ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Посвящается 95-летию Финансового университета

М. С. Красс

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ
БАЗОВЫЙ КУРС

УЧЕБНИК ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

2-е издание, исправленное и дополненное

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям

Москва ▪ Юрайт ▪ 2014

УДК 51
ББК 22.1я73
К78

***Автор*:**

Красс Максим Семенович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования экономических процессов Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. Специалист по математическим моделям природных процессов и экономико-математическому моделированию.

***Рецензенты*:**

Малыхин В. И. — доктор физико-математических наук, профессор ГУУ;
Товстоног В. А. — доктор технических наук, профессор МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Красс, М. С.

К78 Математика в экономике. Базовый курс : учебник для бакалавров / М. С. Красс. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2014. — 471 с. — Серия : Бакалавр. Базовый курс.

ISBN 978-5-9916-3137-2

Даны математические дисциплины, необходимые для высшего экономического образования. В каждом разделе представлены решения задач с экономическим содержанием; приведена обширная подборка упражнений для практических занятий.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения для экономических направлений и специальностей.

Рассчитан на широкую экономическую аудиторию — студентов, аспирантов, преподавателей, научных сотрудников. Может быть использован в различных формах обучения по программам высшего экономического образования: очной, вечерней и дистанционной, а также при получении второго высшего образования.

УДК 51
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-9916-3137-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Стремительная математизация экономической науки и совершенствование экономического образования создают предпосылки для ревизии содержания учебной литературы по математическим дисциплинам в экономике. Сложность математики как дисциплины высшего экономического образования заключается прежде всего в том, что она охватывает взаимосвязанные разделы, применение которых в экономике должно быть проиллюстрировано соответствующими задачами и математическими моделями. В этом плане требования, предъявляемые к учебной литературе по математике для экономических вузов, являются весьма специфичными.

Предлагаемый учебник написан на основе лекций, прочитанных автором в течение последних лет в экономических вузах, в том числе и при подготовке слушателей, получающих второе высшее образование. В книгу вошли материалы, прошедшие практическую проверку при преподавании цикла математических дисциплин в экономических государственных и негосударственных вузах различных форм обучения.

Учебник состоит из трех больших разделов, охватывающих все пункты Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по общим математическим дисциплинам в экономическом образовании — линейную алгебру, математический анализ, обыкновенные дифференциальные и разностные уравнения. Эти разделы являются базовыми для последующего изучения методов прикладной математики и математического моделирования, используемых в экономике.

Каждый раздел имеет свою степень детализации. Подробно освещены основы математических дисциплин (разделы 1, 2). Особое внимание уделено математическому анализу как фундаменту всех знаний в математике. Этот материал изложен особенно полно, с доказательством большого числа теорем. Именно на такой классической основе формируется логика мышления будущих специалистов в экономике.

Каждая глава сопровождается разбором характерных примеров, задач и соответствующих экономических приложений, сложность которых постепенно возрастает. Для максимальной иллюстративности и методичности изложения материала, а также для лучшего его усвоения экономические приложения как решения соответствующих задач выделены в отдельные главы и параграфы даже в разделах математических дисциплин. Все главы содержат подборки упражнений для самостоятельного выполнения.

Предлагаемый учебник содержит все дидактические единицы Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по разделу математики для экономического образования, поэтому он удовлетворяет большому спектру учебных программ экономических вузов.

Учебник рассчитан на самую широкую экономическую аудиторию — студентов, аспирантов, преподавателей, научных сотрудников, специалистов, работающих в области экономики. Он может быть использован как в университетах, так и для различных форм обучения по программам высшего экономического образования: очной, вечерней и дистанционной, а также при получении второго высшего образования.

Математика — древняя наука, развивающаяся вместе с человеком. Она зародилась из его насущных нужд, когда возникла потребность в количественном отображении окружающего мира: измерении расстояний, подсчете собранного урожая и поголовья домашних животных и т.п. Появление древних цивилизаций повлекло за собой дальнейшее развитие математики — возникает геометрия как совокупность приемов проектирования и расчетов возводимых сооружений. Строители египетских пирамид обладали незаурядными по тем временам математическими познаниями.

Статус самостоятельной науки математика приобрела в древней Греции примерно в VI веке до н. э. Все философские школы того времени включали математику в круг вопросов миросозерцания: строгий язык формальной логики определял уровень мышления. В III веке до н. э. математика выделилась из философии, что отражено в «Началах» Евклида — труде, заложившем фундамент классической геометрии.

С древних времен математика используется в строительстве и военном деле. Защитники Сиракуз в течение двух лет оборонялись против войск Рима благодаря удивительным изобретениям великого математика и механика Архимеда. Аристотель обратился к существовавшим в те времена геометрическим построениям для создания геоцентрической модели системы мира, согласно которой планеты, звезды и Солнце вращались на хрустальных сферах вокруг Земли. Усовершенствованная Птолемеем, эта стройная и гармоничная система применялась в течение двух тысячелетий.

Экономика как наука об объективных причинах развития общества со Средних веков применяет разнообразные количественные характеристики и потому вобрала в себя большое число математических методов. Так, современный бухгалтерский учет основан на принципах, изложенных еще в 1494 г. в фундаментальном труде итальянского математика Луки Пачоли «Сумма арифметики, геометрии, учения о пропорциях и отношениях», часть I которого содержит трактат XI «О счетах и записях».

XVII век ознаменовался бурным развитием математики. Применение этой науки Галилеем и Кеплером в исследовании движения небесных тел привело к поразительным по тому времени открытиям законов движения планет вокруг Солнца. Труды Декарта, Ньютона и Лейбница положили начало очередному этапу развития математики — появлению математики переменных величин. Начинается период дифференциации единой науки и возникает целый ряд самостоятельных математических дисциплин: алгебра, математический анализ, аналитическая геометрия, которые в свою очередь способствовали интенсивному развитию физики и астрономии.

В XIX веке математика развивается как абстрактная наука, не связанная с наблюдаемыми явлениями окружающего мира. К этому периоду относятся открытия Лобачевского и Римана, создателей неевклидовой геометрии. Разработанная Кантором на рубеже XIX—XX веков теория множеств легла в фундамент современной математики. Нынешний этап развития математики характеризуется выделением большого числа самостоятельных дисциплин.

Имена российских ученых Н.И. Лобачевского (1792—1856), М.В. Остроградского (1801—1861), П.Л. Чебышева (1821—1894), А.А. Маркова (1856—1922) занимают достойное место в истории математики. Достижения современной математики во многом обязаны трудам известных российских ученых: В.И. Арнольда, С.Н. Бернштейна, Л.В. Канторовича, А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского, Ю.В. Прохорова, А.Н. Тихонова.

Математика активно проникает в другие науки, во многом это происходит благодаря дифференциации. Язык математики универсален, что является объективным отражением универсальности законов окружающего нас многообразного мира.

Эффективное использование математического аппарата в экономике предполагает овладение необходимым объемом базовых математических знаний. Математические теоремы и доказательства представляют собой строгие логические рассуждения. В этом смысле математика является более простой наукой, нежели другие, скажем, науки об обществе: она не допускает множественного трактования, для опровержения какого-либо предположения здесь достаточно привести всего лишь один противоречащий пример. Однако за этой простотой нельзя не видеть силы логических построений и умозаключений, позволяющих оттачивать методику исследований сложных процессов, протекающих в экономике и обществе.

Математические дисциплины, составляющие основу современной математики и инструментария экономических исследований, способствуют формированию мышления достойного уровня и высокой культуры, широкого кругозора. Эти качества необходимы как для успешной работы, так и для усовершенствования знаний и повышения квалификации.

ГЛАВА 1. ВЕКТОРЫ

1.1. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

1.1.1. Скаляры и векторы

Многие характеристики окружающих нас явлений описываются числами, например, вес товара и его стоимость, температура тела, количество мест в салоне авиалайнера. Такие величины называются *скалярными,* или просто *скалярами.* Однако имеются и такие величины, которые требуют для своего описания еще и указания направления, например скорость и ускорение при движении тела. Такие величины называются *векторными*, или просто *векторами.*

Определение 1. Направленный отрезок, на котором заданы начало, конец и направление, называется *вектором* (рис. 1.1).

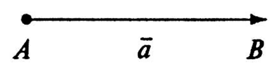

Рис. 1.1

Обозначается вектор либо символом, куда входят его начало и конец ($\overline{AB}$), либо одной буквой с чертой наверху ($\bar{a}$). Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной.*

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 1.2).

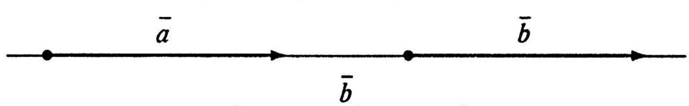

Рис. 1.2

Определение 2. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и их длины равны.

В любой системе координат вектор характеризуется своими координатами: двумя координатами на плоскости $\overline{AB}=(X, Y)$ и тремя — в пространстве $\overline{AB}=(X, Y, Z)$. Пусть в системе координат $0xyz$ координаты начала и конца вектора соответственно $A\,(x_1, y_1, z_1)$ и $B\,(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 1.3). Тогда координаты этого вектора определяются формулами

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1. \qquad (1.1)$$

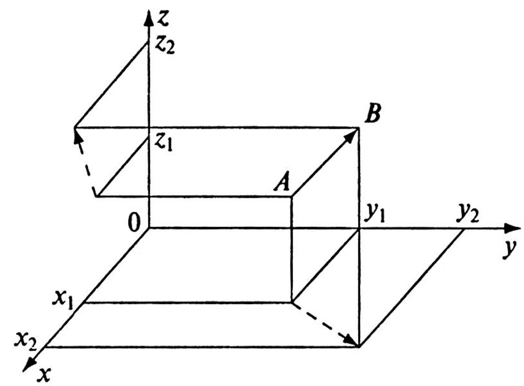

Рис. 1.3

Длина вектора $\overline{AB}$ очевидным образом определяется по формуле

$$|\overline{AB}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{1.2}$$

Важным моментом является определение нулевого вектора (или вектора нулевой длины): $\bar{0}(0, 0)$ на плоскости и $\bar{0}(0, 0, 0)$ в пространстве.

1.1.2. Операции над векторами

Над векторами определены две *линейные* операции. Пусть даны два вектора: $\bar{a}=(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b}=(b_1, b_2, b_3)$.

1. *Суммой векторов* $\bar{a}+\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}=(c_1, c_2, c_3)$, координаты которого равны суммам соответствующих координат $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$c_1 = a_1 + b_1,\ c_2 = a_2 + b_2,\ c_3 = a_3 + b_3. \tag{1.3}$$

2. *Произведением вектора* $\bar{a}\neq\bar{0}$ на число $\alpha \neq 0$ называется вектор $\alpha\bar{a}$, координаты которого соответственно равны αa_1, αa_2, αa_3.

Можно показать, что для получения суммы векторов нужно совместить конец вектора $\bar{a}$ с началом вектора $\bar{b}$, тогда вектор $\bar{a}+\bar{b}$ будет направлен от начала первого вектора к концу второго (рис. 1.4, *а*). Геометрический смысл умножения вектора на число состоит в увеличении длины вектора в α раз при $|\alpha| > 1$ или ее сокращении в α раз (рис. 1.4, *б*) при $|\alpha| < 1$. При $\alpha = -1$ вектор $\alpha\bar{a}$ имеет направление, противоположное вектору $\bar{a}$; векторы $\alpha\bar{a}$ и $\bar{a}$ коллинеарны.

Пусть даны два вектора: $\bar{a}=(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b}=(b_1, b_2, b_3)$.

Из определения коллинеарности векторов и определения произведения вектора на число вытекает, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны в том и только в том случае, если их координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}. \tag{1.4}$$

Соотношения (1.4) носят название *условия коллинеарности двух векторов.*

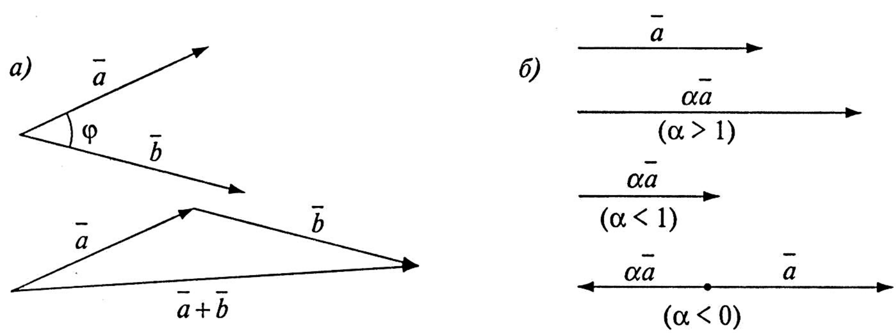

Рис. 1.4

1.1.3. Скалярное произведение векторов

Пусть $\bar a$ и $\bar b$ — произвольные векторы, а φ — угол между ними, как показано на рис. 1.4, *а*.

Скалярным произведением двух векторов $\bar a$ и $\bar b$ называется число, равное

$$\bar a\bar b = |\bar a|\,|\bar b| \cos\varphi. \tag{1.5}$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами, которые нетрудно вывести из его определения.

1. $\bar a\bar b = \bar b\bar a$ — перестановочность сомножителей.
2. $(\alpha\bar a)\bar b = \alpha(\bar a\bar b)$ — сочетательность относительно умножения на число.
3. $\bar a(\bar b + \bar c) = \bar a\bar b + \bar a\bar c$ — распределительность относительно суммы векторов.
4. $\bar a\bar a = |\bar a|^2$ — формула скалярного квадрата.
5. $\bar a\bar b = 0$, если вектор $\bar a$ перпендикулярен вектору $\bar b$; и обратно, если $\bar a\bar b = 0$, то при $\bar a \ne \bar 0$ и $\bar b \ne \bar 0$ векторы $\bar a$ и $\bar b$ взаимно перпендикулярны.

Скалярное произведение векторов выражается через их координаты следующим образом: пусть даны два вектора $\bar a(a_1, a_2, a_3)$ и $\bar b(b_1, b_2, b_3)$, тогда

$$\bar a\bar b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{1.6}$$

Из формул (1.5) и (1.6) получаем формулу для определения угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\bar a\,\bar b}{|\bar a||\bar b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\bar a||\bar b|}. \tag{1.7}$$

1.2. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

1.2.1. Понятие и основные свойства векторов

Ранее мы рассмотрели векторы в двумерном и трехмерном евклидовом пространстве (параграф 1.1). Здесь мы приведем обобщение соответствующих понятий на n-мерный случай.

Определение 3. Любой упорядоченный набор из n действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ называется *n-мерным вектором* $\bar{a}$; числа, составляющие упомянутый набор, называются *координатами* (*компонентами*) вектора $\bar{a}$.

Определение 4. Совокупность всех n-мерных векторов называется *n-мерным векторным пространством* R^n.

Координаты n-мерного вектора $\bar{a}$ можно расположить либо в строку

$$\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n), \tag{1.8}$$

либо в столбец

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Запись вида (1.8) называется *вектором-строкой*, а вида (1.9) — *вектором-столбцом.*

Определение 5. Два вектора с одним и тем же числом координат

$$\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n), \quad \bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$$

называются *равными*, если их соответствующие координаты равны, т.е.

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n.$$

Определение 6. Вектор, все координаты которого равны нулю, называется *нулевым*

$$\bar{0} = (0, 0, ..., 0).$$

1.2.2. Операции над векторами

Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ принадлежат n-мерному векторному пространству

$$\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n), \quad \bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n). \tag{1.10}$$

Будем называть *суммой векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вектор $\bar{c}$, координаты которого равны суммам соответствующих координат векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n). \tag{1.11}$$

Пусть λ — любое действительное число. *Произведением вектора* $\bar{a}$ *на число* λ будем называть вектор, координаты которого получаются умножением соответствующих координат вектора $\bar{a}$ на это число:

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n). \tag{1.12}$$

Из введенных таким образом операций над векторами вытекают следующие свойства этих операций. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — произвольные векторы n-мерного векторного пространства, тогда:

1) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ — переместительное свойство;

2) $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ — сочетательное свойство;

3) $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$, где λ — действительное число;

4) $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$, где λ и μ — действительные числа;

5) $\lambda(\mu\bar{a})=(\lambda\mu)\bar{a}$, где λ и μ — действительные числа;

6) $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$;

7) для любого вектора $\bar{a}$ существует такой вектор $-\bar{a}$, что $-\bar{a}=(-1)\bar{a}$, $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$;

8) $0\bar{a}=\bar{0}$ для любого вектора $\bar{a}$.

Определенное n-мерное векторное пространство R^n является *линейным*, поскольку для него выполняются свойства линейности:

1) для любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из R^n их сумма также принадлежит R^n;

2) для любого числа α и вектора $\bar{a}\in R^n$ вектор $\alpha\bar{a}$ принадлежит R^n.

Определение 7. Пусть U — подмножество линейного пространства R^n. Оно называется *линейным подпространством* R^n, если для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из U и любого числа α выполнены свойства линейности 1 и 2 и $\bar{a}+\bar{b}$ и $\alpha\bar{a}$ принадлежат подмножеству U.

Например, совокупность всех векторов $\bar{a}$, таких, что сумма их координат равна нулю ($a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$), образует линейное подпространство R^n.

1.2.3. Скалярное произведение векторов

Определение 8. *Скалярным произведением векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (1.10) называется число, состоящее из суммы произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\bar{a}\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n. \tag{1.13}$$

Как мы видим, формально такое определение скалярного произведения двух векторов согласуется с аналогичной величиной для двух- и трехмерных векторов. Из данного определения следуют основные свойства скалярного произведения векторов, аналогичные указанным в п. 1.1.3:

1) $\bar{a}\bar{b}=\bar{b}\bar{a}$;

2) $(\lambda\bar{a})\bar{b}=\bar{a}(\lambda\bar{b})=\lambda(\bar{a}\bar{b})$, где λ — действительное число;

3) $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\bar{b}+\bar{a}\bar{c}$;

4) $\bar{a}\bar{a}>0$, если $\bar{a}\neq\bar{0}$ и $\bar{a}\bar{a}=\bar{0}$, если $\bar{a}=\bar{0}$.

Определение 9. Линейное векторное пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее свойствам 1—4, называется *евклидовым*.

Из содержания п. 1.1.3 становится понятно, как ввести понятие модуля вектора (его длины) и угла между векторами в виде обобщения на случай при $n > 3$.

Определение 10. Для векторов из n-мерного векторного пространства *модуль вектора* $\bar{a}$ и *угол* φ *между двумя ненулевыми векторами* $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяются по формулам

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \tag{1.14}$$

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|a||b|}. \tag{1.15}$$

Необходимое условие для формулы (1.15), что $|\cos\varphi| \leq 1$, гарантируется неравенством Коши — Буняковского*, справедливым для любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$(\bar{a}\bar{b})^2 \leq (\bar{a}\bar{a})(\bar{b}\bar{b}). \tag{1.16}$$

Докажем это неравенство. Возьмем вектор $\bar{c} = x\bar{a} + \bar{b}$, где x — любое число. Из свойства 4 следует, что $\bar{c}\bar{c} > 0$, откуда в силу свойств 1—3:

$$(x\bar{a} + \bar{b})(x\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a}\bar{a})x^2 + 2(\bar{a}\bar{b})x + \bar{b}\bar{b} > 0.$$

Поскольку квадратный трехчлен в правой части этого равенства всегда неотрицателен, то его дискриминант должен быть неположительным, т.е. $(\bar{a}\bar{b})^2 - (\bar{a}\bar{a})(\bar{b}\bar{b}) \leq 0$, откуда и получаем требуемое неравенство.

Введем одно важное свойство векторов. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будем называть *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\bar{a}\bar{b} = 0. \tag{1.17}$$

Равенство (1.17) является аналогом условия перпендикулярности векторов в двух- и трехмерном случаях, когда в формуле (1.15) $\cos\varphi = 0$.

1.3. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

1.3.1. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

При решении различных задач, как правило, приходится иметь дело не с одним вектором, а с некоторой совокупностью векторов одной и той же размерности. Такие совокупности называют *системой векторов* и обозначают одной буквой и порядковым номером:

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k. \tag{1.18}$$

*Коши Огюстен Луи (1789—1857) — французский математик; Буняковский В.Я. (1804—1889) — русский математик.

Определение 11. *Линейной комбинацией векторов* (1.18) называется вектор вида

$$\overline{b} = \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k \overline{a}_k, \tag{1.19}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — любые действительные числа.

Например, пусть даны три вектора: $\overline{a}_1 = (1, 2, 0)$, $\overline{a}_2 = (2, 1, 1)$ и $\overline{a}_3 = (-1, 1, -2)$. Их линейной комбинацией с коэффициентами соответственно 2, 3 и 4 является вектор $\overline{b} = (4, 11, -5)$.

В случае равенства (1.19) говорят также, что вектор $\overline{b}$ *линейно выражается* через векторы (1.18) или *разлагается* по этим векторам.

Определение 12. Множество всевозможных линейных комбинаций системы векторов (1.18) называется *линейной оболочкой* этой системы.

Можно непосредственно проверить, что линейная оболочка системы векторов является подпространством R^n.

Определение 13. Система ненулевых векторов (1.18) называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация данной системы с указанными числами равна нулевому вектору:

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_k \overline{a_k} = \overline{0}. \tag{1.20}$$

Если же равенство (1.20) для данной системы векторов (1.18) возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то эта система векторов называется *линейно независимой*.

Например, система двух векторов $\overline{a}_1 = (1, 0)$ и $\overline{a}_2 = (0, 2)$ линейно независима; система двух векторов $\overline{b}_1 = (1, 2, 1)$ и $\overline{b}_2 = (2, 4, 2)$ линейно зависима, так как $\overline{b}_2 - 2\overline{b}_1 = \overline{0}$.

Пусть система векторов (1.18) линейно зависима. Выберем в сумме (1.20) слагаемое, в котором коэффициент $\lambda_s \neq 0$, и выразим его через остальные слагаемые:

$$\overline{a}_s = -\frac{\lambda_1}{\lambda_s}\overline{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_s}\overline{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s}\overline{a}_{s-1} - \frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_s}\overline{a}_{s+1} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_s}\overline{a}_k.$$

Как видно из этого равенства, один из векторов линейно зависимой системы (1.18) оказался выраженным через другие векторы этой системы (или разлагается по остальным ее векторам).

Укажем свойства линейно зависимой системы векторов.

1. Система, состоящая из одного ненулевого вектора, линейно независима.

2. Система, содержащая нулевой вектор, всегда линейно зависима.

3. Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда среди ее векторов содержится по крайней мере один вектор, который линейно выражается через остальные.

Геометрический смысл линейной зависимости векторов очевиден для случаев двумерных векторов на плоскости и трехмерных векторов в пространстве. В случае двух векторов, когда один вектор выражается через другой, мы имеем

$$\bar{a}_1 = \lambda \bar{a}_2,$$

т.е. эти векторы *коллинеарны* или, что то же самое, находятся на параллельных прямых (рис. 1.2). В пространственном случае линейной зависимости трех векторов они параллельны одной плоскости, т.е. *компланарны* (рис. 1.5, *а*); достаточно «подправить» соответствующими сомножителями длины этих векторов, чтобы один из них стал суммой двух других или выражался через них (рис. 1.5, *б*).

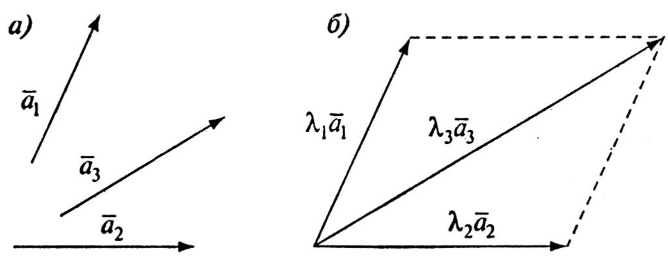

Рис. 1.5

Справедлива следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 1.1. В пространстве R^n любая система, содержащая m векторов, линейно зависима при $m > n$. ■

1.3.2. Базис и ранг системы векторов

Рассмотрим систему векторов (1.18)

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k.$$

Максимально независимой подсистемой системы векторов (1.18) называется частичный набор векторов этой системы, удовлетворяющий двум условиям:

1) векторы этого набора линейно независимы;

2) любой вектор системы (1.18) линейно выражается через векторы этого набора.

Справедлива теорема, утверждающая, что все максимально независимые подсистемы данной системы векторов содержат одно и то же число векторов. Максимально независимая подсистема системы векторов (1.18) называется ее *базисом*; векторы, входящие в базис, называются *базисными векторами*. Будем называть *рангом* системы векторов число векторов ее базиса. Понятно, что если ранг системы векторов меньше числа k ее векторов, то она может иметь несколько базисов.

В силу теоремы 1.1 всякая система векторов пространства R^n, содержащая более n векторов, линейно зависима.

Понятие базиса распространяется и на пространство R^n, которое является системой, содержащей всю бесконечную совокупность n-мерных векторов.

Определение 14. Система векторов называется *базисом* пространства R^n, если:

1) векторы этой системы линейно независимы;
2) всякий вектор из R^n линейно выражается через векторы данной системы.

Справедлива основная теорема о базисе пространства R^n, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 1.2. Линейно независимая система векторов в пространстве R^n является базисом тогда и только тогда, когда число векторов этой системы равно n. ■

1.4. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ

1.4.1. Представление вектора в произвольном базисе

Пусть система векторов

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m \tag{1.21}$$

является базисом, а вектор $\bar{b}$ — их линейная комбинация. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3. Разложение любого вектора в базисе, если оно существует, является единственным.

Доказательство. Предположим, что вектор $\bar{b}$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов (1.21) двумя способами:

$$\bar{b} = \alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + ... + \alpha_m\overline{a_m} \quad \text{и} \quad \bar{b} = \beta_1\overline{a_1} + \beta_2\overline{a_2} + ... + \beta_m\overline{a_m},$$

где наборы чисел α_i и β_i, среди которых обязательно есть ненулевые значения, не совпадают. Вычитая одно равенство из другого, имеем

$$(\alpha_1 - \beta_1)\overline{a_1} + (\alpha_2 - \beta_2)\overline{a_2} + ... + (\alpha_m - \beta_m)\overline{a_m} = \bar{0}.$$

Мы получили, что линейная комбинация векторов системы (1.21), в которой коэффициенты не все равны нулю (в силу несовпадения α_i и β_i), равна нулю, т.е. данная система оказалась линейно зависимой, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Стало быть, в произвольном базисе пространства R^n

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n \tag{1.22}$$

любой вектор этого пространства обязательно представим в виде разложения по базисным векторам

$$\bar{b} = \alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + ... + \alpha_n\overline{a_n}, \tag{1.23}$$

причем это разложение является *единственным* для данного базиса. В наборе коэффициентов разложения

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \tag{1.24}$$

числа α_i называются *координатами* вектора $\bar{b}$ в базисе (1.22), и, как следует из сказанного, этот набор единственный для любого вектора в данном базисе.

Задача нахождения коэффициентов разложения α_i в случае произвольного базиса (1.22) является, вообще говоря, непростой. Нужно приравнять соответствующие координаты линейной комбинации векторов слева и координаты вектора $\bar{b}$. Пусть базисные векторы и вектор $\bar{b}$ заданы в следующей координатной форме:

$$\begin{aligned} &\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}), \\ &\bar{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\bar{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn}), \\ &\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Выполнение описанной процедуры приводит к *системе n линейных уравнений* относительно n неизвестных координат α_i разложения вектора $\bar{b}$ в базисе (1.22):

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = b_n. \end{cases}$$

Такие системы уравнений и методы их решения представляют отдельные разделы линейной алгебры; они будут рассмотрены ниже.

1.4.2. Разложение вектора в ортогональном базисе

Рассмотрим базис пространства R^n, в котором каждый вектор ортогонален остальным векторам базиса:

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n; \ \bar{e}_i\bar{e}_j = 0, \ \ i \neq j, \ \ i, j = 1, 2, ..., n. \tag{1.26}$$

Ортогональные базисы известны и хорошо представимы на плоскости и в пространстве (рис. 1.6). Базисы такого вида удобны прежде всего тем, что координаты разложения произвольного вектора определяются по весьма простой процедуре, без применения трудоемких вычислений, возникающих при решении систем линейных уравнений.

Действительно, пусть требуется найти разложение произвольного вектора $\bar{b}$ в ортогональном базисе (1.26). Составим разложение этого вектора с неизвестными пока координатами разложения в данном базисе:

$$\bar{b} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{e}_n. \tag{1.27}$$

Умножим обе части этого равенства, представляющие собой векторы, на вектор $\bar{e}_1$. В силу свойств 2 и 3 скалярного произведения векторов имеем

$$\overline{b}\overline{e}_1 = \alpha_1(\overline{e}_1\overline{e}_1) + \alpha_2(\overline{e}_2\overline{e}_1) + \ldots + \alpha_n(\overline{e}_n\overline{e}_1).$$

ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Посвящается 95-летию Финансового университета

М. С. Красс, Б. П. Чупрынов

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

УЧЕБНИК ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

2-е издание, исправленное и дополненное

Под редакцией **М. С. Красса**

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям

Москва ▪ Юрайт ▪ 2014

УДК 330.4(075.8)
ББК 65в631я73
К78

***Авторы*:**

Красс Максим Семенович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования экономических процессов Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. Специалист по математическим моделям природных процессов и экономико-математическому моделированию;

Чупрынов Борис Павлович — кандидат технических наук, профессор, доцент кафедры электронной коммерции Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики. Специалист в области экономико-математического моделирования.

***Рецензенты*:**

Малыхин В. И. — доктор физико-математических наук, профессор ГУУ;

Товстоног В. А. — доктор технических наук, профессор МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Красс, М. С.

К78 Математика в экономике: математические методы и модели : учебник для бакалавров / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов ; под ред. М. С. Красса. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2014. — 541 с. — Серия : Бакалавр. Базовый курс.

ISBN 978-5-9916-3138-9

Изложены математические дисциплины, необходимые в высшем экономическом образовании, согласно государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования. Приведены основные элементы математической статистики, методы оптимизации в экономике, основы эконометрики. Учебник содержит методы и модели, используемые в наиболее актуальных современных аспектах экономики: приложения теории массового обслуживания, расчеты рисков, динамика эколого-экономических систем, методы финансовой математики.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

Для студентов, магистрантов, аспирантов и преподавателей экономических и смежных технических специальностей вузов, а также для слушателей, получающих второе высшее образование.

УДК 330.4(075.8)
ББК 65в631я73

ISBN 978-5-9916-3138-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый учебник написан на основе лекций, прочитанных авторами в течение последних лет в экономических вузах, в том числе и при подготовке слушателей второго высшего образования. В книгу вошли материалы, прошедшие практическую проверку при преподавании цикла математических дисциплин в экономических государственных и негосударственных вузах для различных форм обучения.

Поскольку в современном образовательном процессе в экономических вузах возрастает удельная доля математических методов в экономике и экономико-математического моделирования, в учебник включены соответствующие разделы, дающие достаточно полное представление об их теоретических и практических аспектах.

Структура книги выдержана в строгом соответствии с логикой представления материала: теория вероятностей и математическая статистика, математические методы, математические модели, финансовая математика, эконометрика. Впервые в учебник по математическим приложениям включена новая тема — проблемы моделирования эколого-экономических систем.

Приводимые в этих разделах методы и модели опираются на излагаемые в изданном ранее учебнике* основы математических дисциплин, что обусловливает единую логику изложения материала в целом: от основ математики до сложных приложений математических методов и моделей в экономике.

Учебник содержит почти все дидактические единицы Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по блоку математических дисциплин для экономических вузов и специальностей в области математических методов и моделей.

Изучение математических дисциплин и методов, составляющих основу современного аппарата моделирования в экономике, позволит будущему специалисту сформировать необходимые компоненты мышления — уровень, кругозор и культуру, которые понадобятся ему как для успешной работы, так и для совершенствования знаний и повышения его квалификации.

---

* *Красс М.С.* Математика в экономике. Основы математики: Учебник. – М.: ИД ФБК-ПРЕСС, 2005.

При изложении материала авторы постарались сохранить сложившуюся терминологию и традиционные обозначения в формулировках задач, математических моделей и в решениях. Большая часть глав учебника содержит подборки задач и упражнений для самостоятельного выполнения.

Учебник рассчитан на самую широкую экономическую аудиторию: студентов, аспирантов, преподавателей, слушателей магистратуры, научных сотрудников. Он может быть использован как в университетах, так и в учебном процессе вузов для различных форм обучения по программам высшего экономического образования: очной, вечерней и дистанционной, а также при получении второго высшего образования.

Раздел 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Существует три вида событий: достоверные, невозможные и случайные. *Достоверным* относительно комплекса условий S называется событие, которое обязательно произойдет при выполнении этого комплекса условий. Например, если гладкий желоб с лежащим внутри него тяжелым шариком наклонить, то шарик обязательно покатится по желобу в сторону наклона. *Невозможным* называется событие, которое заведомо не произойдет при выполнении комплекса условий S. Например, из герметически изолированного сосуда вода вылиться не может. *Случайным* относительно комплекса условий S называется событие, которое при выполнении указанного комплекса условий может либо произойти, либо не произойти. Например, если уронить фарфоровую чашку на пол, то она может как разбиться, так и остаться неповрежденной.

Теория вероятностей имеет дело со случайными событиями. Однако она не может предсказать, произойдет единичное событие или нет. Теория вероятностей изучает *вероятностные закономерности массовых однородных случайных событий*. Ее методы получили широкое распространение в различных областях естествознания и в прикладных технических задачах. Теория вероятностей легла в основу теории массового обслуживания и теории надежности. В последние годы аппарат теории вероятностей активно используется в экономике.

1.1. Основные понятия теории вероятностей

1.1.1. Некоторые формулы комбинаторики

Пусть задано конечное множество элементов некоторой природы. Из них можно составлять определенные комбинации, количество которых изучает комбинаторика. Некоторые ее формулы используются в теории вероятностей; приведем их.

Комбинации, состоящие из одной и той же совокупности n разных элементов и отличающиеся только порядком их расположения, называются *перестановками*. Число всех возможных перестановок определяется произведением чисел от единицы до n:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n! \quad (1.1)$$

Пример 1. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4 с использованием всех указанных цифр в каждом числе?

Решение. Искомое число $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Комбинации по m элементов, составленные из n разных элементов ($m \le n$), отличающиеся друг от друга либо элементами, либо их порядком, называются *размещениями.* Число всевозможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1). \quad (1.2)$$

Пример 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из семи разных цифр при отсутствии среди них нуля?

Решение. Искомое количество цифр

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Комбинации, содержащие по m элементов каждая, составленные из n разных элементов ($m \le n$) и различающиеся хотя бы одним элементом, называются *сочетаниями.* Число сочетаний определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (1.3)$$

Соответственно справедливы следующие формулы:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad A_n^m = P_m C_n^m. \quad (1.4)$$

Первую из формул (1.4) удобно использовать, в частности, в расчетах, когда $m > n/2$.

Напомним формулу бинома Ньютона, в которой участвуют коэффициенты (1.3):

$$(p+q)^n = C_n^n p^n q^0 + C_n^{n-1} p^{n-1} q^1 + \ldots + C_n^1 p^1 q^{n-1} + C_n^0 p^0 q^n. \quad (1.5)$$

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать:

а) по две карты;

б) по 32 карты,

из колоды, содержащей 36 игральных карт?

Решение. Искомое число способов:

а) $C_{36}^2 = \frac{36!}{2! \cdot 34!} = \frac{35 \cdot 36}{2} = 630$;

б) $C_{36}^{32} = C_{36}^4 = \frac{36!}{4! \cdot 32!} = 58\,905$.

1.1.2. Виды случайных событий

Выше было приведено определение случайного события. Обычно в теории вероятностей вместо термина «комплекс условий» употребляют термин «испытание», и тогда событие трактуется как результат испытания. Например, стрельба по мишени: выстрел — это испытание, попадание в мишень — событие; подбрасывание монеты вверх — испытание, выпадение орла (или решки) — событие.

Определение 1. События называют *несовместными*, если в одном и том же испытании наступление одного из событий исключает наступление других.

Например, выпадение орла при подбрасывании монеты исключает появление в этом же испытании решки, и наоборот.

Определение 2. Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания наступление хотя бы одного из них является достоверным событием.

Например, при выстреле по мишени (испытание) обязательно будет либо попадание, либо промах; эти два события образуют полную группу.

Следствие. Если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания наступит одно и только одно из этих событий.

Этот частный случай будет использован далее.

1.1.3. Классическое определение вероятности

Назовем каждый из возможных результатов испытания *элементарным событием*, или *исходом*. Те элементарные исходы, которые нас интересуют, называются *благоприятными* событиями.

Определение 3. Отношение числа благоприятных событию A элементарных исходов к общему числу равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу, называется *вероятностью события* A.

Вероятность события A обозначается $P(A)$. Понятие вероятности — одно из основных в теории вероятностей. Данное его определение является классическим. Из него вытекают некоторые свойства.

Свойство 1.1. Вероятность достоверного события равна единице.

Свойство 1.2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 1.3. Вероятность случайного события есть положительное число

$$0 < P(A) < 1.$$

Следовательно, вероятность любого события удовлетворяет неравенству

$$0 \leq P(A) \leq 1. \tag{1.6}$$

Отметим, что современные курсы теории вероятностей основаны на теоретико-множественном подходе, в котором элементарные события являются точками пространства элементарных событий Ω; событие A отождествляется с подмножеством элементарных исходов, благоприятных этому событию, $A \subset \Omega$.

Приведем примеры непосредственного вычисления вероятностей.

Пример 4. В коробке лежат 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Найти вероятность того, что из 5 взятых наугад шаров будет 4 белых.

Решение. Найдем число благоприятных исходов: число способов, которыми можно взять 4 белых шара из 6 имеющихся, равно $C_6^4 = C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$. Общее число исходов определяется числом сочетаний из 10 по 5: $C_{10}^5 = 252$. Согласно определению 3 искомая вероятность $P = 15/252 \approx 0{,}06$.

Пример 5. Какова вероятность того, что при заполнении карточки спортивной лотереи «6 из 36» будет угадано 4 номера?

Решение. Общее число исходов равно $C_{36}^6 = 1\,947\,792$. Число благоприятных исходов равно $C_6^4 = 15$. Отсюда искомая вероятность равна $7{,}7 \cdot 10^{-6}$.

Пример 6. В ящике находятся 10 стандартных и 5 нестандартных деталей. Какова вероятность, что среди наугад взятых 6 деталей будет 4 стандартных и 2 нестандартных?

Решение. Общее число исходов C_{15}^6. Число благоприятных исходов определяется произведением $C_{10}^4 \cdot C_5^2$, где первый сомножитель соответствует числу вариантов изъятия из ящика 4 стандартных деталей из 10, а второй — числу вариантов изъятия из ящика 2 нестандартных деталей из 5. Отсюда следует, что искомая вероятность равна

$$P = \frac{C_{10}^4 \cdot C_5^2}{C_{15}^6} = 0{,}42.$$

1.2. Теорема сложения вероятностей

Рассмотрим различные типы групп событий.

1.2.1. Несовместные события

Определение 4. *Суммой* двух событий A и B называют событие $C = A+B$, которое заключается в наступлении либо события A, либо события B, либо событий A и B одновременно.

Это определение напоминает определение суммы множеств*, что используется в теоретико-множественном подходе в теории вероятностей. Примеры суммы событий: произведены два выстрела, и события A и B — попадания при первом и втором выстрелах соответственно; тогда $A+B$ — попадание либо при первом выстреле, либо при втором, либо при обоих выстрелах. Если события A и B несовместные, то их сумма — это событие, состоящее в наступлении какого-либо одного из этих событий.

Аналогично определяется сумма нескольких событий, состоящая в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема 1.1. Вероятность появления какого-либо из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad \blacksquare \tag{1.7}$$

Следствие 1.1. Вероятность появления какого-либо из нескольких попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{1.8}$$

Пример 7. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 4 концентрические зоны. Вероятности попадания в эти зоны соответственно равны 0,4; 0,3; 0,2 и 0,1. Найти вероятность попадания либо в первую, либо во вторую зону.

Решение. Пусть событие A — попадание в первую зону мишени, а событие B — попадание во вторую зону мишени. Эти события несовместны, поэтому применимы теорема 1.1 и формула (1.7) сложения вероятностей. Искомая вероятность

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

*См.: *Красс М.С.* Математика в экономике. Основы математики: Учебник. – М.: ИД ФБК-ПРЕСС, 2005. – Гл. 6.

1.2.2. Полная группа событий

Теорема 1.2. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \quad \blacksquare \tag{1.9}$$

Пример 8. На складе готовой продукции находятся изделия, среди которых 5% нестандартных. Найти вероятность того, что при выдаче изделия со склада оно будет стандартным.

Решение. Вероятность получения нестандартного изделия равна 0,05; события выдачи стандартного и нестандартного изделия образуют полную группу. Следовательно, сумма их вероятностей равна единице, и тогда искомая вероятность равна 0,95.

1.2.3. Противоположные события

Определение 5. Два единственно возможных события, образующих полную группу, называются *противоположными*.

Если событие обозначено через A, то противоположное ему событие обозначается через $\overline{A}$. Из теоремы 1.2 следует, что

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{1.10}$$

Например, если при стрельбе по мишени попадание — это событие A, то событие $\overline{A}$ — это промах; сумма их вероятностей равна единице — при выстреле обязательно будет либо попадание, либо промах. То же имеет место и при подбрасывании монеты: обязательно выпадет либо орел, либо решка.

Пример 9. В магазине имеется 10 телевизоров, из которых 2 неисправных. Найти вероятность того, что среди наугад взятых трех телевизоров будет хотя бы один неисправный.

Решение. События «среди взятых телевизоров нет ни одного неисправного» и «есть хотя бы один неисправный» — противоположные. Первое из них обозначим через A, а второе — через $\overline{A}$. Общее число способов, которыми можно взять 3 изделия из 10, равно C_{10}^3. Число исправных телевизоров равно 8, число способов выборки из них трех изделий равно C_8^3, так что вероятность $P(A) = \dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}$. Искомая вероятность определяется из формулы (1.10):

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = 1 - 0{,}47 = 0{,}53.$$

1.3. Теорема умножения вероятностей

Рассмотрим различные типы групп событий.

1.3.1. Произведение событий и условная вероятность

Определение 6. *Произведением* двух событий A и B называется событие AB, означающее совместное появление этих событий (это определение также напоминает определение произведения множеств)*.

Например, если событие A — шар, событие B — белый цвет, то их произведение AB — белый шар. Аналогично определяется произведение *нескольких* событий как совместное наступление их всех.

Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме необходимого комплекса условий S, не налагается, то такая вероятность называется *безусловной*. Если же вводятся дополнительные условия, содержащие случайные события, то вероятность называется *условной*.

Определение 7. Вероятность события B в предположении о наступлении события A называют условной вероятностью $P_A(B)$.

Пример 10. В ящике лежат 11 деталей, 3 из них нестандартные. Из ящика дважды берут по одной детали, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что во второй раз из ящика будет извлечена стандартная деталь — событие B, если в первый раз была извлечена нестандартная деталь — событие A.

Решение. После первого извлечения в ящике из 10 деталей имеется 8 стандартных, и, следовательно, искомая вероятность

$$P_A(B) = 0{,}8.$$

Пусть теперь известны вероятность $P(A)$ события A и условная вероятность $P_A(B)$ события B. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. Вероятность произведения двух событий определяется формулой

$$P(AB) = P(A)P_A(B). \quad \blacksquare \tag{1.11}$$

Пример 11. В условиях примера 10 найти вероятности того, что в первый раз извлечена нестандартная деталь, а во второй раз — стандартная, и наоборот.

*См.: *Красс М.С.* Математика в экономике. Основы математики: Учебник. – М.: ИД ФБК-ПРЕСС, 2005. – Гл. 6.

Решение. Событие A — это извлечение из ящика нестандартной детали, а событие B — стандартной. Тогда:

1) вероятность $P(A) = 3/11$, а условная вероятность $P_A(B) = 0{,}8$. Искомая вероятность произведения этих событий (их совместного наступления в указанном порядке) согласно теореме 1.3 равна

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = \frac{3}{11} \cdot 0{,}8 \approx 0{,}22;$$

2) вероятность $P(B) = 8/11$, а условная вероятность $P_B(A) = 0{,}3$. Мы видим, что и в этом случае вероятность произведения событий $P(BA) = P(B)P_B(A) \approx 0{,}22$.

В этом примере мы проверили известное в теории равенство

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A). \tag{1.12}$$

Теорема 1.3 допускает обобщение на случай произведения любого числа событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n), \tag{1.13}$$

т.е. вероятность совместного наступления n событий равна произведению n вероятностей, где $P_{A_1A_2\ldots A_{k-1}}(A_k)$ — условная вероятность события A_k в предположении, что события A_1, A_2, A_3, $\ldots$, A_{k-1} уже произошли ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Пример 12. В урне находятся 4 белых, 5 красных и 3 синих шара. Наудачу извлекают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что в первый раз появится белый шар (событие A), во второй раз — красный (событие B), в третий — синий (событие C).

Решение. Вероятность появления белого шара в первом извлечении $P(A) = 1/3$; условная вероятность появления красного шара во втором извлечении при условии появления в первый раз белого шара $P_A(B) = 5/11$; условная вероятность появления синего шара в третьем извлечении при условии появления в предыдущих извлечениях белого и красного шаров $P_{AB}(C) = 0{,}3$. Искомая вероятность определяется по формуле (1.13) при $n = 3$:

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{11} \cdot 0{,}3 \approx 0{,}045.$$

1.3.2. Независимые события

Определение 8. Событие B называется *независимым* от события A, если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности (появление события A не влияет на вероятность события B):

$$P_A(B) = P(B). \tag{1.14}$$

Отсюда следует, что и событие A независимо от события B:

$$P_B(A) = P(A). \tag{1.15}$$

Для независимых событий теорема 1.3 умножения вероятностей в общей форме, которая следует из формулы (1.13), дает следующую формулу:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n), \quad n > 1. \tag{1.16}$$

Равенство (1.16) принимается за определение независимых событий. Если события независимы, то независимы и соответствующие им противоположные события.

Пример 13. Найти вероятность поражения цели тремя орудиями, если вероятности поражения цели орудиями соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,7 (события A, B и C).

Решение. Поскольку события A, B и C являются независимыми, искомая вероятность вычисляется по формуле (1.16) при $n = 3$:

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

Когда в результате испытания могут иметь место n независимых событий с известными вероятностями их наступления, особый интерес представляет случай нахождения вероятности наступления хотя бы одного из них (например, в случае трех событий найти вероятность наступления либо одного, либо двух, либо трех событий). Обозначим это событие через A. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4. Вероятность наступления хотя бы одного из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ определяется формулой

$$P(A) = 1 - q_1q_2\ldots q_n, \tag{1.17}$$

где $q_i = 1 - p_i$ — вероятности соответствующих противоположных событий $\overline{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. ■

В частном случае, когда все события A_i имеют одинаковую вероятность p, из формулы (1.17) следует, что

$$P(A) = 1 - q^n; \quad q = 1 - p. \tag{1.18}$$

Пример 14. В условиях примера 13 найти вероятность поражения цели (хотя бы одного попадания) при залповой стрельбе орудий.

Решение. Вероятности противоположных событий (промахов) соответственно равны $q_1 = 0{,}1$, $q_2 = 0{,}2$, $q_3 = 0{,}3$. Искомая вероятность находится по формуле (1.17) при $n = 3$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

Из этого примера наглядно видно преимущество совместного воздействия случайных событий для достижения общего результата.

Пример 15. На перевозку груза направлены 4 автомобиля. Вероятность нахождения каждой из машин в исправном состоянии равна $0{,}8$. Найти вероятность того, что в работе участвует хотя бы один из выделенных для этого автомобилей.

Решение. Вероятность противоположного события (машина неисправна) равна $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. По формуле (1.18) находим искомую вероятность при $n = 4$:

$$P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0{,}2^4 = 0{,}9984.$$

Пример 16. Вероятность обслуживания клиента одним операционистом в банке равна $0{,}6$. Какое минимальное число операционистов должно работать в банке, чтобы вероятность обслуживания клиента была не менее $0{,}95$?

Решение. Вероятность противоположного события (отказ в обслуживании клиента операционистом) равна $0{,}4$. Пусть n — количество операционистов, удовлетворяющее условию задачи, т.е.

$$P(A) = 1 - q^n = 1 - 0{,}4^n \geq 0{,}95.$$

Решая это неравенство, получаем:

$$0{,}4^n \leq 0{,}05.$$

При логарифмировании обеих частей этого неравенства следует, что

$$n \geq \frac{\lg 0{,}05}{\lg 0{,}4} = 3{,}27.$$

Поскольку n должно быть целым числом, окончательно получаем, что в банке должно работать не менее четырех операционистов.