году, б) по полугодиям?

7.2. Вечная рента, дающая 6,5% ежегодного дохода в конце каждого полугодия, продается. Оцените курсовую стоимость такой ренты при нормативе доходности в 7% годовых.

7.3. Облигация без обязательного погашения с периодической выплатой процентов в конце каждого года по годовой ставке 4,5% куплена по курсу 96. На купонный доход накладывается налог по ставке 20%. Вычислите реальную эффективность инвестирования средств в данную облигацию в виде годовой ставки сложных процентов с учетом налогообложения.

7.4. Стоит ли покупать по курсу 94,24 облигации за 5 лет до их погашения с купонными платежами в конце каждого полугодия по годовой ставке 8% и погашением по номиналу, если есть возможность поместить эти денежные средства в банк под 9% годовых? Какова реальная эффективность инвестирования средств в данный вид облигаций в виде годовой ставки сложных процентов?

7.5. Акционерное общество выпускает облигации с купонной ставкой 8,3% и выплатой процентов в конце каждого года, погашение через 5 лет с премией по курсу 105. Облигации размещаются на первичном рынке по номиналу.

Ровно два года назад это общество выпустило облигации той же длительности, но с купонной ставкой 7,2% и выплатой процентов по полугодиям и погашением по номиналу. По какой курсовой стоимости необходимо продавать ранее выпущенные облигации в момент выпуска новых облигаций, чтобы их инвестиционная привлекательность была бы такой же, как и у вновь выпускаемых облигаций?

7.6. Пусть в условиях предыдущей задачи вновь выпускаемая облигация размещается на первичном рынке с дисконтом по курсу 95, а погашается по номиналу. Исследуйте,

как теперь изменится, по сравнению с предыдущим случаем, курс ранее выпущенных облигаций: уменьшится, останется неизменным или увеличится и насколько?

7.7. Облигация без обязательного погашения с периодической выплатой процентов по полугодиям по ставке 5,2% годовых куплена с премией по курсу 110. Вычислите ставку помещения для данной облигации.

7.8. Реализуется облигация по курсу 95, проценты и номинал погашаются в конце срока. Проценты начисляются по ставке 6,2% годовых. Определите ставку помещения в данную облигации при: а) сроке в 8 лет, б) сроке в 12 лет.

7.9. Облигация продается за 6 лет до ее погашения, проценты и номинал погашаются в конце срока, проценты начисляются по ставке 8,1% годовых. Определите, по какому курсу должна продаваться данная облигация, чтобы ставка помещения составила 9,2% годовых?

7.10. Два года назад пенсионный фонд выпустил в обращение облигацию длительностью 7 лет, номинал и проценты по ставке 9,2% годовых погашаются в конце срока. Облигации были размещены по курсу 95. В данный момент акционерное общество выпускает облигацию сроком в 5 лет с купонной ставкой 8,3% годовых и выплатой процентов по полугодиям. Облигация будет погашена по номиналу. Определите, по какой курсовой стоимости следует начать продавать акционерному обществу эти облигации, чтобы доходность по ним была бы не ниже доходности облигаций пенсионного фонда?

7.11. В 1981 году американская корпорация " Пепсико капитал корпорейшн" выпустила облигации сроком 3 года без выплаты процентов на сумму 75 млн. $. В конце срока облигации погашались по номиналу. Облигация реализовывалась по низкому курсу 67,5. Определите доходность помещения капитала в облигации данного вида в виде годовой ставки сложных процентов.

7.12. В условиях предыдущей задачи определите, по какому курсу должна была продаваться через год после выпуска облигация корпорации " Пепсико капитал корпорейшн", чтобы обеспечить ее владельцу доходность в 12% годовых.

7.13. Облигация сроком 5 лет погашается по номиналу вместе с процентами по ставке 6,3% годовых в конце срока ее обращения, размещается на первичном рынке по номиналу. Оцените, в каких пределах будет колебаться курсовая стоимость такой облигации через год, если предполагается, что ставка помещения будет колебаться в пределах 8–8,5 % годовых?

7.14. Необходимо выбрать, какая из двух облигаций *A* и *B* более предпочтительна для инвестирования, если ориентироваться на ставку помещения. Облигация *A* со сроком до погашения 5 лет, проценты по которой выплачиваются раз в конце года по норме 8% и погашается по номиналу, продается по курсу 97. Облигация *B* со сроком до погашения 6 лет продается по курсу 115, проценты по ней выплачиваются также раз в конце года по норме 12% годовых. Облигация погашается по выкупной цене 105.

7.15. Облигация со сроком до погашения 5 лет, проценты по которой выплачиваются раз в конце года по норме 8,1% годовых, куплена по курсу 96,5. Облигация в конце срока погашается по номиналу. На купонный доход начисляется налог по ставке 18%, а на прирост капитала – 25%. Вычислите ставку помещения данной облигации с учетом налогообложения.

7.16. Пусть выполняются условия примера **7.15**, но ставка налога на прирост капитала не начисляется. Вычислите ставку помещения с учетом налогообложения.

7.17. Акционерное общество выпускает в обращение облигацию сроком 5 лет и погашением по номиналу. По облигации выплачивается купонный доход в 5,2% годовых каждый год. На первичном рынке облигация размещена по курсу 105. Расходы акционерного общества по выпуску и реализации облигаций составили 0,5% к номиналу всех облигаций. Оцените цену выпуска облигаций для акционерного общества в виде годовой ставки сложных процентов.

7.18. Пенсионный фонд выпускает облигацию сроком 10 лет, погашение по номиналу и выплата процентов по норме 5,7% годовых в конце срока обращения облигации. На первичном рынке облигация располагается с премией по курсу 106. Расходы по выпуску облигации и ее распространению

на первичном рынке составили 1% от номинала. Оцените цену выпуска облигации для пенсионного фонда в виде годовой ставки сложных процентов.

7.19. Портфель облигаций, приобретенный за 35500 $, содержит облигации трех типов: *A, B, C*. Облигаций типа *A* приобретено 100, по цене 95 $, с номиналом 100 $, срок до погашения – 3 года, выплата процентов – по годам, по норме 8%, погашение – по номиналу. Облигаций типа *B* приобретено 50, по цене – 120 $, номинал – 200 $, срок – 6 лет. Погашаются они по номиналу без выплаты процентов. Облигаций типа *C* приобретено 200, по номиналу в 100 $, срок – 3 года, выплата процентов полугодовая, по норме 9% годовых, в конце срока облигация погашается по номиналу. Вычислите ставку помещения в данный портфель облигаций.

7.20. В условиях примера **7.19** изменим количество облигаций типа *B, C*. Пусть теперь облигаций типа *B* в портфеле находится 55, а облигаций типа *C* – 194. Какова теперь ставка помещения? Будет ли новый портфель более привлекателен для инвестирования, чем портфель задачи **7.19**?

7.21. Вексель куплен за 160 дней до его погашения. На момент покупки рыночная учетная ставка составляла 6,1% годовых. Через 45 дней вексель продали по учетной ставке 5,6% годовых. Оцените эффективность данной финансовой операции в виде годовых ставок простых и сложных процентов.

7.22. Инвестор желает инвестировать 950 $ в покупку векселя по цене 950 $. Сумма векселя – 1200 $, срок до погашения – 1,5 года. Альтернативный вариант – купить за ту же сумму облигацию по курсу 95, с полугодовой выплатой процентов по купонной ставке 9,6%, с погашением по номиналу через 1,5 года. Какой из вариантов предпочтительнее для инвестора?

7.23. Сертификат, номиналом в 1000 $, с объявленной ставкой в 8,5 простых, годовых процентов и сроком обращения в 90 дней, куплен за 1010 $, за 60 дней до погашения. Сертификат погашается по номиналу вместе с начисленными процентами. Планируется продать его через 20 дней. Прогнозируется, что в момент продажи рыночная ставка простых процентов может принять значение 8% с вероятностью 0,3; 8,4% – с вероятностью 0,5 и 8,8% – с вероятностью 0,2. Оцените числовые характеристики простой ставки процентов, характеризующие эффективность операции купли-продажи финансового инструмента: минимальное и максимальное значение, среднее, ожидаемое значение, дисперсию.

7.24. Сертификат куплен за 102000 рублей и был продан за 106200 рублей через 80 дней. Какова доходность этой финансовой операции, измеренная в виде годовых ставок простых и сложных процентов?

7.25. Сертификат куплен за 150 дней до его погашения и продан через 30 дней. В момент покупки ставка простых процентов была 9,5%, а в момент продажи – 9,7% годовых. Оцените доходность этой финансовой операции в виде годовых ставок простых и сложных процентов.

7.26. Сертификат с номиналом 500000 рублей, с объявленной доходностью 25 простых годовых процентов и сроком обращения 365 дней куплен за 600000 рублей за 90 дней до его погашения. Рыночная ставка простых процентов на момент покупки составила 24%. Какова доходность инвестирования средств в сертификат до конца срока его обращения в виде годовых ставок простых и сложных процентов?

7.27. Формируется портфель ценных бумаг, состоящий из бумаг двух видов. Доходности этих бумаг (в тысячах условных единиц) – дискретные, случайные величины ξ_1 и ξ_2 со следующим совместным распределением вероятностей:

$\xi_1 \setminus \xi_2$	820	780	760
790	0,15	0,08	0,07
785	0,02	0,1	0,17
765	0,1	0,12	0,19

Определите: а) среднюю доходность A и риск σ портфеля при условии, что бумаг первого типа в портфеле 40%, а второго типа – 60%; б) структуру x_1^0, x_2^0 портфеля с минимальным риском и его среднюю доходность A^0 при такой

структуре; в) оптимальную структуру x_1^0, x_2^0 портфеля с гарантированной доходностью в 780 тысяч при минимальном риске.

7.28. Эксперты установили, что отношения дисперсий доходов четырех видов бумаг следующие: $D_{1/4} = 1,6$; $D_{2/4} = 3$; $D_{3/4} = 0,8$. Доходы этих ценных бумаг не коррелируют между собой. Определите структуру x_i^0, $i = 1, 2, 3, 4$ портфеля ценных бумаг с минимальным риском.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ И ПРИМЕРАМ

1.1. На 97,53 \$. **1.2.** 214017,19 \$. **1.3.** Банк B; 80,92\$. **1.4.** На 20%. **1.5.** 2356,48\$; 6,75%. **1.6.** а) 1701,69\$; б) 1700,4\$. **1.7.** а) 36,5%; б)36%. **1.8.** 11,66%. **1.9.** а) 27.07; б) 24.07. **1.10.** 45961,67 \$. **1.11.** 0,63 \$. **1.12.** а) 60,95 лет; б) 57,95 лет. **1.13.** 148,41 млн.м^3. **1.14.** В 1,03 раза. **1.15.** 98,64 \$. **1.16.** 7,77%; нет. **1.17.** Не менее 3 раз. **1.18.** 4580,27 \$; 7,86%. **1.19.** 10,5171%. **1.20.** 79,59%. **1.21.** 6,25%. **1.22.** 0,821 раза. **1.23.** 50,183% **1.24.** Выгоднее двойная конверсия валюты. Потеря составит 1667,96 рубля. **1.25.** 1,058252 млн. руб. **1.26.** 0,78. **1.27.** Рублевый депозит; 11,25 млн. руб. **1.28.** а) 1,89%; б) 3,81%. **1.29.** Увеличится на 266,1 \$. **1.30.** 4,157858. **1.31.** а) 13.09; 38,78175 тыс. \$; б) 17.06; 38,78925 тыс. \$. **1.32.** 37,35 тыс. \$. **1.33** 37,43909 тыс. \$. **1.34.** 102,45278 тыс. \$. **1.35.** 4.07. **1.36.** 29,14514 тыс. \$. **1.37.** 24.11. **1.38.** 29 тыс. \$; 17.02. **1.39.** 47,6443 тыс.; не зависит. **1.40.** 3,55 года. **1.41.** а) 23,01878 тыс. \$; б) 23,01176 тыс. \$. **1.42.** 31,79312 тыс. \$. **1.43.** а) 0,57143; S_{min} = 105 тыс. \$; S_{max} = 210 тыс. \$; $E\{S\}$ = 157,5 тыс. \$; σ = 30,31089 тыс. \$; б) 0,63265; S_{min} = = 105 тыс. \$; S_{max} = 210 тыс. \$; $E\{S\}$ = 157,5 тыс. \$; σ = = 21,43304 тыс. \$. **1.44.** а) 0,5; S_{min} = 104,95 тыс. \$; S_{max} = = 105,05 тыс. \$; $E\{S\}$ = 105 тыс. \$; σ = 0,02887 тыс. \$; б) 0,5; S_{min} = 104,95 тыс. \$; S_{max} = 105,05 тыс. \$; $E\{S\}$ = = 105 тыс. \$; σ = 0,02041 тыс. \$. **1.45.** Выгоднее депозит; 5,56%. **1.46.** 32,94%. **1.47.** 0,35; S_{min} = 50,5 тыс. \$; S_{max} = = 104 тыс. \$; $E\{S\}$ = 71,725 тыс. \$; σ = 25,53832 тыс. \$. **1.48.** P_1 = 1168,58; 0,4138; σ = 1,3943 \$. **1.49.** 0,466; S_{min} = = 104500 \$; S_{max} = 104625 \$; $E\{S\}$ = 104535 \$; σ = = 0,03142 тыс. \$. **1.50.** S_{min} = 1,0525 млн. \$; S_{max} = = 1,065 млн. \$; $E\{S\}$ = 1,05875 млн. \$; σ = 0,0026 млн. \$, 0,583. **1.51.** 0,25; S_{min} = 1,0675 млн. \$; S_{max} = 1,075 млн. \$; $E\{S\}$ = 1,07125 млн. \$; σ = 0,0019 млн. \$. **1.52.** *Указание*: воспользоваться ППП СТАТМОД, ФЭР. **1.53.** $E\{S\}$ =

= 109,13493 тыс. \$; 0,2; S_{min} = 106 тыс. \$; S_{max} = = 122,5043 тыс. \$; σ = 5,33199 тыс. \$. **1.54.** S_{min} = = 235,516512 тыс. \$; S_{max} = 237,751002 тыс. \$; 0,18; $E\{S\}$ = = 236,11928 тыс. \$; σ = 0,871128303 тыс. \$. **1.55.** S_{min} = = 235,51651 тыс. \$; S_{max} = 238,87778 тыс. \$; 0,16; $E\{S\}$ = = 236,61031 тыс. \$; σ = 22,76123 тыс. \$. **1.56.** $E\{S\}$ = = 237153,18 \$; $D\{S\}$ = 1406,31\$; $P\{235600 \le S \le 236700\}$ = = 0,36864. **1.57.** S_{min} = 208037,5 \$; S_{max} = 208537,5 \$; 0,18; $E\{S\}$ = 208172,5 \$; σ = 0,19496 \$. **1.58.** $E\{S\}$ = 208622,29 \$; $D\{S\}$ = 48,32\$; $P\{235600 \le S \le 236700\}$ = 0,339312.

2.1. 1289110,7 \$. **2.2.** а) 290,74 \$; б) 59,51 \$; в) 367,62 \$. **2.3.** 156291,85 \$. **2.4.** 203296,08 \$. **2.5.** Нет. **2.6.** 429260,04 \$. **2.7.** 33585,95 \$. **2.8.** 422247,42 \$. **2.9.** 279,59 \$. **2.10.** а) 2024,94 \$; б) 1990,69 \$. **2.11.** 1,5 года; на 3149,93 \$. **2.12.** В случае а). **2.13.** а) 3,676%; б) 1,395%; в) 5,261%. **2.14.** 1,03%. **2.15.** S_{min} = 32149 \$; S_{max} = 59253,73 \$; $E\{S\}$ = 45435,38 \$; σ = 11108,07; 0,3. **2.16.** а) 6116742,32 \$; б) 6337906,64 \$. **2.17** а) 5272,02 \$; б) 5061,95 \$. **2.18.** От 19636,29 \$ до 24924,42 \$. **2.19.** 765,63431 тыс. \$. **2.20.** Нет. **2.21.** Вариант б). **2.22.** а) 217592,79 \$; б) 250231,71 \$. **2.23.** 1,68966667 млн. \$. **2.24.** Первый вариант; 1,2074397 млн. \$. **2.25.** 88,322038 млн. \$. **2.26.** 76,668302 млн. \$. **2.27.** а) 19,2375%; б) 17,7243%. **2.28.** 1,465437 млн. \$. **2.29.** 25452,85 \$. **2.30.** а) 127547,18 \$; б) 150705,8 \$. **2.31.** 126772,41 \$. **2.32.** 138291,77 \$. **2.33.** 9 лет; недоплаченная сумма 30402,88 \$; R = 84917,6 \$. **2.34.** Вариант а); 10,1421%. **2.35.** 191973,66 \$. **2.36.** 0,052%. **2.37.** а) 1,895625 млн. \$; б) 1,89553776 млн. \$. **2.38** а) 42857,14 \$; б) 33107,46 \$. **2.39.** а) В случае а); б) на 61977,29 \$. **2.40** 70 млн. \$. **2.41.** 805,73545 млн. \$. **2.42.** Способ а); 10,46875%. **2.43.** 197166,66 \$. **2.44**. Величина платежа не достаточна для погашения долга. Нужно увеличить не менее чем на 63210,81 \$. **2.45.** 57,135057 млн. \$. **2.46.** 28130,11 \$. **2.47.** a = 1,22155 тысяч. **2.48.** a = 2,51724 тысяч. **2.49.** a_1 = = 0,60246 тысяч; a_2 = 1,21957 тысяч. **2.50.** a = 40,98699 тысяч. **2.51.** a_1 = 10486,72; $a_1 - a_2$ = 846,02. **2.52.** 3,28849 тысяч.

3.1. 665478,62 \$. **3.2.** 92689,13\$. **3.3.** 29607,38\$. **3.4.** Не окупят. **3.5.** $i_э \in$ (25%, 25,5%). **3.6.** 118718,05 \$.

3.7. $i \in (7,1\%, 7,2\%)$. **3.8.** 9,083 года. **3.9.** $E\{S\} = 1410550,34$ \$; $D\{S\} = 61038,9$ \$; $S_{min} = 1,40465737$ млн. \$; $S_{max} = 1,42591237$ млн. \$; $P = 0,24$. **3.10.** 1,2824396 млн. \$. **3.11.** $R = 220872,87$ \$. **3.12.** $R = 248259,11$ \$. **3.13.** 1,3574543 млн. \$. **3.14.** 398239,63 \$. **3.15.** $R = 12986,54$ \$; а) 381229,76 \$; б) 136955,25\$. **3.16.** $\frac{A_1}{K_1} = 0,11797$; $\frac{A_2}{K_2} = 0,0471879$. Для второго варианта. **3.17.** 25587,84 \$. **3.18.** 53,58457 млн. \$. **3.19.** $i \in (55\%, 55,5\%)$. **3.20.** 7694,78 \$. **3.21.** 53822,03 млн. \$. **3.22.** $i \in (86,5\%, 87\%)$. **3.23.** $B = 381885,86$ \$; $I = 131885,86$ \$. **3.24.** $B = 396293,24$ \$; $I = 146293,24$ \$. **3.25.** $B = 407046$ \$; $I = 107046$ \$. **3.26.** $I \in (218855,2$ \$, $221760,88$ \$). **3.27.** Сумма процентных платежей по схеме выплат, изменяющихся по арифметической прогрессии, равна 68525,7 \$. Сумма выплат процентных платежей по схеме геометрической прогрессии ($q = 0,869145$) будет больше на 1032,79 \$. **3.28.** $P = 136890,72$ \$. Увеличится на 52672,88 \$. **3.29.** По схеме убывающей геометрической прогрессии Р = 140440,968. Процентные платежи по схеме возрастающей прогрессии составят 185002,71 \$. **3.30.** $k \in (9,5\%, 10\%)$. **3.31.** $k \in (10\%, 10,5\%)$. **3.32.** $S_{min} = 1,00771691$ млн. \$; $S_{max} = 1,11379237$ млн. \$. **3.33.** На 15,10343906 млн. \$. **3.34.** На 9,6717%. **3.35.** 1,24805568 млн. руб. **3.36.** 1848,46723 тыс. \$. **3.37.** 5976079,97 \$. **3.38.** 63755,18 \$. **3.39.** 7135 \$. **3.40.** На 13,14%. **3.41.** 8,02%. **3.42.** За 8 полугодий. На 1512,93 \$. **3.43.** 36461,97 \$. **3.44.** $R = 1400,36$ \$; 1553,58 \$. **3.45.** За 13 кварталов. Увеличить нужно на 0,07 \$. **3.46.** $R = 9000$ \$. **3.47.** Меньше для варианта б). 631,2 \$. **3.48.** 2747,21 \$. **3.49.** $R = 301,7$ \$; $R_I = 127,44$ \$. **3.50.** $R = 20,28$ \$. Можно было бы уменьшить на 3,52 \$.

4.1. $R = 1223115,45$ \$; $I = 46,7738564$ млн. \$. **4.2.** Возрастут на 5,575519 млн. \$. **4.3.** а) 64814,06 \$; б) 74900,75 \$. **4.4.** а) $n = 35$, $b = 577,09$ \$; б) $n = 76$, $b = 56,73$ \$. **4.5.** На 86569,53 \$. **4.6.** Меньше на 13686,33 \$. **4.7.** 110713,73 \$. **4.8.** Будет меньше на 6734,57 \$. **4.9.** а) 973,28 \$, б) 970,88 \$. **4.10.** Каждые два года нужно снимать сумму в 67069,6 \$. **4.11.** 177020,07 \$. **4.12.** 671045,34 \$. **4.13.** 77712,17 \$. **4.14.** Платежи должны убывать на 14994,58 \$ каждые два

года. **4.15.** $R_B = 25560,57$ \$, $R_C = 15602,04$ \$, $R_D = 21587,6$ \$. **4.16.** На полтора года. **4.17.** На полтора года. **4.18.** $E\{R_3\} = 44634,74$ \$; $P\{R_3 \geq R\} = 0,99$. **4.19.** *Указание*: воспользоваться ППП СТАТМОД, ФЭР.

5.1. а) На 4812,48 \$, б) на 14656,71 \$. **5.2.** а) 132889,05 \$, б) 124852,84 \$. **5.3.** а) 138015,38 \$; б) 133749,1 \$. **5.4.** $q \in (1,175; 1,18)$. **5.5.** 92338,84 \$. **5.6.** Среднее значение равно 132889,07 \$; дисперсия равна 8 \$. **5.7.** На 10311,6 \$. **5.8.** $S_0 = 149059,61$ \$. **5.9.** Уменьшится на 6211,59 \$. **5.10.** 348143,34 \$. **5.11.** 102961,05 \$. **5.12.** 466399,2 \$. **5.13.** 461163,01 \$. **5.14.** Больше в случае а) на 17,750613 млн. \$. **5.15.** Меньше в случае б) на 16068,66 \$. **5.16.** $S_0 = 283343,33$ \$. **5.17.** 415758,37 \$. **5.18.** На 108485,84 \$. **5.19.** 497478,6 \$. **5.20.** 101778,92 \$. **5.21.** а) 131246,3 \$; б) 114766,1 \$. **5.22.** Меньше в случае б) на 16170,5 \$. **5.23.** 450887,1 \$. **5.24.** 0,86 \$. **5.25.** 6804,82 \$. **5.26.** Разовый платеж равен 6111,08 \$. Он меньше аналогичного платежа из предыдущей задачи на 693,74 \$. **5.27.** 369,8833 млн. руб. **5.28.** $D_{max} = 380,62373$ млн. руб.; $D_{239} = 7,659736$ млн. руб. **5.29.** $W = 7,534530$ млн. \$. **5.30.** На 667150\$. **5.31.** Возрастет на 46142,9 \$. **5.32.** $W = 19,560798$ млн. \$. **5.33.** $W = 142379,29$ \$. **5.34.** На 110 месяцев. Месячные платежи нужно увеличить на 0,74 \$.

6.1. 73,3051%. **6.2.** 59,29095%. **6.3.** 88,54023%. **6.4.** 40,07%. **6.5.** $IRR \in (40,5\%, 41\%)$. **6.6.** 9,428%. **6.7.** Банк *В*. **6.8.** а) −0,22087%, б) 14,64%. **6.9.** 32,70605%. **6.10.** 1,819%. **6.11.** $i_э \in (16\%, 16,1\%)$. **6.12.** $IRR \in (2\%, 2,1\%)$. **6.13.** $IRR \in (8,8\%, 8,9\%)$. **6.14.** $IRR \in (8,95\%, 9\%)$. **6.15.** 9,80997%. **6.16.** На 0,03988%. **6.17.** 9,80997%. **6.18.** 7,9348%. **6.19.** $NPV = 710,44814511$ млн. \$; $n_у = 3,2353$ года; $n_{ок} = 3,9975$года; $IRR = 32,9038\%$; $PI = 3,3879$. **6.20.** *Указание*: воспользоваться ППП СТАТМОД, ФЭР. **6.21.** Годовые арендные платежи не должны быть выше 1,51490731 млн. руб. **6.22.** 595552,38 руб. **6.23.** 12,4%. **6.24.** $i_{min} = 20,1\%$, $i_{max} = 22,1\%$, $E\{i\} = 21,05\%$. **6.25.** Второй продавец. $A_2 = 278,88217$ тысяч. **6.26.** Первая верфь. $A_1 = 8817,24696$ тысяч. **6.27.** Первый вариант. $A_1 = 34,09277$ тысяч. **6.28.** $n_0 = 349$ дней. Покупатель выберет первого поставщика. **6.29.** Первый вариант наилучший для покупателя. **6.30.** $i_2^0 = 7,87\%$. **6.31.** $i_2^0 = 5,92\%$.

7.1. а) $i_t = 5,579\%$, $i = 5,579\%$, б) $i_t = 2,7895\%$, $i = 5,6557\%$. **7.2.** 101,6. **7.3.** 3,75%. **7.4.** Стоит купить облигацию. 9,5%. **7.5.** 95,53. **7.6.** Курс облигации уменьшится на 1,56. **7.7.** 4,783%. **7.8.** а) 6,883%, б) 6,655%. **7.9.** 94,1. **7.10.** По курсу не выше 94,31. **7.11.** 14%. **7.12.** 79,72. **7.13.** 92,13–93,85. **7.14.** Облигация *В*. **7.15.** 7,3%. **7.16.** 7,5%. **7.17.** 4,1%. **7.18.** 5,19%. **7.19.** 9,3%. **7.20.** 9,4%. Новый портфель более привлекателен для инвестирования. **7.21.** $i_{эп} = 7,69\%$, $i = 7,95\%$. **7.22.** Предпочтительнее купить вексель. **7.23.** $i_{min} = 2,19\%$, $i_{max} = 3,78\%$, $E\{i\} = 3,06\%$, $D\{i\} = 0,31\%$. **7.24.** $i_э = 20,21\%$. **7.25.** $i_{эп} = 8,43\%$, $i_э = 8,77\%$. **7.26.** $i_{эп} = 24\%$, $i_э = 24,22\%$. **7.27.** а) $A = 780,64$; $\sigma = 15,87924468$; б) $x_1^0 = 85,89\%$; $x_2^0 = 14,11\%$; $A^0 = 778,8502$; в) $x_1^0 = 56,41\%$; $x_2^0 = 43,59\%$. **7.28.** $x_1^0 = 19,48\%$, $x_2^0 = 10,39\%$, $x_3^0 = 38,96\%$, $x_4^0 = 31,17\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аванесов Э.Т., Ковалев М.М., Руденко В.Г.* Инвестиционный анализ. Мн.: БГУ, 2002.

2. *Башарин Г.П.* Начала финансовой математики. М.: ИНФА – М, 1997.

3. *Бухвалов А.В., Идельсон А.В.* Самоучитель по финансовым расчетам. М.: Мир, 1997.

4. *Ващенко Т.В.* Математика финансового менеджмента. М.: Перспектива, 1996.

5. *Капельян С.Н., Левкович О.А.* Основы коммерческих и финансовых расчетов. Мн.: НТЦ "АПИ", 1999.

6. *Капитоненко В.В.* Финансовая математика и ее приложения. М.: ПРИОР, 1999.

7. *Ковалев В.В.* Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности. М.: Финансы и статистика, 1996.

8. *Ковалев В.В.* Сборник задач по финансовому анализу, М.: Финансы и статистика, 1999.

9. *Ковалев В.В., Уланов В.А.* Курс финансовых вычислений. М.: Финансы и статистика, 1999.

10. *Кочович Е.* Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов. М.: Финансы и статистика, 1994.

11. *Кирлица В.П.* Практикум на ЭВМ по финансово-экономическим расчетам. Мн.: БГУ, 1999.

12. *Малыхин В.И.* Финансовая математика. М.: ЮНИТИ, 2000.

13. *Малюгин В.И.* Рынок ценных бумаг: количественные методы анализа. Мн.: БГУ, 2001.

14. *Медведев Г.А.* Начальный курс финансовой математики. М.: ТОО "Остожье", 2001.

15. *Мелкумов Я.С.* Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям, М.: ИНФРА – М, 1996.

16. Овчаренко Е.К., Ильина Е.В., Балыбердин Е.В. Финансово-экономические расчеты в EXCEL. М.: "Филинъ", 1998.

17. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М.: ИНФРА – М, 1994.

18. Радионов Н.В., Радионова С.П. Основы финансового анализа: математические методы, системный подход. СПб.: Альфа, 1999.

19. Салин В.Н., Ситникова О.Ю. Техника финансово-экономических расчетов, М.: Финансы и статистика, 1999.

20. Харин Ю.С., Степанова М.Д. Практикум на ЭВМ по математической статистике. Мн.: Университетское, 1987.

21. Харин Ю.С., Малюгин В.И., Кирлица В.П. и др. Основы имитационного и статистического моделирования. Мн.: Дизайн ПРО, 1997.

22. Черкасов В.Е. Практическое руководство по финансово-экономическим расчетам. М.: Метаинформ, 1995.

23. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.:Дело Лтд, 1995.

24. Четыркин Е.М. Финансовый анализ производственных инвестиций. М.: Дело Лтд, 2001.

25. Четыркин Е.М. Финансовая математика. М.: Дело Лтд, 2001.

26. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т.1. Факты и модели. М.: ФАЗИС, 1998.

СОДЕРЖАНИЕ