А. М. Попов, В. Н. Сотников

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Высшая математика для экономистов

УЧЕБНИК ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

Рекомендовано Учебно-методическим центром
«Профессиональный учебник» в качестве учебника
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по специальностям экономики и управления

МОСКВА • ЮРАЙТ • 2011

УДК 51(075.8)
ББК 22.1
П58

***Авторы*:**

Попов Александр Михайлович — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и математических методов в экономике Института экономики и предпринимательства (г. Москва);

Сотников Валерий Николаевич — кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры математики и математических методов в экономике Института экономики и предпринимательства (г. Москва).

***Рецензенты*:**

Гатаулин А. М. — член-корреспондент РАСХН, доктор экономических наук, профессор (кафедра экономической кибернетики РГАУ — МСХА им. К. А. Тимирязева);

Струнков С. П. — доктор физико-математических наук, профессор (НИИ системных исследований РАН).

Попов, А. М.

П58 Экономико-математические методы и модели : учебник для бакалавров / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под ред. проф. А. М. Попова. — М. : Издательство Юрайт, 2011. — 479 с. — Серия : Бакалавр.

ISBN 978-5-9916-1378-1

Данный учебник является частью обучающего комплекса, в который также входят книги А. М. Попова и В. Н. Сотникова «Высшая математика для экономистов» и «Теория вероятностей и математическая статистика».

Учебник подготовлен в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по дисциплине «Математика» для экономических специальностей. В нем изложены основные разделы математических методов и моделей в экономике в соответствии с дидактическими блоками Госстандарта.

Для студентов и аспирантов экономических направлений и специальностей.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1

ISBN 978-5-9916-1378-1

Оглавление

Раздел I
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Раздел II
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Раздел III
ТЕСТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

Предисловие

Учебник написан в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по дисциплине «Математика» для экономических специальностей. В нем изложены основные разделы, касающиеся математических методов и моделей в соответствии с дидактическими блоками Госстандарта.

Учебник написан на основе многолетнего опыта чтения лекций на факультетах экономики и управления Института экономики и предпринимательства (г. Москва).

Учебник состоит из трех разделов: «Экономико-математические методы», «Экономико-математические модели», «Тесты по дисциплине “Математика”». Последние составлены согласно рекомендациям Национального аккредитованного агентства в сфере образования и сопровождаются ответами.

Главы 6 и 7 ориентированы в основном на студентов, обучающихся по специальности «Прикладная информатика (в экономике)».

В конце глав приведены вопросы и задания для самоконтроля, а также задачи для самостоятельного решения, ответы к последним можно найти в конце книги. В учебнике представлен также справочный материал, включающий часто используемые математические формулы.

Авторы считают приятным долгом поблагодарить: члена-корреспондента РАСХН, доктора экономических наук, профессора, А. М. Гатаулина (кафедра экономической кибернетики РГАУ — МСХА им. К. А. Тимирязева); доктора физико-математических наук профессора С. П. Стрункова (НИИ системных исследований РАН), взявших на себя нелегкий труд по рецензированию рукописи.

Введение

Современная математика характеризуется интенсивным использованием ее в различных науках. Во многом этот процесс происходит благодаря разделению последней на ряд самостоятельных областей. Математика стала для многих отраслей знаний не только инструментом количественного расчета, но также и методом точного исследования и средством формулировки задач исследования.

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества пользуется разнообразными количественными характеристиками и математическими методами. В исследованиях современной экономики применяются различные оптимизационные методы, которые опираются на математическое программирование, теорию игр, сетевое планирование, теорию массового обслуживания и ряд других прикладных наук.

Современная экономическая теория включает как естественный, необходимый элемент математические модели и методы. Использование математики в экономике позволяет, во-первых, выделить и формально описать наиболее важные, существенные связи. Во-вторых, из четко сформулированных исходных данных и соотношений можно сделать выводы, адекватные изучаемому объекту в той же мере, что и выбранные предпосылки. В-третьих, методы математики позволяют индуктивным путем получать новые знания об объекте: оценить форму и параметры зависимостей его переменных, в наибольшей степени соответствующие имеющимся наблюдениям. В-четвертых, использование языка математики позволяет точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать ее понятия.

Математические методы и модели использовались еще в XVIII в. Основными работами в этот период явились «Экономическая таблица» (Ф. Кене), макроэкономическая модель экономики (А. Смит), модель международной торговли (Д. Риккардо).

В XIX в. большой вклад в моделирование рыночной экономики внесли математики Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето и др. В XX в. математические методы моделирования применялись очень широко, с их использованием связаны практически все работы, удостоенные Нобелевской премии по экономике (Р. Солоу, В. Леонтьев, Л. Канторович и др.).

В России в начале XX в. большой вклад в математическое моделирование экономики внесли В. К. Дмитриев и Е. Е. Слуцкий. В 80-е гг. прошлого столетия экономико-математическое направление было связано в основном с попытками формально описать «систему оптимального функционирования социалистической экономики» (Н. П. Федоренко, С. С. Шаталин). В этот период были построены многоуровневые системы моделей народнохозяйственного планирования, оптимизационные модели областей и предприятий.

Математическая модель экономического объекта — это условный образ объекта, построенный для упрощения его исследования. Предполагается, что изучение модели дает новые решения в той или иной ситуации.

Можно выделить три этапа проведения математического моделирования в экономике.

1. Постановка цели и задачи исследования, качественное описание объекта в виде экономической модели.
2. Формулировка математической модели изучаемого объекта, выбор методов исследования. Исследование модели с помощью этих методов.
3. Обработка и анализ полученных результатов.

Математические модели, используемые в экономике, можно подразделить на классы по ряду признаков, относящихся к особенностям моделируемого объекта, цели моделирования и используемого инструментария: модели макро- и микроэкономические, теоретические и прикладные, оптимизационные и равновесные, статические и динамические.

Раздел I

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Глава 1
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Постановка задачи линейного программирования

Математическое программирование изучает задачи поиска экстремума функции нескольких переменных при наличии ограничений, наложенных на эти переменные. Сущность экстремальных задач состоит в том, чтобы из множества допустимых наборов значений выбрать оптимальный с данной точки зрения.

Если функция нескольких переменных и все ограничения являются *линейными* относительно этих переменных, то математическое программирование называется *линейным*.

Математическая модель задачи линейного программирования (ЗЛП) включает следующее.

1. Совокупность переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, каждый набор значений которых называется *планом* ЗЛП.

Очевидно, что план ЗЛП можно рассматривать как n-мерный вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

2. Целевую функцию

$$Q(x_1, x_2, ..., x_n) = Q(x) \to \text{extr},$$

которая позволяет выбирать оптимальный, т.е. наилучший план из множества возможных планов ЗЛП.

Наилучший план должен давать целевой функции экстремальное значение. В экономике целевая функция может представлять собой прибыль, издержки производства, объем реализации и т.п.

3. Систему ограничений на план ЗЛП, представленную в виде уравнений или неравенств. В экономике эти ограничения следуют, например, из имеющихся ресурсов, потенциальных возможностей оборудования и т.д.

Система ограничений дополняется требованием неотрицательности значений всех переменных.

Решения системы ограничений образуют *область допустимых решений (планов) ЗЛП*.

Допустимый план x^*, дающий целевой функции экстремальное (заданное в виде максимума или минимума) значение, называется *оптимальным планом* и является *решением ЗЛП*.

Выше указывалось, что в ЗЛП как целевая функция, так и ограничения являются линейными относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Стандартной формой ЗЛП называют ее следующую математическую форму:

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leqslant b_2; \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leqslant b_m; \\ x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; ... x_n \geqslant 0. \end{array} \tag{1.2}$$

Если в равенстве (1.1) нужно искать не максимум, а минимум целевой функции $Q(x)$, то для записи ЗЛП в стандартной форме достаточно умножить это равенство на (-1) и искать $\max(-Q(x))$.

Действительно, план ЗЛП, придающий функции $(-Q(x))$ максимальное значение, дает $Q(x)$ минимальное значение. Если какие-то неравенства в системе ограничений имеют знак $\geqslant$, то их также нужно умножить на (-1), чтобы получить знак $\leqslant$.

В свернутом виде с использованием символа суммирования стандартная форма ЗЛП имеет вид

$$\begin{array}{l} Q = \sum\limits_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,\ i = 1, ..., m; \\ x_j \geqslant 0, j = 1, ..., n. \end{array}$$

Во многих случаях удобнее оказывается форма записи ЗЛП, в которой система ограничений представляет собой систему уравнений. Тогда можно использовать методы решения систем линейных алгебраических уравнений, известные из линейной алгебры.

Такую форму ЗЛП называют *канонической формой*. Она имеет вид

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1;\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2;\\ &\qquad\qquad ...\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m;\\ &x_1 \geqslant 0;\, x_2 \geqslant 0;\, ...\, x_n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Чтобы перейти от стандартной формы ЗЛП к канонической, по количеству неравенств m вводят m дополнительных неотрицательных переменных

$$x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}\,.$$

Действительно, поскольку левые части неравенств из системы ограничений в стандартной форме (1.2) не больше правых, то добавление к левой части неравенства неотрицательной переменной позволяет перевести неравенство в уравнение.

Заметим, что количество введенных дополнительных переменных должно соответствовать количеству неравенств в системе ограничений.

Тогда ЗЛП, переведенная из стандартной формы в каноническую, принимает вид

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ...+ 0x_{n+m} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1;\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2;\\ &\qquad\qquad ...\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m;\\ &x_1 \geqslant 0;\, x_2 \geqslant 0;\, ...\, x_n \geqslant 0;\, x_{n+1} \geqslant 0;\, ...\, x_{n+m} \geqslant 0, \end{aligned}$$

или в свернутой форме с использованием символов суммирования

$$\begin{aligned} &Q = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j + \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot x_{n+1} \to \max;\\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i,\, i = 1, ..., m;\\ &x_j \geqslant 0, j = 1, ..., n + m. \end{aligned}$$

В качестве примеров экономических задач, сводящихся к ЗЛП, рассмотрим следующие задачи.

Пример 1.1. Задача планирования производства. Пусть предприятие может производить n различных изделий (продуктов). Пронумеруем эти продукты от 1 до n. Количество выпускаемого j-го продукта в плановую единицу времени обозначим x_j.

Тогда вектор количества продуктов, выпускаемых предприятием,

$$x = (x_1, x_2, \dots , x_n) \text{ — план производства.}$$

Ясно, что все x_j должны быть неотрицательными.

Пусть для выпуска изделий необходимы m видов различных ресурсов (сырье, электроэнергия, рабочая сила и т.п.). Пронумеруем их от 1 до m. Предельное количество i-го ресурса, находящегося в распоряжении предприятия, обозначим b_i.

Пусть a_{ij} — количество i-го ресурса, расходуемое на производство единицы j-го продукта. Прибыль, которую предприятие получит при продаже единицы j-го продукта, обозначим c_j.

Принятые обозначения для наглядности сведены в табл. 1.

Таблица 1

Номер ресурса	Номер продукта	1	2	...	n
	Выпускаемое количество продукта x_j	x_1	x_2	...	x_n
	Предельное количество (запас) ресурса b_i	Количество ресурса на изготовление единицы продукта a_{ij}			
1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...
m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Тогда затраты ресурса i-го вида при выполнении плана производства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \,.$$

Естественно, эти затраты не должны превышать предельное количество i-го ресурса b_i.

Прибыль предприятия, получаемая при выполнении плана

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

равна

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \,.$$

Основная задача планирования — выбор плана x, обеспечивающего получение максимальной прибыли при имеющихся ресурсах.

Математически это выглядит так:

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1;\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leqslant b_2;\\ &\qquad\qquad ...\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leqslant b_m;\\ &x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ ...\ x_n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Таким образом, задача планирования производства сводится к ЗЛП в ее стандартной форме. ■

Пример 1.2. Задача диеты. Пусть необходимо определить рацион откорма скота. Будем считать, что в рацион должны входить m биологически необходимых питательных веществ (белки, жиры, углеводы, витамины и т.д.).

Известно, что i-го питательного вещества в дневном рационе должно быть не менее b_i единиц.

Предположим, что имеется n различных кормов, из которых можно составлять дневной рацион. Содержание i-го питательного вещества в j-м виде корма обозначим a_{ij} (считаем, что эти данные научно обоснованы). Цену единицы j-го вида корма примем равной c_j.

Задача заключается в том, чтобы выбрать наиболее дешевый пищевой рацион

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),$$

где x_j – дневное количество j-го корма; $j = 1, 2, 3, ..., n$, но так, чтобы животные получали достаточное количество всех питательных веществ.

Математическая формулировка задачи:

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geqslant b_1;\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geqslant b_2;\\ &\qquad\qquad ...\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geqslant b_m;\\ &x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ ...\ x_n \geqslant 0. \blacksquare \end{aligned}$$

1.2. Графический метод решения задач линейного программирования

Этот метод может применяться в случае двух переменных x_1 и x_2. Пусть математическая формулировка ЗЛП имеет вид

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max\ (\min) \tag{1.3}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2\ (\geqslant \text{ или } \leqslant)\ b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2\ (\geqslant \text{ или } \leqslant)\ b_2;\\
&\qquad\qquad \dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2\ (\geqslant \text{ или } \leqslant)\ b_m;\\
&x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Графический метод решения ЗЛП состоит в следующем.

1. На координатной плоскости x_1x_2 строится множество X (рис. 1.1), которое образует *область допустимых решений* (или область допустимых планов) ЗЛП.

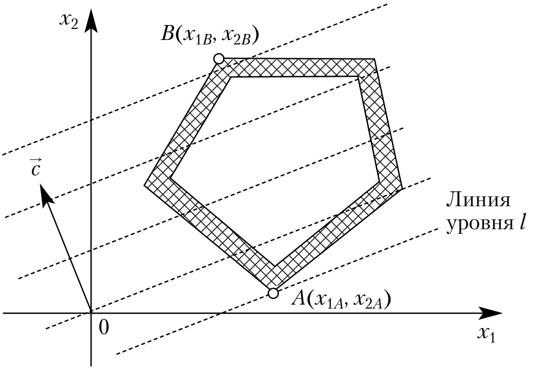


Рис. 1.1. **Графический метод решения ЗЛП**

Эта область представляет собой пересечение всех полуплоскостей, которые по отдельности являются решениями неравенств, входящих в систему ограничений (1.4).

Если $X = \varnothing$, то ЗЛП не имеет решений.

Заметим, что областью решений линейного неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i$ является одна из двух полуплоскостей, на которые прямая $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = 0$, соответствующая данному неравенству, делит всю координатную плоскость.

Для того чтобы определить, какая из двух координатных полуплоскостей является областью решений, достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство.

Если оно удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, содержащая данную точку; в противном случае областью решений является полуплоскость, не содержащая данную точку.

2. Строится вектор градиента целевой функции (1.3)

$$\boldsymbol{c} = \nabla Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2)$$

и ее линия уровня l — прямая, перпендикулярная вектору градиента и проходящая, например, через начало координат.

3. Строится семейство линий уровня целевой функции, представляющих собой прямые, параллельные l.

Очевидно, что значение Q постоянно на линии уровня и возрастает при перемещении линии уровня в направлении градиента $\boldsymbol{c}$ целевой функции Q.

Если при таком движении точка A (см. рис. 1.1) является первой единственной точкой встречи линии уровня с областью допустимых решений X, то она будет точкой решения ЗЛП при $Q \to \min$, а если B — последняя общая точка при таком перемещении, то это точка решения ЗЛП при $Q \to \max$.

Данное обстоятельство запишем в виде

$$x^* = (x_{1A}, x_{2A}), \text{ если } Q \to \min;$$
$$x^* = (x_{1B}, x_{2B}), \text{ если } Q \to \max.$$

Если при таком перемещении окажется, что линия уровня совпадет с одной из сторон области допустимых решений, то ЗЛП имеет *бесконечное* множество решений.

Если же вдруг окажется, что первой (последней) точки не существует, то задача отыскания min (max) целевой функции Q является *неразрешимой*.

Пример 1.3. Решить ЗЛП

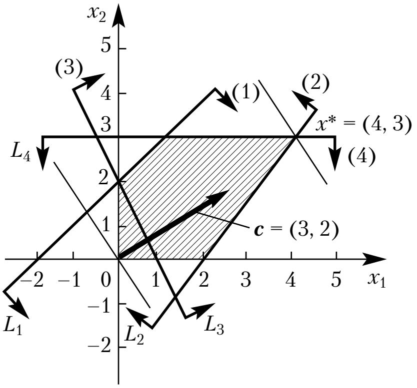
$$Q(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \geqslant 0, & (1) \\ 3x_1 - 2x_2 - 6 \leqslant 0, & (2) \\ 2x_1 + x_2 - 2 \geqslant 0, & (3) \\ x_2 \leqslant 3, & (4) \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. & \end{cases}$$

Решение. Строим область допустимых решений задачи. Для этого пронумеруем ограничения задачи.

В прямоугольной декартовой системе координат, изображенной на рисунке, строим прямую $x_1 - x_2 + 2 = 0$ (L_1), соответствующую ограничению (1). Находим, какая из двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю координатную плоскость, является областью решений неравенства (1).



Для этого достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство (1).

Так как прямая L_1 не проходит через начало координат, подставляем координаты точки O (0, 0) в первое ограничение $1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \geqslant 0$ и получаем верное неравенство $2 \geqslant 0$.

Следовательно, точка O лежит в полуплоскости решений.

Таким образом, стрелки на концах прямой L_1 должны быть направлены в полуплоскость, содержащую точку O.

Аналогично строим прямые $3x_1 - 2x_2 - 6 = 0$ (L_2), $2x_1 + x_2 - 2 = 0$ (L_3), $x_2 = 3$ (L_4) и области решений ограничений (2), (3) и (4). Находим общую часть полуплоскостей решений, учитывая при этом условия неотрицательности переменных; полученную область допустимых решений отметим на рисунке штриховкой.

По коэффициентам целевой функции строим вектор градиента целевой функции $\vec{c} = (3, 2)$ и одну из линий уровня, перпендикулярную градиенту и проходящую, например, через начало координат.

Так как решается задача на отыскание максимума целевой функции, то линию уровня параллельно перемещаем в направлении градиента до точки выхода ее из области допустимых решений.

Эта точка x^* является точкой пересечения прямых, ограничивающих область допустимых решений и соответствующих неравенствам (2) и (4). Поэтому ее координаты можно найти, решая систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6 = 0, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Получаем $x^* = (4, 3)$. Вычисляем $Q(x^*) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$.

Ответ: $\max Q(x) = 18$ при $x^* = (4, 3)$.

Легко убедиться, что любая другая точка из области допустимых решений ЗЛП дает значение целевой функции Q меньшее, чем полученное значение. ■

Пример 1.4. Решить ЗЛП

$$Q(x) = 4x_1 + 2x_2 \to \min,$$

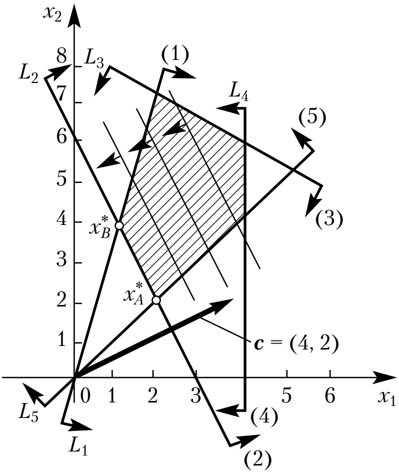
при ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geqslant 0, & (1) \\ 2x_1 + 2x_2 \geqslant 6, & (2) \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 16, & (3) \\ x_1 \leqslant 4, & (4) \\ x_1 - x_2 \leqslant 0. & (5) \end{cases}$$

Решение. Строим область допустимых решений, градиент целевой функции $\vec{c} = (4, 2)$ и одну из линий уровня, перпендикулярную градиенту и имеющую общие точки с этой областью.

Перемещаем линию уровня в направлении, противоположном направлению градиента $\vec{c}$, так как решается задача на отыскание минимума функции.

Градиент $\vec{c} = (4, 2)$ и нормаль $\vec{n} = (2, 1)$ граничной прямой L_2, в направлении которой перемещаются линии уровня, лежат на одной прямой, так как их координаты пропорциональны $4 : 2 = 2 : 1$.



Следовательно, линия уровня целевой функции параллельна граничной прямой L_2 области допустимых решений и выходит из этой области при движении против градиента (т.е. в направлении уменьшения целевой функции) через две угловые точки этой области x_A^* и x_B^*.

Таким образом, задача имеет бесконечное множество решений, являющихся точками отрезка $[x_A^*, x_B^*]$.

Эти точки $x_A^* = L_2 \cap L_5$, $x_B^* = L_1 \cap L_2$ находим, решая соответствующие системы уравнений

$$+\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, & (L_2) \\ x_1 - x_2 = 0 & (L_5) \end{cases} \qquad +\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0, & (L_1) \\ 2x_1 + x_2 = 6 & (L_2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \overline{3x_1 = 6;} & \overline{6x_1 = 6;} \\ x_{1A}^* = 2, x_{2A}^* = 2; & x_{1B}^* = 1, x_{2B}^* = 4; \\ x_A^* = (2, 2); & x_{1B}^* = (1, 4). \end{array}$$

Вычисляем $Q(x_A^*) = Q(x_B^*) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 12$.

Ответ: $\min Q(x) = 12$ при $x^* = (1 - t)x_A^* + tx_B^*$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. ■

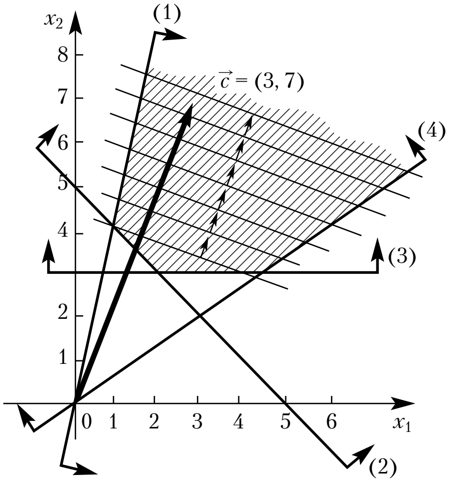
Пример 1.5. Решить ЗЛП

$$Q\,(x) = 3x_1 + 7x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \geqslant 0, & (1) \\ x_1 + x_2 \geqslant 5, & (2) \\ x_2 \geqslant 3, & (3) \\ 2x_1 - 3x_2 \leqslant 0. & (4) \end{cases}$$

Решение. Строим область допустимых решений, вектор градиента целевой функции $\vec{c} = (3, 7)$ и одну из линий уровня.



В данной задаче необходимо найти максимум целевой функции, поэтому линию уровня перемещаем в направлении вектора градиента. Ввиду того, что в этом направлении область допустимых решений не ограничена, линия уровня уходит в бесконечность.

Задача не имеет решения вследствие неограниченности целевой функции.

Ответ: $Q\,(x) \to +\infty$. ■

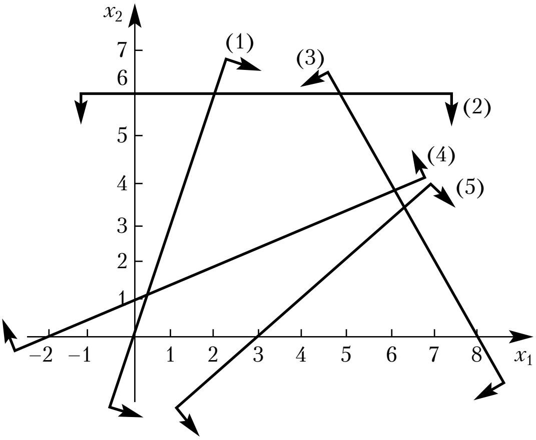
Пример 1.6. Решить ЗЛП

$$Q(x) = 4x_1 + 5x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geqslant 0, & (1) \\ x_2 \leqslant 6, & (2) \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 16, & (3) \\ -x_1 + 2x_2 \geqslant 2, & (4) \\ x_1 - x_2 \geqslant 3. & (5) \end{cases}$$

Решение. Строим прямые линии, соответствующие неравенствам системы ограничений, и находим полуплоскости, являющиеся областями решений этих неравенств.



Область допустимых решений задачи является пустым множеством. Задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

Ответ: система ограничений несовместна. Задача не имеет решений. ■

1.3. Симплекс-метод

Этот метод предназначен для решения ЗЛП в канонической форме. Способ перехода от стандартной формы к канонической был описан выше.

Суть симплекс-метода рассмотрим применительно к ЗЛП с пятью переменными $x_1 - x_5$, система ограничений которой включает три уравнения:

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 \to \max \text{ (или min)}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2;\\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3;\\
&x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0;\ x_4 \geqslant 0;\ x_5 \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Предположим, что ранг матрицы системы ограничений (1.5) равен 3. Тогда общее решение системы ограничений представляет собой совокупность трех выражений базисных неизвестных через свободные. Эти выражения нетрудно получить методом Жордана.

Пусть в качестве базисных выбраны переменные x_1, x_2, x_3. Для краткости назовем их совокупность *базисом*. Тогда общее решение системы ограничений (1.5) при выбранном базисе можно записать в виде

$$\begin{aligned}
x_1 &= b_1 - a_{14}x_4 - a_{15}x_5;\\
x_2 &= b_2 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5;\\
x_3 &= b_3 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где свободные члены b_1, b_2, b_3 и коэффициенты a_{14}, a_{15}, a_{24}, a_{25}, a_{34}, a_{35}, естественно, будут иметь уже другие значения, чем в уравнениях (1.5).

Для решения ЗЛП симплекс-методом необходимо выбирать такой базис, чтобы все b_i в общем решении (1.6) были неотрицательны. Как выбрать такой допустимый базис, будет показано ниже при решении конкретного примера.

Подставим полученное общее решение в целевую функцию

$$\begin{aligned}
Q = {} & c_1(b_1 - a_{14}x_4 - a_{15}x_5) + c_2(b_2 - a_{24}x_4 - a_{25}x_5) +\\
& + c_3(b_3 - a_{34}x_4 - a_{35}x_5) + c_4x_4 + c_5x_5 =\\
& = c_1b_1 - c_1a_{14}x_4 - c_1a_{15}x_5 + c_2b_2 - c_2a_{24}x_4 - c_2a_{25}x_5 + c_3b_3 -\\
& - c_3a_{34}x_4 - c_3a_{35}x_5 + c_4x_4 + c_5x_5 = (c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3) -\\
& - (c_1a_{14} + c_2a_{24} + c_3a_{34} - c_4)x_4 - (c_1a_{15} + c_2a_{25} + c_3a_{35} - c_5)x_5 .
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3;\\
\Delta_4 &= c_1a_{14} + c_2a_{24} + c_3a_{34} - c_4;\\
\Delta_5 &= c_1a_{15} + c_2a_{25} + c_3a_{35} - c_5,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

тогда

$$Q = \Delta_0 - \Delta_4x_4 - \Delta_5x_5 \to \max\ (\min).$$

Из полученного выражения очевидно, что если Δ_4 и Δ_5 неотрицательны, то при неотрицательных x_4 и x_5 (как это требуется по условию ЗЛП) max Q достигается при $x_4 = x_5 = 0$, а если Δ_4 и Δ_5 неположительны, то при $x_4 = x_5 = 0$ достигается $\min Q$.

Таким образом, при решении задачи на max нужно выбрать такой базис, чтобы все Δ_j в выражениях (1.7) (где j — номера свободных неизвестных) были *неотрицательны*, а при решении задачи на min — *неположительны*.

Тогда решение (оптимальный план) ЗЛП из решения (1.6) имеет вид

$$x^* = (b_1, b_2, b_3, 0, 0),$$

а оптимальное значение $Q^* = \Delta_0$.

Если при решении ЗЛП на $Q \to \max$ условие неотрицательности всех Δ_j не выполняется, то план $x = (b_1, b_2, b_3, 0, 0)$ не является оптимальным планом ЗЛП и его обычно называют начальным *опорным планом*.

Чтобы перейти к другому не худшему опорному плану, необходимо свободную переменную x_4 или x_5, у которой наименьшее отрицательное значение Δ_j, перевести в базисные, а из базиса вывести одну из неизвестных x_1, x_2 или x_3 и т.д.

Аналогично при решении задачи на $Q \to \min$ в базис вводится свободная переменная, у которой наибольшее положительное значение Δ_j.

Алгоритм применения симплекс-метода реализуют чаще всего в виде симплекс-таблиц, которые рассмотрим на конкретных примерах.

Пример 1.7. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$Q = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4;\\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 9;\\ &2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 6;\\ &x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Решение. Приводим ЗЛП к каноническому виду. Поскольку в системе ограничений два неравенства (не считая неравенств, связанных с неотрицательностью переменных), то вводим две неотрицательные дополнительные переменные x_4 и x_5. Причем x_4 вводим со знаком «плюс» (левая часть второго ограничения не больше правой), а x_5 — со знаком «минус» (левая часть третьего ограничения не меньше правой).

Введенные дополнительные переменные записываем в выражении целевой функции с коэффициентами, равными нулю

$$Q = x_1 + 4x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max \tag{1.8}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4;\\ &3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9;\\ &2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 6;\\ &x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0;\ x_4 \geqslant 0;\ x_5 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Для нахождения начального опорного плана нужно найти такое общее решение системы ограничений (1.9), чтобы все свободные члены в нем были неотрицательными, а затем для этого общего решения получить базисное решение.

Такое базисное решение и будет начальным опорным планом. Применим метод Жордана, записав для удобства расширенную матрицу системы ограничений в табл. 1

Таблица 1

i	b	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	θ_{i1}	θ_{i2}	θ_{i3}	θ_{i4}	θ_{i5}
1	4	–1	2	$\boxed{1}$	0	0	—	2	4		—
2	9	3	1	2	1	0	3	9	4,5		—
3	6	2	3	1	0	–1	3	2	6		—

Если в каком-то уравнении свободный член b был отрицательным, то следовало умножить это уравнение на (–1).

Из табл. 1 очевидно, что удобно выбрать одной из базисных переменных x_4, так как она входит во второе уравнение системы (вторую строку таблицы) с коэффициентом 1, а в остальные — с коэффициентом 0.

Методом Жордана нужно получить еще две базисные переменные — одну с коэффициентом 1 в первой строке, а другую — с коэффициентом 1 в третьей строке. В остальные строки базисные переменные должны входить с коэффициентом 0.

Чтобы соблюсти на каждом шаге метода Жордана условие неотрицательности свободных членов, при выборе разрешающего элемента предлагается следующая процедура.

1. Для каждого положительного коэффициента a_{ij} (за исключением коэффициентов при тех переменных, которые уже выбраны в качестве базисных) вычисляется величина $\theta_{ij} = \dfrac{b_i}{a_{ij}}$, которая записывается в соответствующую ячейку в правой части таблицы.

2. Если $a_{ij} \leqslant 0$, то в соответствующей ячейке θ_{ij} таблицы ставится прочерк.

3. Столбцы θ_{ij}, которым соответствуют уже выбранные базисные переменные x_j, не заполняются.

4. Выбирается разрешающая строка (кроме строк, в которых уже имеется базисная переменная). Разрешающим элементом в ней может быть выбран только тот элемент a_{ij}, у которого наименьшее в столбце (или одно из нескольких равных наименьших) значение θ_{ij}.

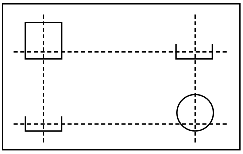
Если такого элемента в выбранной строке нет, то разрешающей следует выбрать другую строку.

Выберем разрешающей первую строку. Так как в табл. 1 значения $\theta_{i2} = 2$ и $\theta_{i3} = 4$ являются наименьшими в своих столбцах, то в этой (первой) строке разрешающим элементом можно выбрать $a_{i2} = 2$ или $a_{i3} = 1$.

Удобнее, чтобы разрешающим элементом была единица, поэтому выбираем a_{i3}, или базисной x_3. Если бы разрешающий элемент не был равен единице, то нужно было все коэффициенты и свободный член в этой строке разделить на разрешающий элемент.

Выполняем первый шаг метода Жордана, для чего разрешающую первую строку табл. 1 оставляем неизменной, в разрешающем столбце все элементы, кроме разрешающего, заменяем нулями, а остальные b_i и a_{ij} пересчитываем по правилу прямоугольника:

□ — разрешающий элемент; ○ — пересчитываемый элемент.



$$\square_{\text{новый}} = \square\bigcirc_{\text{старый}} - \sqcup\,\sqcup$$

Далее вычисляем $\theta_{i1,}$ $\theta_{i2,}$ θ_{i5}, кроме θ_{i3} и θ_{i4}, так как x_3 и x_4 уже выбраны базисными в первой и второй строках соответственно. Получаем следующую табл. 2.

Таблица 2

i	b	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	θ_{i1}	θ_{i2}	θ_{i3}	θ_{i4}	θ_{i5}
1	4	–1	2	1	0	0	—	2			—
2	1	5	–3	0	1	0	1/5	—			—
3	2	3	$\boxed{1}$	0	0	–1	2/3	2			—

Поскольку только в третьей строке табл. 2 нет базисной переменной, то эту строку и выбираем разрешающей. Так как $\theta_{i1} = 2/3$ не является наименьшей в своем столбце, то выбирать разрешающим элементом $a_{i1} = 3$ нельзя.

Пусть $\theta_{i2} = 2$ в разрешающей строке является наименьшей в своем столбце (в этом столбце все значения равные). Поэтому разрешающим элементом выбираем $a_{i2} = 1$, или x_2. Итак, получили x_2, x_3, x_4 — базисные переменные. Сделаем перерасчет в табл. 2 и получаем таблицу, определяющую начальный опорный план.

i	b	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}
1	0	–7	0	1	0	2
2	7	14	0	0	1	–3
3	2	3	1	0	0	–1

Общее решение системы ограничений для полученной таблицы в соответствии с системой (1.6) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 + 7x_1 - 2x_5; \\ x_4 &= 7 - 14x_1 + 3x_5; \\ x_2 &= 2 - 3x_1 + x_5, \end{aligned} \qquad (1.10)$$

где x_2, x_3, x_4 — базисные переменные; x_1, x_5 — свободные переменные.

Базисное решение, являющееся начальным опорным планом ЗЛП, имеет вид

$$x_{\text{нач}} = (0, 2, 0, 7, 0),$$

так как в базисном решении свободные переменные равны нулю, а базисные — свободным членам в соответствующих уравнениях общего решения.

Для проверки оптимальности начального опорного плана составляем симплекс-таблицу (табл. 3).

Таблица 3

i	Базис		c_j	1	4	1	0	0	θ_{ij}
	k	c_k	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	
1	3	1	0	–7	0	1	0	2	0
2	4	0	7	14	0	0	1	–3	—
3	2	4	2	3	1	0	0	–1	—
Δ_j		$\Delta_0 = 8$		4	0	0	0	–2	

В верхней строке симплекс-таблицы записываются коэффициенты c_j, с которыми переменные x_j входят в целевую функцию (1.8).

В первом столбце — номера строк расширенной матрицы общего решения (1.10) системы ограничений, во втором столбце — номера базисных переменных k в каждой строке, а в третьем столбце — коэффициенты c_k при этих базисных переменных в целевой функции (1.8).

В шести следующих столбцах этих строк записывается расширенная матрица системы ограничений, полученная в предыдущей таблице.

Из формул (1.7) следует, что для определения Δ_0 нужно перемножить числа в каждой строке третьего и четвертого столбцов и полученные произведения сложить.

Ясно, что в базисном решении $\Delta_0 = Q$. Чтобы определить Δ_1 и Δ_5 (так как свободными здесь являются переменные x_1 и x_5), нужно таким же образом перемножить третий столбец на столбцы a_{i1} и a_{i5} и вычесть c_1 и c_5 (числа в верхней строке) соответственно.

Значения Δ_0, Δ_1 и Δ_5 записывают в последней строке.

Обычно для контроля правильности записей в симплекс-таблице также вычисляют значения Δ_j и для базисных переменных, которые должны быть равны нулю.

Подсчитаем $\Delta_0 = Q$; Δ_1 и Δ_5.

$$Q = \Delta_0 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 7 + 4 \cdot 2 = 8;$$
$$\Delta_1 = 1(-7) + 0 \cdot 14 + 4 \cdot 3 - 1 = 4;$$
$$\Delta_5 = 12 + 0(-3) + 4(-1) - 0 = -2.$$

Поскольку $\Delta_5 = -2$ — число отрицательное, то начальный опорный план не является оптимальным. Поэтому переменную x_5 нужно ввести в базис, т.е. на очередном шаге метода Жордана разрешающим должен быть столбец a_{i5}, соответствующий x_5.

Чтобы определить, в какой строке можно вводить эту переменную в базис, вычислим значения θ_{i5} для столбца a_{i5}. Очевидно, что в этом столбце существует только θ_{i5}, поэтому строка с $i = 1$ и должна быть разрешающей, т.е. той, в которой базисной будет переменная x_5.

Из базиса при этом выводится бывшая базисной в этой строке переменная x_3. Разрешающим при этом должен стать элемент a_{i5}, который равен 2.

Так как разрешающий элемент при использовании метода Жордана целесообразно сделать равным единице, то делим разрешающую строку на 2 и получаем симплекс-таблицу (табл. 4).

Таблица 4

i	Базис		c_j	1	4	1	0	0	θ_{ij}
	k	c_k	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	
1	3	1	0	–7/2	0	1/2	0	$\boxed{1}$	0
2	4	0	7	14	0	0	1	–3	—
3	2	4	2	3	1	0	0	–1	—
Δ_j		$\Delta_0 = 8$		4	0	4	0	0	0

Затем проводим еще один шаг метода Жордана, результаты которого записываем в новую симплекс-таблицу (табл. 5), и вычисляем значения Δ.

Таблица 5

i	Базис		c_j	1	4	1	0	0	θ_{ij}
	k	c_k	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	
1	5	0	0	–7/2	0	1/2	0	1	—
2	4	0	7	7/2	0	3/2	1	0	2
3	2	4	2	–1/2	1	1/2	0	0	—
Δ_j		$\Delta_0 = 8$		–3	0	1	0	0	

Так как в этой таблице $\Delta_1 = -3$ отрицательно, то в базис вводим x_1 и, следовательно, разрешающим должен быть столбец a_{i1}. Вычислив значения θ_{i1} для этого столбца, убеждаемся, что существует только θ_{i1}. Поэтому разрешающей строкой будет строка $i = 2$, а из базиса выводится переменная x_4. Разрешающий элемент равен 7/2, поэтому делим разрешающую строку на это число и получаем следующую симплекс-таблицу (табл. 6).

Таблица 6

i	Базис		c_j	1	4	1	0	0	θ_{ij}
	k	c_k	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	
1	5	0	0	–7/2	0	1/2	0	1	—
2	4	0	2	$\boxed{1}$	0	3/7	2/7	0	2
3	2	4	2	–1/2	1	1/2	0	0	—
Δ_j		$\Delta_0 = 8$		–3	0	1	0	0	

Проводим очередной шаг метода Жордана и вычисляем Δ_j.

Таблица 7

i	Базис		c_j	1	4	1	0	0	θ_{ij}
	k	c_k	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	
1	5	0	7	0	0	2	1	1	
2	1	1	2	1	0	3/7	2/7	0	
3	2	4	3	0	1	5/7	1/7	0	
Δ_j		$\Delta_0 = 14$		0	0	12/7	7	0	

Из табл. 7 очевидно, что все Δ_j неотрицательны. Поэтому полученный опорный план $x_5 = 7$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$ является оптимальным, т.е.

$$x^* = (2, 3, 0, 0, 7).$$

Поскольку x_4 и x_5 — вспомогательные переменные, которых нет в условии задачи, то окончательно решение ЗЛП следует записать в виде

$$x^* = (2, 3, 0).$$

При этом $Q_{\max} = \Delta_0 = 14$. ■

Возможны и другие алгоритмы применения симплекс-метода. Рассмотрим еще один алгоритм на следующем примере.

Пример 1.8. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$Q = 2x_1 + x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}&2x_1 - x_2 \leqslant 6;\\&-x_1 + 2x_2 \leqslant 5;\\&x_1 + x_2 \leqslant 8;\\&x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Решение. Приведем ЗЛП к каноническому виду, для чего введем три дополнительные неотрицательные переменные y_1, y_2, y_3 и прибавим их к левым частям соответствующих неравенств, заменяя при этом неравенства равенствами. Система ограничений будет тогда иметь вид

$$\begin{aligned}&2x_1 - x_2 + y_1 = 6;\\&-x_1 + 2x_2 + y_2 = 5;\\&x_1 + x_2 + y_3 = 8;\\&x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; y_1 \geqslant 0; y_2 \geqslant 0; y_3 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Назначаем y_1, y_2, y_3 базисными переменными, а x_1, x_2 — свободными переменными. Тогда общее решение системы ограничений записывается в виде

$$\begin{aligned}&y_1 = 6 - 2x_1 + x_2;\\&y_2 = 5 + x_1 - 2x_2;\\&y_3 = 8 - x_1 - x_2.\end{aligned}$$

Начальный опорный план ЗЛП представляет собой базисное решение

$$x_1 = 0; x_2 = 0; y_1 = 6; y_2 = 5; y_3 = 8.$$

При этом значение целевой функции $Q = 2x_1 + x_2 = 0$.

Запишем общее решение системы ограничений и целевую функцию через переменные $(-x_1)$ и $(-x_2)$, приняв последние в качестве свободных переменных.

$$\begin{aligned}&y_1 = 6 + 2(-x_1) - 1(-x_2);\\&y_2 = 5 - 1(-x_1) + 2(-x_2);\\&y_3 = 8 + 1(-x_1) + 1(-x_2);\\&Q = -2(-x_1) - 1(-x_2).\end{aligned}$$

Составим первую симплекс-таблицу (табл. 1).

Базисное решение системы ограничений будет являться оптимальным планом и решением ЗЛП на max, если все коэффициенты при свободных неизвестных в целевой функции будут неотрицательными. Если это не так (очевидно из первой симплекс-таблицы), то нужно переходить к другому базису.

Для этого вводим в базис свободную переменную, у которой наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффици-

Таблица 1

Свободные переменные	$-x_1$	$-x_2$	Значения базисных переменных и целевой функции в базисном решении
Базисные переменные и целевая функция	Коэффициенты при свободных переменных в общем решении и целевой функции		
y_1	$\boxed{2}$	−1	6
y_2	−1	2	5
y_3	1	1	8
Q	−2	−1	0

ент в целевой функции, т.е. $-x_1$. При этом в качестве базисной переменной она уже будет без знака «минус».

Одна из базисных переменных должна быть переведена в свободные и приобрести знак «минус». Этой переменной должна стать та, у которой наименьшее положительное отношение значения в базисном решении (последний столбец табл. 1) к коэффициенту при ($-x_1$).

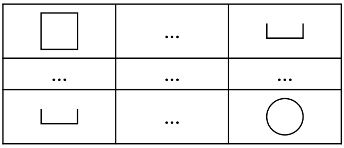
Из симплекс-табл. 1 очевидно, что это переменная y_1, у нее указанное отношение равно $\frac{6}{2} = 3$, у переменной y_3 равно $\frac{8}{1} = 8$, а у переменной y_2 — отрицательное.

Симплекс-таблица (см. табл. 1) для нового базиса пересчитывается по методу Жордана следующим образом.

1. Столбец вводимой в базис переменной ($-x_1$) симплекс-таблицы (см. табл. 1) назначается разрешающим столбцом, а строка выводимой из базиса переменной y_1 — разрешающей строкой. Элемент, стоящий на их пересечении, — разрешающий элемент (обведен в квадратик). Этот элемент заменяется обратной величиной, т.е. 2 заменяется на $\frac{1}{2}$.

2. Остальные элементы разрешающей строки и разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент. Элементы разрешающего столбца изменяют при этом знак на противоположный.

3. Остальные элементы симплекс-таблицы пересчитываются по правилу, аналогичному правилу прямоугольника, изложенному ранее.



□ — разрешающий элемент; ○ — пересчитываемый элемент.

$$\square_{\text{новый}} = \frac{\square\bigcirc_{\text{старый}} - \sqcup\sqcup}{\square}.$$

Так, например, значение 8 в симплекс-таблице (см. табл. 1) пересчитывается следующим образом:

$$\frac{2 \cdot 8 - 6 \cdot 1}{2} = 5.$$

Бывшая базисная переменная y_1 становится свободной, приобретает знак «минус» и занимает в симплекс-табл. 1 место переменной x_1, а последняя становится базисной и без знака «минус» занимает место y_1.

В результате имеем вторую симплекс-таблицу (табл. 2).

Таблица 2

Свободные переменные	$-y_1$	$-x_2$	Значения базисных переменных и целевой функции в базисном решении
Базисные переменные и целевая функция	Коэффициенты при свободных переменных в общем решении и целевой функции		
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3
y_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	8
y_3	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	5
Q	1	−2	6

Новый опорный план ЗЛП представляет собой базисное решение в новом базисе и имеет вид

$$x_1 = 3;\ x_2 = 0;\ y_1 = 0;\ y_2 = 8;\ y_3 = 5.$$

При этом значение целевой функции $Q = 2x_1 + x_2 = 0 = 6$.

Оно больше, чем при начальном опорном плане. Однако этот опорный план еще не является оптимальным, так как один из коэффициентов при свободных переменных в выражении для целевой функции, а именно коэффициент при x_2, равный (−2), является отрицательным. Следовательно, вводим в базис эту переменную.

Определяем наименьшее положительное отношение значения в базисном решении к коэффициенту при $(-x_2)$ у базисной переменной y_3. В табл. 2 оно равно $5 : \frac{3}{2} = \frac{10}{3}$, в то время как у переменной y_2 оно составляет $8 : \frac{3}{2} = \frac{16}{3}$. Поэтому выводим из базиса переменную y_3. Выполнив действия, аналогичные проделанным ранее, получаем третью симплекс-таблицу (табл. 3).

Таблица 3

Свободные переменные	$-y_1$	$-y_3$	Значения базисных переменных и целевой функции в базисном решении
Базисные переменные и целевая функция	Коэффициенты при свободных переменных в общем решении и целевой функции		
x_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{3}$
y_2	1	–1	3
x_2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
Q	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{38}{3}$

Новый опорный план ЗЛП имеет вид

$$x_1 = \frac{14}{3};\ x_2 = \frac{10}{3};\ y_1 = 0;\ y_2 = 3;\ y_3 = 0.$$

Этот план ЗЛП является оптимальным, так как все коэффициенты при свободных переменных в выражении для целевой функции неотрицательные.

Поскольку y_1, y_2, y_3 — это дополнительные переменные, которых нет в условии задачи, то окончательно имеем

$$x^* = \left(\frac{14}{3}, \frac{10}{3}\right);\ Q_{\max} = \frac{38}{3}.$$

Отметим, что если решается ЗЛП на min, то оптимальным планом является базисное решение в том базисе, в котором, как и раньше, все коэффициенты при свободных переменных в выражении для целевой функции неположительны. ■

1.4. Понятие о целочисленном программировании

По смыслу многих экономических задач, относящихся к ЗЛП, решения должны выражаться в целых числах (переменные x_j представляют собой, например, число станков или машин, количество работников, число выпускаемых изделий и т.п.).

Тогда ***ЗЛП можно сформулировать*** следующим образом.

Найти такой план $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, чтобы

$$Q = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2;\\
&\qquad\qquad\qquad\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m;\\
&x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \dots, n,
\end{aligned}$$

где x_j — целые числа.

В общем случае условие целочисленности (последнее ограничение) существенно усложняет решение ЗЛП. Однако если значения x_j в решении ЗЛП достаточно велики, то при нецелочисленности их округляют до ближайших целых чисел. В противном случае (т.е. при оптимальных значениях x_j порядка одной или нескольких единиц) округление может привести к далекому от оптимального целочисленному решению, и тогда используют специально разработанные методы.

Методы целочисленного решения ЗЛП можно разделить на две группы: методы отсечения и комбинаторные методы.

Сущность ***методов отсечения*** состоит в том, что сначала задача решается без условия целочисленности. Если полученный оптимальный план является целочисленным, то задача решена.

В противном случае к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

- оно должно быть линейным;
- оно должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план;
- оно не должно отсекать ни одного целочисленного плана от множества допустимых планов.

Ограничение, обладающее такими свойствами, называется *правильным отсечением*.

Далее задача решается с учетом нового ограничения. При решении в случае необходимости добавляется еще одно правильное отсечение и т.д.

Одним из наиболее часто используемых алгоритмов формирования правильного отсечения является алгоритм, предложенный Гомори. Поэтому метод отсечения часто называют *методом Гомори*.

В теории доказывается, что этот алгоритм позволяет за конечное число шагов получить оптимальное целочисленное решение, если таковое существует.

Пусть в результате решения симплекс-методом без условия целочисленности приведенной выше ЗЛП с пятью переменными и тремя ограничениями в виде уравнений получено, что в оптимальном плане базисными являются переменные x_1, x_2 и x_3, а свободными — x_4 и x_5. Тогда общее решение системы ограничений имеет вид

$$x_1 = \beta_1 - \alpha_{14}x_4 - \alpha_{15}x_5;$$
$$x_2 = \beta_2 - \alpha_{24}x_4 - \alpha_{25}x_5;$$
$$x_3 = \beta_3 - \alpha_{34}x_4 - \alpha_{35}x_5,$$

и оптимальный нецелочисленный план записывается следующим образом:

$$x^*_{\text{нецел}} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, 0, 0).$$

Гомори предложил в этом случае выделить среди базисных переменную с наибольшей дробной частью (пусть это x_2, равная β_2) и в качестве правильного отсечения добавить ограничение

$$\{\beta_2\} - \{\alpha_{24}\}x_4 - \{\alpha_{25}\}x_5 \leqslant 0,$$

где символ { } означает дробную часть числа.

Наиболее распространенным из ***комбинаторных методов*** является ***метод ветвей и границ***. Его суть заключается в упорядоченном переборе вариантов и рассмотрении лишь тех из них, которые оказываются по определенным признакам перспективными, т.е. отбрасывании бесперспективных вариантов. При этом множество допустимых решений планов ЗЛП некоторым способом разбивают на подмножества.

Если решается задача на максимум, то получают оценку φ_0 верхней границы целевой функции такую, что для любых планов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ из множества допустимых решений $Q(x) \leqslant \varphi_0$.

Если в каком-либо подмножестве найдется такой план x^*, что $Q(x^*) = \varphi_0$, то x^* — оптимальный план ЗЛП.

Если такого плана не найдется, то выбирается подмножество с наибольшей верхней границей, которое, в свою очередь, разбивается на подмножества. Такой процесс продолжается до получения оптимального плана.

Способы разбиений на подмножества и нахождения верхних границ выбираются для каждой конкретной задачи целочисленного программирования отдельно.

Пример 1.9. Решить методом Гомори ЗЛП

$$Q = 2x_1 + x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 \leqslant 5;$$
$$x_1 - x_2 \leqslant 2;$$
$$x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0;$$

где x_1, x_2 — целые числа.

Решение. Приводим ЗЛП к канонической форме, вводя дополнительные переменные x_3 и x_4, и временно снимаем условие целочисленности

$$Q = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5;$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 2;$$
$$x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; x_3 \geqslant 0; x_4 \geqslant 0.$$

Решаем эту ЗЛП симплекс-методом аналогично предыдущему примеру. Расширенная матрица системы ограничений имеет следующий вид:

i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}
1	5	1	1	1	0
2	2	1	–1	0	1

Базисными переменными выбираем x_3 и x_4, а свободными — x_1 и x_2. Тогда начальный опорный план имеет вид

$$x_{\text{нач}} = (0, 0, 5, 2).$$

Составляем первую симплекс-таблицу (табл. 1).

Таблица 1

i	Базис		c_j	2	1	0	0	θ_{ij}
	k	c_k	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	
1	3	0	5	1	1	1	0	5
2	4	0	2	$\boxed{1}$	–1	0	1	2
Δ_j		$\Delta_0 = 0$		–2	–1	0	0	

Вводим в базис переменную x_1 в строке $i = 2$ (табл. 2).

Таблица 2

i	Базис		c_j	2	1	0	0	θ_{ij}
	k	c_k	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	
1	3	0	3	0	2	1	–1	3/2
2	1	2	2	1	–1	0	1	—
Δ_j		$\Delta_0 = 4$		0	–3	0	2	

Вводим в базис переменную x_2 в первой строке расширенной матрицы. Так как разрешающий элемент равен 2, делим разрешающую строку на 2 и получаем табл. 3.

Таблица 3

i	Базис		c_j	2	1	0	0	θ_{ij}
	k	c_k	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	
1	3	0	3/2	0	$\boxed{1}$	1/2	–1/2	3/2
2	1	2	2	1	–1	0	1	—
Δ_j		$\Delta_0 = 4$		0	–3	0	2	

Выполняем шаг метода Жордана, результаты которого помещаем в очередную симплекс-таблицу (табл. 4).

Таблица 4

i	Базис		c_j	2	1	0	0	θ_{ij}
	k	c_k	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	
1	2	1	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	
2	1	2	$\frac{7}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—
Δ_j		$\Delta_0 = \frac{17}{2}$		0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Так как все Δ_j неотрицательны, то базисное решение, соответствующее полученному общему решению системы ограничений, является оптимальным планом ЗЛП без условия целочисленности

$$x^*_{\text{нецел}} = (\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0).$$

Так как дробные части $\{\beta_1\} = \{\beta_2\} = \frac{1}{2}$, то для формирования правильного отсечения можно выбрать любую из них. Для определенности выбираем вторую строку (в которой базисной переменной является x_1).

Тогда из расширенной матрицы в последней симплекс-таблице очевидно, что $\alpha_{23} = \alpha_{24} = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\{\alpha_{23}\} = \{\alpha_{24}\} = \frac{1}{2}$. Правильное отсечение, согласно алгоритму Гомори, имеет вид

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \leqslant 0$$

или после преобразований

$$x_3 + x_4 \geqslant 1.$$

Согласно табл. 4 система ограничений записывается следующим образом:

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2};$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{7}{2}.$$

Добавляя к этой системе ограничений полученное правильное отсечение, приведенное к канонической форме путем введения дополнительной переменной x_5, получаем следующую ЗЛП:

$$Q = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

при ограничениях

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2};$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{7}{2};$$

$$x_3 + x_4 - x_5 = 1;$$

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0;\ x_4 \geqslant 0;\ x_5 \geqslant 0.$$

Ищем начальный опорный план (табл. 5).

Таблица 5

i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	θ_{i1}	θ_{i2}	θ_{i3}	θ_{i4}	θ_{i5}
1	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0			3	—	—
2	$\frac{7}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0			7	7	—
3	1	0	0	1	$\boxed{1}$	−1			1	1	—

i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}
1	2	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$
2	3	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$
3	1	0	0	1	1	−1

$$x_{\text{нач}} = (3, 2, 0, 1, 0).$$

Составляем следующую симплекс-таблицу (табл. 6).

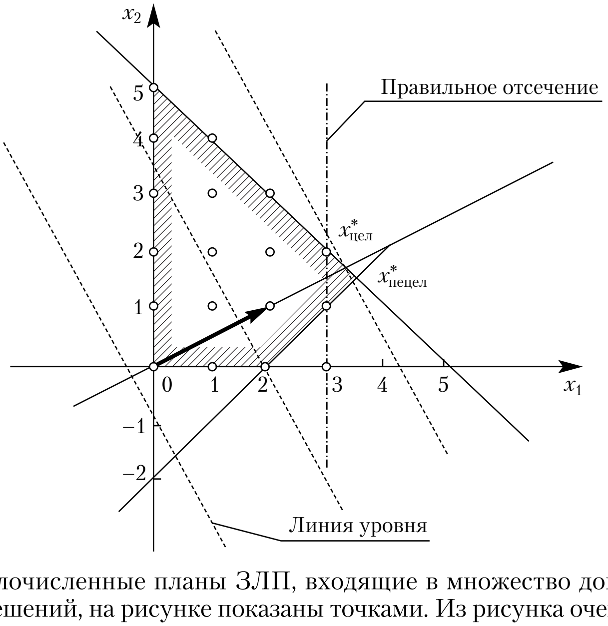
Таблица 6

i	Базис		c_j	2	1	0	0	0	θ_{ij}
	k	c_k	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}		
1	2	1	2	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	
2	1	2	3	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	
3	4	0	1	0	0	1	1	-1	
Δ_j		$\Delta_0 = 8$		0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	

Начальный план оказался оптимальным. Так как он является целочисленным, то это решение ЗЛП. Оставляя в плане только исходные переменные x_1 и x_2, записываем ответ

$$x^* = (3,\ 2);\ Q_{\max} = 8.$$

Так так как исходная ЗЛП содержит только две переменные, она может быть решена графическим способом. На рисунке показано ее графическое решение.



Целочисленные планы ЗЛП, входящие в множество допустимых решений, на рисунке показаны точками. Из рисунка очевидно, что оптимальным нецелочисленным планом является план $x^*_{\text{нецел}} = (3{,}5;\ 1{,}5)$, а решением ЗЛП является план $x^* = (3,\ 2)$, что совпадает с решением методом Гомори.

Выразив x_3 и x_4 из полученного общего решения системы ограничений

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2};$$
$$x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{7}{2},$$

получаем

$$x_3 = 5 - x_1 - x_2;$$
$$x_4 = 2 - x_1 + x_2.$$

Подставив эти выражения в неравенство $x_3 + x_4 \geqslant 1$, получаем правильное отсечение в виде $x_1 \leqslant 3$, которое на рисунке соответствует штрих-пунктирной вертикальной линии. ■

1.5. Понятие о динамическом программировании

В последнее время особое развитие получили методы оптимального управления в задачах экономики. Основной причиной такого прогресса является все большее удорожание средств для решения задач управления и реализации полученных результатов.

Под управлением экономическим процессом понимается прямое воздействие на этот процесс, направленное на достижение заданного результата.

Оптимальным управлением называется выбор из множества возможных вариантов управления наилучшего по рассматриваемому критерию варианта.

Динамическое программирование — это метод оптимизации экономических процессов, в которых управление может быть разбито на этапы (шаги).

Решение задач методами динамического программирования проводится на основе сформулированного Беллманом ***принципа оптимальности***: каково бы ни было состояние s системы в результате некоторого числа шагов управления, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному результату на всех оставшихся шагах, включая данный.

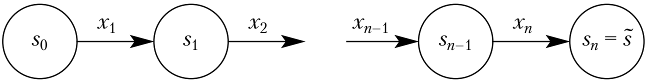
Таким образом, динамическое программирование представляет собой нахождение оптимального управления процессом путем изменения на каждом шаге состояния системы. При этом планирование каждого шага должно проводиться с учетом общей выгоды, получаемой по завершении всего процесса.

Предположим, что имеет место некоторый управляемый экономический процесс. В результате управления экономическая система переводится из начального состояния s_0 в конечное $\tilde{s}$.

Пусть управление можно разбить на n шагов и при этом решение принимается последовательно на каждом шаге.

Обозначим управление на k-м шаге x_k (это может быть число, m-мерный вектор или некий качественный признак). Тогда $x = (x_1 , x_2 , ... , x_n)$ — управление, переводящее систему из состояния s_0 в состояние $\tilde{s}$.

Пусть s_k — состояние системы после k-го шага управления. Получаем последовательность состояний $s_0, s_1, s_2, ..., s_{n-1}, s_n =$ $= \tilde{s}$, которую схематически принято изображать следующим образом:



Показателем эффективности управления является целевая функция $Q(s_0, x)$, оптимальным значением которой, как и раньше, будет либо максимальное, либо минимальное в зависимости от задачи.

Обычно при решении задач методом динамического программирования делают ***два предположения***.

1. Состояние s_k системы в конце k-го шага зависит только от предыдущего состояния s_{k-1} и управления на k-м шаге x_k , т.е.

$$s_k = \varphi_k(s_{k-1}, x_k),\ k = 1, 2, ..., n.$$

2. Целевая функция Q является суммой показателей эффективности Q_k на каждом шаге, т.е.

$$Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k(s_{k-1}, x_k).$$

Задача динамического программирования состоит в том, чтобы определить такое управление $x^* = (x_1^*, x_2^*, ... , x_n^*)$, переводящее систему из состояния s_0 в состояние $\tilde{s}$, при котором целевая функция Q принимает экстремальное значение.

Динамическое программирование применяют, например, при решении следующих задач:

- распределение капитальных вложений между новыми направлениями;

- разработка правил управления запасами, устанавливающими момент пополнения запасов и размеры пополнения;
- планирование производства и выравнивание занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию;
- составление календарных планов текущего и капитального ремонта сложного оборудования и его замены и т.д.

Рассмотрим на примере возможный алгоритм решения первой из этих задач.

Пример 1.10. Пусть на предприятии планируется освоить три новых производственных направления, на которые руководство предприятия выделяет средства в размере 60 млн руб. Прогнозируемая годовая прибыль от освоения каждого направления (указаны в ячейках табл. 1) нелинейно зависит от вложенных средств и подсчитана экспертами для примера при кратности вложения средств 10 млн руб.

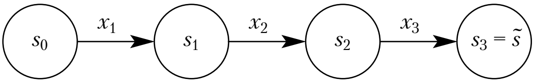
Таблица 1

Объем вложений, млн руб.	Годовая прибыль, млн руб.		
	направление № 1	направление № 2	направление № 3
0	0	0	0
10	1,1	1,0	1,4
20	1,5	1,6	2,7
30	2,1	2,4	3,4
40	2,8	2,9	3,9
50	3,0	3,6	4,0
60	3,2	3,8	4,1

Требуется методом динамического программирования распределить средства между направлениями таким образом, чтобы получить максимальную суммарную годовую прибыль. Принять, что кратность распределения средств также составляет 10 млн руб.

Решение. Под управлением данным экономическим процессом будем понимать распределение выделенного объема средств 60 млн руб. между тремя направлениями. Разобьем управление x на три шага управления $x = (x_1, x_2, x_3)$. Заметим, что шаг управления — это объем средств, выделяемых рассматриваемому направлению.

Обозначим состояния системы s_0, s_1, s_2, s_3, приняв за s_k остаток нераспределенных средств после k-го шага управления. Тогда схема динамического программирования имеет вид



На схеме в кружочках обозначен размер средств на освоение соответствующих направлений: $s_0 = 60$; $s_3 = \tilde{s} = 0$; $s_1 = s_0 - x_1$; $s_2 = s_1 - x_2 = x_3$.

В качестве целевой функции будем рассматривать суммарную годовую прибыль Q, которая складывается из прибылей направлений. Эти прибыли обозначим соответственно $Q_1(x_1)$, $Q_2(x_2)$, $Q_3(x_3)$.

Математически поставленную задачу можно сформулировать следующим образом: найти вектор $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, удовлетворяющий условию

$$Q(x) = Q_1(x_1) + Q_2(x_2) + Q_3(x_3) \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 60; \\ x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; x_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Рассмотрим функцию Беллмана, определяемую выражением

$$F_k(s_{k-1}) = \max_{x_k \leqslant s_{k-1}} [Q_k(x_k) + F_{k+1}(s_k)].$$

Подставляя последовательно номер шага $k = 3, 2, 1$, получаем

$$\begin{gathered} F_3(s_2) = Q_3(x_3); \\ F_2(s_1) = \max_{x_2 \leqslant s_1}[Q_2(x_2) + F_3(s_2)]; \\ F_1(s_0) = \max_{x_1 \leqslant s_0}[Q_1(x_1) + F_2(s_1)]. \end{gathered}$$

Последнее значение $F_1(s_0)$ равно максимальному значению целевой функции. Удобно его определить, используя табл. 2—4.

Вычисления начинаем с последнего третьего шага $k = 3$ (направление № 3 в табл. 1). На этом шаге количество средств s_2, оставшихся после выделения первому и второму направлениям, может быть равным любому кратному 10 числу от нуля (если первым двум направлениям выделены все 60 млн руб.) до 60 (если этим направлениям средств не выделено вообще).

При этом ясно, что все оставшиеся средства выделяются третьему направлению $x_3 = s_2$. Записываем возможные значения $x_3 = s_2$ в первую строку рабочей табл. 2.

Во второй строке табл. 2 записываются значения прибыли от освоения третьего направления (исходные данные, четвертый столбец табл. 1) при объеме выделенных средств, указанном в первой строке.

Таблица 2

$k = 3$; $x_3 = s_2$

$s_2 = x_3$	0	10	20	30	40	50	60
$F_3(s_2)$	0	1,4	2,7	3,4	3,9	4,0	4,1

Переходим к предпоследнему второму шагу $k = 2$. Средства в количестве s_1, оставшиеся после выделения первому направлению, распределяются между вторым и третьим направлением, т.е. $s_1 = x_2 + x_3$.

Таким образом, $x_2 = s_1 - x_3$.

По аналогии с уже рассмотренным шагом в первой строке табл. 3 записываются возможные значения s_1. Возможные значения x_2 записываются в первом столбце.

В ячейках табл. 3 записываются суммы значений прибыли от освоения второго и третьего направлений. Первое слагаемое берется из третьего столбца (направление № 2) исходной табл. 1 для значения x_2 в этой строке.

Второе слагаемое берется из табл. 2 для значения $x_3 = s_1 - x_2$. Например, в ячейку с адресом (2, 3) записываем сумму слагаемых для x_2.

Ясно, что $x_2 \leqslant s_1$, поэтому в тех ячейках таблицы, где это условие не выполняется, ставится прочерк, например в ячейках (2, 1), (3, 1), (3, 2) и т.д. табл. 3.

Для каждого значения s_1 (в каждом столбце) находится наибольшая сумма, которая записывается в последней строке табл. 3.

Таблица 3

$k = 2; x_3 = s_1 - x_2$

x_2	s_1						
	0	10	20	30	40	50	60
0	0 + 0 = = **0**	0 + 1,4 = = **1,4**	0 + 2,7 = = **2,7**	0 + 3,4 = = 3,4	0 + 3,9 = = 3,9	0 + 4,0 = = 4,0	0 + 4,1 = = 4,1
10	—	1,0 + 0 = = 1,0	1,0 + 1,4 = = 2,4	1,0 + 2,7 = = **3,7**	1,0 + 3,4 = = **4,4**	1,0 + 3,9 = = 4,9	1,0 + 4,0 = = 5,0
20	—	—	1,6 + 0 = = 1,6	1,6 + 1,4 = = 3,0	1,6 + 2,7 = = 4,3	1,6 + 3,4 = = 5,0	1,6 + 3,9 = = 5,5
30	—	—	—	2,4 + 0 = = 2,4	2,4 + 1,4 = = 3,8	2,4 + 2,7 = = **5,1**	2,4 + 3,4 = = **5,8**
40	—	—	—	—	2,9 + 0 = = 2,9	2,9 + 1,4 = = 4,3	2,9 + 2,7 = = 5,6
50	—	—	—	—	—	3,6 + 0 = = 3,6	3,6 + 1,4 = = 5,0
60	—	—	—	—	—	—	3,8 + 0 = = 3,8
$F_2(s_1)$	0	1,4	2,7	3,7	4,4	5,1	5,8

Переходим к первому шагу. В двух первых строках табл. 4 записываются значения объема средств, оставшихся после выделения первому направлению x_1. Их сумма должна быть равна полному объему выделенных средств, т.е. $s_0 = 60$.

В третьей строке табл. 4 записывается сумма прибыли от освоения первого направления для данного значения x_1 и наибольшей прибыли от освоения второго и третьего направлений при данном значении s_1.

Первое слагаемое берется из второго столбца табл. 1, а второе — из последней строки табл. 3.

Таблица 4

$k = 1; x_1 = s_0 - s_1$

s_1	0	10	20	30	40	50	60
x_1	60	50	40	30	20	10	0
$Q_1(x_1) +$ $+ F_2(s_1)$	3,2 + 0 = = 3,2	3,0 + 1,4 = = 4,4	2,8 + 2,7 = = 5,5	2,1 + 3,7 = = 5,8	1,5 + 4,4 = = 5,9	1,1 + 5,1 = = **6,2**	0 + 5,8 = = 5,8

Из последней табл. 4 очевидно, что максимальное значение целевой функции равно

$$Q_{\max} = F_1(s_0) = \max_{x_1 \leqslant s_0}[Q_1(x_1) + F_2(s_1)] = 6{,}2.$$

Это значение достигается при $s_1 = 50$ и $x_1 = 10$. Следовательно, $x_1^* = 10$. Из табл. 3 очевидно, что наибольшее значение $F_2(s_1)$ при $s_1 = 50$ достигается для $x_2 = 30$ и $x_3 = s_2 = s_1 - x_2 = 50 - 30 = 20$. Поэтому $x_2^* = 30$, $x_3^* = 20$.

Окончательно имеем $x^* = (10, 30, 20)$; $Q_{\max} = 6{,}2$. ■

1.6. Нелинейное программирование

Задача нелинейного программирования (*ЗНП*) состоит в определении максимального или минимального (экстремального) значения функции

$$Q(x_1, x_2, \dots x_n) = Q(x) \to \text{extr}$$

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &f(x_1 \dots x_n) \leqslant b_i,\ i = 1, \dots, k; \\ &g_i(x_1 \dots x_n) = b_i,\ i = k + 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где $f(x)$ и $g_i(x)$ — функции n нелинейных переменных; b_i — числа.

Соотношения (1.11) задают *область допустимых значений ЗНП*. В отличие от задачи линейного программирования эта область не всегда является выпуклой.

Решение ЗНП состоит в определении такой точки $x^* = (x_1 \dots x_n)$ области допустимых решений, в которой функция $Q(x)$ достигает экстремального значения, т.е. $Q(x^*) \geqslant Q(x)$ или $Q(x^*) \leqslant Q(x)$ для любых точек $x = (x_1 \dots x_n)$ из области допустимых решений ЗНП.

В общем случае решение задачи сводится к определению такой точки x^* области допустимых решений, через которую проходит линия максимального (или минимального) уровня: $Q(x) = H_{\max}$ (или $H_{\min}$).

Указанная точка может находиться как на границе области допустимых решений, так и внутри ее.

Для случая двух переменных решение ЗНП можно получить с использованием ее геометрической интерпретации путем реализации следующих этапов.

1. Построить область допустимых решений.
2. Построить линию $Q(x) = H$.
3. Определить линию максимального (минимального) уровня или установить неразрешимость задачи из-за неограниченности функции $Q(x)$ на множестве допустимых решений.
4. Найти точку x^* области допустимых решений, через которую проходит линия экстремального значения, и определить значение функции $Q(x)$ в этой точке — $Q(x^*)$.

Пример 1.11. Фирма готова инвестировать не более 200 млн руб. в два проекта A и B. Прибыль от вложения x млн руб. в проект A составит $\sqrt{x}$ млн руб. при его реализации, прибыль от вложения y млн руб. в проект B составит $2\sqrt{y}$ млн руб.

Определить оптимальное распределение суммы инвестиций между проектами A и B, которое обеспечит максимальную прибыль в результате реализации обоих проектов.

Решение. Требуется найти максимальное значение целевой функции

$$Q = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$$

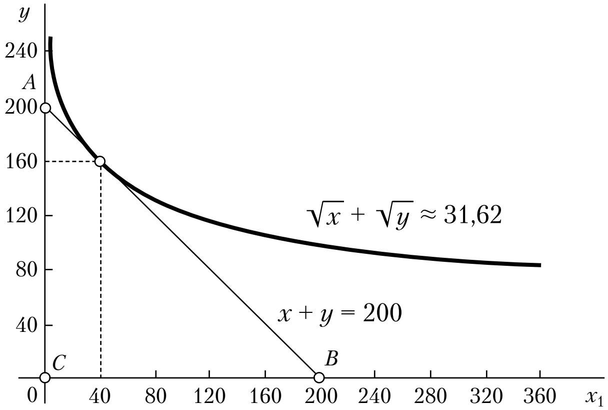
при ограничениях

$$x + y \leqslant 200;$$
$$x \geqslant 0; y \geqslant 0.$$

Область допустимых решений задачи — треугольник ABC, ограниченный прямой $x + y = 200$ и отрезками [0, 200] на оси Ox и [0, 200] на оси Oy.

Полагая значение функции $Q\ (x, y)$ равным некоторому числу H, получаем линии уровня. С увеличением H значения функции Q увеличиваются. Одна из линий с точкой касания представлена на рисунке.

Найдем общую точку касания функции $Q\ (x)$ с прямой $x + y = 200$. Для этого вычислим производную целевой функции и приравняем ее к нулю



$$-\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = 0.$$

Выразим y и подставим в уравнение прямой, откуда получим $x^* = 40, y^* = 160$.

Тогда целевая функция примет вид $\sqrt{x} + \sqrt{y} \approx 31{,}62$ млн руб.

Таким образом, распределение суммы инвестиций должно составлять на проект A — 40 млн руб., на проект B — 160 млн руб.

В этом случае при реализации обоих проектов будет достигнута максимальная прибыль около 31,62 млн руб. ■

Заметим, что для аналитического решения ЗНП можно применить метод множителей Лагранжа.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Приведите примеры экономических задач, приводящих к ЗЛП.
2. Что включает математическая модель ЗЛП?
3. Дайте определения плана и целевой функции в ЗЛП.
4. Какая форма ЗЛП называется стандартной; канонической?
5. Когда применяется геометрический метод решения ЗЛП? Изложите алгоритм геометрического метода.
6. Изложите алгоритм симплекс-метода.
7. Каков признак оптимального плана при решении ЗЛП симплекс-методом на максимум целевой функции; на минимум целевой функции?
8. Изобразите примерную форму симплекс-таблицы.
9. На какие группы можно разделить методы целочисленного программирования?

10. Изложите сущность алгоритма Гомори и метода ветвей и границ.

11. Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана.

12. При решении каких задач применяется динамическое программирование?

13. В чем состоят особенности нелинейного программирования?

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить графическим методом ЗЛП

$$Q = 5x_1 - 2x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}&-4x_1 + x_2 \leqslant 0;\\&x_1 - x_2 \geqslant -3;\\&2x_1 - 3x_2 \leqslant 6;\\&x_1 \leqslant 6;\\&x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

2. Решить графическим методом ЗЛП

$$Q = x_1 - 2x_2 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}&-3x_1 + 2x_2 \leqslant 6;\\&x_1 + 2x_2 \leqslant 10;\\&x_1 - 3x_2 \geqslant 6;\\&x_1 + x_2 \geqslant 3;\\&x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

3. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$Q = -2x_1 + 8x_2 + 3x_3 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}&3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 12;\\&x_1 + x_2 + x_3 = 8;\\&-2x_1 + 3x_2 - x_3 \leqslant 8;\\&x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; x_3 \geqslant 0.\end{aligned}$$

4. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$Q = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}&2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geqslant 12;\\&-x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 2;\\&2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24;\\&x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; x_3 \geqslant 0.\end{aligned}$$

5. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$Q = 5x_1 - x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &-3x_1 + x_2 \leqslant 6;\\ &x_1 + x_2 \leqslant 10;\\ &x_1 - 4x_2 \leqslant 4;\\ &x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

6. Решить симплекс-методом ЗЛП

$$Q = 50x_1 + 40x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &2x_1 + 5x_2 \leqslant 20;\\ &8x_1 + 5x_2 \leqslant 40;\\ &5x_1 + 6x_2 \leqslant 30;\\ &x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

7. Решить ЗЛП графическим методом.

7.1. $Q = 2x_1 + x_2 \to \min$
при ограничениях

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \leqslant 12;\\ &2x_1 - x_2 \leqslant 12;\\ &2x_1 - x_2 \geqslant 0;\\ &2x_1 + x_2 \geqslant 4;\\ &x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

7.2. $Q = 4x_1 - 3x_2 \to \min$
при ограничениях

$$\begin{aligned} &-x_1 + x_2 \leqslant 5;\\ &5x_1 - 2x_2 \leqslant 20;\\ &8x_1 - 3x_2 \geqslant 0;\\ &5x_1 - 6x_2 \leqslant 4;\\ &x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

7.3. $Q = 3x_1 + 2x_2 \to \max$
при ограничениях

$$\begin{aligned} &-3x_1 + 2x_2 \leqslant 4;\\ &-x_1 + 2x_2 \leqslant 8;\\ &x_1 + x_2 \leqslant 10;\\ &4x_1 - x_2 \leqslant 20;\\ &x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

7.4. $Q = 2x_1 + 5x_2 \to \min$
при ограничениях

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 \geqslant 4;\\ &-x_1 + x_2 \leqslant 4;\\ &x_1 + 2x_2 \leqslant 14;\\ &-x_1 + 3x_2 \geqslant 5;\\ &x_1 \leqslant 4;\\ &x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

7.5. $Q = 2x_1 - 3x_2 \to \max$
при ограничениях

$$\begin{aligned} &-x_1 + x_2 \leqslant 2;\\ &2x_1 + 3x_2 \geqslant 16;\\ &x_1 + x_2 \leqslant 10;\\ &2x_1 - x_2 \leqslant 8;\\ &x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

7.6. $Q = -2x_1 + 3x_2 \to \max$
при ограничениях

$$\begin{aligned} &-2x_1 - x_2 \geqslant 0;\\ &-x_1 + 2x_2 \leqslant 3;\\ &x_1 \leqslant 3;\\ &x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

7.7. $Q = x_1 - 3x_2 \to \min$
при ограничениях

$$\begin{aligned}&-x_1 + 2x_2 \leqslant 12;\\&2x_1 - x_2 \leqslant 6;\\&-x_1 + x_2 \leqslant 3;\\&2x_1 + x_2 \geqslant 6;\\&x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

7.8. $Q = 3x_1 - x_2 \to \max$
при ограничениях

$$\begin{aligned}&-3x_1 + 2x_2 \leqslant 6;\\&2x_1 - 3x_2 \leqslant 6;\\&x_1 \leqslant 6;\\&x_2 \leqslant 6;\\&x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

7.9. $Q = 5x_1 - 2x_2 \to \max$
при ограничениях

$$\begin{aligned}&-4x_1 + x_2 \leqslant 0;\\&x_1 - x_2 \leqslant -3;\\&2x_1 - 3x_2 \leqslant 6;\\&x_1 \leqslant 6;\\&x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

7.10. $Q = 2x_1 - 2x_2 \to \min$
при ограничениях

$$\begin{aligned}&2x_1 - x_2 \geqslant -2;\\&-x_1 + 2x_2 \leqslant 7;\\&-4x_1 + 3x_2 \geqslant -12;\\&x_1 + 3x_2 \leqslant 18;\\&x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

7.11. $Q = 5x_1 + x_2 \to \max$
при ограничениях

$$\begin{aligned}&2x_1 - 3x_2 \leqslant 0;\\&-5x_1 + 9x_2 \leqslant 45;\\&x_1 + 2x_2 \geqslant 4;\\&x_1 \leqslant 5;\\&x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

7.12. $Q = 6x_1 + x_2 \to \max$
при ограничениях

$$\begin{aligned}&6x_1 - x_2 \geqslant 3;\\&-x_1 + 2x_2 \leqslant 8;\\&3x_1 + 2x_2 \leqslant 24;\\&x_1 - x_2 \leqslant 3;\\&x_1 + 2x_2 \geqslant 2;\\&x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

8. На ферме выращивают лисиц и песцов. Для их выращивания требуется три вида кормов.

Нормы расхода кормов в неделю представлены в таблице.

Требуется определить количество лисиц и песцов, выращивание которых обеспечит максимальную прибыль ферме.

Вид кормов	Количество единиц корма, которые должны получать в неделю, кг		Корма, отпускаемые ферме в неделю, кг
	лисица	песец	
1	2	3	1800
2	3	4	2600
3	4	8	4000
Прибыль от реализации одного зверька, руб.	120	160	

Глава 2

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Постановка задачи оптимального управления экономической системой

В отличие от метода динамического программирования в теории управления экономическими процессами управление осуществляется непрерывно во времени.

Критерии оптимальности управления обычно связаны либо с получением наибольшей прибыли, либо с достижением минимальных экономических затрат, либо с обеспечением минимального времени процесса перепрофилирования производства. Самым распространенным на практике является критерий ***минимальных экономических затрат***.

Пусть исследуемый экономический процесс, подлежащий управлению, представляет собой перепрофилирование производства, организацию дополнительных цехов, предприятий и т.д. с целью увеличения выпуска продукции.

Обозначим $y(t)$ — объем выпускаемой продукции в единицу времени, который будет изменяться во времени t при перепрофилировании производства.

Пусть функция $u(t)$ характеризует управление экономическим процессом. Она может представлять собой текущие инвестиции в процесс перепрофилирования, количество рабочей силы, направляемой для этой цели в момент времени t, число единиц специальной техники и т.п. Ясно, что вид функции $y(t)$ зависит от того, какой будет выбрана функция $u(t)$.

Очевидно, что в каждый момент времени t текущие экономические затраты g будут зависеть от вида функций $y(t)$ и $u(t)$, т.е.

$$g = g[y(t), u(t), t].$$

Чтобы найти полные экономические затраты, нужно проинтегрировать g в пределах от момента начала исследуемого процесса t_0 до момента его окончания t_k. Тогда *критерием оптимальности управления* является минимизация интеграла

$$G[y(t), u(t)] = \int_{t_0}^{t_k} g[y(t), u(t), t]dt.$$

Определенный интеграл в правой части равенства является числом, которое зависит от выбора функции $u(t)$. Если каждой функции из некоторого множества функций поставлено в соответствие определенное число, то говорят, что задан *функционал*.

В приведенном выше равенстве $G[y(t), u(t)]$ является функционалом.

Как правило, скорость увеличения объема продукции при перепрофилировании производства является функцией вида управления и самого объема производства. То есть имеет место дифференциальное уравнение

$$\dot{y} = \phi(y, u),$$

где производная по времени обозначена точкой.

Естественно, что известно состояние экономической системы (объем производства) в начальный момент времени

$$y(t_0) = y_0$$

и задано состояние системы в конечный момент времени (т.е. объем производства, на который оно должно быть перепрофилировано в момент окончания процесса)

$$y(t_k) = y_k.$$

Таким образом, математически ***задача оптимального управления экономической системой*** может быть поставлена следующим образом: определить функции $u(t)$ и $y(t)$, минимизирующие функционал

$$G[y(t), u(t)] = \int_{t_0}^{t_k} g[y(t), u(t), t]dt \to \min. \tag{2.1}$$

При этом конечное состояние системы $y(t_k) = y_k$, а функции $y(t)$ и $u(t)$ связаны дифференциальным уравнением $\dot{y} = \phi(y, u)$ с начальным условием $y(t_0) = y_0$.

В этом случае функция $u(t)$ называется *оптимальным управлением* и обозначается $u^*(t)$, а $y(t)$ — функцией *оптимальных параметров производства* и обозначается $y^*(t)$.

Следует отметить, что в литературе обычно рассматривается более общий случай, когда экономическая система характеризуется не одной переменной (в рассматриваемом случае — объемом производства), а несколькими. При этом управление также включает ряд управляющих параметров. В этом случае y и u представляют собой вектор-функции

$$y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots y_n(t)];\ u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots u_m(t)].$$

Ниже в примерах будет рассматриваться простейший случай, когда $n = m = 1$.

Поставленная выше задача называется *задачей Лагранжа*. Принцип оптимальности Лагранжа, согласно которому отыскивается вид оптимальной функции управления, является развитием задачи нахождения условного и безусловного экстремумов.

Рассмотрим ***алгоритм решения задачи Лагранжа***.

1. Составляется функция Лагранжа. Очень часто эту функцию называют π-*функционалом*

$$\pi = G(y, u) + \lambda[y(t_k) - y_k]. \tag{2.2}$$

2. Составляется функция Гамильтона (гамильтониан) H

$$H(y, u, \Psi, t) = \Psi(t)\phi(y, u) - g(y, u, t), \tag{2.3}$$

где $\Psi(t)$ — неизвестная функция времени, которая называется *неопределенным множителем*.

Справедливо следующее утверждение.

Пусть гамильтониан $H(y, u, \Psi, t)$ дифференцируем по u и y, существует его экстремум в точке (u^*, y^*), тогда можно найти такое оптимальное значение λ^* и оптимальную функцию $\Psi^*(t)$, что экстремум гамильтониана H совпадет с минимальным значением функционала (2.1).

Иначе говоря, у функционала $G(y, u)$ и гамильтониана H оптимальный вид функций $y^*(t)$ и $u^*(t)$ совпадает.

В соответствии с этим утверждением можно получить необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\Psi} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \tag{2.4}$$

Решение системы из этих двух уравнений позволяет получить оптимальную функцию управления $u^*(t)$. При этом в задаче Лагранжа начальное условие для $\Psi(t)$ неизвестно. Обычно задается лишь конечное условие в виде

$$\Psi(t_k) = -\frac{\partial \pi}{\partial y(t_k)}. \tag{2.5}$$

Пример 2.1. Задана экономическая система, процесс функционирования которой описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = u.$$

Известны начальное и конечное состояния системы

$$t_0 = 0,\ t_k = 1,\ y(t_0) = 0,\ y(t_k) = 1.$$

Найти оптимальное управление u^* и соответствующую ему производственную функцию y^*, которые доставляют минимальное значение функционалу

$$G(y, u) = \int_0^1 (u^2 + y)dt \to \min.$$

Решение. По условию задачи

$$\phi(y, u) = u \quad \text{и} \quad g(y, u, t) = u^2 + y.$$

С учетом формул (2.2), (2.3) и конечного состояния системы составим π-функционал и гамильтониан по формулам (2.2), (2.3):

$$\pi = G(y, u) + \lambda[y(1) - 1];$$

$$H = \Psi(t)u - (u^2 + y).$$

Для вычисления неопределенного множителя $\Psi(t)$ продифференцируем гамильтониан по u и приравняем к нулю

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \Psi(t) - 2u = 0,$$

откуда

$$u = \frac{1}{2}\Psi(t).$$

В соответствии с формулой (2.4)

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial[\Psi(t)u - (u^2 + y)]}{\partial y} = 1,$$

откуда после интегрирования

$$\Psi(t) = t + C. \tag{*}$$

По конечному условию (2.5)

$$\Psi(1) = -\frac{\partial \pi}{\partial y(1)} = -\lambda.$$

Учитывая это равенство в последнем уравнении при $t = 1$, получим

$$\Psi(1) = 1 + C = -\lambda,$$

отсюда

$$C = -\lambda - 1 = -(\lambda + 1).$$

Таким образом, оптимальная зависимость неопределенного множителя $\Psi^*(t)$ в формуле (*) будет иметь вид

$$\Psi^*(t) = t - (\lambda^* + 1).$$

В последнем выражении неизвестным является λ^*. Для его нахождения воспользуемся исходным дифференциальным уравнением $\dot{y} = u$, подставляя в него полученную зависимость

$$u^* = \frac{1}{2}\Psi^*(t) = \frac{t - (\lambda^* + 1)}{2}$$

и интегрируя, получим

$$y^* = \frac{t^2}{4} - \frac{\lambda^* + 1}{2}t + C_1.$$

Воспользовавшись начальным условием $y(0) = 0$, получим $C_1 = 0$. Таким образом, имеем оптимальную функцию производства

$$y^* = \frac{t^2}{4} - \frac{\lambda^* + 1}{2}t.$$

Подставляя в это выражение конечное условие $y(1) = 1$, вычисляем $\lambda^* = -\frac{5}{2}$. Окончательно оптимальная функция будет иметь вид

$$y^* = \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4}t,$$

а оптимальная функция управления запишется

$$u^* = \dot{y}^* = \frac{t}{2} + \frac{3}{4}.$$

Минимальное значение функционала $G(y, u)$

$$G(y, u)_{\min} = \int_0^1 ((u^*)^2 + y^*)dt = \int_0^1 \left[\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{t^2}{4} + \frac{3}{4}t\right]dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}t + \frac{9}{16}\right)dt = \left(\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{4} + \frac{9}{16}t\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} = \frac{71}{48} \approx 1{,}48. \blacksquare$$

2.2. Принцип максимума Понтрягина

При решении задачи Лагранжа или задачи оптимального управления предполагалось, что управление производством носит неограниченный характер (см. пример 2.1).

На практике оно всегда ограничено по величине. Это ограничение связано с конечным значением возможностей управления.

Пусть ограничение на управление имеет вид, изображенный на рис. 2.1.

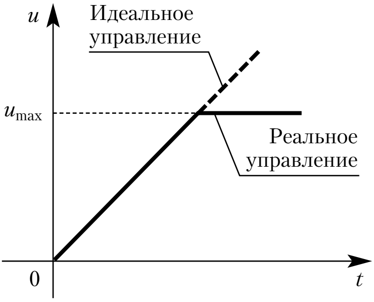


Рис. 2.1. **Реальный и идеальный случаи управления**

Тогда вместо линейной функции управления $u(t)$ необходимо использовать, как показано на рис. 2.1, нелинейную функцию $u(t)$, которая является аргументом функционала Гамильтона. При такой нелинейности дифференцировать гамильтониан нельзя.

Впервые ***задачу Лагранжа с ограничением*** решила группа ученых под руководством академика Л. С. Понтрягина. Решение задачи явилось обобщением принципа Лагранжа.

Запишем формулировку задачи принципа максимума Понтрягина: дан объект управления, модель которого описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = ay + bu = \phi(y, u).$$

Даны начальные условия $y(t_0) = y_0$ и задано ограничение $q(y_k) = 0$. В отличие от предыдущей задачи Лагранжа в этой задаче добавляется еще ограничение на функцию управления

$$0 \leqslant u \leqslant \xi.$$

Необходимо определить оптимальный вид функций y^* и u^*, которые обеспечивают минимальное значение целевой функции $G(y^*, u^*)$ при выполнении всех перечисленных выше ограничений, т.е.

$$G[y, u] = \int_{t_0}^{t_k} g(y, u)dt \to \min.$$

При решении, как и в задаче Лагранжа, составляются функционалы Лагранжа и Гамильтона

$$\pi = G(y, u) + \lambda q[y_k];$$
$$H = \Psi\phi(y, u) - g(y, u).$$

Далее воспользуемся теоремой, которую называют *принципом максимума Понтрягина*: если при оптимальных функциях y^* и u^* существует минимальное значение целевой функции $G(y^*, u^*)$ при выполнении всех перечисленных выше ограничений, то можно найти такие оптимальные функции λ^* и Ψ^*, при которых функционал Гамильтона принимает максимальное значение, т.е.

$$H^* = \max H(y^*, \Psi^*, u^*). \tag{2.6}$$

Заметим, что в последнем выражении для нахождения управляющей функции u^* не производится дифференцирование гамильтониана, а ее значение отыскивается путем перебора.

Сделаем несколько замечаний.

1. Постановка задачи Понтрягина отличается от задачи Лагранжа тем, что включается дополнительное ограничение на управление.

2. Принцип максимума позволяет найти максимум функционалов на концах отрезка, как это изображено на рис. 2.2, так как он не требует дифференцирования гамильтониана.

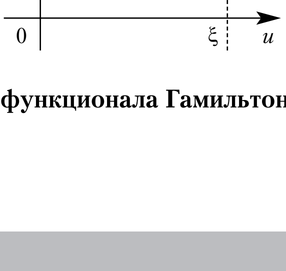


Рис. 2.2. **Вид функционала Гамильтона на отрезке**

Если управление u невелико и концентрируется на небольшом отрезке, не достигая границ ограничения, то принцип Понтрягина сводится к решению задачи Лагранжа.

Если управление выходит на границу отрезка, то задача решается в постановке Понтрягина и максимум гамильтониана отыскивается путем простой подстановки.

Пример 2.2. Дана система, описываемая уравнением

$$\dot{y} = u.$$

Известно начальное условие $y(0) = 0$ и ограничение $0 \leqslant u \leqslant 1$.

Найти оптимальное управление u^* и соответствующую ему функцию y^*, которые минимизируют значение целевой функции

$$G(y, u) = \int_0^4 y dt \to \min.$$

Заметим, что в условии примера управляющая функция не входит в подынтегральную функцию. Кроме того, отсутствуют ограничения на конечное условие q и скорость изменения функции $\dot{y}$.

Легко убедиться, что в этом случае функционал Лагранжа совпадает с целевой функцией $G(y, u)$.

Решение. Проведем постановку задачи Понтрягина. Для этого обозначим $\phi(y, u) = u$. Тогда в соответствии с выражением (2.3) запишем гамильтониан в виде

$$H = \Psi u - y.$$

Применим к последнему выражению принцип Понтрягина (2.6)

$$H^* = \max(\Psi u - y) \text{ при } 0 \leqslant u \leqslant 1.$$

Выражение в скобках состоит из двух слагаемых, из которых второе не зависит от u. Тогда

$$H^* = \max(\Psi u - y) = \max(\Psi u) \text{ при } 0 \leqslant u \leqslant 1. \qquad (**)$$

Вычислим неопределенный множитель $\Psi(t)$. Для этого воспользуемся свойством гамильтониана (2.4)

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -(-1) = 1.$$

Интегрируя, получим

$$\Psi = t + C_1.$$

Для вычисления постоянной воспользуемся формулой (2.5)

$$\Psi(t_k) = -\frac{\partial \pi}{\partial y(t_k)} = 0,$$

так как π-функционал в условии задачи не зависит от $y(t_k)$.

Кроме того, по условию задачи $t_k = 4$ (верхний предел интегрирования). Тогда, принимая во внимание последние два уравнения, можно записать

$$\Psi(4) = 4 + C_1 = 0,$$

откуда $C_1 = -4$. Следовательно, $\Psi = t - 4$.

Отсюда следует, что $\Psi(t)$ является возрастающей функцией. Тогда в записи (**) гамильтониан H^* может достигнуть своего максимального значения, только когда функция управления $u = 1$. Это управление и является оптимальным.

Подставив данное значение в исходное дифференциальное уравнение, запишем

$$\dot{y}^* = 1,$$

а интегрируя эту формулу, находим

$$y^* = t + C_2.$$

С учетом начального условия $y^*(0) = 0 + C_2 = 0$ получим $y^* = t$. Тогда

$$G(y^*) = \int_0^4 t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^4 = 8.$$

При любом другом управлении меньшее значение целевой функции получить нельзя. ■

Пример 2.3. Найти оптимальное управление в системе, описываемой уравнением

$$\dot{y} = u.$$

Дано начальное условие $y(0) = 0$ и ограничение $0 \leqslant u \leqslant 1$.

Найти оптимальное управление u^* и соответствующую ему функцию y^*, которые доставляют минимальное значение целевой функции

$$G(y, u) = \int_0^4 (u^2 + y)dt \to \min.$$

Решение. Так как ограничения на конечные значения отсутствуют, то в соответствии с выражением (2.2)

$$\pi = G(y, u).$$

Обозначим $\phi(y, u) = u$ и составим гамильтониан согласно (2.3)

$$H = \Psi u - (u^2 + y).$$

Применим принцип Понтрягина (2.6)

$$H^* = \max(\Psi u - y - u^2) \text{ при } 0 \leqslant u \leqslant 1.$$

Необходимое условие экстремума дает

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \Psi - 2u = 0,$$

откуда $u = \frac{1}{2}\Psi$.

Для вычисления Ψ воспользуемся равенством

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial[\Psi(t)u - (u^2 + y)]}{\partial y} = 1.$$

Аналогично вычислениям в предыдущем примере получаем $\Psi = t - 4$, откуда после подстановки в выражение для u имеем

$$u = \frac{t}{2} - 2.$$

Но $0 \leqslant u \leqslant 1$, поэтому

$$0 \leqslant \frac{t}{2} - 2 \leqslant 1,$$

откуда $2 \leqslant t \leqslant 6$.

По условию задачи правый конец интервала $t_k = 4$ (в интеграле), поэтому принимаем

$$2 \leqslant t \leqslant 4.$$

Определим вид функции управления на временно́м полуинтервале

$$0 \leqslant t < 2.$$

Аналогично вычислениям в предыдущем примере гамильтониан H^* достигает в формуле (**) максимального значения при $u = 1$, тогда $u^* = 1$.

Таким образом, управляющая функция будет иметь вид

$$u^* = \begin{cases} 1, \text{ при } 0 \leqslant t < 2; \\ \left|\frac{t}{2} - 2\right|, \text{ при } 2 \leqslant t \leqslant 4. \end{cases}$$

Заметим, что в последнем уравнении на интервале $2 \leqslant t \leqslant 4$ управляющая функция u имеет отрицательные значения, поэтому в этом уравнении формула заключена в модуль из ее экономического смысла.

При подстановке управляющей функции в исходное уравнение оптимальная система с точки зрения заданного критерия и ограничений будет описываться дифференциальным уравнением

$$\dot{y}^* = \begin{cases} 1, \text{ при } 0 \leqslant t < 2; \\ \left|\frac{t}{2} - 2\right|, \text{ при } 2 \leqslant t \leqslant 4. \end{cases}$$

После интегрирования запишем с учетом начального условия

$$y^* = \begin{cases} t, \text{ при } 0 \leqslant t < 2; \\ \left|\dfrac{t^2}{4} - 2t\right|, \text{ при } 2 \leqslant t \leqslant 4. \end{cases}$$

Таким образом, получены выражения для управляющей и производной функций, которые позволяют проводить прогноз об эффективности функционирования производства. ■

В заключение необходимо заметить, что все изложенное выше является справедливым и для тех случаев, когда ограничения или дополнительные условия конечных состояний экономической системы являются многомерными.

2.3. Транспортная задача

Транспортной называют задачу об оптимальном плане перевозок однородного продукта из пунктов производства (складов) в пункты потребления.

Разработка и применение оптимальных схем грузовых потоков позволяют существенно снизить затраты на перевозки.

По критерию решения выделяют два типа задач:

1) критерий стоимости (минимальная стоимость перевозок всего груза);

2) критерий времени (минимальное время на перевозку).

Транспортную задачу можно решить различными способами. Наиболее распространенными из них являются:

- метод северо-западного угла;
- симплекс-метод;
- метод наименьшего элемента.

На начальном этапе решения во всех методах определяется опорный план.

Рассмотрим транспортную задачу, в которой в качестве критерия оптимальности взята минимальная стоимость перевозки груза.

Обозначим через c_{ij} тарифы перевозки единицы груза с i-го склада отправления в j-й пункт назначения, a_i — запас груза в i-м складе, b_j — потребности в грузе в j-м пункте назначения.

Пусть также x_{ij} — количество груза, перевозимого из i-го склада в j-й пункт назначения (рис. 2.3).

Тогда ***математическая формулировка транспортной задачи*** состоит в определении минимального значения функции

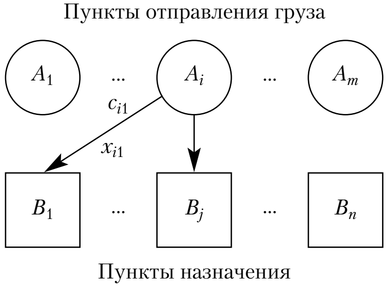


Рис. 2.3. **Транспортная задача:**

c_{i1} — стоимость перевозки; x_{i1} — количество перевозимого груза

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{2.7}$$

при условиях

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1, ..., n;\\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_j, j = 1, ..., m;\\ x_{ij} \geqslant 0.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Всякое неотрицательное решение системы линейных уравнений (2.8), определяемое матрицей $X = (x_{ij})$, называется *планом транспортной задачи.*

План X^*, при котором функция (2.7) принимает свое минимальное значение, называется *оптимальным планом транспортной задачи.*

Обычно исходные данные транспортной задачи записываются в виде табл. 2.1.

Таблица 2.1

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы
	B_1 ...	B_j ...	B_n ...	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{1j} x_{1j}	c_{1n} x_{1n}	a_1
... ...	... ...	... ...	... ...	... ...
A_i	c_{i1} x_{i1}	c_{ij} x_{ij}	c_{in} x_{in}	a_i
... ...	... ...	... ...	... ...	... ...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{mj} x_{mj}	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_j	b_n	

Очевидно, что общее наличие груза у поставщиков $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а общая потребность в этом грузе в пунктах назначения $\sum_{j=1}^{n} b_i$.

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_i,$$

то модель такой транспортной задачи называется *закрытой*. Если вышеуказанное условие не соблюдается, то модель транспортной задачи называется *открытой*.

Для ***разрешимости транспортной задачи*** необходимо, чтобы запасы груза на складах были равны потребностям в грузе в пунктах назначения.

В случае превышения запасов над потребностью вводится фиктивный ($n + 1$)-й пункт назначения, потребности которого полностью «закрывали» бы транспортную задачу, а соответствующие тарифы в этот пункт назначения считались бы равными нулю.

В случае превышения потребностей над запасами вводится фиктивный склад с запасами, покрывающими потребности потребителей и равными нулю тарифами по поставкам груза с этого склада.

Пример 2.4. Найти оптимальный план перевозок по данным исходной таблицы. В ячейках в правом верхнем углу указаны стоимости перевозок в рублях из пункта отправления в пункт назначения.

Исходная таблица

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10	7	6	8	31
A_2	5	6	5	4	48
A_3	8	7	6	7	38
Заявки b_j	22	34	41	20	117

Решение. Так как количество заявок совпадает с количеством запасов, то задача закрытая. Составим опорный план способом северо-западного угла.

Заполним ячейки исходной таблицы объемами перевозок, начиная с левой верхней ячейки (1, 1) — «северо-западного угла» таблицы.

Будем рассуждать при этом следующим образом. Пункт B_1 подал заявку на 22 ед. груза. Удовлетворим эту заявку за счет запаса 31 ед., имеющегося в пункте A_1, и запишем перевозку 22 ед. в клетке (1, 1) табл. 2. После этого заявка пункта B_1 удовлетворена.

В пункте A_1 осталось еще 9 единиц груза. Удовлетворим за счет них часть заявки пункта B_2 (34 ед.). Для B_2 остались неудовлетворенными 25 ед., которые покроем из пункта A_2.

Оставшимися 23 ед. пункта A_2 частично покроем запрос пункта B_3 и запишем число 23 в ячейку (2, 3). В составе заявки пункта B_3 остались неудовлетворенными 18 ед., которые покроем за счет пункта A_3. Заносим 18 в ячейку (3, 3).

Оставшимися 20 ед. пункта A_3 полностью удовлетворяем заявку пункта B_4 и записываем число 20 в ячейку (3, 4).

На этом распределение запасов закончено: каждый пункт назначения получил груз согласно своей заявке. Это выражается в том, что сумма перевозок в каждой строке равна соответствующему запасу, а в столбце — заявке.

Таким образом, составлен план перевозок, удовлетворяющий балансовым условиям. Полученное первое решение является опорным решением транспортной задачи (см. табл. 2).

Обозначим: r — количество базисных переменных, m — количество строк, n — количество столбцов исходной таблицы.

Число базисных переменных $r = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ равно количеству заполненных ячеек в базисном решении (см. табл. 1). Следовательно, имеет место невырожденный случай.

Стоимость первого плана перевозок

$$L_1 = 22 \cdot 10 + 9 \cdot 7 + 25 \cdot 6 + 23 \cdot 5 + 18 \cdot 6 + 20 \cdot 7 = 796 \text{ руб.}$$

Возникает вопрос: является ли этот план оптимальным по стоимости? Разумеется, нет. Так как при его построении не учитывались стоимости перевозок c_{ij}.

Попробуем улучшить план. Для этого около трех заполненных ячеек (они выделены серым цветом) отыскивается четвертая, незаполненная ячейка с минимальной стоимостью.

Таблица 1

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10 22	7 9	6	8	31
A_2	5	6 25	5 – 23	4 +	48
A_3	8	7	6 + 18	7 – 20	38
Заявки b_j	22	34	41	20	117

По табл. 2 видно, что эта ячейка (2, 4) с минимальной стоимостью 4. Образуем цикл перевозки, начиная с ячейки (2, 4). Заметим, что этой ячейке присваивается знак «+», далее по мере движения в направлении часовой стрелки знаки чередуются. Цена этого цикла равна $\gamma_1 = 4 - 7 + 6 - 5 = -2$.

По этому циклу можно переместить $a_{24} = \min(20, 23) = 20$ ед. груза (чтобы не получить в ячейке (3, 4) отрицательной перевозки).

Новый, улучшенный план показан в табл. 3. Стоимость этого плана $L_2 = L_1 + \gamma_1 \cdot a_{24} = 796 + (-2)20 = 756$ руб. В плане по-прежнему шесть базисных клеток.

Таблица 2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10 − 22	7 + 9	6	8	31
A_2	5 +	6 − 25	5 3	4 20	48
A_3	8	7	6 38	7	38
Заявки b_j	22	34	41	20	117

Для дальнейшего улучшения плана обратим внимание на свободную ячейку (2, 1) с минимальной стоимостью 5. Цикл, соответствующий этой ячейке, показан в табл. 3. Его цена $\gamma_2 = 5 - 10 + 7 - 6 = -4$.

По этому циклу переместим $a_{21} = \min(22, 25) = 22$ ед. груза, чем уменьшим стоимость перевозок до $L_3 = 756 + (-4)22 = 668$ руб.

Построим табл. 3.

Таблица 3

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	10	7 − 31	6 +	8	31
A_2	5 22	6 + 3	5 − 3	4 20	48
A_3	8	7	6 38	7	38
Заявки b_j	22	34	41	20	117

Попробуем дальше улучшить этот план, подсчитывая цены циклов, начинающихся положительной вершиной в свободной ячейке.

Определяем цену цикла для каждой из имеющихся свободных ячеек табл. 3, например $\gamma_3 = 6 - 5 + 6 - 7 = 0$, поэтому $L_3 = 668 + 3 \cdot 0 = 668$ руб.

Можно показать, что все цены циклов или положительные, или нулевые, следовательно, никакие попытки перенесения объемов перевозок из ячейки в ячейку не могут улучшить план перевозок.

Таким образом, план, приведенный в табл. 3, является оптимальным. ■

Примененный выше метод отыскания оптимального решения транспортной задачи называется распределительным; он состоит в непосредственном отыскании свободных клеток с отрицательной ценой цикла и в перенесении перевозок по этому циклу.

Пример 2.5. Найти оптимальный план перевозок для данных, приведенных в исходной таблице.

Исходная таблица

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10	5	4	40
A_2	6	4	5	23
A_3	7	3	6	20
Заявки b_j	20	20	43	83

Решение. Строим опорный план методом северо-западного угла (табл. 1). В построенном плане число базисных переменных $r = m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$ не равно количеству заполненных ячеек в базисном решении (четыре ячейки серого цвета в табл. 1).

План получился вырожденным.

Таблица 1

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10 20	5 20	4	40
A_2	6	4	5 23	23
A_3	7	3	6 20	20
Заявки b_j	20	20	43	83

Чтобы перейти к невырожденному плану, нарушаем баланс запасов и заявок на формальное бесконечно малое число ε в первой и третьей строках, не нарушая общего баланса (сумма запасов равна сумме заявок).

В ячейку (1, 3) добавляем ε, а из ячейки (3, 3) вычитаем ε (табл. 3). Получим невырожденный опорный план (пять базисных ячеек серого цвета).

Эти строки выбраны так, чтобы организовать цикл, в который входит одна ячейка (3, 2) с минимальной стоимостью 3.

Таблица 2

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10 20	5 – 20	4 + ε	40 + ε
A_2	6	4	5 23	23
A_3	7	3 +	6 – 20 – ε	20 – ε
Заявки b_j	20	20	43	83

Принимая во внимание, что в табл. 3 ε = 0, получим стоимость первого плана перевозок:

$$L_1 = 20 \cdot 10 + 20 \cdot 5 + \varepsilon \cdot 4 + 23 \cdot 5 + (20 - \varepsilon)6 = 535 \text{ руб.}$$

Образуем цикл, как указано в табл. 3. Цена этого цикла равна $\gamma_1 = 4 - 6 + 3 - 5 = -4$. По этому циклу можно переместить $a_{32} = \min(20 - \varepsilon, 20) = 20 - \varepsilon$ ед. груза.

Улучшаем план перевозок переносом 20 – ε единиц груза по циклу, показанному в табл. 3. Получим новый, лучший план (табл. 4). Стоимость этого плана $L_2 = L_1 + \gamma_1 a_{32} = 535 + (-4)20 = 455$ руб.

В плане по-прежнему пять базисных клеток.

Таблица 3

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10 – 20	5 ε	4 + 20	40 + ε
A_2	6 +	4	5 – 23	23
A_3	7	3 20 – ε	6	20 – ε
Заявки b_j	20	20	43	83

План, приведенный в табл. 3, еще не оптимален, так как цикл с началом в свободной ячейке (2, 1) имеет отрицательную цену

$$\gamma_2 = 6 - 10 + 4 - 5 = -5.$$

Перемещая по этому циклу 20 ед. груза, получим табл. 4. Стоимость этого плана $L_3 = L_2 + \gamma_2 a_{21} = 455 + (-5)\,20 = 355$ руб.

Таблица 4

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10	5 − ε	4 + 40	40 + ε
A_2	6 20	4 +	5 − 3	23
A_3	7	3 20 − ε	6	20 − ε
Заявки b_j	20	20	43	83

Цена цикла, начинающегося в клетке (2, 2) табл. 4, также отрицательна

$$\gamma_3 = 4 - 5 + 4 - 5 = -2.$$

Однако по этому циклу можно перенести только перевозку, равную ε. Тем не менее сделаем это и получим новый план (табл. 6). Стоимость этого плана

$$L_4 = L_3 + \gamma_3 a_{22} = 355 + (-2)\,\varepsilon = 355 \text{ руб.}$$

Таблица 5

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10	5	4 40 + ε	40 + ε
A_2	6 20	4 ε	5 3 − ε	23
A_3	7	3 20 − ε	6	20 − ε
Заявки b_j	20	20	43	83

Можно убедиться, что в табл. 5 все циклы, соответствующие оставшимся свободным ячейкам, имеют неотрицательную цену, поэтому план, приведенный в табл. 5, является оптимальным.

Полагая в нем ε = 0, получим окончательный оптимальный план с минимальной стоимостью перевозок

$$L_{\min} = 4 \cdot 40 + 6 \cdot 20 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 20 = 355 \text{ руб. (табл. 6).}$$

Таблица 6

Пункты отправления	Пункты назначения			Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	
A_1	10	5	4 40	40
A_2	6 20	4	5 3	23
A_3	7	3 20	6	20
Заявки b_j	20	20	43	83

■

2.4. Двойственная задача

Каждой задаче линейного программирования соответствует другая задача, называемая *двойственной* или *сопряженной* по отношению к исходной.

Теория двойственности оказалась полезной для проведения качественных исследований ЗЛП.

Содержательная интерпретация задачи I об использовании ресурсов представлена в левой части табл. 2.2.

В табл. 2.2 b_i, $i = 1, 2, ..., m$ обозначает запас ресурса S_i; a_{ij} — число единиц ресурса S_i, потребляемого при производстве единицы продукции P_j, $j = 1, 2, ..., n$; c_j — прибыль (выручка) от реализации единицы продукции P_j (или цена продукции P_j).

Предположим, что некоторая организация решила закупить ресурсы $S_1, S_2, ..., S_m$ предприятия и необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы $y_1, y_2, ..., y_m$.

Очевидно, что покупающая организация заинтересована в том, чтобы затраты на все ресурсы Z в количествах $b_1, b_2, ..., b_m$ по ценам соответственно $y_1, y_2, ..., y_m$ были минимальны, т.е.

$$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min.$$

С другой стороны, предприятие, продающее ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была не менее той суммы, которую предприятие может получить при их переработке в готовую продукцию.

На изготовление единицы продукции P_1 расходуется a_{11} единиц ресурса S_1, a_{21} единиц ресурса S_2, ..., a_{i1} единиц ресурса S_i, ..., a_{m1} единиц ресурса S_m по цене соответственно $y_1, y_2, ..., y_i, ..., y_m$. Поэтому для удовлетворения требований продавца затраты на ресурсы, потребляемые при изготовлении единицы продукции P_1, должны быть не менее ее цены c_1, т.е.

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geqslant c_1.$$

Аналогично можно составить ограничения в виде неравенств по каждому виду продукции P_1, P_2, ..., P_n. Экономико-математическая модель и содержательная интерпретация полученной таким образом двойственной задачи II приведены в правой части табл. 2.2.

Таблица 2.2

Задача I (исходная)	Задача II (двойственная)
$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$ при ограничениях $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leqslant b_m \end{cases}$ и условии неотрицательности $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, ..., x_n \geqslant 0.$	$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min$ при ограничениях $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \leqslant c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \leqslant c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}y_m \leqslant c_m \end{cases}$ и условии неотрицательности $y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0, ..., y_m \geqslant 0.$
Составить такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при котором прибыль (выручка) F от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов $b_1, b_2, ..., b_m$	Найти такой набор цен (оценок) ресурсов $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$, при котором общие затраты на ресурсы Z будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее прибыли (выручки) $c_1, c_2, ..., c_n$ от реализации этой продукции

Цены ресурсов $y_1, y_2, ..., y_m$ в экономической литературе получили различные названия: *неявные*, *теневые*. Смысл этих названий состоит в том, что это условные, «ненастоящие» цены.

В отличие от *внешних* цен $c_1, c_2, ..., c_n$ на продукцию, известных, как правило, до начала производства, цены ресурсов $y_1, y_2, ..., y_m$ являются *внутренними,* ибо они задаются не извне, а определяются непосредственно в результате решения задачи, поэтому их чаще называют *оценками ресурсов*.

Рассмотрим задачи I и II линейного программирования, представленные в табл. 2.2, абстрагируясь от содержательной интерпретации параметров, входящих в их экономико-математические модели.

Обе задачи обладают следующими ***свойствами***.

1. В одной задаче ищут максимум целевой функции, в другой — минимум.

2. Коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.

3. Каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче максимизации все неравенства вида «$\leqslant$», а в задаче минимизации — все неравенства вида «$\geqslant$».

4. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач являются транспонированными друг к другу:

для задачи I $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

для задачи II $$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.

6. Условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.

Задачи I и II линейного программирования, обладающие указанными свойствами, называются *симметричными взаимно двойственными задачами*. В дальнейшем для простоты будем называть их просто *двойственными задачами*.

Исходя из перечисленных выше свойств, можно предложить следующий ***алгоритм составления двойственной задачи***.

1. Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному смыслу: если в исходной задаче ищут максимум линейной функции, то все неравенства системы ограничений следует привести к виду «$\leqslant$», а если минимум — к виду «$\geqslant$». Для этого неравенства, в которых данное требование не выполняется, необходимо умножить на -1.

2. Составить расширенную матрицу B, в которую включить матрицу коэффициентов при переменных A, столбец свободных членов системы ограничений и строку коэффициентов при переменных в целевой функции.

3. Найти матрицу B^{T}, транспонированную к матрице B.

4. Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы B^{T} и условия неотрицательности переменных.

Пример 2.6. Составить задачу, двойственную задаче

$$F = -x_1 + 2x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 24, \\ x_1 - x_2 \leqslant 3, \\ x_1 + x_2 \geqslant 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0;\, x_2 \geqslant 0.$$

Решение.

1. Так как исходная задача дана на максимизацию, то приведем все неравенства системы ограничений к виду «$\leqslant$», для чего обе части первого и четвертого неравенств умножим на –1. Получим

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leqslant 24, \\ x_1 - x_2 \leqslant 3, \\ -x_1 - x_2 \leqslant 5. \end{cases}$$

2. Составим расширенную матрицу системы

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & F \end{pmatrix}.$$

Последняя строка в этой матрице записана для коэффициентов целевой функции.

3. Запишем матрицу B^{T}, транспонированную к B,

$$B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & Z \end{pmatrix}.$$

4. В соответствии с коэффициентами транспонированной матрицы сформулируем двойственную задачу

$$Z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geqslant -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geqslant 2; \end{cases}$$

$$y_1 \geqslant 0;\, y_2 \geqslant 0;\, \ldots;\, y_4 \geqslant 0.\ ■$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте постановку задачи оптимального управления.
2. Изложите алгоритм решения задачи Лагранжа.
3. Сформулируйте принцип максимума Понтрягина.
4. Какие ограничения накладывает принцип максимума Понтрягина?
5. Дайте математическую формулировку транспортной задачи.
6. Что называется оптимальным планом транспортной задачи?
7. Перечислите свойства двойственных задач.
8. Какие задачи называются симметричными взаимно двойственными?
9. Изложите алгоритм составления двойственной задачи.

Задачи для самостоятельного решения

1. Песок поставляется с двух карьеров на три комбината строительных конструкций.

Тарифы перевозок грузов одинаковы и пропорциональны расстояниям. Производительность карьеров: $K_1 = 60$ т/сут и $K_2 = 80$ т/сут.

Потребности комбинатов: $C_1 = 30$ т/сут, $C_2 = 50$ т/сут, $C_3 = 60$ т/сут.

Расстояния между карьерами (первый индекс) и комбинатами (второй индекс): $r_{11} = 5$ км, $r_{12} = 6$ км, $r_{13} = 8$ км, $r_{21} = 7$ км, $r_{22} = 5$ км, $r_{23} = 5$ км.

Определить, какое количество песка необходимо поставлять с каждого карьера на каждый комбинат, чтобы обеспечить минимальные расходы на транспортировку.

2. Из трех хранилищ необходимо доставить уголь в пять котельных. Количество угля в хранилищах № 1—3 соответственно равно 40, 150 и 100 т. Потребности котельных № 1—5 в угле составляют соответственно 20, 80, 90, 60 и 40 т.

Определить, какое количество угля нужно доставить с каждого хранилища в каждую котельную так, чтобы общая сумма затрат на перевозку была минимальной.

Стоимость перевозки 1 т груза в рублях дана в таблице.

Хранилища	Котельные				
	1	2	3	4	5
1	70	30	50	40	20
2	60	20	30	10	70
3	30	50	20	60	40

Глава 3
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

3.1. Игра как модель конфликтной ситуации в принятии решения

На практике часто имеет место ситуация, когда при принятии решений действуют две или более стороны, преследующих противоположные цели. Каждая из сторон может проводить мероприятия для достижения своих целей, причем успех одной стороны означает неудачу других.

Такие ситуации называются *конфликтными*, они могут возникать, например, при игре в шахматы, между конкурирующими фирмами, при арбитражных спорах, выборах и т.д.

Раздел математики, изучающий конфликтные ситуации, называется *теорией игр*.

Перечислим ***основные понятия теории игр***:

- *игра* — упрощенная формализованная математическая модель конфликтной ситуации;
- *игроки* — стороны, участвующие в конфликте;
- *выигрыш* (*проигрыш*) — исход конфликта;
- *правила игры* — система условий, определяющих варианты возможных действий игроков, величину выигрыша (проигрыша), к которому приводит каждая совокупность действий игроков, объем информации о поведении других игроков и т.п.;
- игра называется *парной*, если в ней участвуют два игрока, и *множественной*, если участвует большее число игроков;
- игра называется *игрой с нулевой суммой* (антагонистической), если суммарный выигрыш одних игроков равен суммарному проигрышу других.

Рассмотрим сначала парные игры с нулевой суммой, в которых участвуют игроки A и B. При этом договоримся о следующей терминологии.

Будем считать, что результат любой такой игры выражается некоторым числом (допустим, денежных единиц), которое назовем *выигрышем* игрока A и обозначим его a.

Если игрок A в данной игре проиграл, то a — отрицательное число, но все равно будем называть его выигрышем.

Тогда то же самое число a — *проигрыш* игрока B. Если игрок B выиграл, то это число, естественно, отрицательное.

Назовем *стратегией игрока* совокупность его действий в процессе одной игры. Будем считать, что в данной игре все решения каждого игрока известны заранее, независимо от действий другого игрока.

При этом в распоряжении каждого игрока имеется не одна (иначе отсутствует смысл игры), а несколько или бесконечное множество стратегий, из которых в данной игре он выбирает одну.

Игра называется *конечной*, если у каждого игрока конечное число стратегий, и *бесконечной* в противном случае. Очевидно, что если каждый игрок выбрал свою стратегию, то исход игры определен.

Под *решением игры* будем понимать пару стратегий (по одной для каждого игрока), при которой игрок A должен получить максимальный выигрыш, если игрок B придерживается своей стратегии, а игрок B должен иметь минимальный проигрыш, если игрок A придерживается своей стратегии.

Такие стратегии, составляющие решение игры, называются *оптимальными*.

Оптимальные стратегии должны удовлетворять условию устойчивости, т.е. любому игроку должно быть невыгодно отказываться от своей оптимальной стратегии, если другой игрок придерживается своей оптимальной стратегии.

Главной задачей теории игр является отыскание решения игры, т.е. выбор оптимальных стратегий для каждого игрока.

Ниже рассмотрим стратегические (матричные и биматричные) и статистические игры.

3.2. Матричные игры

Рассмотрим парную конечную игру с нулевой суммой. Пусть игрок A располагает m стратегиями $A_1, A_2, ..., A_m$, а игрок B располагает n стратегиями $B_1, B_2, ..., B_n$.

В результате выбора игроками какой-либо пары стратегий A_i и B_j однозначно определяется результат игры a_{ij}, который является выигрышем игрока A (положительным или отрицательным) и одновременно проигрышем игрока B.

Предположим, что значения a_{ij} известны для любой пары стратегий игроков, и тогда их можно записать в форме матрицы.

Матрица

$$Q = (a_{ij})_{m \times n}$$

называется *матрицей игры* (в некоторых книгах — *платежной матрицей* или *матрицей потерь*), а сама игра в этом случае обычно называется *матричной игрой*.

Строки матрицы соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы — стратегиям игрока B. Для наглядности такую матрицу часто пишут в виде таблицы

B_j A_i	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Игрок A стремится обеспечить себе наибольший выигрыш, т.е. выбрать стратегию A_i так, чтобы величина a_{ij} была максимальной. Игрок B стремится сделать свой проигрыш наименьшим, т.е. так, чтобы a_{ij} была минимальной.

Таким образом, цели игроков являются прямо противоположными.

Здесь специфической трудностью является то, что ни один игрок не может полностью контролировать a_{ij}, поскольку A выбирает только строку, а B — только столбец.

Преодоление этой трудности, т.е. определение наиболее рационального способа ведения игры для каждого из игроков, и представляет собой сущность теории игр.

Пример 3.1. Игрок A может записать одно из чисел: 0 и 1. Игрок B называет число, которое, по его мнению, записал игрок А.

Ели угадывает, то получает от A одну денежную единицу, а если не угадывает, то платит A столько же.

Составить матрицу игры.

Решение. Обозначим стратегии игроков:

A_1 — игрок A записал 0;
A_2 — игрок A записал 1;
B_1 — игрок B называет 0;
B_2 — игрок B называет 1.

Тогда матрица игры имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Рассмотрим матричную игру с матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим α_i — наименьший выигрыш игрока A при выборе им стратегии A_i при всех возможных стратегиях игрока B. α_i — наименьшее число в i-й строке матрицы игры, т.е.

$$\alpha_i = \min_{j=1,\dots,n} a_{ij}.$$

Среди всех наименьших чисел α_i в строках выберем наибольшее число, обозначим его α и назовем *нижней ценой игры* или *максимином*

$$\alpha = \max_{i=1,\dots,m} \alpha_i = \max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} a_{ij}.$$

Это гарантированный наименьший выигрыш игрока A при выборе им стратегии, соответствующей α, и при любой стратегии игрока B. Стратегия игрока A, соответствующая максимину, называется *максиминной стратегией.*

Обозначим β_j — наибольший проигрыш игрока B при выборе им стратегии B_j при всех возможных стратегиях игрока A. β_j — наибольшее число в j-м столбце матрицы игры, т.е.

$$\beta_i = \max_{i=1,\dots,m} a_{ij}.$$

Среди всех чисел β_j в столбцах выберем наименьшее число, обозначим его β и назовем *верхней ценой игры* или *минимаксом*

$$\beta = \min_{j=1,\dots,n} \beta_j = \min_{j=1,\dots,n} \max_{i=1,\dots,m} a_{ij}.$$

Это гарантированный наибольший проигрыш игрока B при выборе им стратегии, соответствующей β, и при любой стратегии игрока A. Стратегия игрока B, соответствующая минимаксу, называется *минимаксной стратегией.*

Можно доказать, что нижняя цена игры не превосходит верхней цены игры, т.е.

$$\alpha \leqslant \beta.$$

Очевидно, что максиминная и минимаксная стратегии — наиболее осторожные стратегии игроков. Принцип, диктующий игрокам выбор таких стратегий, называется *принципом минимакса*.

Если $\alpha = \beta$, то число $c = \alpha = \beta$ называется *чистой ценой игры* или просто *ценой игры*.

Максиминная и минимаксная стратегии в этом случае являются оптимальными стратегиями, а их совокупность — решением игры.

Действительно, так как число $c = \beta$ является наибольшим в своем столбце, то игроку A невыгодно отказываться от максиминной стратегии (т.е. передвигаться вверх или вниз по этому столбцу), если игрок B придерживается минимаксной стратегии.

Аналогично игроку B невыгодно отказываться от минимаксной стратегии, если игрок A придерживается максиминной стратегии, поскольку число $c = \alpha$ является наименьшим в своей строке.

Из вышесказанного следует, что пара стратегий A_i и B_j дает решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент a_{ij} является *одновременно наименьшим в своей строке и наибольшим в своем столбце*.

Если в игре существует такая ситуация, то указанный элемент a_{ij} называется *седловой точкой*, а сама игра — *игрой с седловой точкой* (по аналогии с поверхностью седла, которая искривляется вверх в одном направлении и вниз — в другом).

Игра с седловой точкой имеет цену игры $c = a_{ij}$.

Игра с седловой точкой называется *справедливой*, если $c = 0$, и *несправедливой* в противном случае.

Пример 3.2. Определить нижнюю α и верхнюю β цену игры, заданной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Имеет ли игра седловую точку? Если да, то найти решение игры.

Решение. Найдем α и β, заполнив для удобства следующую таблицу:

B A	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	5	6	8	5
A_2	9	7	8	7
A_3	7	6	6	6
β_j	9	7	8	$\alpha = \beta = 7$

Из таблицы очевидно, что максиминная стратегия — стратегия A_2 (соответствующая $\alpha = 7$), а минимаксная стратегия — стратегия B_2 (соответствующая $\beta = 7$).

Так как $\alpha = \beta$, то элемент a_{22}, находящийся на пересечении второй строки и второго столбца, является седловой точкой.

Пара стратегий (A_2, B_2) составляет решение игры, поскольку при $\alpha = \beta$ максиминная и минимаксная стратегии являются оптимальными.

Цена игры $c = \alpha = \beta = 7$. ■

3.3. Смешанные стратегии матричных игр

Если $\alpha \neq \beta$, то игра не имеет седловой точки. В этом случае возникают затруднения в определении цены игры и оптимальных стратегий игроков. Рассмотрим в качестве примера такую игру.

Пример 3.3. Игроки A и B одновременно независимо друг от друга записывают число.

Игрок A записывает 1 или 2, а игрок B записывает 0 или 3. Если сумма записанных чисел нечетна, то столько денежных единиц игрок B платит игроку A, а если сумма четна, то столько A платит B.

Найти решение игры.

Решение. Обозначим стратегии:

A_1 — игрок A записал 1;
A_2 — игрок A записал 2;
B_1 — игрок B записал 0;
B_2 — игрок B записал 3.

Матрица игры имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем α и β, для чего заполним таблицу

B A	B_1	B_2	α_i
A_1	1	−4	−4
A_2	−2	5	−2
β_j	1	5	$\alpha = -2$ $\beta = 1$

Так как $\alpha \neq \beta$, то ясно, что седловая точка в этой игре отсутствует.

Из таблицы очевидно, что при максиминной стратегии A_2 игрок A может гарантировать себе выигрыш не меньше −2, а игрок B при минимаксной стратегии B_1 может гарантировать себе проигрыш не больше 1.

Область между α и β является как бы ничейной, и каждый игрок может попытаться улучшить свой результат за счет этой области.

Отметим, что если каждый игрок будет придерживаться принципа минимакса (стратегии A_2 и B_1), то каждый раз выигрыш игрока A будет составлять –2. Это невыгодно игроку A, так как проигрыш игрока B, равный –2 (т.е. выигрыш 2), меньше того проигрыша, равного 1, который игрок B обеспечивает себе по принципу минимакса.

Игроку A выгодно отказаться от своей максиминной стратегии, если B придерживается минимаксной, и применить стратегию A_1. Тогда игрок A вместо выигрыша –2 получит выигрыш 1. Правда, тогда игроку B будет выгодно отказаться от стратегии B_1, чтобы игрок A получил выигрыш –4, и т.д.

То есть при каждой паре стратегий одному из игроков выгодно отказаться от своей стратегии, если другой игрок придерживается своей. А это значит, что пары оптимальных стратегий нет и решение игры в таких стратегиях не существует. ■

В такой игре каждый игрок должен хранить в секрете ту стратегию, которую он собирается применить.

Однако как это сделать? Ведь если партия играется многократно, а один из игроков все время применяет одну и ту же стратегию, то второй игрок, зная об этом, будет учитывать этот факт, выбирая свою стратегию.

Секретность можно сохранить, если каждый раз выбирать стратегию случайным образом. Такое поведение тоже является стратегией и называется *смешанной стратегией* в отличие от рассмотренных ранее *чистых стратегий* A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_n. При этом противник лишен возможности узнать наперед о действиях другой стороны.

Итак, смешанная стратегия S_A игрока A — это применение чистых стратегий A_1, A_2, ..., A_m случайным образом с вероятностями соответственно p_1, p_2, ..., p_m, причем

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Смешанную стратегию S_A обычно записывают в виде вектора вероятностей

$$S_A = (p_1, p_2, ..., p_m).$$

Аналогично смешанная стратегия игрока B имеет вид

$$S_B = (q_1, q_2, ... q_n),$$

где q_j — вероятность применения игроком B стратегии B_j, а $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Поскольку в смешанных стратегиях игроки выбирают свои чистые стратегии случайным образом и независимо друг от друга, игра имеет случайный характер. Случайной становится и величина выигрыша игрока A или проигрыша игрока B.

В этом случае представление о том, какому игроку выгодна данная игра при выбранных смешанных стратегиях игроков, дает среднее значение выигрыша игрока A, которое является функцией S_A и S_B и определяется по формуле математического ожидания двумерной случайной величины

$$f(S_A, S_B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j.$$

Эту функцию часто называют *функцией потерь* или *платежной функцией*.

Решением игры в этом случае является пара оптимальных смешанных стратегий

$$S_A^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*) \text{ и } S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*),$$

обладающих тем же свойством, что и для чистых стратегий: каждому игроку невыгодно отступать от своей оптимальной смешанной стратегии, если другой игрок придерживается своей оптимальной смешанной стратегии.

Ценой игры с в такой игре называется средний выигрыш игрока A при оптимальных смешанных стратегиях

$$c = f(S_A^*, S_B^*) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j^*.$$

Цена игры с удовлетворяет неравенству

$$\alpha \leqslant c \leqslant \beta,$$

где α и β — соответственно нижняя и верхняя цена игры.

Основной теоремой теории игр является *теорема Неймана*: каждая конечная игра имеет по крайней мере одно решение среди смешанных стратегий.

Рассмотрим игру с матрицей $(a_{ij})_{2\times 2}$, являющуюся простейшим случаем матричной игры:

- если такая игра имеет седловую точку, то решение игры — пара оптимальных чистых стратегий (максиминная и минимаксная), соответствующих этой точке;
- для игры, в которой отсутствует седловая точка, решение в соответствии с теоремой Неймана существует и определяется парой оптимальных смешанных стратегий

$$S_A^* = (p_1^*, p_2^*) \quad \text{и} \quad S_B^* = (q_1^*, q_2^*).$$

Здесь вероятности p_1^*, p_2^* соответствуют стратегиям A_1, A_2, вероятности q_1^*, q_2^* — стратегиям B_1, B_2.

Пусть матрица игры имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассматривая функцию потерь $f(S_A, S_B)$ при применении смешанных стратегий, можно получить систему уравнений для нахождения оптимальных смешанных стратегий, решение которой имеет вид

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \quad q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Пример 3.4. Найти решение и цену игры для описанной ранее игры с записью чисел.

Решение. Полученная выше матрица игры имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение игры определяется следующими вероятностями:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{5 - (-2)}{1 + 5 - (-4) - (-2)} = \frac{7}{12} = 0{,}58;$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 - (-4)}{1 + 5 - (-4) - (-2)} = \frac{5}{12} = 0{,}42;$$

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{5 - (-4)}{1 + 5 - (-4) - (-2)} = \frac{9}{12} = 0{,}75;$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 - (-2)}{1 + 5 - (-4) - (-2)} = \frac{3}{12} = 0{,}25.$$

Таким образом, можно записать

$$S_A^* = (0{,}58; 0{,}420); \quad S_B^* = (0{,}75; 0{,}25).$$

Полученный результат означает, что оптимальная смешанная стратегия игрока A состоит в том, чтобы применять чистые стратегии A_1 и A_2 случайным образом с вероятностями соответственно 0,58 и 0,42, а игрока B — чистые стратегии B_1 и B_2 — с вероятностями 0,75 и 0,25.

Таким образом, при правильной игре обоих игроков наиболее часто будет выбираться пара стратегий (A_1, B_1), т.е. чаще игрок A будет записывать 1, чем 2, а игрок B — 0, чем 3.

Найдем цену игры c, т.е. средний выигрыш игрока A при оптимальных смешанных стратегиях:

$$c = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} p_i^* q_j^* = a_{11}p_1^*q_1^* + a_{12}p_1^*q_2^* + a_{12}p_2^*q_1^* + a_{22}p_2^*q_2^* =$$

$$= 1 \cdot 0{,}58 \cdot 0{,}75 + (-4) \cdot 0{,}58 \cdot 0{,}25 + (-2) \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}75 +$$

$$+ 5 \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}25 = -0{,}25.$$

Это средний выигрыш игрока A в одной игре. Он отрицателен, следовательно, эта игра для игрока A невыгодна, а выгодна для игрока B. ■

3.4. Биматричные игры

Рассмотрим теперь игры с ненулевой суммой, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но уже необязательно являются противоположными.

Пусть, как и прежде, в распоряжении игрока A имеется m стратегий A_1, A_2, ..., A_m, а в распоряжении игрока B — n стратегий B_1, B_2, ..., B_n.

При этом если игрок A выбрал стратегию A_i, а игрок B — стратегию B_j, то выигрыш игрока A равен некоторому числу a_{ij}, а выигрыш игрока B — некоторому числу b_{ij}.

Тогда выигрыши каждого игрока можно свести в отдельные матрицы

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad B = (b_{ij})_{m\times n}.$$

Игры с ненулевой суммой часто называют *биматричными играми*.

Рассмотренные ранее матричные игры с нулевой суммой можно считать частным случаем биматричных игр, где матрица выигрышей игрока B противоположна матрице выигрышей игрока A, т.е.

$$b_{ij} = -a_{ij},\ i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n.$$

Рассмотрим один из классических примеров биматричной игры.

Пример 3.5. «Дилемма узников». Два узника находятся под обвинением в совместном совершении преступления при отсутствии прямых улик.

При этом каждый узник (назовем их игроками A и B) имеет две стратегии поведения:

A_1, B_1 — узник не сознается в совместном совершении преступления;

A_2, B_2 — узник сознается в совместном совершении преступления.

Если ни тот, ни другой узник не сознаются, то оба получат по 1 году тюрьмы, если оба сознаются — по 6 лет тюрьмы.

Но если сознается только один из них, а другой не сознается, то сознавшийся будет выпущен на свободу, а несознавшийся получит 9 лет тюрьмы. Такому событию соответствуют стратегии A_1, B_2 и A_2, B_1.

Составить матрицы выигрышей для игроков.

Решение. Если считать год тюрьмы за выигрыш, равный (−1), то матрицы выигрышей A и B такой биматричной игры имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

В общем случае биматричной игры возникает вопрос, какие стратегии выбирать игрокам для разрешения моделируемой конфликтной ситуации, т.е. что понимать под решением биматричной игры.

Предположим сначала, что игрокам по правилами игры запрещено консультироваться друг с другом и согласовывать свои действия.

В этом случае интересы игроков не совпадают, поэтому для решения игры необходимо найти такой компромисс, который был бы приемлемым для обоих игроков. То есть нужно найти такую равновесную ситуацию, отклонение от которой уменьшает выигрыш отклоняющегося игрока при сохранении другим игроком своего выбора.

Поскольку, как было установлено ранее, любая матричная игра в смешанных стратегиях разрешима, разумно и в биматричных играх сразу перейти к смешанным стратегиям игроков

$$S_A = (p_1, p_2, ..., p_m) \quad \text{и} \quad S_B = (q_1, q_2, ..., q_n).$$

Тогда средние выигрыши игроков определяются по формулам

$$c_A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j; \quad c_B = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i q_j.$$

Ограничимся случаем рассмотрения биматричной игры 2 × 2, когда у каждого игрока имеется по две стратегии

$$S_A = (p_1, p_2) \quad \text{и} \quad S_B = (q_1, q_2).$$

Обозначим вероятности

$$p_1 = p; \quad p_2 = 1 - p; \quad q_1 = q; \quad q_2 = 1 - q. \tag{3.1}$$

Тогда совместная смешанная стратегия обоих игроков может быть представлена следующим образом:

$$S_{AB} = (p, q),$$

а средние выигрыши игроков определяются по формулам

$$\begin{aligned} &c_A(p, q) = \\ &= a_{11}pq + a_{12}p(1 - q) + a_{21}(1 - p)q + a_{22}(1 - p)(1 - q); \\ &c_B(p, q) = \\ &= b_{11}pq + b_{12}p(1 - q) + b_{21}(1 - p)q + b_{22}(1 - p)(1 - q). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Сформулируем основное определение в смешанных стратегиях.

Будем считать, что смешанная стратегия $S^*_{AB} = (p^*, q^*)$ определяет ***равновесную ситуацию***, если для любых p и q, удовлетворяющих условиям

$$0 \leqslant p \leqslant 1; \quad 0 \leqslant q \leqslant 1,$$

одновременно выполняются неравенства

$$c_A(p, q^*) \leqslant c_A(p^*, q^*); \quad c_B(p^*, q) \leqslant c_B(p^*, q^*).$$

Эти неравенства означают, что ситуация, определяемая смешанной стратегией $S^*_{AB} = (p^*, q^*)$, является равновесной, если отклонение от нее одного из игроков при условии, что другой сохраняет свой выбор стратегий, не приводит к увеличению выигрыша первого.

Отсюда следует, что если существует равновесная ситуация (точка равновесия), то отклонение от нее каждому игроку в отдельности невыгодно.

Справедлива *теорема Нэша*: всякая биматричная игра имеет хотя бы одну точку равновесия в смешанных стратегиях.

Как следствие из теоремы можно показать: для того чтобы в биматричной игре 2 × 2, в которой

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

смешанная стратегия $S^*_{AB} = (p^*, q^*)$ определяла точку равновесия, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих неравенств:

$$\begin{aligned} &(p^* - 1)(Cq^* - E) \geqslant 0; \\ &p^*(Cq^* - E) \geqslant 0; \\ &(q^* - 1)(Dp^* - F) \geqslant 0; \\ &q^*(Dp^* - F) \geqslant 0; \\ &0 \leqslant p^* \leqslant 1; \\ &0 \leqslant q^* \leqslant 1, \end{aligned} \tag{*}$$

где
$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22};\ E = a_{22} - a_{12};$$
$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22};\ F = b_{22} - b_{21}.$$

Возвратимся к примеру 3.5 о «дилемме узников».

Пример 3.6. Найти в предыдущей задаче «дилеммы узников» оптимальные стратегии игроков и равновесную точку игры без согласования действий игроков.

Решение. В соответствии с матрицами выигрышей A и B, приведенными ранее, вычислим величины C, D, E, F:

$$C = -1 - (-9) - 0 + (-6) = 2;\ D = -1 - 0 - (-9) + (-6) = 2;$$
$$E = -6 - (-9) = 3;\ F = -6 - (-9) = 3.$$

Подставляя эти значения в систему (*), получим систему неравенств, определяющую точку равновесия:

$$\begin{aligned}&(p^* - 1)(2q^* - 3) \geqslant 0;\\ &p^*(2q^* - 3) \geqslant 0;\\ &(q^* - 1)(2p^* - 3) \geqslant 0;\\ &q^*(2p^* - 3) \geqslant 0;\\ &0 \leqslant p^* \leqslant 1;\\ &0 \leqslant q^* \leqslant 1.\end{aligned} \qquad (**)$$

Путем подстановки $p^* = 0$, $q^* = 0$ в полученную систему неравенств (**) нетрудно убедиться, что стратегия $S^*_{AB} = (0, 0)$ является решением системы неравенств, а следовательно, она является равновесной точкой рассматриваемой биматричной игры.

Других решений системы (**) нет, поскольку при

$$0 < p^* \leqslant 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant q^* \leqslant 1$$

левая часть второго неравенства отрицательна, а при

$$0 < q^* \leqslant 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant p^* \leqslant 1$$

левая часть четвертого неравенства отрицательна. Так как $p_1^* = p^* = 0$; $p_2^* = 1 - p^* =1$; $q_1^* = q^* = 0$; $q_2^* = 1 - q^* = 1$, то оптимальными смешанными стратегиями игроков являются $S_A^* = (0, 1)$; $S_B^* = (0, 1)$.

То есть решением игры является выбор с вероятностью 1 каждым узником второй чистой стратегии A_2 и B_2 — сознаться в совместном совершении преступления.

При этом выигрыш каждого узника в точке равновесия равен $c_A^* = c_B^* = -6$.

Очевидно, что если один из узников решит изменить свою стратегию и выберет первую чистую стратегию, то он выиграет −9, т.е. проиграет больше, чем в точке равновесия, если другой узник будет придерживаться равновесной стратегии. ■

3.5. Кооперативные игры

Пусть теперь в игре с ненулевой суммой игрокам разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии и договариваться о совместных действиях. Такая биматричная игра называется *кооперативной игрой.*

Пусть S — множество точек на координатной плоскости c_A, c_B определяет возможные выигрыши игроков (рис. 3.1). При этом S является выпуклым, замкнутым и ограниченным множеством.

Нанесем на эту координатную плоскость точку T, координаты которой равны максимальным выигрышам игроков, обеспеченным им без вступления в переговоры друг с другом.

Точку T часто называют *точкой угрозы.* В этой точке каждый из игроков, действуя в одиночку, не может увеличить свой выигрыш. Тогда эта точка является точкой равновесия биматричной игры.

Пусть точка равновесия является единственной. Тогда координатами точки угрозы T являются выигрыши игроков в точке равновесия c_A^* и c_B^*. В противном случае для нахождения точки угрозы потребовалась бы дополнительная информация.

Ясно, что наибольшие возможные выигрыши игроков находятся на верхней правой части границы множества S.

Эту часть границы (a, $в$) обычно называют *парето-оптимальным множеством*, а каждую точку на ней — *парето-оптимальной ситуацией.*

В любой такой ситуации игроки, даже действуя совместно, не могут увеличить выигрыш одного из них, не уменьшая выигрыша другого. Поэтому целью вступления игроков в пе-

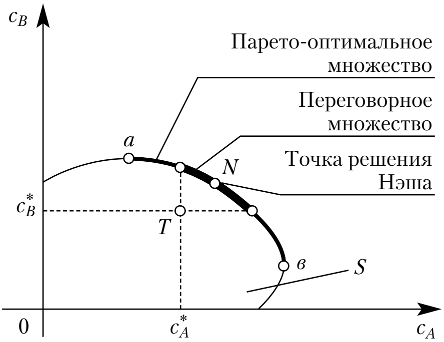


Рис. 3.1. **Область возможных выигрышей игроков**

реговоры должно быть достижение парето-оптимальной ситуации.

В этом случае есть смысл вести переговоры о достижении парето-оптимальной ситуации, только находящейся выше горизонтальной линии $c_B = c_B^*$ и правее вертикальной линии $c_A = c_A^*$, значения выигрышей c_A^* и c_B^* достигаются и при действиях в одиночку.

Поэтому часть парето-оптимального множества, содержащая такие ситуации, называется *переговорным множеством*, которое содержит точку решения N.

Точкой решения Нэша называется точка N, в которой достигается максимум произведения

$$N(p, q) = (c_A - c_A^*)(c_B - c_B^*) \to \max, \qquad (3.4)$$

где $(c_A - c_A^*)$ и $(c_B - c_B^*)$ — превышения выигрышей игроков над теми выигрышами, которые могут быть получены без вступления в переговоры.

Можно доказать, что если множество S выпукло, замкнуто и ограничено, то точка решения Нэша существует и является единственной.

Пример 3.7. В задаче «дилеммы узников» найти оптимальные стратегии игроков (точку решения Нэша) в случае их согласованных действий.

Решение. Для нахождения точки решения Нэша нужно найти значения вероятностей p и q, лежащих на отрезке [0, 1], при которых достигается наибольшее значение функции (3.4).

Для вычисления средних выражений $c_A(p, q)$ и $c_B(p, q)$ выпишем элементы матриц A и B из условия задачи

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти матрицы с матрицами (3.3), запишем

$$a_{11} = -1; \quad a_{12} = -9; \quad a_{21} = 0; \quad a_{22} = -6;$$
$$b_{11} = -1; \quad b_{12} = 0; \quad b_{21} = -9; \quad b_{22} = -6.$$

Подставляя эти значения в выражение (3.2), получим

$$c_A(p, q) = -pq - 9p(1 - q) - 6(1 - p)(1 - q) = \\ = -6 - 3p + 6q + 2pq;$$

$$c_B(p, q) = -pq - 9q(1 - q) - 6(1 - p)(1 - q) = \\ = -6 - 3q + 6p + 2pq.$$

Так как выигрыш каждого узника в единственной точке равновесия был определен в предыдущем примере и составлял $c_A^* = c_B^* = -6$, то в соответствии с формулой (3.4) получим

$$N(p, q) = (-3p + 6q + 2pq)(-3q + 6p + 2pq) = \\ = 45pq - 18(p^2 + q^2) + 6pq(p + q) + 4p^2q^2.$$

Можно показать, что функция $N(p, q)$ имеет максимальное значение, когда $p = q$. Таким образом, последнее выражение можно переписать в виде

$$N(p) = 9p^2 + 12p^3 + 4p^4.$$

Легко проверить, что эта функция является возрастающей на отрезке $[0, 1]$. Поэтому $N(p)$ достигает наибольшего значения при $p = 1$, а, следовательно, точкой решения Нэша является точка, в которой $p = 1$, $q = 1$.

В соответствии с принятыми обозначениями (3.1)

$$p_1 = p = 1;\ q_1 = q = 1.$$

Вероятности p_1 и q_1 соответствуют стратегиям A_1, B_1 соответственно.

Итак, в кооперативной игре «дилемма узников» обоим игрокам следует применять стратегии A_1 и B_1, т.е. не сознаваться в совместном совершении преступления.

Тогда выигрыш каждого из них будет равен –1, т.е. больше, чем выигрыш –6 в точке равновесия биматричной игры без согласования стратегий игроков. ■

3.6. Статистические игры. Принятие решения в условиях полной неопределенности

Игры, которые были рассмотрены выше, часто называют *стратегическими играми*. В их основе лежит предположение о том, что каждый игрок действует активно и стремится, по возможности, использовать свою оптимальную стратегию для получения наибольшего выигрыша.

Однако во многих практических ситуациях один из игроков оказывается нейтральным и не стремится извлечь выгоды. В качестве такого игрока часто выступает окружающая игрока среда или природа, т.е. совокупность внешних обстоятельств, в которых приходится принимать решение.

Природа не имеет злого умысла по отношению к человеку и не стремится нанести ему ущерб. Она действует и развивается в соответствии со своими законами. Однако во многих случаях человек не в полной мере знает эти законы. В такой ситуации неполной информации о законах природы существует возможность принятия ошибочных решений.

Игры, в которых одним противником является природа, а другим — человек, получили название *статистических игр*.

Обычно человека, участвующего в игре против природы, называют *статистиком*. Будем считать природу первым игроком A, а статистика — вторым игроком B.

Пусть имеется некоторое множество возможных состояний природы $П_1, П_2, ..., П_m$. Обозначим возможные решения (стратегии) статистика $B_1, B_2, ..., B_n$.

При выборе какой-то стратегии статистик может потерпеть убыток a_{ij}, зависящий как от выбранной им стратегии B_j, так и от состояния $П_i$, которое примет природа.

Пусть известны все значения a_{ij}. Тогда матрица игры, часто называемая *матрицей последствий* или *матрицей потерь*, может быть записана в двух вариантах.

1. В виде таблицы

П	B			
	B_1	B_2	...	B_n
$П_1$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
$П_2$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
$П_m$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

2. В виде обычной матрицы

$$Q = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Иногда при решении статистической игры используется *матрица рисков*. Элементы r_{ij} матрицы рисков определяются как разность между тем убытком, который статистик получит, выбирая среди всех стратегий стратегию B_j, и минимально возможным убытком при том же состоянии природы $П_i$:

$$r_{ij} = a_{ij} - \min_j a_{ij}. \quad (3.5)$$

Если неизвестно, с какими вероятностями природа принимает состояния $П_1, П_2, ..., П_m$, то говорят, что решение принимается в условиях *полной неопределенности*.

При этом для выбора оптимальной стратегии статистик может использовать несколько правил.

Правило Вальда. За оптимальную стратегию принимается такая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует минимальный проигрыш, т.е. стратегия, соответствующая верхней цене игры β,

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Правило Сэвиджа. Рекомендуется выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях, т.е. обеспечивается $\min_j \max_i r_{ij}$.

Правила Вальда и Сэвиджа ориентируют статистика на самые неблагоприятные состояния природы, т.е. эти правила выражают пессимистическую оценку ситуации.

Правило Гурвица. Это правило является правилом пессимизма-оптимизма. За оптимальную стратегию принимается та стратегия, для которой выполняется соотношение

$$\min_j \left(\lambda \max_i a_{ij} + (1 - \lambda) \min_i a_{ij} \right), \tag{3.6}$$

где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

При $\lambda = 0$ имеем критерий крайнего оптимизма, а при $\lambda = 1$ — критерий пессимизма Вальда.

При промежуточных значениях $0 < \lambda < 1$ имеем нечто среднее. При желании подстраховаться в данной ситуации и λ принимают близким к единице. В общем случае число λ выбирают исходя из опыта.

Пример 3.8. Установленное на предприятии сложное и дорогое оборудование после пяти лет работы может оказаться в одном из трех состояний:

$П_1$ — оборудование вполне работоспособно и требует лишь небольшого текущего ремонта;

$П_2$ — некоторые детали значительно износились и требуют серьезного ремонта или замены;

$П_3$ — основные детали износились настолько, что дальнейшая эксплуатация оборудования невозможна.

Для предприятия возможны три различных способа действия:

B_1 — оставить оборудование в работе еще на год, проведя незначительный ремонт своими силами;

B_2 — провести капитальный ремонт оборудования с вызовом специальной бригады ремонтников;

B_3 — заменить оборудование новым.

Потери, которые несет предприятие при различных способах действия, приведены в таблице последствий в относительных денежных единицах.

В потери входят стоимость ремонта или замены оборудования, а также убытки, связанные с ухудшением качества продукции и с простоями, вызванными неисправным оборудованием.

П$_i$	B_j		
	B_1	B_2	B_3
П$_1$	1	3	5
П$_2$	5	2	4
П$_3$	7	6	3

Требуется найти оптимальный способ действий для предприятия.

Решение.

Правило Вальда. Найдем в каждом столбце таблицы наибольшее значение, а из всех наибольших выберем наименьшее

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Формула выбора стратегии	B_1	B_2	B_3	Потери при оптимальной стратегии
$\max\limits_i a_{ij}$	7	6	5	$\beta = 5$

Стратегия, соответствующая $\beta = 5$, будет оптимальным способом действий предприятия по правилу Вальда. Отсюда следует, что оптимальной стратегией является стратегия B_3.

Правило Сэвиджа. На основе исходной матрицы последствий составим матрицу рисков. Для этого подготовим исходные данные.

Для первой строки матрицы (таблицы) последствий $\min\limits_j a_{1j} = 1$. Тогда первая строка матрицы рисков в соответствии с формулой (3.5) будет иметь значения $r_{1j} = \{0; 2; 4\}$.

Для второй строки матрицы последствий $\min\limits_j a_{2j} = 2$, для третьей — $\min\limits_j a_{3j} = 3$. Тогда во второй строке матрицы рисков будут значения $r_{2j} = \{3; 0; 2\}$, а в третьей — $r_{3j} = \{4; 3; 0\}$.

По результатам расчетов составим матрицу рисков в виде таблицы

П$_i$	B_j		
	B_1	B_2	B_3
П$_1$	0	2	4
П$_2$	3	0	5
П$_3$	4	3	0

Найдем в каждом столбце таблицы наибольшее значение, а из всех наибольших выберем наименьшее $\min\limits_j \max\limits_i r_{ij}$. Стратегия, соответствующая этому значению, будет оптимальным способом действий предприятия по правилу Сэвиджа.

Формула выбора стратегии	B_1	B_2	B_3	Риск при оптимальной стратегии
$\max\limits_i r_{ij}$	4	3	5	$\min\limits_j \max\limits_i r_{ij} = 3$

Отсюда следует, что оптимальной стратегией является стратегия B_2.

Правило Гурвица. Рассмотрим оптимистический ($\lambda = 0$) и оптимистическо-пессимистический ($\lambda = 0{,}5$) случаи. При $\lambda = 1$ правило Гурвица совпадает с правилом Вальда.

Пусть $\lambda = 0$. По формуле (3.6) запишем

$$\min_j \left[0 \cdot \max_i a_{ij} + (1 - 0) \min_i a_{ij} \right] = \min_j \min_i a_{ij}.$$

В соответствии с полученной записью в исходной матрице последствий в каждом столбце найдем наименьшее значение и из них выберем наименьшее. Данное обстоятельство оформим в виде таблицы

Формула выбора стратегии	B_1	B_2	B_3	Потери при оптимальной стратегии
$\min\limits_i a_{ij}$	1	2	3	$\min\limits_j \min\limits_i r_{ij} = 1$

Отсюда очевидно, что оптимальной стратегией является стратегия B_1.

Пусть $\lambda = 0{,}5$. Тогда по формуле (3.6) получим

$$\min_j \left(0{,}5 \max_i a_{ij} + 0{,}5 \min_i a_{ij} \right).$$

Из исходной матрицы последствий вычисляем

Формула выбора стратегии	B_1	B_2	B_3
$\max\limits_i a_{ij}$	7	6	5
$\min\limits_i a_{ij}$	1	2	3
$0{,}5 \max\limits_i a_{ij} + 0{,}5 \min\limits_j a_{ij}$	4	4	4

Из последней строки таблицы очевидно, что в этом случае все стратегии предприятия равнозначны. ■

3.7. Принятие решения в условиях частичной неопределенности. Критерий Байеса

В статистической игре из прошлого опыта может быть известно, как часто природа находится в состоянии Π_i. То есть известно распределение вероятностей

$$p(\Pi_i) = (p_1 , p_2 , \ldots , p_m).$$

Такая запись означает, что природа принимает состояние Π_1 с вероятностью p_1 , состояние Π_2 — с вероятностью p_2 и т.д. В этом случае говорят, что решение принимается в условиях *частичной неопределенности*.

Средние потери в том случае, если статистик использует чистую стратегию B_j, определяются по обычной формуле математического ожидания

$$R_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i.$$

Наилучшей стратегией для статистика по критерию Байеса будет стратегия B_j^*, при которой средние потери R_j минимальны.

Запишем

$$R^* = \min_{j=1,\ldots,n} R_j = \min_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i.$$

Пример 3.9. Пусть в предыдущей задаче о замене оборудования известны вероятности p_i состояний Π_i. Определить, какую стратегию выберет статистик.

Π_i	p_i	B_j		
		B_1	B_2	B_3
Π_1	0,2	1	3	5
Π_2	0,5	5	2	4
Π_3	0,3	7	6	3

Решение. Вычислим средние потери статистика при использовании им стратегий B_1, B_2, B_3:

$$R_1 = 1 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}5 + 7 \cdot 0{,}3 = 4{,}8;$$
$$R_2 = 3 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 6 \cdot 0{,}3 = 3{,}4;$$
$$R_3 = 5 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 = 3{,}9.$$

То есть по критерию Байеса статистик должен выбрать стратегию B_2 . ■

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение основным понятиям теории игр: игра; игроки; правила игры; парная игра; игра с нулевой суммой; ход; стратегия; решение игры.

2. Что такое матрица игры (платежная матрица, матрица потерь)?

3. Что называют нижней и верхней ценой игры? Как их найти?

4. Сформулируйте принцип минимакса.

5. Охарактеризуйте игру с седловой точкой.

6. Что называют смешанной стратегией игры?

7. Сформулируйте основную теорему теории игр — теорему Неймана.

8. Что называется функцией потерь?

9. Запишите выражения для нахождения оптимальных смешанных стратегий в парной игре 2 × 2.

10. Какие игры называются биматричными играми; кооперативными играми?

11. Сформулируйте теорему Нэша.

12. Объясните решение биматричной и кооперативной игры на примере «дилеммы узников».

13. Какие игры называются статистическими играми?

14. Сформулируйте правила Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

15. Сформулируйте критерий Байеса для нахождения наилучшей чистой стратегии в условиях частичной неопределенности.

16. Приведите примеры статистических игр.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти верхнюю цену игры $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти верхнюю цену игры $Q = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Найти верхнюю цену игры $Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Найти нижнюю цену игры $Q = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Найти оптимальную смешанную стратегию S_B^* игрока B в матричной игре

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. Найти оптимальную смешанную стратегию S_A^* игрока A в матричной игре

$$Q = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

7. Найти цену матричной игры $Q = \begin{pmatrix} 24 & -11 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$.

8. Оптимальной стратегией в статистической игре, потери в которой представлены в таблице, по критерию Байеса является стратегия...

$П_i$	p_i	B_j			
		B_1	B_2	B_3	B_4
$П_1$	0,4	3	1	4	6
$П_2$	0,3	5	3	1	2
$П_3$	0,2	2	7	5	4
$П_4$	0,1	1	2	2	1

Глава 4
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

4.1. Основные понятия. Классификация систем массового обслуживания

Системами массового обслуживания (СМО) называются системы, предназначенные для многоразового использования при решении однотипных задач.

Примерами СМО являются магазины, ателье, телефонные станции, билетные кассы, ремонтные мастерские и т.д.

Каждая СМО может состоять из одной или нескольких обслуживающих единиц, которые называются *каналами обслуживания*.

По числу каналов СМО подразделяются на *одноканальные* и *многоканальные*.

Каждое обращение клиента в СМО будем называть *заявкой*. Как правило, заявки поступают в СМО случайным образом, формируя случайный поток заявок.

Продолжительность обслуживания заявки в канале СМО также носит случайный характер. В конечном счете СМО по времени оказывается загруженной неравномерно. В периоды времени, когда мало заявок, СМО работает с недогрузкой или простаивает.

Если же поступает большое число заявок, то часть из них либо покидают СМО необслуженными, либо становятся в очередь. По этому признаку СМО подразделяются на два основных класса:

1) ***СМО с отказами***. В такой СМО заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает систему;

2) ***СМО с ожиданием*** (с очередью). В такой СМО в случае занятости всех каналов заявка становится в очередь на

обслуживание. При этом способ отбора для обслуживания заявок из очереди называется *дисциплиной обслуживания*.

Различают следующие ***виды дисциплин обслуживания*** заявок:

- первой пришла — первой обслужена;
- последней пришла — первой обслужена;
- обслуживание с приоритетом — в первую очередь обслуживаются наиболее важные заявки;
- обслуживание с ограниченной длиной очереди;
- обслуживание с ограниченным временем пребывания в очереди и т.д.

Показатели эффективности функционирования СМО характеризуют ее способность справляться с потоком заявок.

К числу показателей эффективности СМО с отказами относятся:

- A — абсолютная пропускная способность — среднее число заявок, обслуживаемых за единицу времени;
- Q — относительная пропускная способность — отношение абсолютной пропускной способности к числу заявок, приходящих в единицу времени;
- $P_{\text{отк}}$ — вероятность отказа в обслуживании;
- S_k — среднее число занятых каналов.

В случае СМО с ожиданием к показателям эффективности дополнительно относятся:

- $L_{\text{сист}}$ — среднее число заявок в системе;
- $L_{\text{оч}}$ — среднее число заявок в очереди;
- $T_{\text{сист}}$ — среднее время ожидания обслуживания.

4.2. Понятие марковского случайного процесса. Потоки событий

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем работы. Это означает, что состояние СМО изменяется скачкообразно в случайный момент времени работы (например, при поступлении новой заявки или при окончании обслуживания заявки).

Случайный процесс называется *марковским* или *процессом без последействия*, если для любого момента времени вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от состояния рассматриваемой системы в данный момент и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

Например, марковским процессом можно считать процесс игры в шахматы: при определенной позиции (положении фигур на доске) вероятность выигрыша одного из игроков зависит только от этой позиции и не зависит от того, посредством каких предыдущих ходов эта позиция получилась.

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени.

Интенсивностью потока событий называется среднее число событий, происходящих в единицу времени.

Стационарным потоком событий называется поток, вероятностные характеристики которого не зависят от времени. В частности, интенсивность стационарного потока является величиной постоянной.

Потоком событий без последействия называется поток, число событий которого, попавших на заданный временной интервал, не зависит от числа событий, попавших на другие временны́е интервалы.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на малый промежуток времени Δt двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Поток событий называется *простейшим*, если он одновременно стационарен, ординарен и без последействия.

Название «простейший» объясняется тем, что СМО с простейшими потоками имеет наиболее простое математическое описание.

Можно показать, что для простейшего потока число m событий, попадающих на произвольный интервал времени $(0, t)$, распределено по закону Пуассона

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m \cdot e^{-\lambda t}}{m!}.$$

В частности, вероятность того, что за время t не произойдет ни одного события ($m = 0$), равна

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Обозначим через T случайную величину, равную интервалу времени между двумя последующими событиями простейшего потока.

Очевидно, что вероятность того, что T будет не меньше t, равна вероятности, что за время t не произойдет ни одного события, т.е.

$$P(T \geqslant t) = P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Вероятность $P(T < t)$, с одной стороны, представляет собой вероятность противоположного события по отношению к вышеуказанному, а с другой стороны, она — по определению функция распределения $F(t)$ для случайной величины T.

Таким образом,

$$F(t) = P(T < t) = 1 - P(T \geqslant t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Отсюда следует, что плотность распределения случайной величины T, равная производной от $F(t)$, определяется по показательному закону

$$p(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

То есть случайная величина T распределена по показательному закону с параметром λ и имеет математическое ожидание $MT = \dfrac{1}{\lambda}$ и дисперсию $DT = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Найдем вероятность попадания на малый временной интервал Δt хотя бы одного события простейшего потока. Эта вероятность равна вероятности того, что интервал между двумя последующими событиями в потоке будет меньше, чем Δt,

$$P(T < \Delta t) = F(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda\Delta t} \approx \lambda\Delta t.$$

Последнее приближенное равенство получаем путем разложения функции $e^{-\lambda\Delta t}$ в ряд Маклорена и отбрасыванием членов второго порядка и выше

$$e^{-\lambda\Delta t} = 1 + (-\lambda\Delta t) + \frac{(-\lambda\Delta t)^2}{2!} + \ldots \approx 1 - \lambda\Delta t.$$

Заметим, что если переход системы из одного состояния в другое происходит скачком, а количество состояний системы (конечное или бесконечное) можно пронумеровать, то такая система называется *системой дискретного типа*.

Если в такой системе количество возможных состояний счетно, то сумма вероятностей нахождения системы в одном из состояний

$$\sum_k p_k(t) = 1.$$

Совокупность вероятностей $p_k(t)$ для каждого момента времени характеризует случайный процесс функционирования системы.

Случайные процессы со счетным множеством состояний бывают двух типов: с ***дискретным*** или ***непрерывным временем***.

Если переходы системы из одного состояния в другое могут происходить только в строго определенные моменты времени, то случайный процесс будет процессом с дискретным временем, а если переход возможен в любой момент времени, то процесс будет процессом с непрерывным временем.

Поскольку заявки на СМО могут поступать в любой момент времени, то большинство реальных СМО характеризуются процессом с непрерывным временем.

Пример 4.1. В бюро обслуживания в среднем поступает 12 заявок в час. Считая поток заказов простейшим, определить вероятность того, что:

а) за 1 мин не поступит ни одного заказа;

б) за 10 мин поступит не более трех заказов.

Решение.

а) Сначала найдем плотность (интенсивность) потока, выразив ее в количестве заявок в минуту.

Очевидно, эта величина равна $\lambda = \frac{12}{60} = 0{,}2$ заявки в мин.

Далее находим вероятность того, что за время $t = 1$ мин не поступит ни одной заявки, по формуле

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda \Delta t} = e^{-0{,}2} \approx 0{,}819.$$

б) Вероятность того, что за 10 мин поступит не более трех заказов, будет складываться из вероятностей того, что не поступит ни одного заказа, поступит один, два или три заказа.

$$P(m \leqslant 3) = \sum_{m=0}^{3} \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} =$$

$$= e^{-2} + 2e^{-2} + \frac{4}{2}e^{-2} + \frac{8}{6}e^{-2} = \frac{19}{3}e^{-2} = 0{,}8571. \blacksquare$$

Пример 4.2. В ресторан прибывает в среднем 20 посетителей в час. Считая поток посетителей простейшим и зная, что ресторан открывается в 11.00, определить:

а) вероятность того, что в 11.12 в ресторане будет 20 посетителей при условии, что в 11.07 их было 18;

б) вероятность того, что между 11.28 и 11.30 в ресторане окажется новый посетитель, если известно, что предшествующий посетитель прибыл в 11.25.

Решение.

а) Для ответа на первый вопрос надо найти вероятность того, что в промежуток от 11.07 до 11.12 ($t = 5$ мин) придут два посетителя.

При этом известна интенсивность потока посетителей: $\lambda = 20/60 = 1/3$ посетителя в минуту. Конечно, данная величина носит условный характер, так как посетители не могут приходить по частям.

Искомая вероятность

$$P_2(5) = \frac{\left(\frac{1}{3}\cdot 5\right)^2}{2!} e^{-\frac{1}{3}\cdot 5} \approx 0{,}2623.$$

б) Перейдем ко второму вопросу. Неизвестно, сколько именно новых посетителей будет в промежутке от 11.28 до 11.30, главное, чтобы был хоть один. Эта вероятность равна

$$1 - P_0(2) = 1 - e^{-\frac{2}{3}} \approx 0{,}4866,$$

где $P_0(2)$ — вероятность того, что в этом промежутке не будет ни одного посетителя. ■

4.3. Уравнения Колмогорова. Предельные вероятности состояний

При анализе случайных процессов с дискретными состояниями используют *граф состояний*, в котором каждое состояние $S_0, S_1, ..., S_n$ исследуемой системы изображают в виде прямоугольника, а переход из состояния S_i в состояние S_j под воздействием простейших потоков событий показывают дугой (стрелкой).

Если около дуг записаны значения интенсивности потоков λ_{ij}, то граф состояния называют *размеченным*.

Пусть двухканальная СМО может находиться в одном из трех состояний: S_0 — оба канала свободны; S_1 — один из каналов занят обслуживанием, а другой свободен; S_2 — оба канала заняты обслуживанием.

Переходы системы из состояния S_0 в состояние S_1 и из S_1 в S_2 происходят под воздействием простейших потоков заявок с интенсивностями λ_{01} и λ_{12} соответственно, а из S_1 в S_0 и из S_2 в S_1 — под воздействием потоков обслуживания с интенсивностями λ_{01} и λ_{12}.

Тогда размеченный граф состояний СМО имеет вид, изображенный на рис. 4.1.

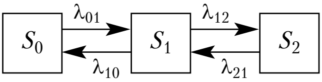


Рис. 4.1. **Размеченный граф состояний двухканальной СМО**

Пребывание СМО в том или ином состоянии носит вероятностный характер.

Обозначим $p_i(t)$ вероятность того, что в момент времени t СМО находится в состоянии S_i.

Поскольку нахождение СМО в состояниях S_0, S_1 и S_2 образует полную группу событий, то выполняется условие нормировки

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1.$$

Зададим малое приращение времени Δt и найдем вероятность того, что СМО в момент времени $t + \Delta t$ будет находиться в состоянии S_1.

Это достигается разными вариантами.

- В момент времени t СМО находилась в состоянии S_1. Она могла быть выведена из этого состояния простейшим потоком с суммарной интенсивностью $\lambda_{10} + \lambda_{12}$. Как показано выше, вероятность этого приближенно равна

$$(\lambda_{10} + \lambda_{12})\Delta t.$$

Тогда вероятность невыхода из S_1 равна

$$1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})\Delta t.$$

Согласно теореме умножения вероятностей вероятность того, что СМО останется в состоянии S_1 в момент $t + \Delta t$, приближенно равна

$$p_1(t)[1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})\Delta t].$$

- В момент времени t СМО находилась в состоянии S_0. Переход СМО из состояния S_0 в S_1 происходит под воздействием потока с интенсивностью λ_{01} с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{01}\Delta t$.

Тогда вероятность того, что при этом СМО будет находиться в состоянии S_1 в момент $t + \Delta t$, в этом варианте приближенно равна $p_0(t)\lambda_{01}\Delta t$.

- В момент времени t СМО находилась в состоянии S_2. Переход СМО из состояния S_2 в S_1 происходит под воздействием потока с интенсивностью λ_{21} с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{21}\Delta t$.

Тогда вероятность того, что при этом СМО будет находиться в состоянии S_1 в момент $t + \Delta t$, в этом варианте приближенно равна $p_2(t)\lambda_{21}\Delta t$.

Применяя теорему сложения вероятностей для всех рассмотренных вариантов состояний, можно записать

$$p_1(t + \Delta t) \approx p_1(t)[1 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})\Delta t] + p_0(t)\lambda_{01}\Delta t + p_2(t)\lambda_{21}\Delta t.$$

Раскрыв скобки, перенеся $p_1(t)$ в правую часть приближенного равенства и поделив уравнение на t, получим

$$\frac{p_1(t+\Delta t)-p_1(t)}{\Delta t} \approx p_0(t)\lambda_{01}+p_2(t)\lambda_{21}-p_1(t)(\lambda_{10}+\lambda_{12}).$$

При переходе к пределу при $\Delta t \to 0$ приближенные равенства перейдут в точные и получится дифференциальное уравнение

$$\frac{dp_1(t)}{dt}=p_0(t)\lambda_{01}+p_2(t)\lambda_{21}-p_1(t)(\lambda_{10}+\lambda_{12}).$$

Проводя аналогичные рассуждения для других состояний СМО, можно получить систему дифференциальных уравнений, которые называются *уравнениями Колмогорова.*

При записи этих уравнений опустим зависимость вероятностей от времени, которая при этом подразумевается,

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt}=p_1\lambda_{10}-p_0\lambda_{01}, \\ \dfrac{dp_1}{dt}=p_0\lambda_{01}+p_2\lambda_{21}-p_1(\lambda_{10}+\lambda_{12}), \\ \dfrac{dp_2}{dt}=p_1\lambda_{12}-p_2\lambda_{21}. \end{cases} \tag{4.1}$$

В системе уравнений (4.1) для состояния S_0 записана первая формула, для S_1 — вторая и для S_2 — третья.

В общем случае система дифференциальных уравнений Колмогорова может быть построена по следующему алгоритму:

- в левой части уравнения записывается производная по времени вероятности i-го состояния;
- в правой части уравнения записывают сумму произведений вероятностей всех состояний, из которых идут стрелки в i-е состояние, на интенсивности соответствующих потоков минус произведение вероятности i-го состояния на суммарную интенсивность потоков, выходящих из i-го состояния.

Такое дифференциальное уравнение записывается для каждого состояния.

При задании начальных условий можно решить систему дифференциальных уравнений Колмогорова и найти изменение во времени вероятностей состояний $p_i(t)$.

Можно показать, что при $t \to \infty$ эти вероятности независимо от начальных условий стремятся к некоторым предельным значениям, которые называются *предельными* или *финальными вероятностями* СМО.

В этом случае $p_0(t) \to p_0, p_1(t) \to p_1, p_2(t) \to p_2$.

Смысл предельных вероятностей состоит в том, что они показывают среднее относительное время нахождения СМО в данном состоянии.

Так как предельные вероятности не изменяются во времени, то, заменяя в уравнениях Колмогорова (4.1) производные нулями, получим систему алгебраических уравнений для определения предельных вероятностей.

Запишем

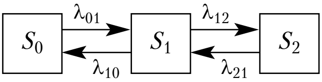
$$\begin{cases} p_0\lambda_{01} = p_1\lambda_{10}, \\ p_1(\lambda_{10} + \lambda_{12}) = p_0\lambda_{01} + p_2\lambda_{21}, \\ p_2\lambda_{21} = p_1\lambda_{12}. \end{cases} \tag{4.2}$$

В системе уравнений (4.2) обычно при решении второе уравнение заменяют условием нормировки

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1.$$

Систему таких уравнений можно составить по размеченному графу. Слева в уравнениях стоит предельная вероятность данного состояния, умноженная на суммарную интенсивность исходящих из данного состояния потоков, а справа — сумма вероятностей всех состояний, которые непосредственно могут перейти в данное состояние, умноженное на интенсивности входящих потоков.

Пример 4.3. Расчетный узел в отделе игрушек детского универмага состоит из двух кассовых аппаратов. Размеченный граф состояний такой СМО имеет вид



Найти относительное время пребывания СМО в состояниях: S_0 — обе кассы свободны; S_1 — одна касса свободна, а другая занята; S_2 — обе кассы заняты, если $\lambda_{01} = 60$; $\lambda_{12} = 48$; $\lambda_{10} = \lambda_{21} = 36$. Здесь размерность интенсивности потоков — покупатели/ч.

Решение. Относительное время пребывания СМО в каждом состоянии равно предельным вероятностям состояний. Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} p_0\lambda_{01} = p_1\lambda_{10}, \\ p_2\lambda_{21} = p_1\lambda_{12}, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

При составлении этой системы уравнений в системе (4.2) для предельных вероятностей исключаем второе уравнение как самое сложное и добавляем условие нормировки. Подставляя значения интенсивностей потоков, получаем

$$\begin{cases} 60p_{01} = 36p_1, \\ 36p_2 = 48p_1, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{3}{5}p_1, \\ p_2 = \dfrac{4}{3}p_1, \\ \dfrac{3}{5}p_1 + p_1 + \dfrac{4}{3}p_1 = 1. \end{cases}$$

В итоге находим

$$p_0 = \frac{9}{44} \approx 0{,}204; \quad p_1 = \frac{15}{44} \approx 0{,}341; \quad p_2 = \frac{20}{44} \approx 0{,}455.$$

Из полученных результатов можно сделать вывод, что 20,4% рабочего времени обе кассы свободны, 34,1% времени занята одна касса и 45,5% времени заняты обе кассы. ■

4.4. Процесс гибели и размножения

В теории массового обслуживания широкое распространение имеет специальный класс случайных процессов — *процесс гибели и размножения*. Название этого процесса связано с биологией, где этот процесс представляет собой математическую модель численности биологических видов.

Рассматривается многоканальная СМО, которая содержит n каналов и пребывает в состояниях:

S_0 — все каналы свободны;

S_1 — один канал занят;

S_2 — два канала заняты и т.д.

Переход из одного состояния в другое происходит с соответствующими интенсивностями, как указано для n возможных состояний системы на размеченном графе рис. 4.2.

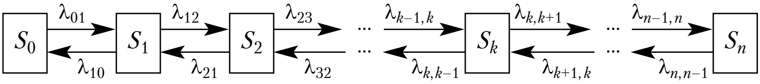


Рис. 4.2. **Размеченный граф состояний процесса гибели и размножения**

Переходы в рассматриваемой системе могут осуществляться из любого состояния только в состояния с соседними номерами, т.е. из состояния S_k возможны переходы только в состояние S_{k-1} или в состояние S_{k+1}.

Предположим, что все потоки событий, переводящие систему по стрелкам графа, являются простейшими. Составим и решим алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний.

Согласно правилу составления таких уравнений имеем:

- для состояния S_0: $\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1$;
- для состояния S_1: $(\lambda_{12} + \lambda_{10})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2$;
- с учетом первого равенства после раскрытия скобок слагаемые $\lambda_{01}p_0$ и $\lambda_{10}p_1$ взаимно уничтожаются, и уравнение для S_2 принимает вид $\lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2$.

Записывая аналогично уравнения для предельных вероятностей других состояний, можно получить следующую систему:

$$\begin{cases} \lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1, \\ \lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2, \\ \qquad \ldots \\ \lambda_{k-1,k}p_{k-1} = \lambda_{k,k-1}p_k, \\ \qquad \ldots \\ \lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n-1}p_n, \end{cases}$$

к которой добавляется условие нормировки

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1.$$

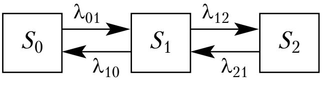
Решая полученную систему уравнений, можно получить

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}; \qquad (4.3)$$

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0; \quad p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0; \quad \ldots \quad p_n = \frac{\lambda_{n-1,n}\ldots\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1}\ldots\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0.$$

Пример 4.4. Решить предыдущий пример, используя теорию процесса гибели и размножения.

Решение. В условии предыдущего примера размеченный граф состояний имеет вид



Подставляя данные в формулы (4.3), получаем

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{60}{36} + \frac{48 \cdot 60}{36 \cdot 36}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{5}{3} + \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 3}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{35}{9}\right)^{-1} = \left(\frac{44}{9}\right)^{-1} = \frac{9}{44} \approx 0{,}204;$$

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0 = \frac{60}{36} \cdot \frac{9}{44} = \frac{15}{44} \approx 0{,}341;$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0 = \frac{48}{36} \cdot \frac{60}{36} \cdot \frac{9}{44} = \frac{20}{44} \approx 0{,}455.$$

Выводы относительно этого примера аналогичны предыдущему. ■

4.5. Системы массового обслуживания с отказами

Пусть имеется ***одноканальная*** СМО с отказами, в которую поступает поток заявок с интенсивностью λ. Заявки обслуживаются каналом СМО с некоторой интенсивностью μ.

Процесс обслуживания образует поток обслуженных заявок.

Здесь и далее будем предполагать, что все потоки в СМО простейшие. Если заявка поступает в момент, когда единственный канал занят, то она получает отказ и в дальнейшей работе СМО не участвует.

Требуется определить предельные вероятности состояний такой СМО и показатели ее эффективности.

СМО имеет два состояния: S_0 — канал свободен и S_1 — канал занят (рис. 4.3).

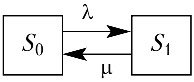


Рис. 4.3. **Размеченный граф состояний одноканальной СМО с отказами**

Система алгебраических уравнений для предельных вероятностей состояний такой СМО имеет вид

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1, \\ \mu p_1 = \lambda p_0, \end{cases}$$

т.е., по существу, имеем одно уравнение.

Добавляя к нему условие нормировки $p_0 + p_1 = 1$, найдем предельные вероятности состояний

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

которые показывают среднее относительное время пребывания СМО в соответствующих состояниях.

Вычислим ***показатели эффективности*** функционирования одноканального СМО с отказами:

- очевидно, что вероятность отказа $P_{\text{отк}}$ равна относительному времени, в течение которого канал занят, т.е.

$$P_{\text{отк}} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu};$$

- относительная пропускная способность Q представляет собой вероятность, что заявка будет обслужена, т.е.

$$Q = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu};$$

- абсолютную пропускную способность СМО найдем, умножив Q на интенсивность потока заявок λ,

$$A = Q\lambda = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

Рассмотрим теперь ***многоканальную*** СМО с отказами. Пусть в СМО имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.

Поток обслуживается одним каналом с интенсивностью μ, двумя каналами — 2μ, тремя — 3μ и т.д.

Обозначим состояния СМО $S_0, S_1, S_2, \dots S_k, \dots, S_n$, где S_k — состояние, когда в ней находится k заявок, т.е. k каналов заняты.

Граф состояний СМО в этом случае (он соответствует процессу гибели и размножения) будет иметь вид, изображенный на рис. 4.4.

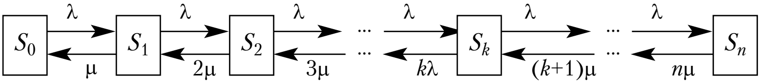


Рис. 4.4. **Размеченный граф состояний многоканальной СМО с отказами**

Из рис. 4.4 очевидно, что поток заявок последовательно переводит систему из левого состояния в соседнее правое с одной и той же интенсивностью λ. Интенсивность потока обслуживания зависит от состояния.

Если СМО находится в состоянии S_2 (заняты два канала), то она может перейти в состояние S_1, когда закончат обслуживание либо первый, либо второй занятый канал. Следовательно, суммарная интенсивность потока обслуживания будет 2μ и т.д.

В соответствии с графом, изображенным на рис. 4.4, пропускную способность одного канала обозначим $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$ — двух каналов, $\rho = \frac{\lambda}{3\mu}$ — трех и т.д.

Тогда по аналогии с формулами (4.3) нетрудно получить предельные вероятности состояний для рассматриваемой СМО:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1};$$
$$p_1 = \rho p_0; \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0; \quad \ldots \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0; \quad \ldots \qquad (4.4)$$

Полученные формулы предельных вероятностей многоканальной СМО с отказами называются *формулами Эрланга.*

Запишем ***основные показатели эффективности*** функционирования многоканальной СМО с отказами:

- вероятность отказа СМО — предельная вероятность того, что все n каналов заняты, т.е.

$$P_{\text{отк}} = \frac{\rho^n}{n!} p_0;$$

- относительная пропускная способность — вероятность того, что заявка будет обслужена,

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0; \qquad (4.5)$$

- абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right);$$

- среднее число занятых каналов $\bar{k}$ — математическое ожидание числа занятых каналов, которое определяется по известной формуле математического ожидания

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i,$$

где p_i — вероятность того, что i каналов будут заняты; k_i — количество занятых каналов.

Величину $\bar{k}$ можно найти проще. Так как каждый занятый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени, то

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right).$$

Пример 4.5. Торговая фирма выполняет заказы на приобретение товаров по телефону. В настоящее время в офисе фирмы установлен один телефон. Интенсивность входящего потока заявок составляет 30 заявок/ч. Длительность оформления заказа в среднем составляет 5 мин.

Определить показатели эффективности функционирования такой СМО.

Сколько телефонов нужно поставить в офисе, чтобы относительная пропускная способность СМО была не менее 0,75?

Решение. При интенсивности потока заявок = 30 заявок/ч время обслуживания (оформление заказа) составляет $T = 5\ \frac{\text{мин}}{\text{заявка}}$, количество каналов (телефонов) $n = 1$.

Приведем к одинаковой размерности интенсивность входящего потока и интенсивность обслуживания. Так как интенсивность потока обслуживания $\mu = \frac{1}{T}$, то

$$\mu = \frac{60\ \text{мин/ч}}{5\ \text{мин/заявка}} = 12\ \text{заявок/ч}.$$

Тогда показатели эффективности:

- вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{30}{30 + 12} = \frac{30}{42} \approx 0{,}714;$$

- относительная пропускная способность

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{12}{30 + 12} = \frac{12}{42} \approx 0{,}286;$$

- абсолютная пропускная способность

$$A = Q\lambda = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} = \frac{30 \cdot 12}{30 + 12} = \frac{360}{42} \approx 8{,}57\ \text{заявки/ч}.$$

Чтобы найти, при каком минимальном количестве телефонов относительная пропускная способность будет не менее 0,75, будем постепенно увеличивать число телефонов в офисе и по формулам (4.4) определим относительную пропускную способность.

Предварительно вычислим

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{30}{12} = 2{,}5.$$

1. Пусть в фирме установлено два телефона. Тогда количество каналов $n = 2$. Вероятность, что все телефоны свободны,

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + 2{,}5 + \frac{2{,}5^2}{2!}} = \frac{1}{6{,}625} \approx 0{,}151.$$

Тогда относительная пропускная способность

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^2}{2!}p_0 = 1 - \frac{2{,}5^2}{2!}\cdot 0{,}151 = 1 - 0{,}491 = 0{,}509.$$

Видно, что величина Q значительно меньше требуемого значения 0,75 по условию задачи. Добавим еще один телефон. Тогда производим все вычисления аналогично.

2. $n = 3$,

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + 2{,}5 + \frac{2{,}5^2}{2!} + \frac{2{,}5^3}{3!}} = \frac{1}{9{,}229} \approx 0{,}108;$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^3}{3!}p_0 = 1 - \frac{2{,}5^3}{3!}\cdot 0{,}108 = 1 - 0{,}281 = 0{,}719.$$

3. $n = 4$,

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + 2{,}5 + \frac{2{,}5^2}{2!} + \frac{2{,}5^3}{3!} + \frac{2{,}5^4}{4!}} =$$

$$= \frac{1}{10{,}857} \approx 0{,}092;$$

$$Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^4}{4!}p_0 = 1 - \frac{2{,}5^4}{4!}\cdot 0{,}092 = 1 - 0{,}150 = 0{,}850.$$

Из последнего решения следует: чтобы относительная пропускная способность СМО была не менее 0,75, в офисе должно быть не менее четырех телефонов. ■

4.6. Системы массового обслуживания с ожиданием

Пусть имеется одноканальная СМО с неограниченной очередью (например, телефон-автомат с одной будкой). То есть на СМО не наложены никакие ограничения ни по длине очереди, ни по времени ожидания.

Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность λ. Поскольку обслуживание ведет один канал, то обслуживание заявок производится с одинаковой интенсивностью для всех состояний.

Необходимо найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности СМО.

Система может находиться в одном из состояний S_0, S_1, S_2, ..., S_k, ... по числу заявок, находящихся в СМО:

S_0 — канал свободен;

S_1 — канал занят, обслуживает заявку, очереди нет;

S_2 — канал занят, в очереди одна заявка;

...

S_k — канал занят, в очереди $(k - 1)$ заявка;

...

Размеченный граф состояний СМО имеет вид, изображенный на рис. 4.5.

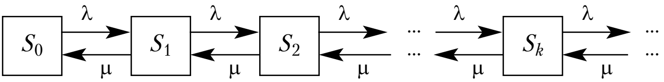


Рис. 4.5. **Одноканальная СМО с ожиданием**

Это процесс гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний. Для такого процесса доказано, что если среднее число приходящих заявок в единицу времени меньше среднего числа обслуживаемых заявок

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1,$$

то предельные вероятности существуют.

Если $\rho \geqslant 1$, то очередь растет до бесконечности.

Для определения предельных вероятностей состояний можно воспользоваться формулами (4.3) для процесса гибели и размножения (хотя они были получены для случая конечного числа состояний системы, ими можно воспользоваться и в данном случае).

Тогда для случая одного канала $n = 1$ в соответствии с формулами (4.4) можно записать

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + ... + \rho^k + ...)^{-1}.$$

Предельные вероятности могут существовать лишь при $\rho < 1$. Ряд, стоящий в скобках, сходится к сумме $\frac{1}{1 - \rho}$, так как это геометрический ряд со знаменателем меньшим единицы. Поэтому можно записать для первого члена прогрессии

$$p_0 = 1 - \rho,$$

а предельные вероятности других состояний определяются по формулам

$$p_1 = \rho p_0 = \rho(1 - \rho); \quad p_2 = \rho^2 p_0 = \rho^2(1 - \rho); \ldots$$
$$p_k = \rho^k p_0 = \rho^k(1 - \rho) \ldots.$$

Анализируя полученные зависимости, можно сделать вывод, что предельные вероятности состояний образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\rho < 1$. Тогда в этой прогрессии первый член p_0 — наибольший.

Это значит, что если СМО справляется с потоком заявок, то наиболее вероятным ее состоянием из всех возможных состояний будет отсутствие заявок в системе.

Рассмотрим ***основные показатели эффективности*** СМО с ожиданием:

- среднее число заявок в системе $L_{\text{сист}}$ определяется по формуле математического ожидания

$$L_{\text{сист}} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = (1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k.$$

Можно показать, что эта формула преобразуется при $\rho < 1$ к виду

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1 - \rho};$$

- среднее число заявок, находящихся под обслуживанием $L_{\text{об},}$ также легко определить по формуле для математического ожидания

$$L_{\text{об}} = 0p_0 + 1(1 - p_0) = 1 - p_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho;$$

- среднее число заявок в очереди $L_{\text{оч}}$, очевидно, определяется как разность $L_{\text{сист}}$ и $L_{\text{об}}$

$$L_{\text{оч}} = L_{\text{сист}} - L_{\text{об}} = \frac{\rho}{1 - \rho} - \rho = \frac{\rho - \rho + \rho^2}{1 - \rho} = \frac{\rho^2}{1 - \rho};$$

- среднее время пребывания заявки в системе $T_{\text{сист}}$ или в очереди $T_{\text{оч}}$ равно среднему числу заявок в системе или в очереди, деленному на интенсивность потока заявок,

$$T_{\text{сист}} = \frac{L_{\text{сист}}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)}; \quad T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)}.$$

Эти зависимости называются *формулами Литтла.*

Пример 4.6. Минимаркет с одним контролером-кассиром обслуживает покупателей, интенсивность входящего потока которых равна 20 покупателей/ч. Интенсивность потока обслуживания равна 25 покупателей/ч.

Найти показатели эффективности СМО, а также вероятность, что в очереди стоят не более двух покупателей.

Решение. Выпишем исходные данные:

$$\lambda = 20; \quad \mu = 25; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{25} = 0{,}8.$$

Проведем вычисления.

Вероятность того, что контролер-кассир свободен,

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Вероятность того, что кассир занят,

$$P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Среднее число покупателей в очереди

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}8^2}{1-0{,}8} = 3{,}2 \text{ покупателя.}$$

Среднее число покупателей в минимаркете

$$L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}8}{1-0{,}8} = 4 \text{ покупателя.}$$

Среднее время простоя в очереди

$$T_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{0{,}8^2}{20(1-0{,}8)} = 0{,}16 \text{ ч} = 9{,}6 \text{ мин.}$$

Среднее время нахождения в минимаркете

$$T_{\text{сист}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{0{,}8}{20(1-0{,}8)} = 0{,}2 \text{ ч} = 12 \text{ мин.}$$

Вероятность того, что в очереди не более двух покупателей, определяется по формуле

$$P(n \leqslant 2) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = (1-\rho)(1+\rho+\rho^2+\rho^3) =$$
$$= (1-0{,}8)(1+0{,}8+0{,}8^2+0{,}8^3) = 0{,}2 \cdot 2{,}95 = 0{,}59. \blacksquare$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называется системой массового обслуживания (СМО)?
2. Изложите классификацию СМО: а) по числу каналов; б) по характеру отношения к заявкам, пришедшим в момент полной занятости СМО; в) по способу отбора для обслуживания заявок из очереди.
3. Какие случайные процессы называют марковскими?
4. Какой поток событий называют простейшим? Каковы его свойства?
5. Запишите систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

6. Запишите систему алгебраических уравнений для определения предельных вероятностей состояний.

7. Какие процессы называют процессами гибели и размножения?

8. Каковы показатели эффективности одноканальной СМО с отказами, многоканальной СМО с отказами? Запишите выражения для их нахождения.

9. Изложите алгоритм оптимизационного анализа числа каналов в СМО.

Задачи для самостоятельного решения

1. В минимаркете две кассы. Найти относительное время пребывания этой СМО в состояниях: S_0 — обе кассы свободны; S_1 — одна касса свободна, а другая занята; S_2 — обе кассы заняты, если $\lambda_{01} = 4$; $\lambda_{12} = 1$; $\lambda_{10} = 3$; $\lambda_{21} = 2$ (покупателей/мин).

2. Найти относительную пропускную способность одноканальной СМО с отказами, если интенсивность входящего потока заявок равна 80 заявок/ч, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки — 3 мин.

3. Найти относительную пропускную способность одноканальной СМО с отказами, если интенсивность входящего потока заявок равна 40 заявок/ч, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки — 1 мин.

4. Найти относительную пропускную способность одноканальной СМО с отказами, если интенсивность входящего потока заявок равна 72 заявки/ч, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки — 2,5 мин. Какое минимальное число каналов нужно иметь этой СМО, чтобы ее относительная пропускная способность была не менее 0,75?

Глава 5
ЭЛЕМЕНТЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Сетевой график и его параметры

Выполнение комплексных научных исследований, а также проектирование и строительство промышленных, сельскохозяйственных и транспортных объектов требуют календарной увязки большого числа взаимосвязанных работ, выполняемых различными организациями.

Составление и анализ соответствующих календарных планов представляют собой весьма сложную задачу, при решении которой применяется так называемый метод сетевого планирования.

Этот метод дает возможность определить, во-первых, какие работы или операции из числа многих, составляющих проект, являются «критическими» по своему влиянию на общую календарную продолжительность проекта и, во-вторых, каким образом построить наилучший календарный план проведения всех работ по данному проекту с тем, чтобы выдержать заданные сроки при минимальных затратах.

Первый вариант этого метода был разработан в 1957 г. американскими учеными Дж. Е. Келли и М. Р. Уокером и был назван СРМ (от начальных букв выражения «Critical Path Method», означающего «Метод критического пути»). Примерно в то же время независимо от СРМ появилась система PERT («Program Evaluation and Review Technique», что означает «Техника обзора и оценки программ»). В результате дальнейшего развития эти системы превратились в совокупную методику построения графиков — сетевое планирование и управление.

Идея сетевого метода очень проста. Она основана на графическом изображении комплекса работ с любой степенью их детализации и на выполнении элементарных арифметических операций по расчету параметров и анализу сетевых графиков.

С математической точки зрения *сетевой график* — это связный взвешенный орграф $G = (A, R)$ без петель и контуров.

При моделировании производственных процессов в качестве вершин графа используют события, а в качестве дуг — работы.

Событие — это момент начала или завершения одной или нескольких работ. Предполагается, что событие не имеет временно́й продолжительности, а совершается мгновенно. На графике оно изображается кружком (прямоугольником) и нумеруется.

Событие, которым начинается рассматриваемый комплекс работ, называется *начальным,* а событие, которым завершается комплекс работ, — *конечным*, остальные события являются *промежуточными*.

Под *работой* понимается любой трудовой процесс, сопровождающийся затратой времени и приводящий к нужным результатам. На графе работы, как отмечалось выше, изображаются дугами.

Весом каждой дуги является продолжительность соответствующей работы.

Работы бывают действительные и фиктивные.

Действительная работа — это реальный процесс, приводящий к достижению конкретных результатов и требующий затрат определенных ресурсов (материальных средств, времени, персонала). На сетевом графике работа изображается сплошной дугой.

Фиктивная работа — условное изображение зависимости между действительными работами. Фиктивная работа не требует затрат ресурсов и времени, на графике она изображается пунктирной дугой.

Любая последовательность работ, соединяющая каких-либо два события, называется *путем*. Путь, соединяющий исходное и конечное событие через последовательность работ, называется *полным путем* сетевого графика.

Длительностью полного пути является сумма весов (продолжительностей по времени) входящих в него дуг (работ).

Полный путь максимальной продолжительности называется *критическим*. *Критическими* также называются *работы* и *события*, находящиеся на этом пути.

Критический путь выделяется на графике жирными или двойными стрелками. Именно он определяет продолжительность выполнения всего комплекса требуемых работ.

По существу, критический путь — самое «узкое» место проекта. Уменьшить общую продолжительность осуществления проекта можно, только изыскав способы сокращения работ, лежащих на критическом пути.

Таким образом, нет никакой необходимости в часто практикуемом стремлении «поднажать» на всех работах ради сокращения общей длительности выполнения проекта.

Сумма продолжительностей всех критических работ называется *критическим сроком выполнения комплекса работ*.

Очевидно, что быстрее критического срока комплекс работ выполнить нельзя. Действительно, чтобы достигнуть завершающего события, надо пройти обязательно весь критический путь.

Для сокращения продолжительности выполнения комплекса работ необходимо в первую очередь сокращать продолжительность работ, лежащих на критическом пути.

5.2. Правила построения сетевого графика

Можно выделить следующие ***этапы сетевого планирования***:

- подготовка исходных данных;
- составление сетевого графика;
- упорядочение сетевого графика;
- определение критического пути и резервов времени;
- анализ и оптимизация сетевого графика.

Сначала рассмотрим два первых этапа.

Подготовка исходных данных для построения сетевого графика включает в себя:

- составление перечня работ и событий. Для этого используются технологические карты, регламенты, инструкции и т.д.;
- выявление групп работ, которые могут выполняться параллельно, практически независимо друг от друга; эти работы кодируются цифровым кодом, первая цифра которого обозначает номер подгруппы работ, к которой принадлежит рассматриваемая работа, а вторая цифра — порядковый номер данной работы в этой подгруппе; определение логических связей и последовательности выполнения работ;
- определение продолжительности работ; обычно эти данные получаются заблаговременно путем хронометража, методом экспертного опроса или путем анализа статистических данных;

- установление последовательности выполнения и взаимозависимости отдельных работ; суть этой процедуры состоит в том, что для каждой из работ рассматриваемого перечня определяются работы, непосредственно ей предшествующие, т.е. работы, до завершения которых не может быть начата рассматриваемая работа.

На основании этих исходных данных составляется таблица, содержащая номера работ по порядку, содержание (наименование) работ, число (состав) исполнителей, продолжительность работ и перечни предшествующих работ для каждой работы комплекса.

В качестве примера в табл. 5.1 приведен перечень работ, выполняемых при техническом обслуживании автомобиля.

Таблица 5.1

Перечень работ

Номер работы	Код работы	Число исполнителей, человек	Продолжительность работы, мин	Предшествующие работы
1	1.1	1	5	—
2	1.2	2	8	2.3
3	2.1	1	5	1.1
4	2.2	1	10	1.1
5	2.3	2	6	2.1, 2.2

Составление сетевого технологического графика осуществляется в следующем порядке.

Сначала строятся *частные сетевые графики* выполнения отдельных подгрупп работ.

При построении графиков следует соблюдать ряд правил (рис. 5.1).

1. В сетевом графике должны быть одно начальное и одно завершающее события. Если это не так, то вводятся фиктивные события и работы.

2. Дуги, соединяющие события, могут иметь произвольную длину и произвольный наклон, но желательно избегать их пересечения.

3. График не должен иметь тупиковых событий, т.е. событий (за исключением завершающего события), из которых не выходит ни одной дуги (рис. 5.1, *а*). В этом случае вводят фиктивную работу (рис. 5.1, *б*), показанную пунктирной дугой.

4. График не должен содержать событий (за исключением начального события), в которые не входит ни одна дуга

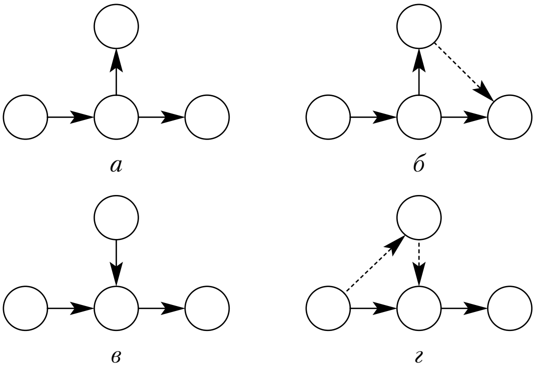


Рис. 5.1. **Иллюстрации к правилам построения сетевого графика**

(рис. 5.1, *в*). В этом случае вводят фиктивную работу (рис. 5.1, *г*), показанную пунктирной дугой.

5. Любые два события — вершины графа — могут быть непосредственно связаны не более чем одной дугой.

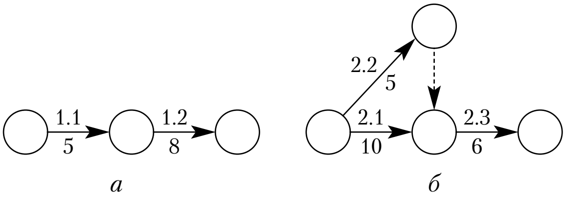
6. График не должен содержать замкнутых контуров и петель.

Построение частных сетевых графиков производится слева направо от исходного события к завершающему. При этом на графиках отмечаются лишь коды работ и их продолжительность.

Затем проводят сшивание частных сетевых графиков в один путем совмещения крайних событий частных графиков и введения, если это нужно, фиктивных работ. Рассмотрим этот процесс на конкретном примере.

Пример 5.1. По данным табл. 5.1 построить частные сетевые и общий сетевой графики выполнения работ.

Решение. Разобьем выполняемые работы на два частных сетевых графика, изображенные на рис. *а* и *б*.

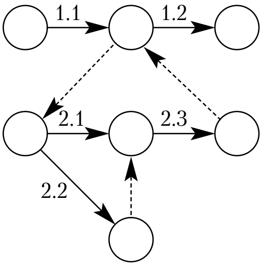


Сшивание частных графиков производится в следующем порядке: к первому частному графику «пришивается» второй, к вновь образованному графику «пришивается» третий и т.д. до тех пор, пока не будут «сшиты» все частные графики.

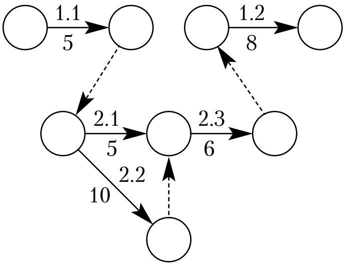
При сшивании частных сетевых графиков могут образовываться замкнутые контуры. Так, например, «сшивая» частные сетевые графики на рис. *а* и *б*, получаем замкнутый контур на рис. *в*.

Чтобы его разомкнуть, введем дополнительное событие на рис. *в* между работами 1.1 и 1.2.

События, которые связаны только фиктивными работами, объединяются. После «сшивания» частных графиков в один производится нумерация событий общего графика (номер события указывается в кружке).



в

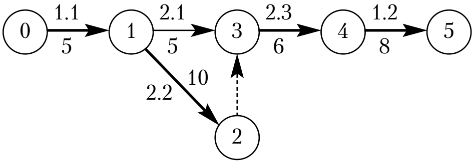


г

Нумерация событий производится по следующему правилу: начальному событию присваивается нулевой номер; следующему событию присваивается очередной номер, если все входящие в него дуги выходят из уже пронумерованных событий, и т.д.

Если под это правило подпадает несколько событий, то нумерация производится в любой удобной последовательности, например очередной номер присваивается событию, встречающемуся первым при следовании слева направо.

После нумерации сетевой график, изображенный на рис. *г*, имеет вид, представленный на рис. *д*.



д ■

После построения сетевого графика производятся расчет его параметров, их анализ и оптимизация графика.

5.3. Расчет параметров сетевого графика

Основными параметрами сетевого технологического графика являются ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени наступления событий.

Ранний срок свершения события $t_р(j)$ — максимальная продолжительность времени выполнения всех работ от исходного события до рассматриваемого j-го события.

Ранние сроки свершения событий определяются последовательно от начального события 0 к конечному N, в порядке нумерации событий, по формуле

$$t_р(j) = \max\{t_р(i) + t(i, j)\},\ t_р(0) = 0,\ i < j,\ t_р(N) = T_{кр}, \qquad (5.1)$$

где $t_р(j)$ — ранний срок свершения i-го события, предшествующего рассматриваемому j-му событию; $t(i, j)$ — продолжительность работы, соединяющей i-е и j-е события.

Значения $t_р$ могут быть определены непосредственно из графика с помощью мнемонического правила:

- устанавливаются события (по входящим стрелкам), которые непосредственно предшествуют рассматриваемому событию;
- к значениям $t_р$ этих событий прибавляются длины дуг, соединяющих эти события с рассматриваемым, и из полученных сумм выбирается максимальная, которая и определяет собой значение $t_р$ рассматриваемого события.

Поздний срок свершения события $t_п(i)$ — максимальный допустимый срок наступления рассматриваемого i-го события, не приводящий к увеличению критического пути.

Он показывает, через какое время после начала выполнения комплекса работ должно наступить интересующее событие, чтобы общая продолжительность работ не увеличилась.

Поздние сроки свершения событий определяются последовательно от завершающего события к исходному в порядке, обратном нумерации событий, по формуле

$$t_п(i) = \min\{t_п(j) - t(i, j)\},\ t_п(N) = t_р(N) = T_{кр}, \qquad (5.2)$$

где $t_п(j)$ — поздний срок свершения j-го события, которому непосредственно предшествует рассматриваемое i-е событие; $t(i, j)$ — продолжительность работы (длина дуги), соединяющей i-е и j-е события.

Заметим, что значения $t_п$ и $t_р$ конечного события равны и соответствуют величине критического пути $T_{кр}$. Это обстоятельство можно использовать для проверки правильности выполнения расчетов.

Значения $t_п$ также могут быть определены из графика с помощью мнемонического правила:

- устанавливаются события (по выходящим дугам), которым непосредственно предшествует рассматриваемое событие;
- из значений $t_п$ этих событий вычитаются длины дуг, соединяющих эти события с рассматриваемым, и из полученных значений выбирается минимальная, которая и определяет собой значение $t_п$ рассматриваемого события.

Резерв времени свершения события $\Delta t(i)$ показывает, насколько можно сдвинуть срок наступления рассматриваемого события в сторону его увеличения, не увеличивая при этом критического пути:

$$\Delta t(i) = t_п(i) - t_р(i). \tag{5.3}$$

После расчета параметров сетевого графика определяется *критический путь*. Для этого устанавливаются события с резервом времени свершения, равным нулю ($\Delta t = 0$).

Критический путь будет пролегать между этими событиями, соединяя исходное и завершающее события непрерывной последовательностью работ.

Критический путь строится от завершающего события к исходному (если параметры графика определены правильно, резервы времени свершения исходного и завершающего событий равны нулю). При этом если в событие, лежащее на критическом пути, входят дуги из нескольких событий, также лежащих на критическом пути (у них также $\Delta t = 0$), то критический путь проходит по дуге, определяющей $t_р$ рассматриваемого события.

В общем случае критических путей может быть несколько.

Пример 5.2. Рассчитаем параметры сетевого графика, изображенного в примере 5.1 на рис. *д*.

Решение. Проведем расчеты по формулам (5.1)—(5.3). Результаты расчетов сведем в таблицу.

Номер события i	Ранний срок события $t_р(j) = \max\{t_р(i) + t(i,j)\}$ $i < j$	Поздний срок события $t_п(j) = \min\{t_п(j) - t(i,j)\}$ $j < i$	Резерв времени события $\Delta t(i) = t_п(i) - t_р(i)$
0	0	min{5 – 5} = 0	0
1	max{0 + 5) = 5	min{15 – 10; 15 – 5} = 5	0
2	max{5 + 10} = 15	min{15 – 0} = 15	0
3	max{5 + 5; 15 + 0} = 15	min{21 – 6} =15	0
4	max{15 + 6} = 21	min{29 – 8} = 21	0
5	max{21 + 8} = 29	29	0

Как очевидно из таблицы, продолжительность критического пути составляет $T_{\text{кр}} = 29$ ед. времени, а сам критический путь проходит через все события графика.

В примере 5.1 на рис. *д* критический путь обозначен жирными дугами. ■

Работы, лежащие на критическом пути, являются наиболее напряженными, поскольку увеличение сроков выполнения этих работ обязательно приводит к увеличению общей продолжительности выполнения всего комплекса работ.

И напротив, сокращение сроков выполнения работ, лежащих на критическом пути, является одним из наиболее эффективных путей оптимизации сетевого технологического графика.

Под *оптимизацией технологического графика* понимается его улучшение с целью уменьшения времени выполнения комплекса работ при заданном количестве сил и средств.

Сетевой метод планирования работ не дает строго оптимального решения. Однако путем последовательного многократного улучшения первоначального варианта можно получить график, близкий к оптимальному.

Эта задача может быть решена путем привлечения к выполнению работ, лежащих на критическом пути, дополнительных сил и средств за счет работ, не лежащих на этом пути.

Другой способ оптимизации сетевого технологического графика заключается в изменении порядка следования работ (изменении состава предшествующих работ).

В процессе оптимизации состав работ, лежащих на критическом пути, может изменяться. В этом случае дальнейшая оптимизация технологического графика выполняется по вновь образованному критическому пути.

Критериями оптимальности сетевого графика могут служить:

- коэффициенты загруженности α_i или простоя β_i i-го специалиста

$$\alpha_i = \frac{T_i}{T_{\text{кр}}}; \quad \beta_i = 1 - \alpha_i;$$

- коэффициенты средней загруженности α или простоя β специалистов

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i}{nT_{\text{кр}}}; \quad \beta = 1 - \alpha,$$

где T_i — суммарная продолжительность работы i-го специалиста; $T_{\text{кр}}$ — длина критического пути; n — число специалистов, задействованных в работах.

Признаками высокого качества технологического графика (его близости к оптимальному) являются:

- близость значений α_i, $i = \overline{1, n}$, к значению α, которые должны различаться не более чем на 0,01;
- близость α к единице.

Пример 5.3. Рассчитаем коэффициенты загрузки специалистов по данным табл. 5.1, полагая, что специалист № 1 участвует в выполнении работ 1.1, 1.2, 2.1, 2.3, а специалист № 2 — работ 1.2, 2.2, 2.3.

Решение. Используя соответствующие данные из табл. 5.1, для производства расчетов оформим таблицу.

Код работы	Число исполнителей, чел.	Продолжительность работы, мин	Участие специалистов в работах
1.1	1	5	№ 1
1.2	2	8	№ 1, № 2
2.1	1	5	№ 1
2.2	1	10	№ 2
2.3	2	6	№ 1, № 2

Проведем расчеты по приведенным выше формулам.

Для 1-го специалиста $\alpha_1 = \dfrac{5 + 8 + 5 + 6}{29} \approx 0{,}83.$

Для 2-го специалиста $\alpha_2 = \dfrac{8 + 10 + 6}{29} \approx 0{,}83.$

Как очевидно из примера, загруженность специалистов одинакова и достаточна высокая, что свидетельствует о высоком качестве организации труда. ■

5.4. Линейный график и способы его построения

Сетевой график дает общее представление о структуре комплекса работ и технологической последовательности их выполнения.

Недостатком сетевого графика является то, что он не дает четкого представления о взаимном расположении работ во времени, что затрудняет нахождение критического пути и оптимизацию сетевого графика.

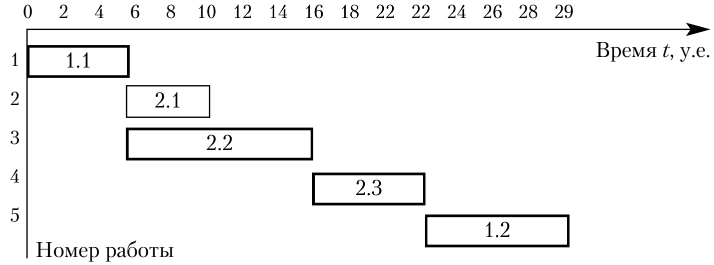
Этот недостаток отсутствует у *линейного графика*, или *диаграммы Гантта*. Элементами линейного графика являются *работы*, которые изображаются в системе координат (номер работы — время выполнения).

Линейный график строится по следующему правилу:

- работы изображаются на графике линиями (прямоугольниками), длина которых пропорциональна их длительности;
- работа изображается на графике, если построены все работы, непосредственно ей предшествующие;
- момент начала выполнения данной работы определяется моментом окончания выполнения всех непосредственно предшествующих ей работ.

Пример 5.4. Построить линейный график по данным табл. 5.1.

Решение. По изложенным выше правилам построим линейный график.



После построения линейного графика технического обслуживания автомобиля перенумеруем работы. Теперь в отличие от нумерации работ в табл. 5.1, например, работа 5 имеет код 1.2. ■

Для всех работ (i, j)на основе ранних и поздних сроков свершения событий можно определить показатели, которые являются также ***основными параметрами линейного технологического графика***:

- *ранний срок начала события*

$$t_{\text{рн}}(i, j) = t_{\text{р}}(i); \tag{5.4}$$

- *ранний срок окончания события* показывает, через какое время после начала выполнения комплекса работ будет завершена рассматриваемая j-я работа, если все работы будут выполняться в соответствии с графиком,

$$t_{\text{ро}}(i, j) = t_{\text{р}}(i) + t(i, j). \tag{5.5}$$

При описанном выше порядке построения линейного графика ранние сроки завершения работ легко определяются из графика: они соответствуют моментам времени окончания работ (определяются путем проектирования работ на временную ось);

- *поздний срок начала события*

$$t_{\text{пн}}(i, j) = t_{\text{п}}(i) - t(i, j); \tag{5.6}$$

- *поздний срок окончания события*

$$t_{\text{по}}(i, j) = t_{\text{п}}(i) \tag{5.7}$$

— максимальный (предельно допустимый) срок завершения рассматриваемой работы, не приводящий к увеличению критического пути.

Он показывает, через какое время после начала выполнения комплекса работ должна быть завершена данная работа, чтобы общая продолжительность работ не увеличилась.

Заметим, что значения $t_{\text{по}}$ и $t_{\text{ро}}$ завершающего события равны и соответствуют величине критического пути $T_{\text{кр}}$;

- *длина критического пути* $T_{\text{кр}}$ — продолжительность выполнения всего комплекса работ — соответствует наибольшему значению из всех $t_{\text{р}}(j), j = \overline{1, N}$

$$T_{\text{кр}} = \max\{t_{\text{р}}(1), t_{\text{р}}(2), ..., t_{\text{р}}(N)\},$$

где N — общее число работ в комплексе;

- *полный резерв времени выполнения работы* $\Delta t_{\text{п}}(i, j)$ показывает, насколько может быть сдвинут срок завершения рассматриваемой работы в сторону его увеличения (увеличена ее продолжительность), не вызывая увеличения критического пути,

$$\Delta t_{\text{п}}(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t(i, j). \tag{5.8}$$

Пример 5.5. Рассчитать параметры линейного графика, представленного в примере 5.4.

Решение. В соответствии с рисунком определим ранний и поздний сроки окончания работы. Ранний срок окончания работы характеризует правый срез прямоугольника (работы).

Если работа выполняется не параллельно с другими работами, то поздний срок окончания работы равен раннему сроку.

Поздний срок окончания работы, не равный раннему сроку, можно указать только для тех работ, которые на линейном графике выполняются параллельно, например работы 2 и 3.

В этом случае без ущерба для величины критического пути можно увеличить продолжительность работы 2. То есть поздний срок окончания работы 2 соответствует времени 15 у.е.

Резерв времени легко определяется как разность позднего и раннего сроков окончания работы

Результаты расчета сведем в таблицу.

Номер работы	Код работы	Продолжительность работы, $t(i)$, у.е.	Ранний срок окончания работы $t_{\text{ро}}(i)$, у.е.	Поздний срок окончания работы $t_{\text{по}}(i)$, у.е.	Резерв времени, $\Delta_{\text{п}}t(i)$, у.е.
1	1.1	5	5	5	0
2	2.1	5	10	15	5
3	2.2	10	15	15	0
4	2.3	6	$\max\{21, 16\} = 21$	21	0
5	1.2	8	29	29	0

Как очевидно из таблицы, длина критического пути равна раннему сроку выполнения работы 1.2 и составляет $T_{\text{кр}} = 29$ у.е.; при этом работа 2.1 имеет резерв в 5 у.е. времени.

После определения параметров линейного графика строится критический путь. Признаком принадлежности i-й работы критическому пути является равенство $\Delta t(i) = 0$. Непрерывность критического пути свидетельствует о правильности его построения.

Таким образом, более наглядное представление работ во времени делает процесс оптимизации линейного графика более легким по сравнению с сетевым графиком.

В рассматриваемом примере критический путь проходит через работы 1.1, 2.2, 2.3, 1.2.

Так как работа 2.1 имеет резерв в 5 у.е. времени, то можно попытаться привлечь на это время освободившегося специалиста для выполнения работы 2.2, что, скорее всего, сократит время ее выполнения. В этом случае можно ожидать сокращения критического времени выполнения технического обслуживания автомобиля. ■

Пример 5.6. Необходимо собрать узел из двух деталей *A* и *B*. Обе детали должны быть обработаны на токарном станке. Деталь *B* должна пройти, кроме того, шлифовку.

Перечень событий, а также данные о продолжительности работ (в мин) приведены в таблицах.

Шифр события	Описание события	Предшествующие события
1	Начало	0
2	Получить заготовку для детали *A*	1
3	Получить заготовку для детали *B*	1
4	Обработать *A* на станке	2, 3
5	Обработать *B* на станке	2, 3

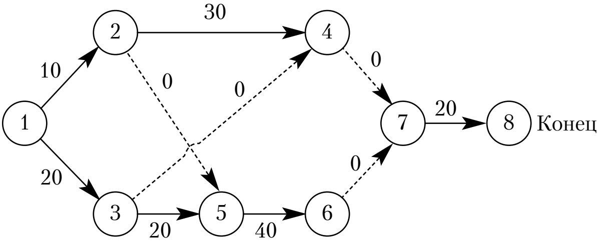
Окончание таблицы

Шифр события	Описание события	Предшествующие события
6	Шлифовать деталь *B*	5
7	Собрать узел из деталей *A* и *B*	4, 6
8	Конец	7

Номер работы	Продолжительность работы, мин
1, 2	10
1, 3	20
2, 4	30
2, 5	0
3, 4	0
3, 5	20
4, 7	0
5, 6	40
6, 7	0
7, 8	20

Определить основные параметры сетевого графика.

Решение. По данным таблиц составим сетевой график



Для сетевого графика полными путями будут:

путь 1 → 2 → 4 → 7 → 8 продолжительностью 10 + 30 + 0 + + 20 = 60 мин;

путь 1 → 2 → 5 → 6 → 7 → 8 продолжительностью 10 + 0 + + 40 + 0 + 20 = 70 мин;

путь 1 → 3 → 4 → 7 → 8 продолжительностью 20 + 0 + 0 + 20 = = 40 мин;

путь 1 → 3 → 5 → 6 → 7 → 8 продолжительностью 20 + 20 + + 40 + 0 + 20 = 100 мин.

Последний путь имеет наибольшую продолжительность и является критическим. Продолжительность критического пути составляет 100 мин. Быстрее работу выполнить нельзя, так как для достижения завершающего события критический путь надо пройти обязательно.

1. Расчет параметров сетевого графика

При определении ранних сроков свершения событий $t_р(j)$ двигаемся по сетевому графику слева направо и используем формулу (5.1).

Для начального события $j = 1$, очевидно, $t_р(1) = 0$.

Для $j = 2$: $t_р(2) = t_р(1) + t(1, 2) = 0 + 10 = 10$ мин, так как для события 2 существует только один предшествующий путь 1 → 2.

Для $j = 3$: $t_р(3) = t_р(1) + t(1, 3) = 0 + 20 = 20$ мин, так как для события 3 существует один предшествующий путь 1 → 3.

Для $j = 4$: $t_р(4) = \max\{t_р(2) + t(2, 4); t_р(3) + t(3, 4)\} = \max\{10 + 30; 20 + 0\} = 40$, так как для события 4 существуют два предшествующих пути: 1 → 2 → 4 и 1 → 3 → 4 и два предшествующих события: 2 и 3.

Аналогично определяем ранние сроки для остальных событий сети:

$t_р(5) = \max\{t_р(2) + t(2, 5); t_р(3) + t(3, 5)\} = \max\{10 + 0; 20 + 20\} = \max\{10; 40\} = 40$;

$t_р(6) = t_р(5) + t(5, 6) = 40 + 40 = 80$;

$t_р(7) = \max\{t_р(4) + t(4, 7); t_р(6) + t(6, 7)\} = \max\{40 + 0; 80 + 0\} = \max\{40; 80\} = 80$;

$t_р(8) = t_р(7) + t(7, 8) = 80 + 20 = 100$.

Длина критического пути равна раннему сроку свершения завершающего события 8

$$t_р(8) = T_{кр} = 100 \text{ мин}.$$

Найденные параметры сведем в таблицу.

Номер работы	Сроки свершения события, мин		Резерв времени, $\Delta t(i)$, мин
	ранний $t_р(j)$, мин	поздний $t_п(i)$, мин	
1	0	0	0
2	10	40	30
3	20	20	0
4	40	80	40
5	40	40	0
6	80	80	0
7	80	80	0
8	100	100	0

В этой таблице при определении поздних сроков свершения событий $t_п(i)$ двигаемся по дугам в обратном направлении, т.е. справа налево и используем формулу (5.2).

Для i = 8 (завершающего события) поздний срок свершения события должен равняться его раннему сроку (иначе изменится длина критического пути):

$$t_п(8) = t_р(8) = 100 \text{ мин.}$$

Для $i = 7$: $t_п(7) = t_п(8) - t(7, 8) = 100 - 20 = 80$, так как для события 7 существует только один последующий путь 7 → 8.

Для $i = 6$: $t_п(6) = t_п(7) - t(6, 7) = 80 - 0 = 80$, так как для события 6 существует только один последующий путь 6 → 7 → 8.

Для $i = 5$: $t_п(5) = t_п(6) - t(5, 6) = 80 - 40 = 40$, так как для события 5 существует только один последующий путь 5 → 6 → 7 → 8.

Для $i = 4$: $t_п(4) = t_п(7) - t(4, 7) = 80 - 0 = 80$, так как для события 4 существует только один последующий путь 4 → 7 → 8.

Для $i = 3$: $t_п(3) = \min\{t_п(4) - t(3, 4); t_п(5) - t(3, 5)\} = \min\{80 - 0; 40 - 20\} = \min\{80; 20\} = 20$, так как для события 3 существуют два последующих пути: 3 → 4 → 7 → 8 и 3 → 5 → 6 → 7 → 8.

Для $i = 2$: $t_п(2) = \min\{t_п(4) - t(2, 4); t_п(5) - t(2, 5)\} = \min\{80 - 30; 40 - 0\} = \min\{50; 40\} = 40$, так как для события 2 существуют два последующих пути: 2 → 4 → 7 → 8 и 2 → 5 → 6 → 7 → 8.

Для $i = 1$: $t_п(1) = \min\{t_п(2) - t(1, 2); t_п(3) - t(1, 3)\} = \min\{40 - 10; 20 - 20\} = \min\{30; 0\} = 0$.

По формуле (5.3) определяем резервы времени i-го события:

$$\Delta t(1) = 0; \Delta t\ (2) = 30; \Delta t\ (3) = 0 \text{ и т.д.}$$

Резерв времени события 2 составляет $\Delta t\ (2) = 30$. Это означает, что время свершения события 2 может быть задержано на 30 мин без увеличения общего срока выполнения работы.

Анализируя последнюю таблицу, видим, что не имеют резервов времени события 1, 3, 5, 6, 7, 8. Эти события и образуют критический путь.

2. Расчет параметров линейного технологического графика

Вычисление временны́х параметров работы (i, j) покажем на примере работы (2, 4).

Ранний срок начала работы вычисляется по формуле (5.4): $t_{рн}(2, 4) = t_р\ (2) = 10$.

Ранний срок окончания работы вычисляется по формуле (5.5): $t_{ро}(2, 4) = t_р\ (2) + t\ (2, 4) = 10 + 30 = 40$.

Поздний срок начала работы вычисляется по формуле (5.6): $t_{пн}(2, 4) = t_п(4) - t(2,4) = 80 - 30 = 50$.

Поздний срок окончания работы: $t_{по}(2, 4) = t_п(4) = 80$.

Таким образом, работа (2, 4) должна начаться в интервале (10, 50) и окончиться в интервале (40, 80) от начала выполнения работы.

Полный резерв времени работы (2, 4) вычисляется по формуле (5.8): $\Delta t_п(2, 4) = t_п(4) - t_р(2) - t(2, 4) = 80 - 10 - 30 = 40$, т.е. срок выполнения данной работы можно увеличить на 40 мин, при этом срок выполнения комплекса работ не изменится.

Результаты вычислений сведем в таблицу.

Работа (i, j)	Продолжительность работы $t(i, j)$, мин	Сроки начала и окончания работы, мин				Полный резерв времени, $\Delta t_{\text{п}}(i, j)$, мин
		$t_{\text{рн}}(i, j)$	$t_{\text{ро}}(i, j)$	$t_{\text{пн}}(i, j)$	$t_{\text{по}}(i, j)$	
(1, 2)	10	0	10	30	40	30
(1, 3)	20	0	20	0	20	0
(2, 4)	30	10	40	50	80	40
(2, 5)	0	10	10	40	40	30
(3, 4)	0	20	20	80	80	60
(3, 5)	20	20	40	20	40	0
(4, 7)	0	40	40	80	80	40
(5, 6)	40	40	80	40	80	0
(6, 7)	0	80	80	80	80	0
(7, 8)	20	80	100	80	100	0

Покажем на примере работы (2, 4), что полный резерв времени работы равен резерву времени максимального из путей, проходящих через эту работу.

Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы, если ее начальное событие свершится в самый ранний срок, и можно допустить свершение ее конечного события в самый поздний срок.

Важным свойством полного резерва времени работы является то, что он принадлежит не только этой работе, но и всем полным путям, проходящим через нее.

Через работу (2, 4) проходит 1 полный путь: $1 \to 2 \to 4 \to 7 \to 8$ продолжительностью $t = 60$ мин. Его резерв $\Delta t = T_{\text{кр}} - t = 100 - 60 = 40$.

Как видим, полный резерв времени работы (2, 4) равен резерву времени максимального (и единственного) полного пути, проходящего через эту работу.

Если увеличить продолжительность работы (2, 4) на 40 мин, то полностью будет исчерпан резерв времени этого пути, т.е. этот путь станет также критическим. ■

Основным достоинством сетевого графика является наглядное отображение структуры комплекса работ, логической последовательности выполнения отдельных работ и взаимосвязей между ними.

Для построения сетевых и линейных графиков в настоящее время существуют программные средства Project Expert 3.0, PrimaVera (P3E), Альт-Инвест, используемые для планирования и управления различными процессами и проектами.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что называется событием, работой, путем?
2. Воспроизведите алгоритм построения сетевого графика.
3. Какие данные необходимы для построения сетевого графика?
4. Сформулируйте правила составления сетевого графика.
5. Перечислите основные параметры сетевого графика.
6. Назовите критерии оптимальности сетевого графика.
7. Укажите способы построения линейного графика.
8. Перечислите основные параметры линейного графика.

Глава 6
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

6.1. Нечеткие понятия

В классических подходах к решению задач отсутствуют такие термины, как неясность, неопределенность, нечеткость или неточность. Однако в реальном мире часто возникают задачи, когда невозможно избежать проблемы учета неясностей и неточных данных о событиях, характеристиках и оценках.

В 1965 г. Л. Заде предложил теорию нечетких или размытых множеств, получившую также название *нечеткой логики*.

Теория нечетких множеств дала схему решения проблем, в которых субъективное суждение или оценка играет существенную роль при оценке фактора неясности или неопределенности.

Нечеткая логика, как следует из названия, предполагает неточные, приблизительные оценки.

Рассмотрим эти понятия.

Пусть X — произвольное множество объектов или событий, тогда *нечетким множеством* называется множество упорядоченных пар

$$A = \{x, \mu_A(x)\}, x \in X,$$

где $\mu_A(x)$ определяет функцию принадлежности.

Функция принадлежности указывает на предполагаемую степень принадлежности элемента x этому множеству A. Поэтому принимается, что значения функции лежат на отрезке

$$0 \leqslant \mu_A(x) \leqslant 1.$$

Если все значения $\mu_A(x) \in \{0, 1\}$, т.е. равны либо 0, либо 1, то нечеткое множество становится обычным четким множеством, а функция $\mu_A(x)$ — обычной булевой функцией.

Однако если $\mu_A(x)$ может принимать значения на отрезке [0, 1], то $\mu_A(x) = 0$ означает, что $x \notin A$, а $\mu_A(x) = 1$ — что достоверно $x \in A$.

При этом, если любое значение $0 < \mu_A(x) < 1$ определяет степень принадлежности x к множеству A, тогда A — *нечеткое множество*.

Заметим, что на практике, как правило, значение степени принадлежности принимается методом экспертных оценок. Этот метод будет изложен в следующем параграфе.

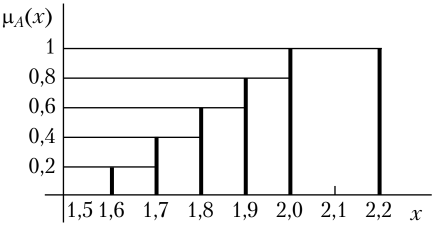
Пример 6.1. Пусть X — рост человека, колеблющийся в пределах от 1,5 до 2,2 м.

Нечеткое множество A описывает понятие «высокий», как оно представляется лицу — эксперту, определяющему это понятие.

По мнению эксперта, нечеткое множество A задается значениями, оформленными в виде таблицы

Рост x, м	1,5—1,6	1,6—1,7	1,7—1,8	1,8—1,9	1,9—2,0	2,0—2,1	2,1—2,2
$\mu_A(x)$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1

или графика



Рассмотренное выше является примером нечеткого числа. В общем случае функция принадлежности определяется экспертом, и у каждого специалиста эта функция может иметь различное значение. ■

Если множество X состоит из ***конечного числа элементов*** x_i, $i = 1, 2, ..., n$, то нечеткое множество A можно представить в следующем виде:

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + ... + \mu_A(x_n)/x_n,$$

где «+» означает не сложение, а объединение; символ «/» показывает, что значение μ_A относится к элементу, следующему за ним, а не означает деление на x_i.

Если множество X является ***непрерывным***, то нечеткое множество A можно записать как интеграл

$$A = \int_{x} \mu_A(x)/xdx.$$

Нечеткие множества широко применяются для формализации лингвистических знаний.

Пример 6.2. Рассмотрим множество процентных ставок X, предоставляемых банками по вкладам.

Каким образом можно выделить подмножество высоких процентных ставок?

Решение. В условиях динамично изменяющейся среды не всегда возможно точно ответить на этот вопрос, однозначно выделив множество высоких ставок. При использовании теории нечетких множеств решить такую задачу можно даже при отсутствии полной количественной информации.

Функция принадлежности для элементов нечеткого множества A, соответствующих понятию «высокие процентные ставки», как показано на рисунке, приведеннном ниже, будет иметь вид

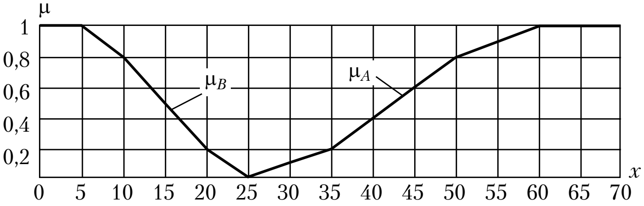
$$\mu_A = 0{,}1/30 + 0{,}2/35 + 0{,}4/40 + 0{,}6/45 + 0{,}8/50 + 1/60 + 1/70.$$

Здесь числа до косой черты означают степень принадлежности, а после черты — процентные ставки.

Такая запись не вычисляется, а читается: «с малой вероятностью 0,1 ставка в 30% считается высокой процентной ставкой (например, 10% клиентов банка такую ставку считают высокой) или с вероятностью 0,2 ставка в 35% является высокой процентной ставкой, или достоверно ставка в 70% является высокой процентной ставкой и т.д.»

Функция принадлежности к нечеткому множеству низких процентных ставок запишется следующим образом:

$$\mu_B = 1/0 + 1/5 + 0{,}8/10 + 0{,}5/15 + 0{,}2/20.$$



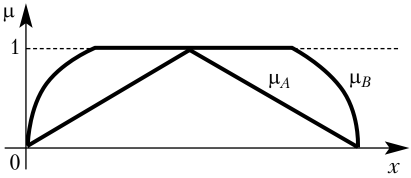
Высокие μ_A и низкие μ_B процентные ставки

■

6.2. Операции над нечеткими множествами

Над нечеткими множествами вводятся следующие операции:

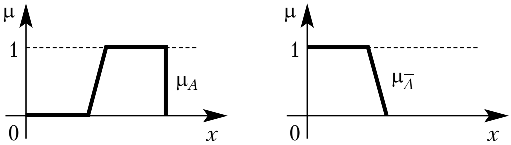
- *вложение* одного нечеткого множества A в другое B, или $A \subseteq B$. В этом случае функция принадлежности μ_A также вложена в функцию μ_B (рис. 6.1);



$A \subseteq B \longleftrightarrow \mu_A \leqslant \mu_B, \forall x \in X$

Рис. 6.1. **Функции принадлежности нечетких множеств**

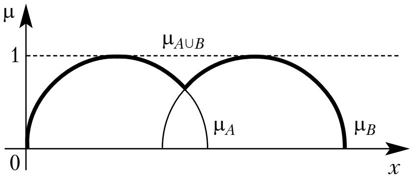
- *дополнение* нечеткого множества A — это нечеткое множество $\overline{A}$. Их функции принадлежности показаны на рис. 6.2;



$\mu_{\overline{A}} \leqslant 1 - \mu_A, \forall x \in X$

Рис. 6.2. **Функции принадлежности нечетких множеств**

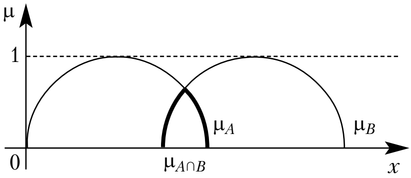
- *объединение* $A \cup B$ двух нечетких множеств дает нечеткое множество под выделенной линией (рис. 6.3);



$\mu_{A \cup B} = \max\{\mu_A, \mu_B\}, \forall x \in X$

Рис. 6.3. **Функции принадлежности нечетких множеств**

- *пересечение* $A \cap B$ дает нечеткое множество под выделенной линией (рис. 6.4);



$\mu_{A \cap B} = \min\{\mu_A, \mu_B\}, \forall x \in X$

Рис. 6.4. **Функции принадлежности нечетких множеств**

- *возведение в степень*

$$\mu_A^{\alpha} = [\mu_A]^{\alpha},\ \forall x \in X.$$

Ниже на рис. 6.5 представлены наиболее часто используемые степени: $\mu_A^{\frac{1}{2}}$ — кривая *1*, μ_A — кривая *2*, μ_A^2 — кривая *3*.

При построении кривых имелось в виду, что $0 < \mu_A(x) < 1$.

Из рисунка очевидно, что μ_A^2 сужает диапазон определения нечеткого множества как площадь под кривой. Поэтому говорят, что μ_A^2 означает «это меньше, чем...».

Функция $\mu_A^{\frac{1}{2}}$ расширяет диапазон, поэтому считают $\mu_A^{\frac{1}{2}}$ «это почти что...» или «это больше, чем...».

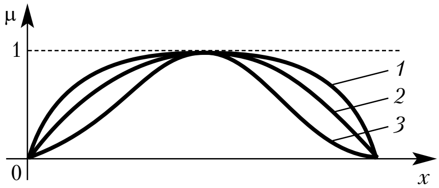


Рис. 6.5. **Функции принадлежности нечетких множеств**

Термин «нечеткое число» используется для обозначения неточно определенных величин, например «около 5».

Нечеткое число — это множество вида

$$A = \{x,\ \mu_A(x)\},\ \text{где } x \in R.$$

Пример 6.3. Были проведены исследования посещаемости жителями одного микрорайона вечерних клубов и театров в зависимости от их возраста x. Число посетителей от общего количества возрастной группы есть нечеткое число и дано в процентах.

Вечерние клубы							
x, лет	18–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	> 70
$\varphi_A(x)$	0,8	0,9	0,8	0,5	0,5	0	0

Театры							
x, лет	18–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	> 70
$\varphi_B(x)$	0	0,2	0,6	0,7	0,9	0,7	0

Определить число жителей, которые не ходят отдыхать в вечерние клубы и театры.

Решение. Пусть число жителей, которые не ходят отдыхать в вечерние клубы и театры, образует множество C, состоящее из нечетких чисел. Тогда для этого множества функция принадлежности определяется формулой

$$\varphi_C(x) = 1 - \varphi_{A\cup B}(x) = 1 - \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}.$$

Вычисления сведем в таблицу.

x, лет	18—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	> 70
$\varphi_C(x)$	0,2	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3	1

Последняя строка таблицы вычислена по приведенной выше формуле, например:

- для возраста 18—20 лет $\varphi_C(18—20) = 1 - \max\{0,8; 0\} = 0,2$;
- для возраста 20—30 лет $\varphi_C(20—30) = 1 - \max\{0,9; 0,2\} = 0,1$ и т.д.

Таким образом, число жителей, которые не ходят отдыхать в вечерние клубы и театры, например, для возраста 30—40 лет составляет 20% от общего количества данной возрастной группы. ■

Нечетким отношением R между множеством U и полным множеством V называется подмножество прямого декартова произведения $U \times V$.

Допустим, что между элементами знаний, представленных нечеткими множествами F и G, существует связь, заданная правилом: «Если F, то G», при этом $F \subseteq U$, $G \subseteq V$.

В логике высказываний для представления правил подобного вида используется *операция импликации*. В нечеткой логике предложены различные способы реализации импликации.

Один из наиболее простых способов заключается в представлении импликации, соответствующей правилу «Если F, то G», нечетким отношением R, которое вычисляется следующим образом:

$$R = F \times G = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} \mu_F(u_i) \wedge \mu_G(v_j)/(u_i, v_j),$$

$$\mu_R(u, v) = \mu_F(u) \wedge \mu_G(v).$$

Здесь и далее операция $\vee$ обозначает взятие максимума, а $\wedge$ — минимума.

Свойства нечетких отношений

1. Объединение отношений

$$(R \cup S)(u, v) = R(u, v) \vee S(u, v), u \in U, v \in V.$$

2. Пересечение отношений

$$(R \cap S)(u, v) = R(u, v) \wedge S(u, v), u \in U, v \in V.$$

3. Операция включения

$$(R \subseteq S) \longleftrightarrow R(u, v) \leqslant S(u, v), u \in U, v \in V.$$

4. Свойство идемпотентности

$$R \cap R = R,\ R \cup R = R.$$

5. Коммутативность

$$R \cap S = S \cap R,\ R \cup S = S \cup R.$$

6. Ассоциативность

$$R \cap (S \cap Q) = (R \cap S) \cap Q;$$
$$R \cup (S \cup Q) = (R \cup S) \cup Q.$$

7. Дистрибутивность

$$R \cap (S \cup Q) = (R \cap S) \cup (R \cap Q);$$
$$R \cup (S \cap Q) = (R \cup S) \cap (R \cup Q).$$

8. Рефлексивность

Если $\mu_R(u, v) = 1$, отношение R — рефлексивное.

Если $\mu_R(u, v) < 1$, $0 \ll \mu_R(u, v) < 1$, отношение R — слаборефлексивное.

Если $\mu_R(u, v) = 0$, отношение R — антирефлексивное.

Если $\mu_R(u, v) > 0$, $0 < \mu_R(u, v) \ll 1$, отношение R — слабоантирефлексивное.

9. Симметричность

$$\mu_R(u, v) = \mu_R(v, u),\ u, v \in U.$$

10. Транзитивность

$$\mu_R(u, v) \geqslant \mu_R(u, z) \wedge \mu_R(z, u),\ u, v, z \in U.$$

6.3. Матрица инциденций и нечеткие матрицы

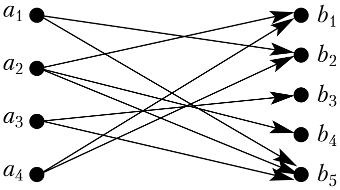
Пусть $A = \{a_i, i = \overline{1, m}\}$ — множество объектов, которые некоторым образом воздействуют на множество других объектов $B = \{b_j, j = \overline{1, n}\}$. Тогда говорят, что множество A *имеет инциденцию* на множество B.

Если при этом элемент a_i влияет на элемент b_j, то говорят, что *имеет место инциденция* a_i на b_j и записывают $\mu(a_i, b_j) = 1$, и если этой инциденции не существует, то значение $\mu(a_i, b_j) = 0$. Совокупность значений $\mu(a_i, b_j)$ образует *матрицу инциденции*.

Пример 6.4. Матрицу инциденции иногда удобно представлять в виде графа. Например, матрице

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

будет соответствовать граф



В такой записи в матрице инциденции по строкам распределяются элементы множества A, а по столбцам — элементы множества B. ■

Если a_i имеют инциденцию на b_j, то говорят, что b_j *находится под влиянием* a_i.

Если последнюю матрицу транспонировать, то получим матрицу влияний b_j на a_i

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 6.5. Пусть $A = B$ и множество A состоит из элементов-факторов: $a_1 = b_1$ — прибыль предприятия, $a_2 = b_2$ — налоги, $a_3 = b_3$ — себестоимость единицы продукции, $a_4 = b_4$ — основные фонды.

Экономист мог бы составить следующую матрицу инциденций:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице по строкам распределены элементы множества $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, по столбцам — элементы множества $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Составленная матрица инциденций означает: факторы a_1, a_2, a_3, a_4 влияют на фактор b_1; на b_2 влияют только a_1, a_2 (прибыль и налоги влияют на налоги) и т.д. ■

Рассмотрим теперь инциденцию множества A на множество B и инциденцию множества B на третье множество C.

Операция, позволяющая определить инциденцию A на C, зная инциденции A на B и B на C, называется *композицией maxmin*.

Легко установить, что

$$\mu(a_i, c_k) = \bigvee_j (\mu(a_i, b_j) \wedge \mu(b_j, c_k), \qquad (6.1)$$

где знак $\vee$ означает выбор максимального, а знак $\wedge$ — минимального значения из двух элементов.

Пример 6.6. Пусть

$$V(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; V(B, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти $V(A, C)$.

Решение. Пользуясь правилом композиции, получим

$$V(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь при вычислении композиции нужно вспомнить аналогию — правило умножения матриц: элементы строки первой матрицы умножаются на соответствующие элементы столбца второй матрицы. Результаты умножения складываются и т.д.

Отличие в вычислениях по формуле композиции (6.1) в том, что под умножением соответствующих элементов понимается выбор минимального значения «перемножаемых» чисел, а под сложением — выбор максимального значения из «суммируемых». ■

Матрица $\tilde{V}$, строки которой представляют значения некоторой функции принадлежности, называется *нечеткой матрицей.*

Если отношения инцидентности являются нечеткими, то соответствующая матрица инцидентности $\tilde{V}$ будет нечеткой матрицей, элементы которой могут принимать любые значения между 0 и 1, т.е.

$$\mu(x_i, x_j) \in [0, 1] \; \forall (x_i, x_j) \in \tilde{V}.$$

6.4. Многокритериальный выбор альтернатив принятия решений

Элементы теории нечетких множеств успешно применяются при принятии решений. Экспертные оценки альтернативных вариантов по разным критериям могут быть представлены как нечеткие множества или числа, выраженные с помощью функций принадлежности.

Для упорядочения нечетких чисел существует множество методов, которые отличаются друг от друга способом свертки и построения нечетких отношений. Последние можно определить как *отношения предпочтительности* между объектами.

Рассмотрим одну из математических постановок задач принятия решений на основе теории нечетких множеств. В данном случае критерий представляет собой некоторое понятие, а оценка альтернативы критерия — степень соответствия ему.

Пусть имеется множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ и множество критериев $C = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$, при этом оценки альтернатив по каждому i-му критерию представлены нечеткими множествами

$$C_i = \{\mu_1/a_1, \mu_2/a_2, ..., \mu_m/a_m\}, \text{ где } i = 1, 2, ..., n.$$

Правило выбора лучшей альтернативы можно представить как пересечение нечетких множеств, соответствующих критериям

$$D = C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n.$$

Операция пересечения нечетких множеств может быть реализована разными способами. Иногда пересечение рассматривается как умножение, но обычно этой операции соответствует взятие минимума:

$$\mu = \min_{i=1,...,n} \mu_i.$$

Лучшей считается альтернатива a°, имеющая наибольшее значение функции принадлежности

$$\mu(a^\circ) = \max_{j=1,...,m} \mu(a_j).$$

Если критерии C_i имеют различную важность, то их вклад в общее решение можно представить как *взвешенное пересечение*

$$D = C_1^{\alpha 1} \cap C_2^{\alpha 2} \cap ... \cap C_n^{\alpha n},$$

где α_i — весовые коэффициенты соответствующих критериев, которые должны удовлетворять условиям

$$\alpha_i \geqslant 0; \quad i = 1, ..., n; \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

Коэффициенты относительной важности можно определить, используя процедуру попарного сравнения критериев.

6.5. Приложения теории нечетких множеств к решению задач

Инциденции второго порядка

Рассмотрим инциденцию множества A на множество B, которую обозначим M_{AB}, и инциденцию множества B на третье множество C – соответственно M_{BC}.

Последовательное применение двух инциденций приводит к инциденции второго порядка, которая обозначается

$$M_{AC} = M_{AB} \circ M_{BC}. \tag{6.2}$$

При вычислении инциденций второго порядка по формуле (6.2) следует помнить, что число столбцов матрицы M_{AB} должно равняться числу строк матрицы M_{BC} (известное *правило умножения матриц*).

Матрица M называется *рефлексивной*, если ее диагональ состоит из единиц, а значения остальных элементов лежат на отрезке [0, 1].

Если все элементы матрицы M_1 не больше соответствующих элементов матрицы M_2 с одинаковыми адресами, то этот факт записывается в виде

$$M_1 \subset M_2.$$

Пусть E — единичная матрица, $\tilde{M}$ — нечеткая матрица, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — рефлексивные нечеткие матрицы, определяющие инциденции A на A и B на B соответственно, т.е.

$$\tilde{A} = M_{AA}, \tilde{B} = M_{BB}.$$

Так как $E \subset \tilde{A}$ и $E \subset \tilde{B}$, то получим

$$\tilde{M} = E \circ \tilde{M} \subset \tilde{A} \circ \tilde{M} \quad \text{и} \quad \tilde{M} = \tilde{M} \circ E \subset \tilde{M} \circ \tilde{A},$$

тогда

$$\tilde{M} \subset \tilde{A} \circ \tilde{M} \circ \tilde{B}. \tag{6.3}$$

Матрицей, задающей воздействия первого и второго порядков, является

$$\tilde{M}^* = \tilde{A} \circ \tilde{M} \circ \tilde{B}, \tag{6.4}$$

и скрытые воздействия (влияния матриц друг на друга) обнаруживаются после вычисления матрицы

$$\tilde{D} = \tilde{M}^* - \tilde{M}. \tag{6.5}$$

Вычисления по формуле (6.5) возможны, так как согласно формулам (6.3) и (6.4) выполняется

$$\tilde{M} \subset \tilde{M}^*.$$

Пример 6.7. Пусть сформулирована задача исследования скрытых воздействий шести секторов экономики (влияние одного сектора на другой через цепочку других секторов), определяющих жизнедеятельность людей, друг на друга. Перечислим эти секторы: 1) население; 2) сельское хозяйство; 3) промышленность; 4) энергетика; 5) наука и техника; 6) здравоохранение.

Построим квадратную матрицу инциденций, строки и столбцы которой соответствуют номерам рассматриваемых секторов, а значения элементов матрицы представляют оценки экспертов степени воздействия одного сектора на другой. Эти оценки образуют рефлексивную нечеткую матрицу $\tilde{M} = \{a_{ij}\}$, оформленную в виде табл. 1.

Таблица 1

$\tilde{M}$	1	2	3	4	5	6
1	1	0,3	0,5	0,7	0,6	0,9
2	0,4	1	0,3	0,2	0,1	0,8
3	0,2	0,2	1	0,2	0,3	0,1
4	0	0,1	1	1	0,2	0
5	0,3	0,4	1	1	1	0,6
6	0,6	0,1	0,1	0,1	0,2	1

Так, по мнению экспертов, наука и техника имеет инциденцию (степень влияния) на промышленность, оцениваемую элементом $a_{53} = 1$, а на здравоохранение — $a_{56} = 0{,}6$ и т.д.

Оценить влияние секторов экономики друг на друга.

Решение. Для проведения исследований скрытых воздействий вычислим инциденцию второго порядка

$$\tilde{M}^* = \tilde{M} \circ \tilde{M}$$

по формуле (6.2) композиций maxmin.

Заметим, что при вычислении инциденции второго порядка исходная матрица $\tilde{M}$ умножается сама на себя.

Пусть в результате композиции получена матрица $\tilde{M}^* = \{b_{ij}\}$, оформленная в виде табл. 2. Напомним, первый индекс вычисляемого элемента матрицы $\tilde{M}^*$ — это номер строки первой матрицы, а второй — это номер столбца второй матрицы (в производимых вычислениях, очевидно, матрицы одинаковы).

В соответствии с формулой $\tilde{M}^* = \tilde{M} \circ \tilde{M}$ вычисления по формуле композиций maxmin, например элемента b_{11} матрицы $\tilde{M}^*$, производились в два этапа:

1) из значений соответствующих элементов первой строки и первого столбца матрицы $\tilde{M}$ выбирались минимальные значения (логическое умножение):

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}9 \\ 1 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ \hline 1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0 & 0{,}3 & 0{,}6; \end{array}$$

2) из полученных чисел выбиралось одно максимальное значение, равное единице и являющееся теперь значением элемента b_{11}.

Аналогично производились вычисления значений остальных элементов, оформленных в виде табл. 2.

Далее по формуле (6.5) вычисляется разность матриц

$$\tilde{D} = \tilde{M}^* - \tilde{M},$$

представленная в виде табл. 3. В вычислениях определялась разность элементов матриц с одинаковыми адресами.

Таблица 2

$\tilde{M}^*$	1	2	3	4	5	6
1	1	0,4	0,7	0,7	0,6	0,9
2	0,6	1	0,4	0,4	0,4	0,8
3	0,3	0,3	1	0,3	0,3	0,3
4	0,2	0,2	1	1	0,3	0,2
5	0,6	0,4	1	1	1	0,6
6	0,6	0,3	0,5	0,6	0,6	1

Таблица 3

$\tilde{D}$	1	2	3	4	5	6
1	0	0,1	0,2	0	0	0
2	0,2	0	0,1	0,2	0,3	0
3	0,1	0,1	0	0,1	0	0,2
4	0,2	0,1	0	0	0,1	0,2
5	0,3	0	0	0	0	0
6	0	0,2	0,4	0,5	0,4	0

Анализ элементов матрицы $\tilde{D}$ в табл. 3 позволяет установить скрытые воздействия одного сектора экономики на другой, которые образуют инциденции второго порядка.

Для примера рассмотрим несколько наиболее значимых воздействий рассматриваемых секторов (которые имеют наибольшие значения элементов в табл. 3).

В соответствии с табл. 3 выпишем:

(6 → 4), здравоохранение имеет воздействие на энергетику со степенью воздействия 0,5;

(6 → 3) здравоохранение — промышленность;

(6 → 5) здравоохранение — наука и техника;

(2 → 5) сельское хозяйство — наука и техника;

(5 → 1) сельское хозяйство — население.

Каким образом происходят эти воздействия?

Восстановим промежуточные инциденции, с помощью которых можно обнаружить скрытые воздействия. Для этого используем табл. 1.

Рассмотрим выбранную выше пару секторов (6 → 4).

В шестой строке табл. 1 (сектор 6) выбираем наибольшее значение 0,6. Оно находится на пересечении с первым столбцом (сектор 1). Поэтому далее переходим к первой строке табл. 1 и выписываем значение 0,7 на пересечении с четвертым столбцом (сектор 4). Из полученных значений записываем наименьшее 0,6. Вычисления оформим в виде графа

$$(6 \to 4) \quad 6 \xrightarrow{0,6} 1 \xrightarrow{0,7} 4 \quad 0,6.$$

Обращаясь вновь к табл. 1, запишем прямое воздействие сектора 6 (шестая строка) на сектор 4 (четвертый столбец)

$$6 \xrightarrow{\qquad 0,1 \qquad} 4 \quad 0,1.$$

И наконец, вычисляем разность 0,6 – 0,1 = 0,5. Это значение соответствует элементу с адресом (6, 4) табл. 3.

Проведем аналогичные вычисления для остальных выбранных выше пар секторов:

$$(6 \to 3) \quad 6 \xrightarrow{0,6} 1 \xrightarrow{0,5} 3 \quad 0,5$$

$$6 \xrightarrow{\qquad 0,1 \qquad} 3 \quad 0,1 \qquad 0,5 - 0,1 = 0,4;$$

$$(6 \to 5) \quad 6 \xrightarrow{0,6} 1 \xrightarrow{0,6} 5 \quad 0,2$$

$$6 \xrightarrow{\qquad 0,2 \qquad} 5 \quad 0,6 \qquad 0,6 - 0,2 = 0,4;$$

$$(2 \to 5) \quad 2 \xrightarrow{0,4} 1 \xrightarrow{0,6} 5 \quad 0,4$$

$$2 \xrightarrow{\qquad 0,1 \qquad} 5 \quad 0,1 \qquad 0,4 - 0,1 = 0,3;$$

$$(5 \to 1) \quad 5 \xrightarrow{0,6} 6 \xrightarrow{0,6} 1 \quad 0,6$$

$$5 \xrightarrow{\qquad 0,3 \qquad} 1 \quad 0,3 \qquad 0,6 - 0,3 = 0,3.$$

Расшифруем полученные результаты.

(6 → 4). Без производства специальных вычислений табл. 3 ошибочно можно полагать, что здравоохранение напрямую почти не влияет на энергетику (см. табл. 1, элемент (6, 4)). Однако это влияние достаточно сильно проявляется через население (см. табл. 1, элементы (6, 1) и (1, 4)).

Точно так же здравоохранение напрямую слабо влияет на промышленность, науку и технику (пары (6 → 4), (6 → 5)), но это влияние опять-таки сказывается через население.

(2 → 5). Сельское хозяйство напрямую не влияет непосредственно на науку и технику, но это влияние сказывается через население.

Из (5 → 1) очевидно, что наука и техника влияют на население через здравоохранение.

Эти выводы без непосредственной оценки скрытых воздействий следуют из табл. 3, полученной с помощью вычислений.

Таким образом, с помощью нечетких матриц можно оценить скрытые влияния одного сектора экономики на другой. ■

Пример 6.8. Пример исследования скрытых воздействий в производственной области.

Рассматривается модель функционирования предприятия, у которого входными факторами являются:

a_1 — модернизация производственного оборудования;
a_2 — расширение ассортимента и объема товарных запасов;
a_3 — выпуск новых товаров;
a_4 — расширение торговой сети;
a_5 — мероприятия по рекламе.

Эти факторы образуют множество A.

Выходные факторы образуют множество B, которое состоит из:

b_1 — роста числа продаж (в физических единицах);
b_2 — изменения продажных цен;
b_3 — конкурентоспособности;
b_4 — качества продукции;
b_5 — территориального распределения.

Предполагается, что в данной модели входные a и выходные b параметры влияют сами на себя, а также входные факторы влияют на выходные.

В задаче необходимо оценить скрытое влияние входных факторов на выходные, характеризующие функционирование предприятия.

Решение. С помощью экспертов были составлены нечеткие матрицы $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, которые являются инциденциями множества A на множество A, B на B соответственно. Значения этих матрицы приводятся в табл. 1 и 2.

Таблица 1

$\tilde{A}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	0,7	0,5	0,1	0
a_2	0	1	0,1	0,4	0
a_3	0,7	0,9	1	0,5	0,8
a_4	0,5	0,8	0,7	1	0,9
a_5	0	0	0,4	0,7	1

Таблица 2

$\tilde{B}$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
b_1	1	0,6	1	0	0,4
b_2	1	1	1	0,1	0
b_3	0,8	0,3	1	0	0,6
b_4	1	1	0,9	1	0
b_5	0	0	0,2	0	1

Экспертами также была составлена матрица $\tilde{M}$ инциденций множества A на множество B (табл. 3).

По формуле (6.2) с помощью правила композиций maxmin вычислялась матрица $\tilde{A} \circ \tilde{M}$ (табл. 4). В таблице (и в таблицах ниже) номера строк соответствуют номерам входных факторов, а номера столбцов — номерам выходных факторов.

Таблица 3

$\tilde{M}$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0,9	0,3	0,1	0,9	0
a_2	0,8	0,2	0,3	0	0,6
a_3	1	0	0,8	0	0,6
a_4	1	0,2	0,7	0	1
a_5	1	0,6	0,7	0	0,1

Таблица 4

$\tilde{A} \circ \tilde{M}$	1	2	3	4	5
1	0,9	0,3	0,5	0,9	0,6
2	0,8	0,2	0,4	0	0,6
3	1	0,6	0,8	0,7	0,6
4	0,9	0,6	0,7	0,5	1
5	1	0,6	0,7	0	0,7

Инциденции второго порядка вычислялись с помощью матрицы формулы (6.4)

$$\tilde{M}^* = \tilde{A} \circ \tilde{M} \circ \tilde{B},$$

значения которой оформлены в виде табл. 5.

И наконец, по формуле (6.5) определялась разность матриц $\tilde{D} = \tilde{M}^* - \tilde{M}$, значения которой приводятся в табл. 6.

Таблица 5

$\tilde{M}^*$	1	2	3	4	5
1	0,9	0,9	0,9	0,9	0,6
2	0,8	0,6	0,8	0,1	0,6
3	1	0,7	1	0,7	0,6
4	1	0,6	0,9	0,5	1
5	1	0,6	1	0,5	0,7

Таблица 6

$\tilde{D}$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	0,6	0,8	0	0,6
a_2	0	0,4	0,5	0,1	0
a_3	0	0,7	0,2	0,7	0
a_4	0	0,4	0,2	0,5	0
a_5	0	0	0,3	0,5	0,6

Матрица $\tilde{D}$ позволяет установить скрытые воздействия входных параметров на выходные.

Рассмотрим наиболее значимые из них (см. табл. 6):

($a_1 \to b_3$) модернизация оборудования влияет на конкурентоспособность со степенью воздействия одного фактора на другой 0,8;

($a_3 \to b_2$) выпуск новых товаров — изменение продажных цен;

($a_3 \to b_4$) выпуск новых товаров — качество продукции;

($a_1 \to b_2$) модернизация оборудования — изменение цен;

($a_1 \to b_5$) модернизация оборудования — территориальное распределение;

($a_5 \to b_5$) мероприятия по рекламе — территориальное распределение.

Рассмотрим суть матрицы $\tilde{D}$.

Для обнаружения скрытых воздействий установим промежуточные инциденции. Просматривая все пути, ведущие от входных параметров к выходным, и выбирая наибольшие из минимумов между каждым элементом входа и элементом выхода, по табл. 1—6 определим инциденции, например, для пары ($a_1 \to b_3$):

$$1 \xrightarrow[\tilde{A}_{11}]{1} 1 \xrightarrow[\tilde{A}\tilde{M}_{11}]{0,9} 1 \xrightarrow[\tilde{B}_{13}]{1} 3 \quad \underset{\min}{0{,}9;}$$

$$1 \xrightarrow[\tilde{A}_{11}]{1} 1 \xrightarrow[\tilde{A}\tilde{M}_{12}]{0,3} 2 \xrightarrow[\tilde{B}_{23}]{1} 3 \quad \underset{\min}{0{,}3;}$$

$$1 \xrightarrow[\tilde{A}_{13}]{0,5} 3 \xrightarrow[\tilde{A}\tilde{M}_{33}]{0,8} 3 \xrightarrow[\tilde{B}_{33}]{1} 3 \quad \underset{\min}{0{,}5;}$$

$$1 \xrightarrow[\tilde{A}_{11}]{1} 1 \xrightarrow[\tilde{A}\tilde{M}_{14}]{0,9} 4 \xrightarrow[\tilde{B}_{43}]{0,9} 3 \quad \underset{\min}{0{,}9.}$$

Под стрелками показаны матрицы — таблицы, откуда были выбраны пути и значения элемента матрицы, адрес элемента указан в виде индекса при матрице.

Выберем наиболее существенные из них, равные 0,9 (первая и четвертая строки), и сравним с матрицей $\tilde{M}$ инциденций множества A на множество B (см. табл. 3):

$$1 \xrightarrow[\tilde{A}_{11}]{1} 1 \xrightarrow[\tilde{A}\tilde{M}_{11}]{0,9} 1 \xrightarrow[\tilde{B}_{13}]{1} 3 \quad \underset{\min}{0{,}9;}$$

$$1 \xrightarrow[\tilde{A}_{11}]{1} 1 \xrightarrow[\tilde{A}\tilde{M}_{14}]{0,9} 4 \xrightarrow[\tilde{B}_{43}]{1} 3 \quad \underset{\min}{0{,}9;}$$

$$1 \xrightarrow[\quad\tilde{M}_{13}\quad]{0,1} 3 \quad \underset{\tilde{M}_{13}}{0{,}1} \quad 0{,}9 - \underset{\tilde{D}_{13}}{0{,}1} = 0{,}8.$$

Аналогичные сравнения проводим для остальных пар, принятых в обсуждении значимыми в табл. 6 (порядок установления путей и промежуточные вычисления совершенно аналогичны паре (1—3)):

$$(3 \to 4) \quad 3 \xrightarrow[\tilde{A}_{31}]{0,7} 1 \xrightarrow[\tilde{A}\tilde{M}_{14}]{0,9} 4 \xrightarrow[\tilde{B}_{44}]{1} 4 \quad \underset{\min}{0{,}7;}$$

$$3 \xrightarrow[\quad\tilde{M}_{34}\quad]{0} 4 \quad \underset{\tilde{M}_{34}}{0} \quad 0{,}7 - \underset{\tilde{D}_{34}}{0} = 0{,}7.$$

$$(1 \to 2) \quad 1 \xrightarrow[\tilde{A}_{11}]{1} 1 \xrightarrow[\tilde{A}\tilde{M}_{14}]{0,9} 4 \xrightarrow[\tilde{B}_{42}]{1} 2 \quad \underset{\min}{0{,}9;}$$

$$1 \xrightarrow[\quad\tilde{M}_{12}\quad]{0,1} 2 \quad \underset{\tilde{M}_{12}}{0{,}3} \quad 0{,}9 - \underset{\tilde{D}_{12}}{0{,}3} = 0{,}6.$$

$$(1 \to 5) \quad 1 \xrightarrow[\tilde{A}_{12}]{0,7} 2 \xrightarrow[\tilde{A}\tilde{M}_{25}]{0,8} 5 \xrightarrow[\tilde{B}_{55}]{1} 2 \quad \underset{\min}{0{,}7;}$$

$$1 \xrightarrow[\quad\tilde{M}_{15}\quad]{0,1} 5 \quad \underset{\tilde{M}_{15}}{0{,}1} \quad 0{,}7 - \underset{\tilde{D}_{15}}{0{,}1} = 0{,}6.$$

$$(5 \to 5) \quad 5 \xrightarrow[\tilde{A}_{54}]{0{,}7} 4 \xrightarrow[\tilde{A}\tilde{M}_{45}]{1} 5 \xrightarrow[\tilde{B}_{55}]{1} 5 \quad \underset{\min}{0{,}7;}$$

$$5 \xrightarrow[\tilde{M}_{55}]{0{,}1} 5 \quad \underset{\tilde{M}_{55}}{0{,}1} \quad 0{,}7 - \underset{\tilde{D}_{55}}{0{,}1} = 0{,}6.$$

Таким образом, рассматривая все возможные пути, можно получить искомый результат. Очевидно, такое решение требует для анализа большого времени. Поэтому такие же результаты можно получить сразу по матрице $\tilde{D}$.

Результаты вычислений позволяют сделать следующие выводы о путях скрытых воздействий рассмотренных факторов.

1. Модернизация оборудования влияет на конкурентоспособность предприятия через рост числа продажи и качество продукции.

2. Выпуск новых товаров влияет на изменение продажных цен через модернизацию оборудования и качество продукции.

3. Выпуск новых товаров влияет также на качество продукции через модернизацию производства.

4. Модернизация производства влияет на изменение цен через качество продукции и на территориальное распределение через расширение ассортимента и объема товарных запасов.

5. Мероприятия по рекламе влияют на территориальное распределение через расширение торговой сети.

Таким образом, при выработке стратегии развития предприятия теория нечетких множеств позволяет решать количественные задачи по оценке степени влияния одних факторов производства на другие через скрытые воздействия. ■

6.6. Метод экспертных оценок

Деятельность человека связана с постоянной необходимостью принятия решений из нескольких альтернативных вариантов.

Процесс принятия того или иного ***решения*** можно разделить на этапы.

1. Выбор приемлемых альтернативных способов действия.
2. Описание вероятностей возможных исходов.
3. Ранжирование возможных исходов через их полезность.
4. Рациональный синтез информации, полученной на первых трех этапах.

На перечисленных выше этапах возникают трудности, связанные в основном с большим числом критериев выбора решений, которые не всегда согласованы между собой. Кроме того, имеет место высокая степень неопределенности, обусловленная недостаточной информацией для обоснованного принятия решений.

В настоящее время существует большое количество методов, направленных на обоснованное (на основе каких-либо убеждающих результатов) принятие решения. Одним из них является ***метод экспертных оценок***.

Пусть имеется m экспертов, которые определяют относительную важность n факторов. Обозначим оценку i-го фактора в баллах j-м экспертом C_{ij}. Каждому фактору присваивается определенное место (важность). Место, занятое i-м фактором по мнению j-го эксперта, назовем *рангом* r_{ij}.

Для количественной оценки факторов используются различные показатели общественного мнения.

К числу наиболее распространенных ***показателей общественного мнения*** относятся:

- *среднее арифметическое* C_i оценок каждого из факторов, определяемое выражением

$$C_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}.$$

При этом считается, что фактор, получивший наибольшую среднюю оценку в баллах, является наиболее важным. Средний ранг (место) каждого i-го фактора вычисляется по формуле

$$r_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} r_{ij}.$$

В этом случае чем меньше значение r_i, тем важнее фактор;

- *относительная частота* K_i максимальных оценок в баллах или присуждений экспертами первого места i-му фактору

$$K_i = \frac{m_i}{m},$$

где m_i — число экспертов, присудивших i-му фактору первое место или поставивших ему максимальную оценку в баллах.

Для суждений о ***степени согласованности*** мнений экспертов или групп экспертов обычно используются такие показатели, как коэффициент вариации оценок V_i и коэффициент конкордации W.

Коэффициент вариации V_i определяется для каждого i-го фактора и характеризует степень согласованности мнений экспертов об относительной важности этого фактора

$$V_i = \frac{\sigma_i}{C_i},$$

где $\sigma_i = \sqrt{D_i}$ — среднеквадратическое отклонение оценок каждого из факторов (параметров); $D_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(C_{ij} - C_i)^2$ — дисперсия оценок.

Из выражения для V_i очевидно, что чем меньше значение V_i, тем выше степень согласованности мнений экспертов относительно важности i-го фактора.

Для оценки степени согласованности мнений группы экспертов в целом по совокупности факторов используется *коэффициент конкордации*

$$W_i = \frac{12\Delta S^2}{m^2(n^3 - n)},$$

где ΔS^2 — мера степени согласованности суждений экспертов, определяемая по формуле

$$\Delta S^2 = m^2 \sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Подставив ΔS^2 в выражение для W, получаем

$$W_i = \frac{12\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \frac{n+1}{2}\right)^2}{n^3 - n}.$$

Значение коэффициента конкордации меняется от 0 до 1:

- случай $W = 0$ означает, что не существует связи между ранжированием экспертов;
- $W = 1$ означает, что все эксперты одинаково ранжируют факторы по степени их важности;
- изменение W от 0 до 1 соответствует увеличению степени согласованности мнений экспертов.

Пример 6.9. Пусть в результате опроса студентов трех курсов были определены баллы C_{ij}, оценивающие качество преподавания трех преподавателей.

Данное обстоятельство представлено таблицей.

Курс (эксперт), j	Преподаватель (фактор), i		
	1	2	3
1	0,1 (3)	0,9 (1)	0,4 (2)
2	0,2 (3)	0,5 (2)	0,9 (1)
3	0,3 (2)	0,2 (3)	0,9 (1)

В скобках указаны ранги r_{ij}, т.е. места, занятые преподавателями, по мнению данного курса.

Определить рейтинг каждого преподавателя, степень согласованности мнений опрошенных студентов на отдельных курсах и степень согласованности мнений студентов на курсах о каждом преподавателе.

Решение. Определим среднее арифметическое оценок каждого преподавателя:

$$C_1 = \frac{1}{3}(0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3) = 0{,}2; \qquad \text{(3-е место)}$$

$$C_2 = \frac{1}{3}(0{,}9 + 0{,}5 + 0{,}2) = 0{,}53; \qquad \text{(2-е место)}$$

$$C_3 = \frac{1}{3}(0{,}4 + 0{,}9 + 0{,}9) = 0{,}73. \qquad \text{(1-е место)}$$

Определим средние ранги, т.е. средние места, занятые преподавателями:

$$r_1 = \frac{1}{3}(3 + 3 + 2) = \frac{8}{3}; \qquad \text{(3-е место)}$$

$$r_2 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2; \qquad \text{(2-е место)}$$

$$r_3 = \frac{1}{3}(2 + 1 + 1) = \frac{4}{3}. \qquad \text{(1-е место)}$$

Вычислим общественное мнение в максимальной оценке преподавателей K_i.

1	2	3
0/3	1/3	2/3
3-е место	2-е место	1-е место

Как очевидно из результатов вычислений средних оценок, средних рангов r, относительных частот максимальных оценок, третий преподаватель по всем перечисленным показателям занимает первое место.

Для определения степени согласованности мнений студентов на отдельных курсах проведем следующие вычисления.

1. Дисперсии оценок по курсам

$$D_1 = \frac{1}{3}\left[(C_{11} - C_1)^2 + (C_{21} - C_1)^2 + (C_{31} - C_1)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(0{,}1 - 0{,}2)^2 + (0{,}2 - 0{,}2)^2 + (0{,}3 - 0{,}2)^2\right] = \frac{0{,}02}{3} \approx 0{,}0067.$$

Аналогично

$$D_2 = 0{,}0822; \quad D_3 = 0{,}0556.$$

2. Среднеквадратические отклонения

$$\sigma_1 = \sqrt{D_1} = \sqrt{0{,}0067} = 0{,}082;$$
$$\sigma_2 = \sqrt{D_2} = 0{,}287; \quad \sigma_3 = \sqrt{D_3} = 0{,}236.$$

3. Коэффициенты вариации

$$V_1 = \frac{\sigma_1}{C_1} = \frac{0{,}082}{0{,}2} = 0{,}41; \quad V_2 = \frac{\sigma_2}{C_2} = 0{,}54; \quad V_3 = \frac{\sigma_3}{C_3} = 0{,}32.$$

Результаты вычислений сведем в таблицу.

Результаты вычислений	Преподаватель, i		
	1	2	3
D_i	0,067	0,0822	0,0556
σ_i	0,082	0,287	0,236
V_i	0,41	0,54	0,32

Как очевидно из таблицы, наиболее высокая степень согласованности студентов имеет место относительно третьего преподавателя.

Оценим степень согласованности мнений студентов на курсах в целом. Для этого предварительно вычислим меру степени согласованности суждений студентов

$$\Delta S^2 = m^2\left[\left(r_1 - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \left(r_2 - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \left(r_3 - \frac{n+1}{2}\right)^2\right] =$$
$$= 3 \cdot 3\left[\left(\frac{8}{3} - \frac{3+1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{3+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{3+1}{2}\right)^2\right] =$$
$$= 9\left(\frac{4}{9} + 0 + \frac{4}{9}\right) = 8.$$

Таким образом, значение коэффициента конкордации

$$W = \frac{12\Delta S^2}{m^2(n^3 - n)} = \frac{12 \cdot 8}{9(3^3 - 3)} = \frac{12 \cdot 8}{9 \cdot 24} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

Вывод. Так как коэффициент конкордации близок к 0,5, то имеет место средняя степень согласованности мнений по курсам. ■

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определения нечеткого множества, функции принадлежности, нечеткого числа.
2. Какие операции предусмотрены над нечеткими множествами?
3. Что называется нечетким отношением?
4. Перечислите свойства нечетких отношений.
5. Дайте определения инциденции, нечеткой матрицы.

6. В чем смысл показателей мнений? Поясните смысл параметров в этих показателях.

7. Перечислите показатели степени согласованности мнений и перечислите смысл входящих в них параметров.

Задачи для самостоятельного решения

1. Изделие состоит из двух элементов и выходит из строя, если выходит из строя хотя бы один элемент. Время работы (в днях) до поломки первого и второго элементов есть нечеткие числа m_1 и m_2, задаваемые таблицами

x	60	75	90	120
$\varphi_{m_1}(x)$	1	0,8	0,2	0

x	60	75	90	120
$\varphi_{m_2}(x)$	1	0,7	0,5	0

Определить время работы изделия.

2. Даны две нечеткие матрицы инциденций A на B и B на C

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}8 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}; \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}5 & 0 & 0 \end{pmatrix}:$$

а) изобразить графы инциденций для каждой из матриц;

б) найти композицию maxmin, определяющую инциденции A на C.

3. Определить скрытые влияния в задаче: финансовая система предприятия описывается следующими факторами: a_1 — прибыль; a_2 — наличность; a_3 — основной финансовый капитал; a_4 — основной материальный капитал; b_1 — кредит у поставщиков; b_2 — долгосрочные кредиты; b_3 — прирост капитала; b_4 — платежеспособность по акциям.

Параметры $a_1 - a_4$ считаются входными, $b_1 - b_4$ — выходными.

Заданы матрицы инциденций $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{M}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 1 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 1 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Глава 7
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

7.1. Численные методы дифференцирования

С помощью математического моделирования решение научно-технической задачи сводится к решению задачи математической, являющейся ее моделью. Основным инструментом для решения сложных математических задач в настоящее время являются численные методы, позволяющие свести решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над числами. При этом результаты получаются в виде числовых значений.

7.1.1. Устойчивость. Корректность. Сходимость

Рассмотрим основные первоначальные требования к организации вычислительного процесса.

1. Устойчивость. Большая часть математических задач весьма чувствительна к неточностям использованных в них исходных данных. Эта чувствительность характеризуется так называемой *устойчивостью*.

Пусть в результате решения задачи по исходному значению величины x находится значение искомой величины y. Если исходная величина имеет абсолютную погрешность Δx, то решение имеет погрешность Δy.

Задача называется *устойчивой* по исходному параметру x, если решение y зависит от него непрерывно, т.е. малое приращение исходной величины Δx приводит к малому приращению искомой величины Δy. Другими словами, малые погрешности в исходной величине приводят к малым погрешностям в результате расчетов.

Отсутствие устойчивости означает, что даже незначительные погрешности в исходных данных приводят к большим погрешностям в решении или вовсе к невероятному результату. О подобных неустойчивых задачах также говорят, что они *чувствительны к погрешностям исходных данных*.

2. Корректность. Задача называется *поставленной корректно*, если для любых значений исходных данных из некоторого класса ее решение существует, единственно и устойчиво относительно исходных данных.

Следует отметить, что в настоящее время развиты методы решения некоторых некорректных задач. Это в основном так называемые *методы регуляризации*, которые опираются на замену исходной задачи корректно поставленной задачей. Иногда при решении корректно поставленной задачи может оказаться неустойчивым метод ее решения.

Численный алгоритм (метод) называется *корректным* в случае существования и единственности численного решения при любых значениях исходных данных, а также в случае устойчивости этого решения относительно погрешности исходных данных.

3. Сходимость. При анализе точности вычислительного процесса одним из важнейших критериев является *сходимость* численного метода. Она означает близость получаемого численного решения задачи к истинному решению.

Другой подход к понятию сходимости используется в дискретных методах. Эти методы заключаются в замене задачи с непрерывными параметрами на задачу, в которой значения функций вычисляются в фиксированных точках.

Здесь под *сходимостью метода* понимается стремление значений решения дискретной модели задачи к соответствующим значениям решения исходной задачи при стремлении к нулю параметра дискретизации (например, шага интегрирования).

Таким образом, для получения решения задачи с необходимой точностью ее постановка должна быть корректной, а используемый численный метод должен обладать устойчивостью и сходимостью.

7.1.2. Понятие о приближении функций

Пусть величина y является функцией аргумента x. Это означает, что любому значению x из области определения поставлено в соответствие допустимое значение y.

Вместе с тем на практике часто невозможно записать эту связь в виде явной зависимости $y = f(x)$. В некоторых случаях даже при известной зависимости $y = f(x)$ она настолько громоздка (например, содержит трудно вычисляемые выражения, сложные интегралы и т.п.), что ее использование в практических расчетах затруднительно.

На практике обычно вид связи между параметрами x и y неизвестен, а параметры задаются в виде таблицы $\{x_i\ y_i\}$

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Таблица демонстрирует, что дискретному множеству значений аргумента $\{x_i\}$ поставлено в соответствие множество значений функции $\{y_i\}$ в точках $i = 0, 1, ..., n$. Эти значения могут быть либо результатами расчетов, либо экспериментальными данными.

Сформулируем задачу о приближении (аппроксимации) функций: функцию $f(x)$ требуется приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой другой функцией (x) так, чтобы отклонение значений функций $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $\varphi(x)$ при этом называется *аппроксимирующей*.

На практике вид приближающей функции чаще всего определяют путем сравнения вида приближенно построенного графика функции $y = f(x)$ с графиками известных исследователю функций, заданных аналитически простыми по виду элементарными функциями:

1) $y = ax + b$ — линейная;
2) $y = ax^2 + bx + c$ — квадратичная;
3) $y = ax^m$ — степенная;
4) $y = ae^{mx}$ — показательная;
5) $y = \dfrac{1}{ax + b}$ — дробно-линейная;
6) $y = a\ln x + b$ — логарифмическая;
7) $y = \dfrac{a}{x} + b$ — гиперболическая;
8) $y = \dfrac{x}{ax + b}$ — дробно-рациональная.

По таблице $\{x_i\ y_i\}$ строится точечный график $f(x)$, затем проводится плавная линия, наилучшим образом отражающая характер расположения точек. По полученной таким образом кривой на качественном уровне устанавливается *вид приближающей функции* (рис. 7.1).

• Рис. 7.1, *а*. Прямая линия здесь близка к точкам наблюдений. Поэтому взаимосвязь x и y является почти линейной.

• Рис. 7.1, *б*. Взаимосвязь величин x и y описывается нелинейной функцией, и какую бы ни провели прямую ли-

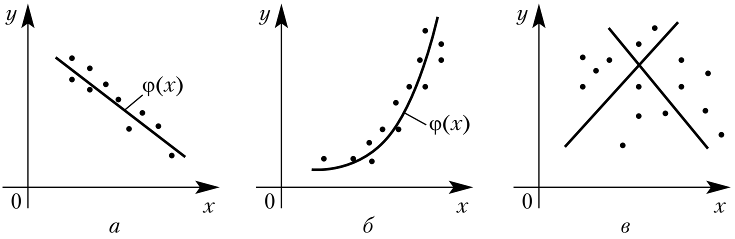


Рис. 7.1. **Аппроксимация функций**

нию, отклонение точек наблюдения от нее будет существенным и неслучайным.

В то же время проведенная ветка параболы достаточно хорошо отражает характер зависимости между величинами.

• Рис. 7.1, *в*. Явная взаимосвязь между переменными x и y отсутствует. Какую бы ни выбрали формулу связи, результаты ее параметризации будут здесь неудачными.

В частности, обе выбранные прямые одинаково плохи для того, чтобы делать выводы об ожидаемых значениях переменной y по значениям переменной x.

На практике очень часто применяется аппроксимация функции $f(x)$ многочленом вида

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m. \tag{7.1}$$

Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$, то аппроксимация называется *точечной*. К ней относятся интерполирование, среднеквадратическое приближение и др.

При построении приближения на непрерывном множестве точек, например на отрезке $[a, b]$, аппроксимация называется *непрерывной* или *интегральной*.

Одним из основных видов точечной аппроксимации является *интерполяция*.

Она состоит в следующем.

Пусть известные значения некоторой функции $f(x)$ образуют таблицу

x	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_n

Точки, указанные в таблице, называются *узловыми* или *узлами интерполяции*.

Требуется построить интерполяционный многочлен (7.1), принимающий в узловых точках x_i те же значения y_i, что и функция $f(x)$.

Если максимальная степень интерполяционного многочлена (7.1) $m = n$, то говорят о *глобальной интерполяции*.

Для интерполяции $f(x)$ используется одна функция $\varphi(x)$ на всем рассматриваемом интервале изменения аргумента x. Часто удобно строить интерполяционные многочлены отдельно для разных промежутков рассматриваемого интервала значений x. В этом случае имеет место *кусочная* или *локальная интерполяция*.

Геометрически интерполяция означает, что нужно найти кривую $y = \varphi(x)$ определенного типа, проходящую через заданную систему точек $M_i\,(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ (рис. 7.2).

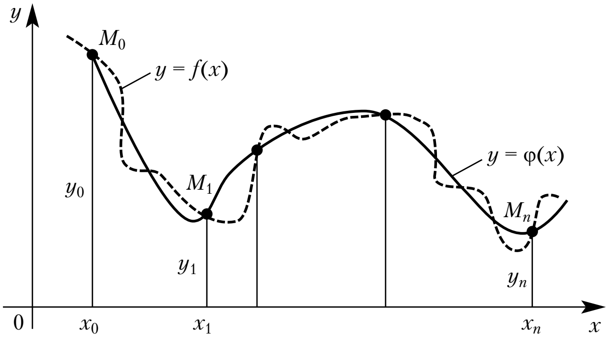


Рис. 7.2. **Интерполяция функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$**

Задача интерполирования может иметь в общей постановке бесчисленное множество решений или не иметь их совсем.

Кроме того, иногда интерполяционные многочлены используются и для приближенного вычисления функции вне рассматриваемого отрезка. Такое приближение называют *экстраполяцией*.

При интерполировании *основным условием аппроксимации* является прохождение графика интерполяционного многочлена через данные значения функции в узлах интерполяции. Однако в ряде случаев выполнение этого условия затруднительно или даже нецелесообразно.

Например, при большом количестве узлов интерполяции получается весьма высокая степень многочлена (7.1), особенно в случае глобальной интерполяции. Кроме того, табличные данные, полученные, например, путем измерений, могут содержать ошибки. В этом случае используют аппроксимацию функций.

Построение аппроксимирующего многочлена с условием обязательного прохождения его графика через эти экспериментальные точки означало бы тщательное повторение допущенных при измерениях ошибок.

Выход из этого положения может быть найден выбором такого многочлена, график которого проходит близко от данных точек (см. рис. 7.1). Понятие «близко» уточняется при рассмотрении разных видов приближения.

Одним из таких видов приближения является ***среднеквадратическое приближение*** функции с помощью многочлена (7.1).

При этом $m < n$, так как случай $m = n$ соответствует глобальной интерполяции. На практике стараются подобрать аппроксимирующий многочлен как можно меньшей степени, как правило, не более трех.

Для оценки точности приближения используется мера отклонения.

Мерой отклонения многочлена (x) от заданной функции $f(x)$ на множестве точек (x_i, y_i) $i = 0, 1, ..., n$ при среднеквадратическом приближении является величина S, равная сумме квадратов разностей межу значениями многочлена и функции в данных точках

$$S = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2.$$

Для построения аппроксимирующего многочлена нужно подобрать коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_m$ так, чтобы величина S была наименьшей. В этом состоит ***метод наименьших квадратов***.

В зависимости от степени интерполяционного многочлена на практике наибольшее распространение получили линейная и квадратичная интерполяции.

Линейная интерполяция. Интерполирующий многочлен отыскивается в виде $y = ax + b$.

Решая задачу интерполяции, найдем в таблице значений два соседних значения аргумента x_k и x_{k+1}, между которыми лежит заданное значение $x_k < x < x_{k+1}$. Соответствующие им значения функции $y_k = f(x_k)$ и $y_{k+1} = f(x_{k+1})$.

Будем считать, что в промежутке (x_k, x_{k+1}) данную функцию с достаточной степенью точности можно заменить линейной функцией, т.е. дугу графика функции можно заменить стягивающей ее хордой (рис. 7.3, *а*).

Такая замена называется *линейной интерполяцией.*

Уравнение прямой, проходящей через точки (x_k, y_k) и (x_{k+1}, y_{k+1}), имеет вид

$$\frac{y - y_k}{y_{k-1} - y_k} = \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k},$$

или, в более привычной форме, уравнения с угловым коэффициентом

$$y = y_k + \frac{y_{k-1} - y_k}{x_{k-1} - x_k}(x - x_k).$$

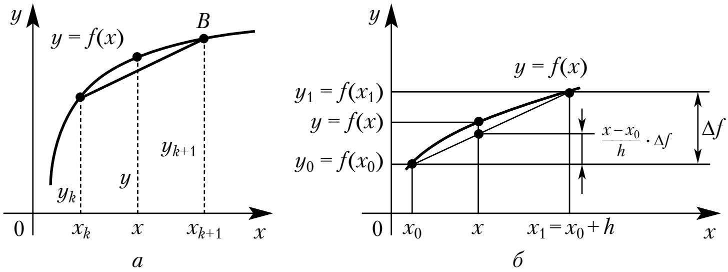


Рис. 7.3. **Линейная интерполяция**

При вычислениях функций с помощью таблиц также прибегают к линейному интерполированию. Если заданное значение x лежит между приведенными в таблице значениями x_0 и $x_1 = x_0 + h$, которым соответствуют значения функции $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1) = f(x_0) + \Delta f$, как показано на рис. 7.3, *б*, то считают, что

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta f.$$

Величины $\frac{x - x_0}{h}\Delta f$ называются *интерполяционными поправками*. Эти величины вычисляются с помощью таблицы или приводятся в дополнении к таблице.

Если по заданным значениям функции необходимо найти приближенное значение аргумента, то необходимо произвести ***обратное интерполирование***.

Пример 7.1. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	2	2,04	2,08
y	2,42	2,88	3,38

а) Используя линейное интерполирование, найти значение $f(2{,}008)$.

б) Чему равен x, если $f(x) = 3{,}1$?

Решение.

а) Имеем $x_0 = 2$; $f(x_0) = 2{,}42$; $x_1 = 2{,}04$; $f(x_1) = 2{,}88$;

$h = x_1 - x_0 = 2{,}04 - 2{,}0 = 0{,}04$; $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = 2{,}88 - 2{,}42 = 0{,}46$.

Теперь по интерполяционной формуле получим

$$y = f(2{,}008) \approx 2{,}42 + \frac{2{,}008 - 2{,}0}{0{,}04} \cdot 0{,}46 = 2{,}512.$$

б) Обратное интерполирование можно провести по той же формуле, в которой необходимо поменять местами переменные x и y,

$$\varphi(y) = \varphi(y_0) + \frac{y - y_0}{h}\Delta\varphi,$$

где $x = \varphi(y)$ — неизвестное значение обратной функции.

Имеем $y_0 = 2{,}88$; $\varphi(y_0) = 2{,}04$; $y_1 = 3{,}38$; $\varphi(y_1) = 2{,}08$; $h = y_1 - y_0 = 3{,}38 - 2{,}88 = 0{,}50$; $\Delta\varphi = \varphi(y_1) - \varphi(y_0) = 2{,}08 - 2{,}04 = 0{,}04$.

Теперь по интерполяционной формуле получим

$$x = \varphi(3{,}1) \approx 2{,}4 + \frac{3{,}1 - 2{,}88}{0{,}5} \cdot 0{,}04 = 2{,}0576 \approx 2{,}058. \blacksquare$$

В ряде случаев точность нахождения неизвестных значений с помощью линейного интерполирования оказывается недостаточной и используются другие методы интерполирования, например *квадратичная интерполяция*.

Квадратичная интерполяция. В этом случае часть графика функции заменяется параболой $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 7.4).

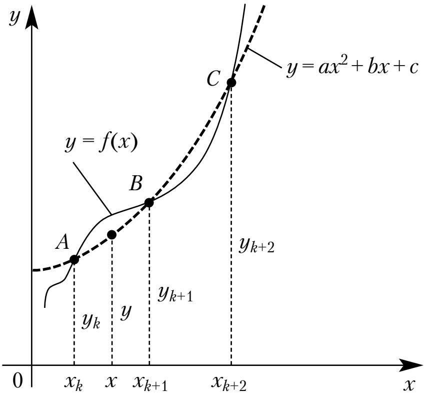


Рис. 7.4. **Квадратичная интерполяция**

Значения коэффициентов в этой формуле находят, подставив в нее пары значений (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), (x_{k+2}, y_{k+2}) и решив полученную систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными a, b, c.

7.2. Аппроксимация производных

Напомним, что *производной* функцией $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции y к приращению аргумента x при стремлении x к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{7.2}$$

Обычно для вычисления производных используют готовые формулы (таблицу производных) и к выражению (7.2) не прибегают. Однако в численных расчетах на ЭВМ использование этих формул не всегда удобно и возможно.

В частности, функция $y = f(x)$ может быть задана в виде таблицы значений. В таких случаях производную находят, опираясь на формулу (7.2).

Значение шага Δx полагают равным некоторому конечному числу и для вычисления значения производной получают приближенное равенство

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{7.3}$$

Это соотношение называется *аппроксимацией* (*приближением*) *производной с помощью отношения конечных разностей*, так как значения Δy, Δx в формуле (7.3) конечные, в отличие от их бесконечно малых значений в формуле (7.2).

Рассмотрим аппроксимацию производной для функции $y = f(x)$, заданной в табличном виде: $y_0, y_1, \ldots$ при $x = x_0, x_1, \ldots$

Пусть *шаг* — разность между соседними значениями аргумента — постоянный и равен h. Запишем выражения для производной y_1 при $x = x_1$.

В зависимости от способа вычисления конечных разностей можно записать разные формулы для вычисления производной в одной и той же точке.

В соответствии с выражением (7.2) они имеют вид

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0, \quad \Delta x = h, \quad y_1' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}$$

с помощью *левых разностей*;

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta x = h, \quad y_1' \approx \frac{y_2 - y_1}{h}$$

с помощью *правых разностей*;

$$\Delta y_1 = y_2 - y_0, \quad \Delta x = 2h, \quad y_1' \approx \frac{y_2 - y_0}{h}$$

с помощью *центральных разностей*.

Можно найти также аналогичные выражения для старших производных. Например,

$$y'' = (y')' \approx \frac{y_2' - y_1'}{h} \approx \frac{(y_2 - y_1)/h - (y_1 - y_0)/h}{h} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}.$$

Таким образом, по формуле (7.3) можно найти приближенные значения производных любого порядка.

В качестве приближенного значения производной порядка k функции $f(x)$ можно принять соответствующее значение производной аппроксимирующей функции $\varphi(x)$, т.е.

$$f^{(k)}(x) \approx \varphi^{(k)}(x).$$

В этом случае величина

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x),$$

характеризующая отклонение приближенного значения производной от ее истинного значения, называется *погрешностью аппроксимации* k-й производной.

При численном дифференцировании функции, заданной в виде таблицы с шагом h, эта погрешность зависит от величины шага h, и ее записывают в виде $O(h^k)$.

Это значит, что погрешность имеет тот же порядок величины, что и h^k. Показатель степени k называется *порядком погрешности* аппроксимации производной (или просто порядком аппроксимации). При этом предполагается, что значение шага по модулю меньше единицы.

Оптимальная точность дифференцирования может быть достигнута за счет ***регуляризации процедуры численного дифференцирования***. Простейшим способом регуляризации является такой выбор шага h, при котором справедливо неравенство

$$|f(x + h) - f(x)| > \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое наперед заданное относительно малое число.

При вычислении производной данный способ исключает вычитание близких по величине чисел, которое обычно приводит к увеличению погрешности. Это тем более опасно при последующем делении приращения функции на малое число h.

Другой способ регуляризации — сглаживание табличных значений функции подбором определенной гладкой аппроксимирующей функции, например многочлена.

7.3. Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных $u = f(x, y)$, заданную в табличном виде

$$u_{ij} = f(x_i, y_j),$$

где $x_i = x_0 + ih_1$, $i = 0, 1, ..., m$; $y_i = y_0 + ih_2$, $i = 0, 1, ..., n$.

В табл. 7.1 представлена часть данных, которые в дальнейшем понадобятся в качестве обозначений, используемых в соответствующих формулах.

Используя понятие частной производной, можно приближенно записать для малых значений шагов h_1, h_2 соотношения

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{f(x + h_1, y) - f(x, y)}{h_1};$$

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{f(x, y + h_2) - f(x, y)}{h_2}.$$

Воспользовавшись введенными выше обозначениями, получим следующие приближенные выражения (аппроксимации) для частных производных в узле (x_i, y_j) с помощью отношений конечных разностей

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h_1}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_2}.$$

Таблица 7.1

Данные обозначений для аппроксимации

y	x				
	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
y_{i-2}	$u_{i-2,j-2}$	$u_{i-1,j-2}$	$u_{i,j-2}$	$u_{i+1,j-2}$	$u_{i+2,j-2}$
y_{i-1}	$u_{i-2,j-1}$	$u_{i-1,j-1}$	$u_{i,j-1}$	$u_{i+1,j-1}$	$u_{i+2,j-1}$
y_i	$u_{i-2,j}$	$u_{i-1,j}$	$u_{i,j}$	$u_{i+1,j}$	$u_{i+2,j}$
y_{i+1}	$u_{i-2,j+1}$	$u_{i-1,j+1}$	$u_{i,j+1}$	$u_{i+1,j+1}$	$u_{i+2,j+1}$
y_{i+2}	$u_{i-2,j+2}$	$u_{i-1,j+2}$	$u_{i,j+2}$	$u_{i+1,j+2}$	$u_{i+2,j+2}$

Окончательные формулы для некоторых аппроксимаций частных производных представлены в табл. 7.2.

В первом столбце таблицы указывается комбинация используемых узлов (шаблон), которые отмечены кружочками. Значения производных вычисляются в узле (x_i, y_j), отмеченном крестиком.

Напомним, что в табл. 7.1 и 7.2 по горизонтали изменяются переменная x и индекс i, по вертикали — переменная y и индекс j.

Таблица 7.2

Формулы аппроксимаций частных производных

Шаблон	Аппроксимация
○ × ○	$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} = \dfrac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_1}$
○ × ○	$\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} = \dfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_2}$
○ ⊗ ○	$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} = \dfrac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2}$
○ ⊗ ○	$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij} = \dfrac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_1^2}$
○ ○ × ○ ○	$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{ij} = \dfrac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{4h_1h_2}$
○ ○ × ○ ○	$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} = \dfrac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{4h_1}$
○ ○ × ○ ○	$\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} = \dfrac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{4h_2}$
○ ○ ⊗ ○ ○	$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} = \dfrac{-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{ij} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}}{12h_1^2}$
○ ○ ⊗ ○ ○	$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial u^2}\right)_{ij} = \dfrac{-u_{i,j+2} + 16u_{i,j+1} - 30u_{ij} + 16u_{i,j-1} - u_{i,j-2}}{12h_2^2}$

Окончание табл. 7.2

Шаблон	Аппроксимация
○ ○ ○ ○ ⊗ ○ ○ ○ ○	$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} = \dfrac{1}{3h_1^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})$
○ ○ ○ ○ ⊗ ○ ○ ○ ○	$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij} = \dfrac{1}{3h_2^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1})$

Приведенные аппроксимации производных могут быть использованы при построении разностных схем для решения уравнений с частными производными.

7.4. Элементы разностных схем

Среди численных методов решения дифференциальных уравнений широко распространенными являются ***разностные методы***. Они основаны на введении определенной разностной сетки в рассматриваемой области.

Значения производных, начальные и граничные условия выражаются через значения функций в узлах сетки, в результате чего формируется система алгебраических уравнений, называемая *разностной схемой*.

Решая эту систему уравнений, можно найти в узлах сетки значения сеточных функций, которые приближенно считаются равными значениям искомых функций.

7.4.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Как указывалось выше, известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса функций. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач, нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной.

Наиболее распространенным и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений является *метод конечных разностей.* Его сущность состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек, называемых *узлами.* Эти узлы составляют *разностную сетку.*

Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется *сеточной.* Искомую функцию и сеточную функцию будем обозначать соответственно Y и y, чтобы подчеркнуть их различие: Y — функция непрерывно меняющегося аргумента x, а y — дискретная сеточная функция, определенная на дискретном множестве.

Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. При этом для входящих в уравнение производных используются соответствующие конечно-разностные соотношения.

Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его *аппроксимацией на сетке* или *разностной аппроксимацией.*

Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значения сеточной функции в узлах сетки.

Обычно для компактности записи дифференциальных уравнений в теории разностных схем начальные и граничные условия представляются в определенном символическом виде, называемом *оператором.*

Например, любое из уравнений

$$Y' = f(x), \quad Y'' = f(x), \quad Y''' + k^2 Y = f(x)$$

можно записать в виде

$$LY = F(x).$$

Здесь L — дифференциальный оператор, содержащий операции дифференцирования; его форма различна для разных дифференциальных уравнений.

Область изменения аргумента x можно обозначить через G, т.е. $x \in G$. В частности, областью G при решении обыкновенных дифференциальных уравнений может быть некоторый отрезок $[a, b]$, полуось $x > 0$ или $t > 0$ и т.п.

Дополнительные условия на границе также представляются в операторном виде.

Например, любое из условий

$$Y(0) = A,\ Y(a) = 0,\ Y(b) = 1,\ Y'(0) = B$$

можно записать в виде

$$lY = \Phi(x), \quad x \in \Gamma.$$

Здесь l — оператор начальных или граничных условий, $\Phi(x)$ — правая часть этих условий, Γ — граница рассматриваемой области, т.е. $x = 0$, $x = a$, $x = b$ и т.п.

Таким образом, исходную задачу для дифференциального уравнения с заданными начальными и граничными условиями, называемую в дальнейшем *дифференциальной задачей*, можно в общем случае записать в виде

$$LY = F(x), x \in G; \tag{7.4}$$

$$lY = \Phi(x), x \in \Gamma. \tag{7.5}$$

В методе ***конечных разностей*** исходное дифференциальное уравнение (7.4) заменяется разностным уравнением путем аппроксимации производных соответствующими конечно-разностными соотношениями.

Для этого в области G введем сетку, шаг h которой для простоты будем считать постоянным.

Совокупность узлов x_0, x_1, ... обозначим через g_h. Значения искомой функции Y в узлах сетки заменяются значениями сеточной функции y_h, которая является решением разностного уравнения.

Сеточную функцию, принимающую значения y_i в узлах сетки, можно считать функцией целочисленного аргумента i.

Итак, дифференциальное уравнение (7.4) заменяется разностным уравнением, которое также можно записать в операторном виде

$$L_h y_h = f_h, \quad x \in g_h, \tag{7.6}$$

где L_h — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор L.

Как известно, погрешность этой аппроксимации в некоторой точке x может быть представлена в виде

$$\varepsilon(x) = O(h^k).$$

При этом говорят, что в данной точке x имеет место *аппроксимация k-го порядка*. Индекс h в разностном уравнении (7.6) подчеркивает, что величина шага является параметром разностной задачи.

Поэтому зависимость (7.6) можно рассматривать как целое семейство разностных уравнений, которые зависят от параметра h.

При решении дифференциальных уравнений обычно требуется оценить погрешность аппроксимации не в одной точке, а на всей сетке g_h, т.е. в точках x_0, x_1, ...

В качестве погрешности аппроксимации ε_h на сетке можно принять некоторую величину, связанную с погрешностями аппроксимации в узлах, например

$$\varepsilon_h = \max_i \varepsilon(x_i), \quad \varepsilon_h = \left[\sum_i \varepsilon^2(x_i)\right]^{1/2}.$$

В этом случае L_h имеет k-й порядок аппроксимации на сетке, если $\varepsilon_h = O(h^k)$.

Наряду с аппроксимацией (7.6) дифференциального уравнения (7.4) необходимо также аппроксимировать дополнительные условия на границе (7.5). По аналогии с выражением (7.6) эти условия запишутся в виде

$$l_h y_h = \varphi_h, \quad x \in \gamma_h, \tag{7.7}$$

где γ_h — граничные узлы сетки, т.е. $\gamma_h \in \Gamma$.

Индекс h, как и в формуле (7.6), означает зависимость разностных условий на границе от значения шага.

Совокупность разностных уравнений (7.6), (7.7), аппроксимирующих исходное дифференциальное уравнение и дополнительные условия на границе, называется *разностной схемой.*

Решение разностной задачи, в результате которого находятся значения сеточной функции y_i в узлах x_i, приближенно заменяет решение $Y(x)$ исходной дифференциальной задачи.

Однако не всякая разностная схема дает удовлетворительное решение, т.е. получаемые значения сеточной функции y_i не всегда с достаточной точностью аппроксимируют значения искомой функции $Y(x_i)$ в узлах сетки. Здесь важную роль играют такие понятия, как устойчивость, корректность и сходимость разностной схемы.

Под *устойчивостью разностной схемы* понимается непрерывная зависимость ее решения от входных данных (коэффициентов уравнений, правых частей, начальных и граничных условий). Или, иными словами, малому изменению входных данных соответствует малое изменение решения.

В противном случае разностная схема называется *неустойчивой*.

Разностная схема называется *корректной*, если ее решение существует и единственно при любых входных данных, а также если эта схема устойчива.

При использовании метода конечных разностей необходимо знать, с какой точностью решение разностной задачи приближает решение исходной дифференциальной задачи. Рассмотрим погрешность δ_h, равную разности значений сеточной функции и искомой функции в узлах сетки, т.е.

$$\delta_h = y_h - Y_h,$$

откуда

$$y_h = Y_h + \delta_h.$$

Подставляя это значение y_h в разностную схему (7.6), (7.7), получаем

$$\begin{aligned} &L_hY_h + L_{hh} = f_h,\ x \in g_h; \\ &l_hY_h + l_h\delta_h = \varphi_h,\ x \in \gamma_h; \\ &L_h\delta_h = R_h,\ l_h\delta_h = r_h, \end{aligned}$$

где $R_h = f_h - L_hY_h$ — погрешность аппроксимации (*невязка*) для разностного уравнения; $r_h = \varphi_h - l_hY_h$ — погрешность аппроксимации для разностного граничного условия.

Если ввести характерные значения R и r невязок R_h и r_h, например, взять их максимальные по модулю значения на сетке, то при

$$R = O(h^k) \quad \text{и} \quad r = O(h^k)$$

разностная схема (7.6), (7.7) имеет k-й порядок аппроксимации на решении.

Введем аналогичным образом характерное значение погрешности решения δ_h. Тогда разностная схема сходится, если $\delta \to 0$ при $h \to 0$.

Если при этом

$$\delta \leqslant Mh^k,$$

то говорят, что разностная схема имеет точность *k-го порядка* или *сходится со скоростью $O(h^k)$*.

Здесь $M > 0$ — некоторая постоянная величина, не зависящая от h. Предполагается также, что $h > 0$; в противном случае в указанных оценках необходимо взять $|h|$.

В теории разностных схем доказывается, что если разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную дифференциальную задачу, то она сходится.

Иными словами, ***из устойчивости и аппроксимации разностной схемы следует ее сходимость***. Это позволяет свести трудную задачу исследования сходимости и оценки порядка точности разностной схемы к изучению погрешности аппроксимации и устойчивости, что значительно легче.

На основании анализа вида разностного уравнения можно провести классификацию численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Напомним, что в задаче Коши требуется найти функцию $Y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y)$$

и принимающую при $x = x_0$ заданное значение

$$Y_0 = Y(x_0).$$

Эта задача с помощью конечных разностей сводится к разностной задаче относительно сеточной функции y такой, что

$$y_{i+1} = F(x_i, h_i, y_{i+1}, y_i, ..., y_{i-k+1}),\ i = 1, 2, ...; \tag{7.8}$$

$$y_0 = Y_0. \tag{7.9}$$

Здесь разностное уравнение (7.8) записано в общем виде, а конкретное выражение его правой части зависит от способа аппроксимации производной. Для каждого численного метода получается свой вид уравнений (7.8), (7.9).

Если в правой части (7.8) отсутствует y_{i+1}, т.е. значение y_{i+1} явно вычисляется по k предыдущим значениям

$$y_i\,, y_{i1}, ..., y_{i-k+1},$$

то разностная схема называется *явной*.

При этом получается *k-шаговый метод*: $k = 1$ — одношаговый, $k = 2$ — двухшаговый и т.д.

В одношаговых методах для вычисления y_{i+1} используется лишь одно ранее найденное значение на предыдущем шаге y_i, в многошаговых — многие из них.

Если в правую часть уравнения (7.8) входит искомое значение y_{i+1}, то решение этого уравнения усложняется.

В таких методах, называемых *неявными*, приходится решать уравнение (7.8) относительно y_{i+1} с помощью итерационных методов.

Отметим особенность одношаговых методов, состоящую в том, что для получения решения в каждом новом расчетном узле достаточно иметь значение сеточной функции лишь в предыдущем узле. Это позволяет непосредственно начать счет при $i = 0$ по известным начальным значениям. Кроме того, указанная особенность допускает изменение шага в любой точке в процессе счета, что позволяет строить численные алгоритмы с автоматическим выбором шага.

Другой путь построения разностных схем основан на том, что для вычисления значения y_{i+1} используются результаты не одного, а k предыдущих шагов, т.е. значения

$$y_{i-k+1}, y_{i-k+2}, ..., y_i.$$

В этом случае получается k-шаговый метод.

Наиболее часто в экономических задачах применяется семейство многошаговых методов, которые используют неявные схемы — ***методы прогноза и коррекции*** или ***методы предиктор-корректор***.

Суть этих методов состоит в следующем. На каждом шаге вводятся два этапа, использующие многошаговые методы:

1) с помощью явного метода (*предиктора*) по известным значениям функции в предыдущих узлах находится начальное приближение $y_{i+1} = y_{i+1}^{(0)}$ в новом узле;

2) используя неявный метод (*корректор*), в результате итераций находят приближения $y_{i+1}^{(1)}, y_{i+1}^{(2)}, ...$

Рассмотрим наиболее простые методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата.

Метод Эйлера. Известно, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в некоторой области поле направлений. Решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями дает кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек $x_0, x_1, x_2, ...$ и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию (рис. 7.5).

При подстановке заданных начальных условий (x_0, y_0) в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем угло-

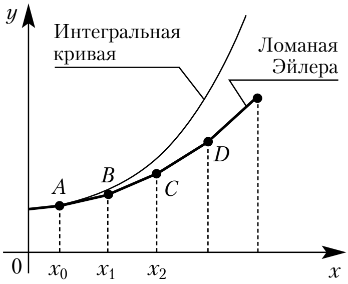


Рис. 7.5. **Метод Эйлера**

вой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = y' = f(x_0, y_0).$$

Заменив на отрезке $[x_0, x_1]$ интегральную кривую на касательную к ней, получаем

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Производя аналогичную операцию для отрезка $[x_1, x_2]$, получаем

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется *ломаной Эйлера* (см. рис. 7.5).

Можно записать общую формулу вычислений

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковом расстоянии h, называемом *шагом вычисления*, получаем формулу

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h.$$

Следует отметить, что точность метода Эйлера относительно невысока. Увеличить точность можно, уменьшив шаг вычислений, однако это приведет к усложнению расчетов. Поэтому на практике применяется так называемый *уточненный метод Эйлера* или *формула пересчета*.

Суть метода состоит в том, что в формуле

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$$

вместо значения $y'_0 = f(x_0, y_0)$ берется среднее арифметическое значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1)$.

Тогда уточненное значение

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2} h,$$

после чего находится значение производной в точке $(x_1, y_1^{(1)})$.

Заменяя $f(x_0, y_0)$ средним арифметическим значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1^{(1)})$, находят второе уточненное значение y_1:

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2} h,$$

затем – третье значение

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})}{2} h$$

и т.д., пока два последовательных уточненных значения не совпадут в пределах заданной степени точности. Тогда это значение принимается за ординату точки ломаной Эйлера.

Аналогичная операция производится для остальных значений y. Подобное уточнение позволяет существенно повысить точность результата.

Метод Рунге—Кутта. Метод Рунге—Кутта является более точным по сравнению с методом Эйлера. Суть уточнения состоит в том, что искомое решение представляется в виде разложения в ряд Тейлора:

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + y_i''\frac{h^2}{2!} + y_i'''\frac{h^3}{3!} + y_i^{\mathrm{IV}}\frac{h^4}{4!} + \ldots ,$$

когда искомая функция представляется в виде таблицы.

Если в этой формуле ограничиться двумя первыми слагаемыми, то получим формулу метода Эйлера. Метод Рунге—Кутта учитывает четыре первых члена разложения

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + y_i''\frac{h^2}{2!} + y_i'''\frac{h^3}{3!} = y_i + \Delta y_i.$$

В методе Рунге—Кутта приращения Δy_i предлагается вычислять по формуле

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}),$$

где коэффициенты k_i вычисляются по формулам

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i);$$

$$k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2!}\right);$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2!}\right);$$

$$k_4^{(i)} = hf(x_i + h; y_i + k_3^{(i)}).$$

Пример 7.2. Решить методами Рунге—Кутта и Эйлера, а также уточненным методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = x + y$ при начальном условии $y(0) = 1$ на отрезке [0, 0,5] с шагом $h = 0{,}1$.

Сравнить с точным решением.

Решение. Решаем методом Рунге—Кутта.

Для $i = 0$ вычислим коэффициенты k_i.

$$k_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0{,}1(x_0 + y_0) = 0{,}1(0 + 1) = 0{,}1;$$

$$k_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2!}\right) = 0{,}1(0{,}05 + 1{,}05) = 0{,}11;$$

$$k_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2!}\right) = 0{,}1(0{,}05 + 1{,}055) = 0{,}1105;$$

$$k_4^{(0)} = hf(x_0 + h; y_0 + k_3^{(0)}) = 0{,}1(0{,}1 + 1{,}1105) = 0{,}1211;$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) =$$

$$= \frac{1}{6}(0{,}1 + 0{,}22 + 0{,}221 + 01211) = 0{,}1104;$$

$$x_1 = x_0 + h = 0{,}1;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}1104 = 1{,}1104 \text{ и т.д.}$$

Результаты последующих вычислений сведем в таблицу.

i	x_i	k		Δy_i	y_i
0	0	1	0,1000	0,1104	1
		2	0,1100		
		3	0,1105		
		4	0,1211		
1	0,1	1	0,1210	0,1325	1,1104
		2	0,1321		
		3	0,1326		
		4	0,1443		

Окончание таблицы

i	x_i	k		Δy_i	y_i
2	0,2	1	0,1443	0,1569	1,2429
		2	0,1565		
		3	0,1571		
		4	0,1700		
3	0,3	1	0,1700	0,1840	1,3998
		2	0,1835		
		3	0,1842		
		4	0,1984		
4	0,4	1	0,1984	0,2138	1,5838
		2	0,2133		
		3	0,2140		
		4	0,2298		
5	0,5				1,7976

Решим этот же пример методом Эйлера.

Применяем формулу $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$.

Имеем:

$$x_0 = 0,\quad y_0 = 1,\quad f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 1;$$

$$hf(x_0, y_0) = h(x_0 + y_0) = 0{,}1;$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1;$$

$$x_1 = 0{,}1,\quad y_0 = 1{,}1,\quad f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 1{,}2;$$

$$hf(x_1, y_1) = h(x_1 + y_1) = 0{,}12;$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}12 = 1{,}22.$$

Производя аналогичные вычисления далее, выпишем таблицу значений.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,22	1,362	1,528	1,721

Применим теперь уточненный метод Эйлера. Результаты вычислений сведем в следующую таблицу:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,243	1,400	1,585	1,799

Для сравнения точности приведенных методов решим данное уравнение аналитически и найдем точные значения функции y на заданном отрезке.

Исходное уравнение, записанное в виде $y' - y = x$, является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка, которое можно решить методом вариации постоянной.

Решим соответствующее однородное уравнение

$$y' - y = 0; \quad y' = y; \quad \frac{dy}{dx} = y; \quad \frac{dy}{y} = dx; \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx;$$

$$\ln|y| = x + \ln|C|; \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x; \quad y = Ce^x.$$

Проводим вариацию постоянной C. Тогда решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C(x)e^x;$$

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x;$$

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = x + C(x)e^x; \; C'(x)e^x = x; \; C'(x) = xe^{-x};$$

$$C(x) = \int xe^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x; \, dv = e^{-x}dx; \\ du = dx; \, v = -e^{-x}; \end{array} \right\} =$$

$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C(x)e^x, \text{ т.е. } y = y = Ce^x - x - 1.$$

Подставляя начальное условие в общее решение, получаем

$$1 = C - 0 - 1; \quad C = 2.$$

Таким образом, частное решение имеет вид $Y = 2e^x - x - 1$.

Для сравнения полученных результатов составим таблицу.

i	x_i	y_i			Точное значение $Y = 2e^x - x - 1$
		метод Эйлера	уточненный метод Эйлера	метод Рунге — Кутта	
0	0	1	1	1	1
1	0,1	1,1	1,1	1,1104	1,1103
2	0,2	1,22	1,243	1,2429	1,2428
3	0,3	1,362	1,4	1,3998	1,3997
4	0,4	1,528	1,585	1,5838	1,5837
5	0,5	1,721	1,799	1,7976	1,7975

Как очевидно из полученных результатов, метод Рунге — Кутта дает наиболее точный ответ. Точность метода в примере составляет 0,0001.

Кроме того, следует обратить внимание на то, что ошибка (расхождение между точным и приближенным значениями) увеличивается с каждым шагом вычислений. Это обусловлено тем, что, во-первых, полученное приближенное значение округляется на каждом шаге, а во-вторых, тем, что в качестве основы вычисления принимается значение, полученное на предыдущем шаге, т.е. приближенное значение.

Таким образом, происходит накопление ошибки. Это хорошо очевидно из таблицы. С каждым новым шагом приближенное значение все более отличается от точного значения. ■

7.4.2. Дифференциальные уравнения с частными производными

Как уже отмечалось выше, построение разностных схем решения уравнений с частными производными основано на введении сетки в рассматриваемом пространстве. Узлы сетки являются расчетными точками.

Пример простейшей прямоугольной области $G(x, y)$ с границей Г в двумерном случае показан на рис. 7.6. Стороны прямоугольника

$$a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$$

делятся на элементарные отрезки точками

$$x_i = a + ih_1, i = 0, 1, ..., m \quad \text{и} \quad y_i = c + jh_2, j = 0, 1, ..., n.$$

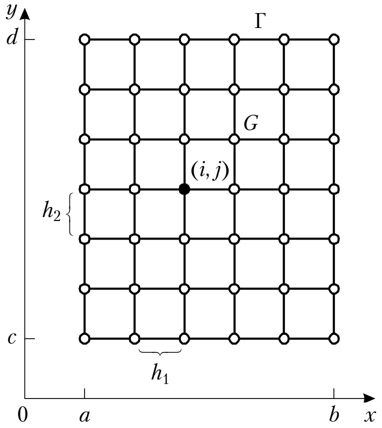


Рис. 7.6. **Прямоугольная сетка**

Через эти точки проведем два семейства координатных прямых x = const и y = const, образующих сетку с прямоугольной ячейкой.

Любой узел этой сетки, номер которого (i, j), определяется координатами (x_i, y_i).

Аналогично вводятся сетки для многомерных областей, содержащих более двух измерений. На рис. 7.7 показан элемент сетки в виде прямоугольного параллелепипеда для трехмерной области.

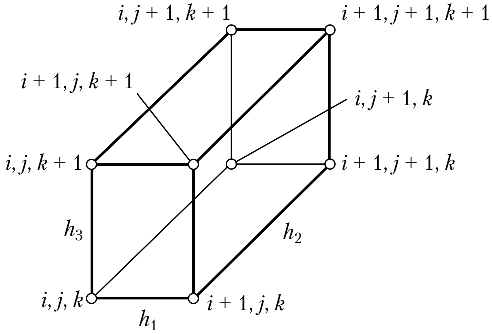


Рис. 7.7. **Элемент сетки**

Прямоугольные сетки наиболее удобны при организации вычислительного алгоритма. Вместе с тем некоторые схемы используют сетки с треугольными и даже шестиугольными ячейками.

Узлы сетки, лежащие на границе Г области G, называются *граничными узлами*, все остальные узлы — *внутренними*.

Поскольку начальные и граничные условия при постановке задач формулируются на границе расчетной области, то их можно считать заданными в граничных узлах сетки.

Иногда граничные точки области не являются узлами сетки, что имеет место для областей сложной формы. Тогда либо вводят дополнительные узлы на пересечении координатных линий с границей, либо границу приближенно заменяют ломаной, проходящей через близкие к границе узлы. На эту ломаную переносятся граничные условия.

В ряде случаев сложные криволинейные области с помощью перехода к новым независимым переменным удается свести к простейшему виду.

Например, четырехугольную область G, изображенную на рис. 7.8, можно привести к единичному квадрату G' путем введения новых переменных ξ, η вместо x, y с помощью соотношений

$$\xi = \frac{x - \varphi_1(y)}{\varphi_2(y) - \varphi_1(y)}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1;$$

$$\eta = \frac{y - \psi_1(y)}{\psi_2(y) - \psi_1(y)}, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

К новым переменным необходимо привести уравнения, а также начальные и граничные условия. В области G' можно ввести прямоугольную сетку, при этом в области G ей будет соответствовать сетка с неравномерно расположенными узлами и криволинейными ячейками.

На практике приходится решать задачи в различных криволинейных системах координат: полярной, цилиндрической, сферической и др.

Например, если расчетную область удобно задать в полярных координатах (r, φ), то в ней сетка вводится с шагами Δr и $\Delta\varphi$ соответственно по радиус-вектору и полярному углу.

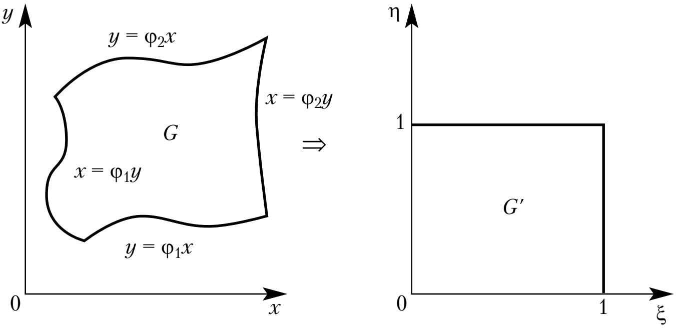


Рис. 7.8. **Преобразование расчетной области**

Иногда и в простой расчетной области вводится неравномерная сетка. В частности, в ряде случаев проводится сгущение узлов для более точного расчета в некоторых частях рассматриваемой области.

При этом области сгущения узлов либо известны заранее, либо определяются в процессе решения задачи, например, в зависимости от градиентов искомых функций.

Для построения разностной схемы, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, частные производные в уравнении заменяются конечно-разностными соотношениями по определенному шаблону.

Для примера рассмотрим разностную схему

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a\,\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}, \qquad (7.10)$$

$$i = 1, 2, ..., m - 1, \quad j = 0, 1, ...$$

В записи этой схемы для каждого узла использован шаблон, изображенный на рис. 7.9, *а*.

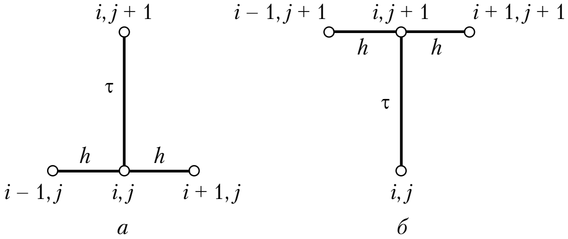


Рис. 7.9. **Шаблоны**

Для одного и того же уравнения можно построить различные разностные схемы.

В частности, если воспользоваться шаблоном, изображенным на рис. 7.9, *б*, то вместо схемы (7.10) получим другую разностную схему вида

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a\,\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}. \qquad (7.11)$$

В том и другом случае получается система алгебраических уравнений для определения значений сеточной функции во внутренних узлах. Значения в граничных узлах находятся из граничных условий

$$u_0^j = \psi_1(t_j), \quad u_1^j = \psi_2(t_j).$$

Совокупность узлов при фиксированном значении j называется *слоем*.

Схема (7.10) позволяет последовательно находить значения u_i^{j+1}, $i = 1, 2, ..., m$ 1 на слое $j + 1$ через соответствующие значения u_i^j на j-м слое. Такие схемы называются *явными*.

Для начала счета при $j = 1$ необходимо решение на начальном слое. Оно определяется начальным условием задачи, которое запишется в виде

$$u_0^j = \varphi(x_i), \quad i = 1, 2, ..., m - 1.$$

В отличие от явной схемы каждое разностное уравнение (7.11) содержит на каждом новом слое значения неизвестных в трех точках, поэтому нельзя сразу определить эти значения через известное решение на предыдущем слое. Такие схемы называются *неявными*.

В этом случае разностная схема (7.11) состоит из линейных трехточечных уравнений, т.е. каждое уравнение содержит неизвестную функцию в трех точках данного слоя.

Такие системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей могут быть решены методом прогонки, в результате чего будут найдены значения сеточной функции в узлах.

Заметим, что в рассмотренном примере получены *двухслойные схемы*, когда в каждое разностное уравнение входят значения функции из двух слоев — нижнего, на котором решение уже найдено, и верхнего, в узлах которого решение ищется.

Рассмотрим еще одну разностную схему, которую построим на симметричном прямоугольном шаблоне (рис. 7.10).

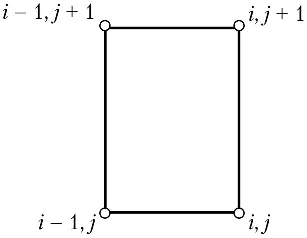


Рис. 7.10. **Прямоугольный шаблон**

Производная по t здесь аппроксимируется в виде полусуммы отношений односторонних конечных разностей в $(i-1)$-м и i-м узлах, а производная по x — в виде полусуммы конечно-разностных соотношений на j-м и $(j+1)$-м слоях.

Правая часть вычисляется в центре ячейки, хотя возможны и другие способы ее вычисления (например, в виде некоторой комбинации ее значений в узлах).

В результате указанных аппроксимаций получим разностное уравнение в виде

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_{i-1}^{j}}{\tau}+\frac{u_{i}^{j+1}-u_{i}^{j+1}}{\tau}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{u_{i}^{j}-u_{i-1}^{j}}{h}+\frac{u_{i}^{j+1}-u_{i+1}^{j+1}}{h}\right)=\bar{f}_{i}^{j},$$

$$\bar{f}_{i}^{j}=f(x_i+h/2,\, t_j+\tau/2).$$

Данная двухслойная четырехточечная схема также формально построена как неявная.

Все рассмотренные выше разностные схемы решения линейного уравнения переноса называются *схемами бегущего счета*. Они позволяют последовательно находить значения сеточной функции в узлах разностной сетки.

С помощью рассматриваемого способа построения разностных схем, когда входящие в уравнение отдельные частные производные заменяются конечно-разностными соотношениями для сеточной функции (или сеточными выражениями), могут быть созданы многослойные схемы, а также схемы высоких порядков точности.

Несмотря на то что этот способ получения разностных уравнений наиболее прост и поэтому широко используется при разработке численных методов, существуют также другие способы построения разностных схем.

7.5. Численные методы интегрирования

Существует большое количество функций, интеграл от которых не может быть выражен через элементарные функции. Для нахождения интегралов от подобных функций применяются разнообразные приближенные методы, суть которых заключается в том, что подынтегральная функция заменяется близкой к ней функцией, интеграл от которой выражается через элементарные функции.

Рассмотрим наиболее распространенные из них.

7.5.1. Формула прямоугольников

Если известны значения функции $f(x)$ в некоторых точках $x_0, x_1, ..., x_n$, то в качестве функции, близкой к $f(x)$, можно взять многочлен $P(x)$ степени не выше n.

Значения этого многочлена в выбранных точках равны значениям функции $f(x)$ в этих точках, т.е. выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx.$$

Разобьем отрезок интегрирования на n равных частей с шагом

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

При этом в точках

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), ..., y_n = f(x_n).$$

В соответствии с рис. 7.11 составим суммы элементарных площадей:

$y_0x + y_1x + ... + y_{n-1}x$ — сумма вписанных площадей;

$y_1x + y_2x + ... + y_nx$ — сумма описанных площадей.

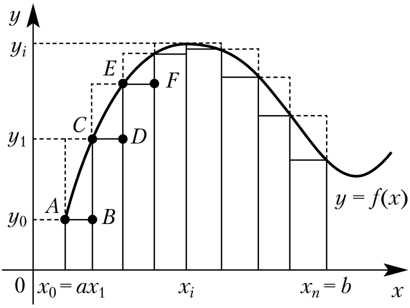


Рис. 7.11. **К формуле прямоугольников**

Последние выражения представляют соответственно нижнюю и верхнюю интегральные суммы.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n).$$

Любая из этих формул может применяться для приближенного вычисления определенного интеграла и называется *общей формулой прямоугольников*.

7.5.2. Формула трапеций

Эта формула является более точной по сравнению с формулой прямоугольников. Подынтегральная функция в этом случае заменяется на вписанную ломаную (рис. 7.12).

Геометрически площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей вписанных трапеций.

Очевидно, что чем больше взять точек n разбиения интервала, тем с большей точностью будет вычислен интеграл.

Для вычисления площадей вписанных трапеций выпишем известные формулы

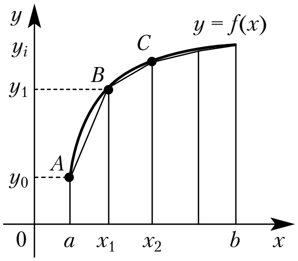


Рис. 7.12. **К формуле трапеций**

$$\frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x; \quad \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x; \quad ...; \quad \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x.$$

Суммируя все элементарные площади под кривой, запишем очевидное равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + ... + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x.$$

После приведения подобных слагаемых получаем *формулу трапеций*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right).$$

7.5.3. Формула парабол

Формулу парабол иначе называют *формулой Симпсона* или *квадратурной формулой*.

Разделим отрезок интегрирования $[a, b]$ на четное число отрезков $2m$ (рис. 7.13).

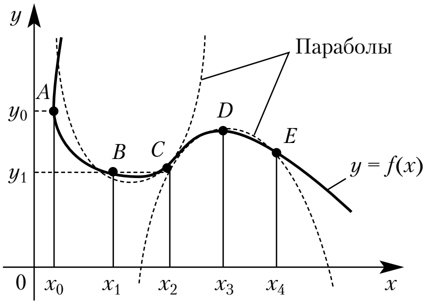


Рис. 7.13. **К формуле парабол**

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, заменим на площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой второй степени с осью симметрии, параллельной оси $0y$ и проходящей через точки кривой, со значениями $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Для каждой пары отрезков построим такую параболу.

Уравнения этих парабол имеют вид $Ax^2 + Bx + C$, где коэффициенты A, B, C могут быть легко найдены по трем точкам пересечения параболы с исходной кривой

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C; \\ y_1 &= Ax_1^2 + Bx_1 + C; \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_0 + C. \end{aligned} \tag{7.12}$$

В соответствии с рис. 7.13 обозначим $2h = x_2 - x_0$. Тогда площадь под параболой на шаге $2h$ вычисляется по формуле

$$S = \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)dx = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right]\Bigg|_{x_0}^{x_2}.$$

Если принять $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$ (см. рис. 7.13), то

$$S = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C). \tag{7.13}$$

Тогда уравнения значений функции в системе (7.12) имеют вид

$$\begin{aligned} y_0 &= Ah^2 - Bh + C; \\ y_1 &= C; \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C. \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C,$$

похожую на правую часть выражения (7.13).

Отсюда уравнение (7.13) примет вид

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

тогда

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2);$$

$$\int_{x_2}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \text{ и т.д.}$$

Складывая эти выражения для элементарных площадей под кривой $f(x)$, получаем *формулу Симпсона*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) + \right.$$

$$\left. + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})\right].$$

Чем больше число m, тем точнее значение интеграла, причем общее разбиение отрезка $[a, b]$ производится на четное число $2m$.

Пример 7.3. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3 + 16}\,dx$ с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей.

Решение. Заметим, что здесь $2m = 10$, $f(x) = \sqrt{x^3 + 16}\,dx$.

По формуле Симпсона получим

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3 + 16}\,dx \approx \frac{8+2}{6 \cdot 5}\left(y(-2) + y(8) + 2[y(0) + y(2) + y(4) + \right.$$

$$\left. + y(6)] + 4[y(-1) + y(1) + y(3) + y(5) + y(7))\right].$$

Вычисляем значения функции на узловых точках. Расчеты оформим в виде таблицы.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2,828	3,873	4	4,123	4,899	6,557	8,944	11,874	15,232	18,947	22,978

Подставляя в формулу Симпсона полученные значения, имеем

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3 + 16}\,dx \approx \frac{8+2}{6 \cdot 5}\left[2{,}828 + 22{,}978 + 2(4 + 4{,}899 + 8{,}944 + \right.$$

$$\left. + 15{,}232) + 4(3{,}873 + 4{,}123 + 6{,}557 + 11{,}874 + 18{,}947)\right] = 91{,}151.$$

Заметим, что точное значение этого интеграла равно 91,173.

Как видно, даже при сравнительно небольшом шаге разбиения точность полученного результата вполне удовлетворительная. Для сравнения применим к этой же задаче формулу трапеций.

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3 + 16}\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{8+2}{10}\left(\frac{2{,}828 + 22{,}978}{2} + 3{,}873 + 4 + 4{,}123 + 4{,}899 + 6{,}557 + \right.$$

$$\left. + 8{,}944 + 11{,}874 + 15{,}232 + 18{,}947\right) = 91{,}352.$$

Формула трапеций дала менее точный результат по сравнению с формулой Симпсона. ■

Кроме вышеперечисленных способов, можно вычислить значение определенного интеграла с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд.

Суть этого метода состоит в том, чтобы заменить подынтегральную функцию по формуле Тейлора и почленно проинтегрировать полученную сумму.

Пример 7.4. С точностью до 0,001 вычислить интеграл

$$\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

Решение. Так как интегрирование производится в окрестности точки $x = 0$, то можно воспользоваться для разложения подынтегральной функции формулой Маклорена.

Разложение функции $\cos x$ имеет вид

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Зная разложение функции $\cos x$, легко найти функцию $1 - \cos x$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

В этой формуле суммирование производится по n от 1 до бесконечности, а в предыдущей — от 0 до бесконечности. Это не ошибка — так получается в результате преобразования.

Теперь представим в виде ряда подынтегральное выражение

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}.$$

Представим исходный интеграл в виде

$$\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{0,5} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!}\,dx.$$

В следующем действии будет применена теорема о почленном интегрировании ряда, т.е. интеграл от суммы будет представлен в виде суммы интегралов членов ряда.

Вообще говоря, со строго теоретической точки зрения для применения этой теоремы надо доказать, что ряд сходится равномерно на отрезке интегрирования [0, 0,5].

Принимая без доказательства, что ряд сходится, запишем

$$\int\limits_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int\limits_0^{0,5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\int\limits_0^{0,5}x^{2n-2}dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\Bigg|_0^{0,5} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 0,5^{2n-1}}{(2n)!(2n-1)}.$$

В итоге получаем

$$\int\limits_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!(2n-1)2^{2n-1}} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 2^3\cdot 4!} + \frac{1}{5\cdot 2^6\cdot 6!} - \ldots =$$

$$= 0,25 - 0,00174 + 0,0000086 - \ldots \approx 0,248.$$

Как видно, абсолютная величина членов ряда очень быстро уменьшается и требуемая точность достигается уже при третьем члене разложения.

Заметим, что более точное вычисление этого интеграла дает значение 0,2482725418... ■

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Назовите и охарактеризуйте основные требования к организации вычислительного процесса.
2. Что называют аппроксимацией функций?
3. Каким образом проводятся линейная и квадратичная интерполяции функций?
4. Опишите процесс аппроксимации производных с помощью конечных разностей.
5. Что называют погрешностью аппроксимации производной?
6. Запишите формулы аппроксимации частных производных.
7. Охарактеризуйте процесс численного решения дифференциальных уравнений на основе разностных схем.
8. Опишите метод Эйлера, уточненный метод Эйлера, метод Рунге—Кутта численного решения дифференциальных уравнений.
9. Как осуществляется численное решение дифференциальных уравнений с частными производными?
10. Запишите формулу прямоугольников, формулу трапеций, формулу Симпсона численного вычисления определенных интегралов.

Раздел II

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Глава 8
МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ

Как показывают исследования, в экономике имеют место устойчивые количественные закономерности. По этой причине и возможно их строгое математическое описание в виде экономико-математических моделей. Основным математическим понятием, используемым в этих моделях, является понятие функции.

Учитывая, что экономические явления и процессы обусловливаются действием различных факторов, для их исследований широко используются ***функции нескольких переменных***. Наиболее широко применяются самые простые среди них — линейные функции.

Среди других функций выделяются ***мультипликативные функции***, позволяющие представить зависимую переменную в виде произведения факторных переменных, обращающего ее в нуль при отсутствии действия хотя бы одного фактора.

Если действием побочных факторов можно пренебречь или удается зафиксировать эти факторы на определенных уровнях, то влияние одного главного фактора изучается с помощью функции одной переменной.

При этом наряду с простейшими линейными функциями используются нелинейные функции, такие как дробно-рациональные, степенные, показательные, логарифмические и др. Периодичность определенного класса экономических процессов позволяет также использовать тригонометрические функции.

Ниже будут рассмотрены основные функции, применяемые в экономико-математических моделях.

8.1. Функция полезности. Кривые безразличия

Пусть потребитель может потратить некоторую денежную сумму R на приобретение набора товаров. Величину R обычно называют *бюджетным ограничением*. Математическая модель поведения потребителя называется *моделью потребительского выбора*.

Рассмотрим случай, когда приобретаемый потребителем набор состоит из двух товаров.

Обозначим x_1 — количество приобретаемого первого товара, x_2 — количество второго товара. С математической точки зрения потребительский набор представляет собой вектор $\vec{x} = (x_1, x_2)$ или точку на координатной плоскости.

Потребитель из каждых двух наборов предпочитает один либо они для него равнозначны.

Если каждому набору $x = (x_1, x_2)$ ставится в соответствие некоторая числовая оценка (которая тем выше, чем предпочтительнее набор для потребителя), то тем самым задается функция, которая называется ***функцией полезности*** и обычно обозначается $u(x) = u(x_1, x_2)$.

Очевидно, что если для потребителя набор

$$x_A = (x_{1A}, x_{2A})$$

предпочтительнее, чем набор

$$x_B = (x_{1B}, x_{2B}),$$

то считается, что $u(x_A) > u(x_B)$.

Если эти наборы для потребителя равнозначны, то принимается $u(x_A) = u(x_B)$.

Сформулируем ***основные свойства функции полезности***.

1. Увеличение количества одного товара в наборе при постоянном количестве другого приводит к увеличению значения функции полезности.

То есть при $\Delta x_1 > 0$ и $\Delta x_2 > 0$ имеют место неравенства

$$u(x_1 + \Delta x_1, x_2) > u(x_1, x_2);$$
$$u(x_1, x_2 + \Delta x_2) > u(x_1, x_2).$$

Из этих неравенств следует, что частные производные функции полезности $u(x_1, x_2)$ положительны в любой точке (x_1, x_2), т.е.

$$u'_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} > 0; \quad u'_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} > 0.$$

В экономике часто используют терминологию, отличную от математической. Так, производную некоторой функции называют *предельной величиной*, а саму функцию при этом — *суммарной величиной*.

Являясь производной, предельная величина показывает скорость изменения соответствующей суммарной величины в рассматриваемом экономическом процессе. Поэтому частные производные функции полезности в экономике обычно называют *предельными полезностями товаров*.

Для предельных полезностей используют обозначения

$M_{x_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ — предельная полезность первого товара,

$M_{x_2} = \dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ — предельная полезность второго товара.

2. Предельная полезность товара уменьшается при росте его количества в наборе. Отсюда следует, что производные предельных полезностей, т.е. вторые частные производные функции полезности, отрицательны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} < 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} < 0.$$

Это свойство означает, что одинаковое приращение количества товара в наборе дает большее приращение функции полезности при меньшем исходном количестве товара в наборе.

Линии уровня функции полезности $u(x_1, x_2) = c$ называются *кривыми безразличия*.

Из определения линии уровня следует, что кривые безразличия содержат точки координатной плоскости x_1Ox_2 с одинаковым значением функции полезности $u(x_1 , x_2)$.

На рис. 8.1 изображены кривые безразличия для значений функции полезности u_1, u_2, u_3 при условии $u_1 < u_2 < u_3$.

На основе свойств функции полезности можно показать, что кривые безразличия на плоскости x_1Ox_2 представляют собой выпуклые вниз графики убывающих функций.

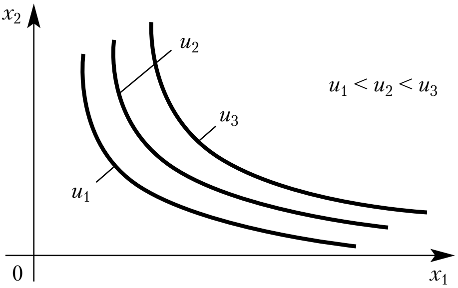


Рис. 8.1. **Кривые безразличия**

8.2. Задача потребительского выбора. Кривые «доход-потребление» и «цена-потребление»

Задача потребительского выбора заключается в определении такого набора товаров $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, который дает максимальное значение функции полезности $u(x_1, x_2)$ при заданном бюджетном ограничении R.

Пусть цены единиц товаров p_1 и p_2 известны и постоянны. Тогда математическая ***формулировка задачи потребительского выбора*** имеет вид

$$u(x_1, x_2) \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &p_1x_1 + p_2x_2 \leqslant R; \\ &x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Множество точек на координатной плоскости (x_1x_2), координаты которых удовлетворяют системе ограничений, называется *областью допустимых решений.*

Очевидно, что эта область представляет собой прямоугольный треугольник, показанный на рис. 8.2.

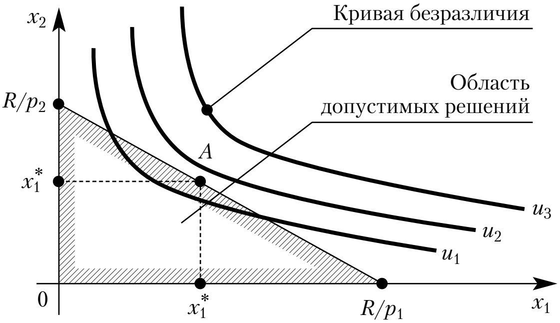


Рис. 8.2. **К задаче потребительского выбора**

Из рис. 8.2 очевидно, что для решения задачи потребительского выбора нужно найти точку A, которой соответствует решение $x^* = (x_1^*, x_2^*)$. Эта точка принадлежит одновременно области допустимых решений и кривой безразличия с максимальным значением $u(x_1, x_2)$. Следовательно, точка A должна лежать на гипотенузе треугольника, а кривая безразличия — касаться гипотенузы в этой точке. Эта задача является *задачей нелинейного программирования.*

С учетом этого факта в математической формулировке (8.1) задачи потребительского выбора следует первое ограничение записать в виде равенства

$$p_1x_1 + p_2x_2 = R. \tag{8.2}$$

Таким образом, получили задачу на нахождение условного экстремума функции двух переменных, которую можно решить методом множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - R).$$

Для нахождения критической точки приравниваем нулю частные производные функции Лагранжа по x_1, x_2 и λ:

$$\begin{cases} L'_{x_1} = u'_{x_1} + \lambda p_1 = 0, \\ L'_{x_2} = u'_{x_2} + \lambda p_2 = 0, \\ L'_{\lambda} = p_1x_1 + p_2x_2 - R = 0. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений получаем

$$\frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{8.3}$$

Решая это уравнение совместно с третьим уравнением, получаем искомую точку $x^* = (x_1^*, x_2^*)$.

Пример 8.1. Функция полезности имеет вид $u(x_{1,}\ x_2) = x_1x_2$. Цена единицы первого товара равна $p_1 = 10$ руб., а второго — $p_2 =$ $= 40$ руб. Бюджетное ограничение составляет $R = 400$ руб.

Найти оптимальный потребительский набор.

Решение. Найдем производные функции полезности

$$u'_{x_1} = x_2; \quad u'_{x_2} = x_1.$$

В соответствии с формулой (8.3) и ограничением (8.2) в виде равенства запишем

$$\begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{p_1}{p_2}, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = R. \end{cases}$$

Решая полученную систему, имеем

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{R}{2p_1} = \dfrac{400}{2 \cdot 10} = 20, \\ x_2 = \dfrac{R}{2p_2} = \dfrac{400}{2 \cdot 40} = 5. \end{cases}$$

Таким образом, оптимальный потребительский набор состоит из 20 ед. первого товара и 5 ед. — второго.

Ответ: $x^* = (20, 5)$. ■

Рассмотрим теперь задачу потребительского выбора для произвольного числа товаров. Пусть потребитель тратит весь свой доход I на приобретение n товаров.

Тогда ***задачу потребительского выбора*** можно сформулировать следующим образом:

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max$$

при ограничениях

$$p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = I;$$
$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, ..., n,$$

где $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ — функция полезности потребителя; p_i — цена единицы i-го товара; x_i — количество единиц i-го товара, приобретаемое потребителем.

Решая эту задачу методом множителей Лагранжа, можно получить соотношение вида (8.3)

$$\frac{u'_{x_i}}{u'_{x_j}} = \frac{p_i}{p_j}, \text{ где } j = 1, ..., n;\ i \neq j.$$

То есть при оптимальном потребительском выборе отношение предельных полезностей двух товаров равно отношению их цен.

Одна из наиболее часто используемых функций полезности имеет вид

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1x_2...x_n.$$

При такой функции полезности решение задачи потребительского выбора запишется как

$$x_i = \frac{I}{np_i}. \tag{8.4}$$

То есть весь доход I потребителя делится на n равных частей и количество приобретаемого i-го товара (спрос потребителя на i-й товар) определяется делением одной n-й части дохода на цену i-го товара p_i.

Пусть теперь цена i-го товара повысилась с p_i до $\tilde{p}_i$ ($\tilde{p}_i > p_i$). Ясно, что при этом имеет место потеря благосостояния потребителя, выражающаяся в уменьшении функции полезности.

Для двух товаров эту ситуацию изобразим графически (рис. 8.3), где прямая $\left(\frac{I}{p_1}, \frac{I}{p_2}\right)$ представляет собой линию

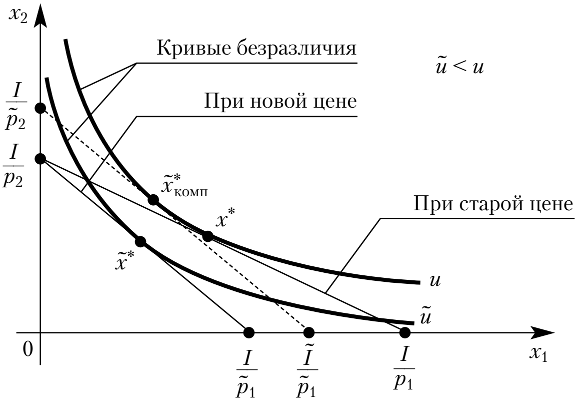


Рис. 8.3. **К вычислению оптимального потребительского набора при повышении цены на товар и компенсации**

бюджетного ограничения при старых ценах на товары. Точка касания x^* — оптимальный потребительский набор для этого случая.

Пусть теперь цена первого товара повысилась и стала равной $\tilde{p}_1$ ($\tilde{p}_1 > p_1$). Прямая $\left(\frac{I}{\tilde{p}_1}, \frac{I}{p_2}\right)$ — линия бюджетного ограничения при повышенной цене $\tilde{p}_1$.

Очевидно, что новая кривая безразличия $\tilde{u}$, касающаяся линии бюджетного ограничения $\left(\frac{I}{\tilde{p}_1}, \frac{I}{p_2}\right)$ при новой цене, будет проходить ниже, чем старая u, т.е. функция полезности потребителя уменьшится. Оптимальный потребительский набор теперь $\tilde{x}^*$.

Допустим, что из соображений социальной политики решено компенсировать указанную потерю благосостояния потребителя, увеличив его доход до уровня $\tilde{I}$ так, чтобы функция полезности осталась на прежнем уровне и была равна u.

Ясно, что при такой компенсации прямая бюджетного ограничения должна быть параллельна линии $\left(\frac{I}{\tilde{p}_1}, \frac{I}{p_2}\right)$ и касаться той же самой кривой безразличия u, что и при старой цене.

Эта прямая $\left(\frac{\tilde{I}}{\tilde{p}_1}, \frac{\tilde{I}}{p_2}\right)$ показана на рис. 8.3 пунктирной линией. Оптимальный потребительский выбор теперь соответствует точке $\tilde{x}^*_{\text{комп}}$.

Пример 8.2. Функция полезности равна $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Цена первого товара p_1 повысилась в 2 раза, т.е. $\tilde{p}_1 = 2p_1$.

До какого уровня должен быть компенсирован доход потребителя I для сохранения уровня благосостояния потребителя?

Каков при этом будет оптимальный потребительский набор, если до повышения цены он был $x^* = (x_1^*, x_2^*)$?

Решение. Для данной функции полезности $u(x_1, x_2)$, как было показано выше, оптимальный потребительский набор до повышения цены $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ определяется по формуле (8.4) для двух товаров

$$x_1^* = \frac{I}{2p_1}; \quad x_2^* = \frac{I}{2p_2}.$$

Согласно условию задачи функция полезности при таком потребительском наборе равна

$$u = x_1^* x_2^* = \frac{I}{2p_1} \cdot \frac{I}{2p_2} = \frac{I^2}{4p_1 p_2}.$$

После повышения цены на первый товар и ее компенсации оптимальный потребительский набор и функция полезности имеют вид

$$\tilde{x}_{1\text{комп}}^* = \frac{\tilde{I}}{2\tilde{p}_1} = \frac{\tilde{I}}{4p_1}, \quad \tilde{x}_{2\text{комп}}^* = \frac{\tilde{I}}{2p_2};$$

$$u = \tilde{x}_{1\text{комп}}^* \tilde{x}_{2\text{комп}}^* = \frac{\tilde{I}}{4p_1} \cdot \frac{\tilde{I}}{2p_2} = \frac{\tilde{I}^2}{8p_1 p_2}.$$

Поскольку при сохранении уровня благосостояния потребителя значение функции полезности не изменяется, то можно записать

$$\frac{\tilde{I}^2}{8p_1 p_2} = \frac{I^2}{4p_1 p_2}, \text{ отсюда } \tilde{I} = I\sqrt{2}.$$

То есть доход потребителя должен быть компенсирован до уровня $I\sqrt{2}$. Найдем оптимальный потребительский набор после повышения цены на первый товар и компенсации

$$\tilde{x}_{1\text{комп}}^* = \frac{\tilde{I}}{2\tilde{p}_1} = \frac{\tilde{I}}{4p_1} = \frac{I\sqrt{2}}{4p_1} = \frac{I}{2p_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x_1^*}{\sqrt{2}};$$

$$\tilde{x}_{2\text{комп}}^* = \frac{\tilde{I}}{2p_2} = \frac{I\sqrt{2}}{2p_2} = \frac{I}{2p_2} \cdot \sqrt{2} = x_2^* \sqrt{2}.$$

Итак, $\tilde{x}_1^* = \dfrac{x_1^*}{\sqrt{2}}$; $\tilde{x}_2^* = x_2^* \sqrt{2}$. ■

На основе проведенных выше рассуждений построим кривые «доход-потребление» и «цена-потребление», часто используемые в экономике.

Рассмотрим потребительский набор, состоящий из двух товаров x_1 и x_2.

Выше было показано, что при оптимальном наборе кривая безразличия $u(x_1, x_2)$ касается прямой бюджетного ограничения

$$p_1x_1 + p_2x_2 = R$$

в точке A (см. рис. 8.2) или, если весь доход I тратится на эти два товара, выполняется равенство

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I.$$

Если при постоянстве цен на товары увеличивать доход I, то прямая бюджетного ограничения сдвигается параллельно самой себе (рис. 8.4) и будет касаться новой кривой безразличия в новой оптимальной точке A_1, A_2, A_3... Здесь x_1, x_2 товары нормальные.

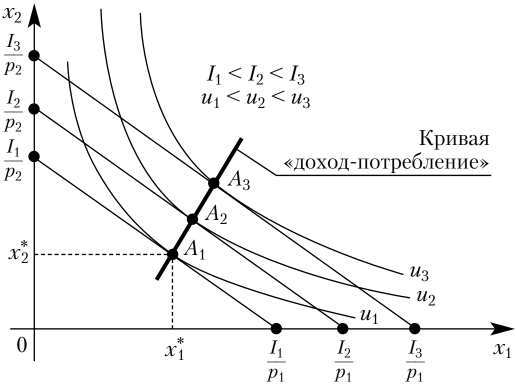


Рис. 8.4. **Кривая «доход-потребление» нормального товара**

Если соединить между собой все оптимальные точки, получится линия, называемая *кривой «доход-потребление»*.

Для ***нормальных***, качественных товаров эта кривая показывает увеличение потребления товара при росте дохода. Заметим, что товар называется нормальным, если при увеличении дохода потребителя спрос на товар увеличивается.

На рис. 8.5 показан пример, когда рост дохода I приводит к снижению потребления первого товара x_1, т.е. к уменьшению оптимального значения x_1^*.

Такая кривая «доход-потребление» имеет место, если этот товар ***малоценный***. Товар называется *малоценным*, если при увеличении дохода потребителя спрос на товар уменьшается.

Здесь x_1 — малоценный товар.

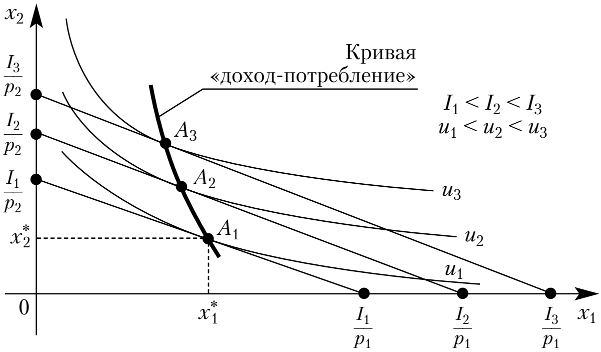


Рис. 8.5. **Кривая «доход-потребление» малоценного товара**

Пусть теперь снижается цена p_1 первого товара, а цена второго товара p_2 и доход I остаются неизменными. В этом случае прямая бюджетного ограничения (рис. 8.6) переместится вправо, поворачиваясь вокруг точки $(0, \frac{I}{p_2})$ против часовой стрелки.

При этом новая прямая бюджетного ограничения будет касаться новой кривой безразличия в новой оптимальной точке A_1. Если соединить между собой все оптимальные точки, то получим ***кривую «цена-потребление»***.

Как правило, при уменьшении цены на товар (в данном случае $p_{1)}$ спрос на этот товар x_1^* увеличивается. Тем не менее не все товары обладают этим свойством.

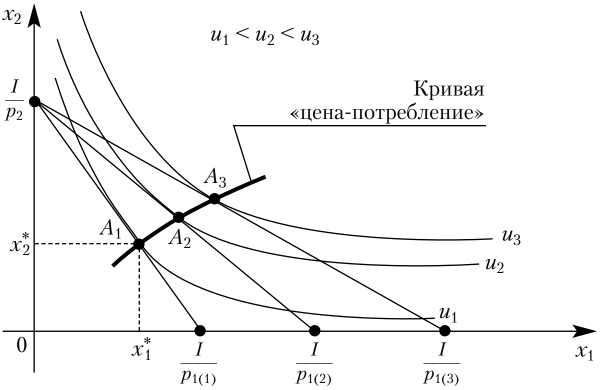


Рис. 8.6. **Кривая «цена-потребление»**

Бывают случаи, когда снижение цены на товар ведет к снижению спроса на этот товар. Такие товары называются *товарами Гиффена*. Однако таких товаров в реальности мало.

Задачи, аналогичные задаче потребительского выбора с использованием линий уровня функций двух переменных, широко распространены в экономике. В частности, такая задача решается в теории инвестиций для определения оптимального портфеля ценных бумаг.

Под портфелем здесь понимается совокупность ценных бумаг в определенных пропорциях.

Портфель ценных бумаг характеризуется двумя основными параметрами — ожидаемой доходностью r и риском σ.

Каждому портфелю ставится в соответствие точка на координатной плоскости (σ, r), и тогда множество всех возможных портфелей представляет некоторую область D (рис. 8.7).

Очевидно, что при равных доходностях инвестор предпочтет портфель с меньшим риском. Таким образом, линии уровня функции предпочтения $U = U(\sigma, r)$, аналогичной функции полезности, выпуклы вниз.

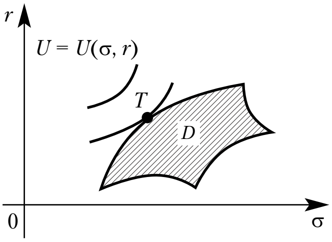


Рис. 8.7. **Определение оптимального портфеля ценных бумаг**

Точка T, в которой линия уровня функции предпочтения касается области D, соответствует оптимальному для данного инвестора портфелю.

Соответствующая теория была предложена американским экономистом Харри Марковицем в 1952 г. и с тех пор получила широкое развитие в теории инвестиций.

8.3. Функции спроса и предложения

Функции спроса и предложения являются основными категориями рыночной экономики.

Спросом называется количество товара, которое покупатели приобретают на рынке в единицу времени в данных условиях.

Математическая модель спроса определяет его как функцию целого ряда факторов. Однако в простейшем случае считают, что все факторы, кроме цены p, являются неизменными.

Соотношение между ценой и спросом называется *функцией спроса*, или *законом спроса.*

Функцию спроса q на какой-либо товар в зависимости от цены p можно записать в виде

$$q = f(p).$$

При всем разнообразии вида функций спроса практически все они являются невозрастающими (на рис. 8.8 функция спроса представлена в нелинейном виде) и определяются, как правило, эмпирически.

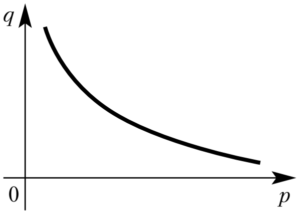


Рис. 8.8. **Функция спроса**

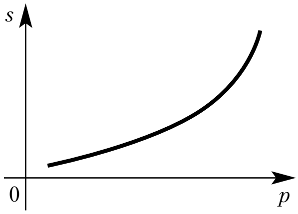


Рис. 8.9. **Функция предложения**

Часто функцию спроса представляют в виде обратной зависимости $p = \varphi(q)$, т.е. по оси абсцисс откладывают спрос на товар q, а по оси ординат — его цену p. Эта функция также является невозрастающей.

Количество товара s, которое производители выставят на продажу в единицу времени в данных условиях, называется *предложением* и также зависит от цены p на этот товар.

Соотношение между ценой и предложением называется *функцией* или *законом предложения.*

Эмпирически доказано, что чем выше цена p данного товара, тем больше его предложение s.

Функция предложения s в зависимости от цены $s = g(p)$ является неубывающей, как показано на рис. 8.9.

Часто так же, как и функцию спроса, функцию предложения изображают на графике в виде обратной зависимости: по оси абсцисс откладывают предложение s, а по оси ординат — цену p. Эта функция также является неубывающей.

Производные $q'(p)$ и $s'(p)$ представляют собой скорости изменения соответственно спроса и предложения в рассматриваемой точке.

Цена товара p_0, при которой спрос равен предложению $(q = s)$, называется *равновесной ценой* этого товара, а спрос q_0, имеющий место при этой цене и равный предложению s_0, — *равновесным объемом продаж.*

Пример графического определения равновесной цены p_0 и равновесного объема продаж показан на рис. 8.10.

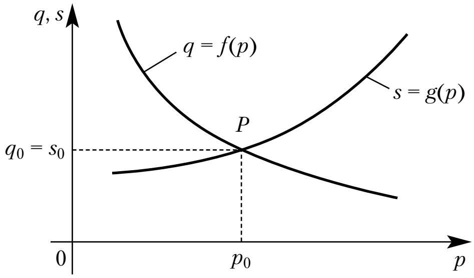


Рис. 8.10. **Равновесные цена и объем продаж**

Пример 8.3. Функция спроса на товар A имеет вид

$$q = 1275 - 25p \text{ штук в месяц,}$$

а функция предложения — $s = 4p^2$ штук в месяц, где p — цена единицы товара в рублях.

Найти равновесную цену товара и равновесный объем продаж.

Решение. Для равновесной цены p_0 должно выполняться условие $q_0 = s_0$, т.е.

$$1275 - 25p_0 = 4p_0^2,$$

откуда

$$4p_0^2 + 25p_0 - 1275 = 0, \quad D = 25^2 + 4 \cdot 4 \cdot 1275 = 21\,025,$$

$$\sqrt{D} = 145, \quad p_{0(1)} = \frac{-25 + 145}{8} = 15, \quad p_{0(2)} = \frac{-25 - 145}{8} = -21{,}25.$$

Значение $p_{0(2)}$ лишено смысла, так как цена не может быть отрицательной, следовательно, равновесная цена товара составляет 15 руб.

Равновесный объем продаж равен

$$q_0 = 1275 - 25p_0 = 1275 - 25 \cdot 15 = 900 \text{ шт./мес.}$$

или

$$s_0 = 4p_0^2 = 4 \cdot 15^2 = 4 \cdot 225 = 900 \text{ шт./мес.} \blacksquare$$

Пример 8.4. Функция спроса на некоторую продукцию имеет следующий вид:

$$q(p) = \frac{49\,000}{p^2} + 20.$$

Найти скорость изменения спроса при цене продукции, равной 10 ден. ед.

Решение. Скорость изменения спроса равна производной $q'(p)$. Тогда

$$q'(p) = \frac{2 \cdot 49\,000}{p^3}; \quad q'(10) = \frac{-2 \cdot 49\,000}{10^3} = -98.$$

Таким образом, при повышении цены на 1 ден. ед. с 10 до 11 ден. ед. спрос на эту продукцию упадет на 98 ед. продукции в единицу времени. ■

Для регулирования рынка государство может ввести налог t на реализуемый товар или предоставить субсидию w, чтобы население могло приобрести этот товар по разумной цене. В этом случае предполагается, что спрос q определяется только ценой товара на рынке p_q, а предложение s — только ценой предложения p_s, получаемой поставщиками.

Эти цены связаны между собой уравнениями

$p_q = p_s + t$ — в случае введения налога;

$p_q = p_s - w$ — в случае предоставления субсидии.

В экономике часто используются линейные модели спроса и предложения, в которых функции q и s линейно зависят от соответствующих цен.

Графики этих функций (как прямых, так и обратных) представляют собой прямые линии (рис. 8.11).

Можно показать, что при введении налога t или предоставлении субсидии уравнение спроса q не изменится. Тогда график обратной функции s предложения поднимется на t единиц вверх (прямая s') или опустится на w единиц вниз (прямая s'').

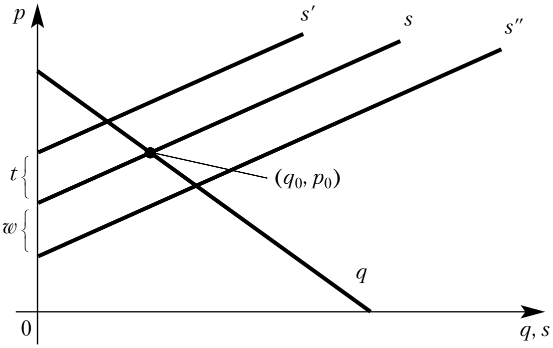


Рис. 8.11. **Линейная модель функций спроса и предложения**

Пример 8.5. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются соответственно функциями

$$p = -2q + 12;$$
$$p = s + 3.$$

а) Найти точку рыночного равновесия, т.е. равновесную цену на товар и равновесный объем продаж.

б) Найти точку равновесия после введения налога t, равного 3 ед. Найти уменьшение равновесного объема продаж и увеличение равновесной цены спроса (продажи).

в) Какая субсидия w приведет к увеличению равновесного объема продаж на 2 ед.?

г) Вводится налог t, равный 20%. Найти новую точку равновесия и доход государства R.

Решение.

а) Находим точку рыночного равновесия M из условия $q_0 = s_0$, записав предварительно прямые функции спроса и предложения

$$q = \frac{-p}{2} + 6; \quad s = p - 3;$$

$$\frac{-p_0}{2} + 6 = p_0 - 3, \quad \frac{3p_0}{2} = 9, \quad p_0 = 6; \quad q_0 = s_0 = 3.$$

Таким образом, точка рыночного равновесия M (3, 6) характеризуется равновесным объемом продаж $q_0 = s_0 = 3$ при равновесной цене $p_0 = 6$ (см. рис. ниже).

б) Если введен налог $t = 3$, то система уравнений для определения новой точки равновесия примет вид

$$q = \frac{-p_q}{2} + 6; \quad s = p_s - 3; \quad p_s = p_a - 3.$$

Используя условие $q_0 = s_0$, имеем следующую систему для определения точки рыночного равновесия:

$$\begin{cases} \dfrac{p_{q0}}{2} + 6 = p_{s0} - 3, \\ p_{s0} = p_{q0} - 3, \end{cases}$$

решая которую, получаем $p_{q0} = 8$; $p_{s0} = 5$.

Подставляя эти значения в исходную систему, находим $q_0 = s_0 = 2$.

Таким образом, имеем новую точку равновесия продаж $M'(2, 8)$. Следовательно, после введения налога $t = 3$ равновесный объем продаж q_0 уменьшился на 1 ед., а равновесная цена продажи $p_0 = p_{q0}$ увеличилась на 2 ед.

в) В пункте «а» был определен равновесный объем продаж $q_0 = s_0 = 3$, тогда новый объем продаж равен 3 + 2 = 5 ед.

Если предоставлена субсидия w, то система уравнений для определения точки равновесия имеет вид

$$\begin{cases} p_{q0} = -2q_0 + 12, \\ p_{s0} = s_0 + 3, \\ p_{q0} = p_{s0} - w. \end{cases}$$

Подставляя $q_0 = s_0 = 5$ в систему, находим

$$p_{q0} = 2, \quad p_{s0} = 8, \quad w = p_{s0} - p_{q0} = 6.$$

г) Если налог составляет 20%, то вся рыночная цена p_q составит 120%, из них 100% получают поставщики товара, 20% — государство. Итак, поставщики получают

$$p_s = \frac{100}{120}p_q = \frac{5}{6}p_q.$$

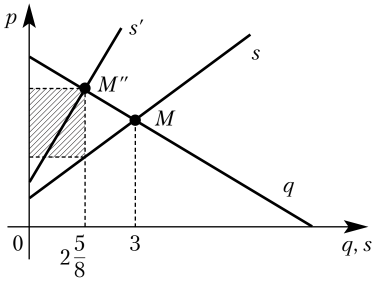
Уравнения спроса и предложения остаются такими же, как в пункте «б», а уравнение, связывающее цены спроса и предложения, имеет вид $p_s = \dfrac{5}{6}p_q$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} q = \dfrac{-p_q}{2} + 6, \\ s = p_s - 3, \\ p_s = \dfrac{5}{6}p_q. \end{cases}$$

Решая эту систему при условии $q_0 = s_0$, находим новую точку равновесия M''

$$q_0 = s_0 = 2\frac{5}{8}, \quad p_{q0} = 6\frac{3}{4}, \quad M''\left(2\frac{5}{8}, 6\frac{3}{4}\right).$$

Очевидно, что доход государства R равен площади заштрихованного прямоугольника (см. рисунок).



$$R = \frac{1}{6} \cdot 2\frac{5}{8} \cdot 6\frac{3}{4} = 2\frac{61}{64} \text{ ден. ед.} \blacksquare$$

Пример 8.6. Законы спроса и предложения имеют вид

$$p_q = -3q + 12;$$
$$p_s = 2s + 2.$$

Найти величину налога t, при которой в точке равновесия доход государства R будет максимален.

Решение. После введения налога t для точки равновесия имеем систему

$$\begin{cases} p_q = -3q + 12, \\ p_s = 2s + 2, \\ p_q = p_s + t, \\ q = s. \end{cases}$$

Выражаем p_q, p_s и s через q из 1, 2 и 4-го уравнений и подставляем в 3-е уравнение

$$-3q + 12 = 2q + 2 + t;$$
$$t = 10 - 5q.$$

Функция R, определяющая доход государства, имеет вид

$$R = qt = q(10 - 5q) = 10q - 5q^2.$$

Находим максимум функции R

$$R' = 10 - 10q = 0 \Rightarrow q = 1.$$

Выполняется соотношение $R'' = -10 < 0$, следовательно, $q = 1$ — точка максимума.

В точке $q = 1$ находим $t = 5$, $R = 5$.

Следовательно, доход государства R максимален при величине налога $t = 5$ ден. ед. ■

8.4. Эластичность функции и ее свойства

Для исследования экономических процессов часто используется понятие эластичности функции.

Эластичностью $E_x(y)$ функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения функции $\frac{\Delta y}{y}$ к относительному приращению независимой переменной $\frac{\Delta x}{x}$ при стремлении Δx к нулю

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \cdot x}{y \cdot \Delta x} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Эластичность функции приближенно показывает, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

Основные свойства эластичности.

1. Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на логарифмическую производную функции (т.е. производную от натурального логарифма функции).

По правилу произведения сложной функции

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} y',$$

значит, $$E_x(y) = \frac{x}{y} y' = x(\ln y)'.$$

Иногда логарифмическую производную называют *темпом изменения функции* и обозначают T_y.

Тогда

$$E_x(y) = x(\ln y)' = xT_y.$$

2. Эластичность произведения двух функций равна сумме эластичностей этих функций, а эластичность частного — разности эластичностей.

Пусть $y = uv$, тогда

$$E_x(y) = E_x(uv) = \frac{x}{y} y' = \frac{x}{uv}(uv)' = \frac{x(u'v + uv')}{uv} = \frac{xu'v}{uv} + \frac{xuv'}{uv} =$$

$$= \frac{xu'}{u} + \frac{xv'}{v} = \frac{x}{u} u' + \frac{x}{v} v' = E_x(u) + E_x(v).$$

Пусть теперь $y = \frac{u}{v}$, тогда

$$E_x(y) = E_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{x}{y} y' = \frac{x}{u}\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{xv}{u} \cdot \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{xu'v^2}{uv^2} - \frac{xuvv'}{uv^2} =$$

$$= \frac{xu'}{u} - \frac{xv'}{v} = \frac{x}{u} u' - \frac{x}{v} v' = E_x(u) - E_x(v).$$

Легко показать, что эластичность суммы двух функций $y = u + v$ определяется по формуле

$$E_x(y) = E_x(u + v) = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u + v}.$$

3. Эластичности взаимно обратных функций — взаимно обратные величины:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}.$$

Определим эластичности некоторых простейших элементарных функций.

- Степенная функция $y = x^{\alpha}$.

$$E_x(y) = E_x(x^{\alpha}) = \frac{x}{x^{\alpha}}(x^{\alpha})' = \frac{x}{x^{\alpha}} \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} = \alpha \cdot \frac{x \cdot x^{\alpha-1}}{x^{\alpha}} = \alpha.$$

- Показательная функция $y = a^x$.

$$E_x(y) = E_x(a^x) = \frac{x}{a^x}(a^x)' = \frac{x}{a^x} \cdot a^x \ln a = x \ln a.$$

- Линейная функция $y = kx + b$.

$$E_x(y) = E_x(kx + b) = \frac{x}{kx + b}(kx + b)' = \frac{x}{kx + b} \cdot k = \frac{kx}{kx + b}.$$

Выясним *геометрический смысл* эластичности функции. По определению

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y' = \frac{x}{y}\operatorname{tg}\alpha,$$

где $\operatorname{tg}\alpha$ — тангенс угла наклона касательной в точке $M(x, y)$, показанного на рис. 8.12.

Учитывая, что из треугольника MBN следует

$$MN = x\operatorname{tg}\alpha,\ MC = y,$$

а из подобия треугольников MBN и AMC следует $\frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$, получим

$$E_x(y) = \frac{MB}{MA}.$$

То есть эластичность функции (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данной точки графика функции до точек ее пересечения с осями Ox и Oy.

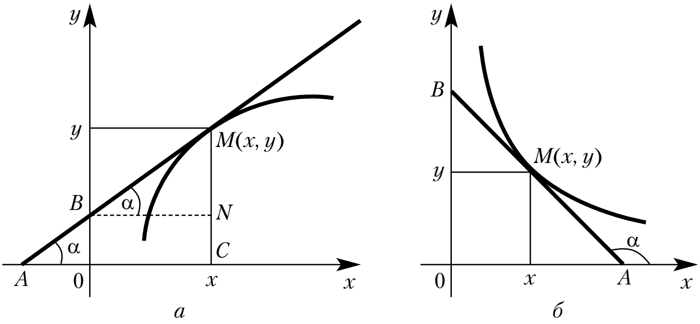


Рис. 8.12. **Равновесные цена и объем продаж**

Если точки пересечения A и B касательной к графику функции с осями координат находятся по одну сторону от точки M, то эластичность $E_x(y) > 0$ (рис. 8.12, *а*), если по разные стороны, то $E_x(y) < 0$ (рис. 8.12, *б*).

Если известна эластичность спроса на некоторый товар, можно найти саму функцию спроса.

Пример 8.7. Пусть эластичность функции спроса $q = f(p)$ является величиной постоянной для любых значений цены p и равна $E_p(q) = -\frac{1}{3}$.

Найти функцию спроса, если известно, что при цене товара, равной 1 ден. ед., спрос равен 3 ед. товара в единицу времени.

Решение. Пользуясь определением эластичности

$$E_p(q) = \frac{p}{q}q'_p = \frac{p\,dq}{q\,dp},$$

получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{p\,dq}{q\,dp} = -\frac{1}{3},$$

$$3\frac{dq}{q} = \frac{-dp}{p}.$$

Вычислим общий интеграл этого уравнения

$$3\int\frac{dq}{q} = -\int\frac{dp}{p}, \quad 3\ln|q| = -\ln|p| + \ln C, \quad q^3 = \frac{C}{p}.$$

Постоянную C находим из начального условия $q(1) = 3$.

$$3^3 = \frac{C}{1}, \quad C = 27.$$

Следовательно, функция спроса имеет вид

$$q = \sqrt[3]{\frac{27}{p}} = \frac{3}{\sqrt[3]{p}}. \blacksquare$$

8.5. Применение эластичности в экономике. Уравнение Слуцкого

В экономике эластичность часто используется при анализе функции спроса и потребления. В качестве примеров рассмотрим несколько видов эластичности.

1. Эластичность спроса по цене (ценовая эластичность спроса).

Пусть p — цена некоторого товара в денежных единицах за единицу товара, а q — спрос на этот товар в единицах товара за единицу времени.

Ранее было отмечено, что функция спроса $q(p)$ является функцией невозрастающей. Будем считать ее монотонно убывающей, т.е. при повышении цены на товар спрос падает.

Тогда производная спроса по цене $q'_p < 0$, следовательно, эластичность спроса по цене p, определяемая как

$$E_p(q) = \frac{p}{q} q'_p,$$

является величиной отрицательной, $E_p(q) < 0$.

Поэтому в экономике часто под *эластичностью спроса по цене* понимают ее абсолютную величину и когда говорят о высокой эластичности, имеют в виду большое значение модуля $|E_p(q)|$.

Спрос называется *эластичным*, если $|E_p(q)| > 1$, т.е. если при повышении цены товара на 1% спрос падает больше чем на 1%, и *неэластичным*, если $|E_p(q)| < 1$ (при повышении цены на 1% спрос падает менее чем на 1%).

Если $E_p(q) = 0$, то спрос называют *совершенно неэластичным*.

Рассмотрим, как ведет себя общий доход (выручка)

$$R = pq$$

продавца в единицу времени при эластичном и неэластичном спросе.

Выразим производную общего дохода продавца по цене через эластичность

$$\begin{aligned} R'_p = (pq)'_p = q + pq'_p = q\left(1 + \frac{p}{q} q'_p\right) = \\ = q[1 + E_p(q)] = q[1 - |E_p(q)|]. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Эта производная, так же как и производная дохода продавца по спросу R'_q, в экономике называется *предельным доходом продавца.*

В последнем равенстве записан модуль со знаком минус, так как эластичность спроса по цене всегда $E_p(q) < 0$.

Основные выводы.

• Если спрос эластичный, т.е. $|E_p(q)| > 1$, то последняя «скобка» в формуле (8.5) отрицательна и $R'_p < 0$. Это означает, что общий доход продавца при повышении цены падает.

- Если спрос неэластичный, т.е. $|E_p(q)| < 1$, то последняя «скобка» в формуле (8.5) положительна и $R'_p > 0$, т.е. общий доход продавца при повышении цены растет.

Поэтому при эластичном спросе продавцу невыгодно повышать цену на товар, а при неэластичном спросе — выгодно.

- Можно показать, что эластичность спроса по цене тем выше, чем выше *замещаемость* товара.

Поясним последнее обстоятельство. Пусть на товар № 1 цена повышается. Существует аналогичный по назначению и качеству товар № 2, на который цена не увеличивается. Тогда ценовая эластичность спроса на товар № 1 очень высока.

- Эластичность спроса по цене тем выше, чем выше удельный вес расходов на данный товар в доходе потребителя. Ясно, что ценовая эластичность спроса на очень дешевый товар низкая, например на спички (спрос на спички практически не изменится, даже если их цена увеличится, допустим, на 20%).

2. Эластичность спроса по доходу потребителя.

Обозначим, как и раньше, доход потребителя буквой I. Эластичность спроса по доходу потребителя $E_I(q)$ показывает, на сколько процентов изменится спрос на товар при повышении дохода потребителя I на 1% при неизменной цене p товара.

Если $E_I(q) > 0$, т.е. если при повышении дохода потребителя спрос на данный товар растет, то товар считается *нормальным* (качественным), а при $E_I(q) < 0$ — *малоценным.*

Ясно, что эта оценка зависит от абсолютного уровня дохода потребителя. Один и тот же товар (например, самая дешевая колбаса) при низком уровне дохода потребителя может считаться нормальным, а при высоком уровне дохода — малоценным.

3. Перекрестная эластичность спроса по цене.

Перекрестная эластичность спроса по цене для двух товаров $E_{p_i}(q_j)$ характеризует относительное изменение спроса на j-й товар при изменении цены на i-й товар, заменяющий или дополняющий его в потреблении, на 1%.

Если $E_{p_i}(q_j) > 0$, то это свидетельствует о ***взаимозаменяемости*** товаров, так как увеличение цены на один товар приводит к увеличению спроса на другой (например, чай и кофе).

Если $E_{p_i}(q_j) < 0$, то это говорит об их ***взаимодополняемости*** (чай и сахар). В этом случае рост цены на один из этих товаров приводит к снижению спроса на другой.

Пример 8.8. Исследованиями установлено, что спрос q изделий в неделю на изделие A в торговой фирме зависит от его цены p руб. следующим образом:

$$q(p) = 1200 - p^2.$$

Определить цену изделия A, при которой неэластичный спрос переходит в эластичный.

Решение. Найдем абсолютную величину эластичности функции спроса:

$$E_p(q) = \frac{p}{q} q'_p = \frac{p}{1200 - p^2}(-2p) = \frac{-2p^2}{1200 - p^2},$$

$$|E_p(q)| = \frac{2p^2}{1200 - p^2},$$

так как дробь в последнем равенстве всегда положительна.

Неэластичный спрос переходит в эластичный при абсолютной величине эластичности, равной единице. Следовательно, искомая цена определяется из уравнения

$$|E_p(q)| = 1.$$

Вычисляем

$$\frac{2p^2}{1200 - p^2} = 1, \quad 2p^2 = 1200 - p^2, \quad 3p^2 = 1200, \quad p^2 = 400,$$

$$p = 20 \text{ руб.}$$

Таким образом, искомая цена изделия A составляет 20 руб. ■

Пример 8.9. Исследованиями установлено, что спрос q изделий в неделю на изделие B в торговой фирме зависит от среднего дохода населения I тыс. руб. в месяц следующим образом:

$$q(I) = 150 + 20I - 5I^2.$$

Определить, при каких средних доходах населения изделие B может считаться нормальным, а при каких малоценным.

Решение. Найдем выражение для эластичности спроса q по доходу I:

$$E_I(q) = \frac{I}{q} q'_I = \frac{I}{q}(20 - 10I).$$

Изделие считается нормальным, если $E_I(q) > 0$. Тогда из последнего равенства

$$\frac{I}{q}(20 - 10I) > 0.$$

Так как $\frac{I}{q}$ всегда больше нуля, то должно выполняться неравенство

$$(20 - 10I) > 0 \Rightarrow 10I < 20; \quad I < 2.$$

Таким образом, изделие B считается нормальным при среднем доходе населения меньше 2 тыс. руб. в месяц.

Изделие считается малоценным, если средний доход населения больше 2 тыс. руб. в месяц. ■

Пример 8.10. Исследованиями установлено, что функция спроса на изделие C в торговой фирме имеет вид

$$q = 100\sqrt{16 - p}.$$

Определить, выгодно ли фирме повышать цену изделия C, если в настоящий момент цена равна 9 ден. ед.

Решение. Найдем выражение для абсолютной величины эластичности спроса по цене:

$$E_p(q) = \frac{p}{q}q'_p = \frac{p}{100\sqrt{16-p}}\left(\frac{-100}{2\sqrt{16-p}}\right) = \frac{-p}{2(16-p)};$$

$$|E_p(q)| = \frac{p}{2(16-p)}.$$

Определим значение $|E_p(q)|$ при $p = 9$:

$$|E_p(q)| = \frac{9}{2(16-9)} = \frac{9}{14} < 1.$$

Так как $|E_p(q)|$ при $p = 9$, то спрос неэластичный и при увеличении цены выручка фирмы возрастет. Следовательно, повышать цену выгодно. ■

Одним из основных уравнений в теории потребительского выбора является уравнение Слуцкого, опубликованное этим российским математиком в 1915 г.

Уравнение Слуцкого связывает динамику роста цены j-го товара со спросом на i-й товар при наличии компенсации роста цены (см. параграф 6.2).

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}} - \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial I}\right)x_j^*, \tag{8.6}$$

где x_i^*, x_j^* — компоненты оптимального набора потребителя, являющегося решением задачи потребительского выбора, поэтому их можно считать спросом на соответствующий товар; $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}$ — член, показывающий, на сколько изменится спрос на i-й товар при повышении цены на j-й товар; $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}}$ — то же самое, но при наличии компенсации повышения цены; $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial I}\right)x_j^*$ — член, показывающий, на сколько изменится спрос на этот товар при изменении дохода потребителя.

Как указывалось ранее, если i-й товар нормальный, качественный, то при увеличении дохода потребителя I спрос на этот товар растет.

В этом случае производная спроса по доходу положительна и в формуле (8.6)

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial I}\right)x_j^* > 0.$$

Из уравнения Слуцкого следует, что для такого товара выполняется

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} < \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}}.$$

То есть при росте цены на j-й товар спрос на i-й товар растет больше при наличии компенсации (товары взаимозаменяемые, $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j} > 0$).

Если спрос на i-й товар падает (товары взаимодополняемые, $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j} < 0$), то при компенсации этот спрос падает в меньшей степени.

Может оказаться и так, что в равенстве (8.6)

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} < 0, \quad \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}} > 0.$$

То есть товары взаимодополняемые без компенсации могут оказаться взаимозаменяемыми при компенсации.

Уравнение Слуцкого может быть использовано для вычисления величины компенсации на повышенную цену товара $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}}$, так как рассматриваемые частные производные без компенсации определяются значительно проще из-за гораздо большего количества имеющихся статистических данных.

8.6. Функции потребления и сбережения

Ранее предполагалось, что весь доход потребитель (население) тратит на приобретение товаров, т.е. на потребление. Однако кроме потребления население платит налоги и делает сбережения.

Пусть теперь I — доход, остающийся у населения после уплаты налогов.

Этот доход состоит из двух слагаемых. Часть дохода население тратит на приобретение товаров и услуг.

Эта часть составляет *функцию потребления*, которую обычно обозначают $C(I)$.

Второе слагаемое $S(I)$ составляют сбережения населения. Функция $S(I)$ называется *функцией сбережения*.

Очевидно, что

$$I = C(I) + S(I).$$

Функции потребления и сбережения обычно считаются линейными в течение короткого промежутка времени. На больших интервалах времени они таковыми не являются.

Если доход I получает приращение ΔI, то функции потребления и сбережения также получают приращения соответственно ΔC и ΔS:

$$\Delta I = \Delta C + \Delta S.$$

Последнее равенство можно разделить на $\Delta I \neq 0$ и перейти к пределу при $\Delta I \to 0$. Тогда получим

$$\lim_{\Delta I \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta I} + \lim_{\Delta I \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta I} = 1,$$

т.е.

$$\frac{dC}{dI} + \frac{dS}{dI} = 1.$$

Производные $\dfrac{dC}{dy}$ и $\dfrac{dS}{dy}$ называются соответственно *предельной склонностью к потреблению* и *предельной склонностью к сбережению*.

Значительную часть сбережений население хранит в банках не только из соображений лучшей сохранности, но и с целью получения процентов от вклада.

Определение начальной суммы вклада по ее конечной величине, полученной через время t (лет) хранения денежных сбережений в банке при годовом проценте (процентной ставке) p, называется *дисконтированием*.

Задачи такого рода встречаются при определении эффективности вложений денежных сбережений в банк.

Пусть K_t — конечная сумма, полученная за t лет, и K — дисконтируемая (начальная) сумма, которую в финансовом анализе называют также *современной суммой*.

Если проценты простые, то

$$K_t = K(1 + it),$$

где $i = p/100$ — удельная процентная ставка.

Тогда

$$K = \frac{K_t}{1 + it}.$$

В случае сложных процентов

$$K_t = K(1 + i)^t,$$

потому

$$K = \frac{K_t}{(1 + i)^t}.$$

Пусть поступающий ежегодно вклад изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ и при удельной процентной ставке, равной i, процент начисляется непрерывно.

Можно показать, что в этом случае дисконтированный вклад K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt. \qquad (8.7)$$

Пример 8.11. Определить дисконтированный вклад за три года при ставке 8%, если первоначальный (базовый) вклад составил 10 млн руб. и намечается ежегодно вносить вклад, увеличенный на 1 млн руб. по сравнению с предыдущим годом.

Решение. Очевидно, что вносимый ежегодный вклад определяется функцией

$$f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t,$$

где t — количество лет, прошедших после внесения базового вклада.

Тогда дисконтированный суммарный вклад определяется по формуле (8.7):

$$K = \int_0^3 (10 + t)e^{-0,08t}dt.$$

Интегрируя, получим $K = 30{,}5$ млн руб.

Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные вклады от 10 млн до 12 млн руб. в начале года (т.е. 33 млн руб.) равносильны одновременному первоначальному вкладу 30,5 млн руб. при той же начисляемой непрерывно процентной ставке. ■

8.7. Неравномерность распределения дохода населения

Совокупный доход, получаемый всем населением, как правило, распределяется неравномерно.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где y — доля совокупного дохода, получаемая частью x наиболее низко оплачиваемого населения.

Например, $y(0{,}8) = 0{,}6$ означает, что 80% наиболее низко оплачиваемого населения получают 60% совокупного дохода. Здесь принимается $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $y < x$.

Предположим, что нет населения с нулевым доходом, т.е. $y(0) = 0$, и весь доход получается всей совокупностью населения, т.е. $y(1) = 1$.

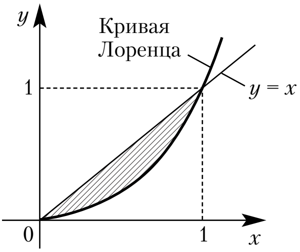


Рис. 8.13. **Кривая распределения дохода**

На рис. 8.13 показан пример графика функции $y = f(x)$, которая называется *кривой Лоренца*.

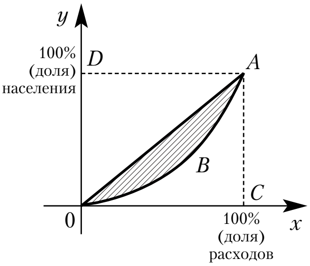
Если бы распределение доходов было совершенным, то 10% населения получали бы 10% совокупного дохода, 20% населения — 20% дохода и т.д. Тогда в идеале кривой распределения доходов была бы прямая $y = x$.

Отклонение реального распределения доходов от идеального измеряется отношением площади между прямой $y = x$ и кривой Лоренца к площади, ограниченной прямыми $y = x$, $x = 1$ и осью x, называется *коэффициентом неравномерности распределения доходов* или *коэффициентом Джини* и обозначается L.

Коэффициент Джини характеризует степень неравенства в распределении доходов населения.

Очевидно, что $0 \leqslant L < 1$. Значение $L = 0$ соответствует совершенному распределению доходов. Достаточно высокое значение L показывает существенно неравномерное распределение доходов среди населения в рассматриваемой стране.

Пример 8.12. По данным исследований распределения доходов в одной из стран, кривая Лоренца OBA может быть описана уравнением $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, где x — доля населения, y — доля доходов населения.



Вычислить коэффициент Джини.

Решение. По определению коэффициент Джини равен отношению площади заштрихованной фигуры OAB к площади треугольника OAC (см. рисунок).

$$L = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC},$$

так как $S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}$ как площадь половины квадрата $ODAC$.

$$S_{OBAC} = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx,$$

поэтому

$$L = 1 - 2\left(1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx\right) = 2\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx - 1.$$

С помощью замены переменной, например $x = \sin t$, можно вычислить

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Коэффициент Джини $L = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57$. ■

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Как определяется функция полезности?

2. Сформулируйте основные свойства функции полезности.

3. Как называются линии уровня функции полезности? Как они выглядят на координатной плоскости?

4. В чем заключается задача потребительского выбора? Какой вид имеет ее математическая формулировка?

5. Изобразите графически решение задачи потребительского выбора.

6. Как найти решение задачи потребительского выбора методом множителей Лагранжа?

7. Как изменится решение задачи потребительского выбора при повышении цены одного из товаров без компенсации и при ее наличии?

8. Как получить кривые «доход-потребление» и «цена-потребление»?

9. Как определяются функции спроса и предложения? Какой вид имеют их графики?

10. Что такое равновесная цена и равновесный объем продаж?

11. Дайте определение эластичности функции. По какой формуле определяется эластичность функции?

12. Сформулируйте основные свойства эластичности функции.

13. Как определить эластичность степенной функции; показательной функции; линейной функции?

14. Приведите примеры применения эластичности в экономике.

15. Как определяются функции потребления и сбережения?

16. Какой вид имеет кривая Лоренца?

17. Как определяется коэффициент Джини?

Задачи для самостоятельного решения

1. Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{x_1 x_2}$. Цена единицы первого товара равна 20 ден. ед., второго — 10 ден. ед. Доход потребителя составляет 200 ден. ед. Найти оптимальный потребительский набор.

2. Сколько денежных единиц должна составлять компенсация для сохранения уровня благосостояния потребителя в условии задачи 1, если цена первого товара повысилась на 21%? Каков при этом будет оптимальный потребительский набор?

3. Спрос q на некоторый товар зависит от его цены p следующим образом:

$$q(p) = \frac{2401}{\sqrt{p}} + 6.$$

Найти скорость изменения спроса при цене продукции, равной 49 ден. ед.

4. Функция спроса на товар A имеет вид $q = \dfrac{p + 88}{p + 1}$ изделий в месяц, а функция предложения $s = 12p + 6$ изделий в месяц, где p — цена единицы товара в некоторых денежных единицах. Найти равновесную цену товара A и равновесный объем его продаж.

5. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются соответственно линейными функциями:

$$q = 66 - 2p;$$
$$s = p + 27.$$

а) Найти точку рыночного равновесия, т.е равновесную цену на товар и равновесный объем продаж.

б) Найти точку равновесия после введения налога, равного 6.

в) Определить величину субсидии при отсутствии налога, если известно, что равновесный объем продаж после ее введения равен 42.

6. Найти эластичность функции $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 5}$ в точке $x = 2$.

7. Эластичность функции спроса $q = f(p)$ является величиной постоянной для любых значений цены p и равна $E_p(q) = -2$. Найти функцию спроса, если известно, что при цене товара, равной 3 ден. ед., спрос равен 5 ед. товара в единицу времени.

8. Исследованиями установлено, что спрос q кг в неделю на апельсины зависит от его цены p рублей следующим образом:

$$q(p) = 4284 + 12p - p^2.$$

Определить цену апельсинов, при которой неэластичный спрос переходит в эластичный.

9. Исследованиями установлено, что спрос q кг в год на продукт B зависит от среднего дохода населения I тыс. руб. в месяц следующим образом:

$$q(I) = 8125 + 1125I + 15I^2 - I^3.$$

Определить, при каких средних доходах населения продукт B может считаться качественным, а при каких малоценным.

Глава 9
ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ

9.1. Производственные функции

Производственная функция связывает объем затрачиваемых ресурсов (независимые переменные x_i) и объем выпуска продукции (зависимая переменная y).

В предположении, что для производства требуется два вида ресурсов (x_1, x_2), производственную функцию можно записать в общем виде

$$y = f(x_1, x_2),$$

где y — объем выпускаемой продукции; x_1 — количество затрат первого ресурса; x_2 — количество затрат второго ресурса.

Производственную функцию, зависящую от двух видов ресурсов, часто называют *двухфакторной*.

Для решения задач экономики часто используют *мультипликативную производственную функцию* вида

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}. \tag{9.1}$$

Частным случаем мультипликативной производственной функции является *функция Кобба — Дугласа*, у которой в формуле (9.1) принято $a_1 = a$; $a_2 = 1 - a$,

$$y = a_0 x_1^{a} x_2^{1-a}.$$

В качестве ресурсов (x_1, x_2) наиболее часто рассматривается накопленный труд в виде производственных фондов или капитала K и живой труд L.

Производственную функцию при этом обычно записывают в виде

$$Y = F(K, L).$$

Такая производственная функция характеризуется следующими показателями:

- $\dfrac{Y}{K}$ — капиталоотдача;

- $\frac{K}{Y}$ — капиталоемкость;
- $\frac{Y}{L}$ — производительность труда;
- $\frac{L}{Y}$ — трудоемкость;
- $\frac{K}{L}$ — капиталовооруженность.

Производственная функция обладает следующими ***свойствами***.

• При отсутствии одного из ресурсов производство невозможно, т.е.

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0.$$

• С ростом ресурсов объем выпуска продукции растет, т.е. положительны первые частные производные производственной функции, называемые в экономике соответственно *предельной капиталоотдачей* и *предельной производительностью труда* и обозначаемые соответственно

$$MY_K = Y'_K = \frac{\partial F}{\partial K} > 0; \quad MY_L = Y'_L = \frac{\partial F}{\partial L} > 0.$$

• С ростом ресурсов скорость роста выпуска продукции замедляется. Это означает, что вторые частные производные производственной функции отрицательны

$$Y''_{KK} = \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0; \quad Y''_{LL} = \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0.$$

Вычислим эластичность мультипликативной производственной функции

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}. \tag{9.2}$$

Эластичность по капиталу K определяется по формуле

$$E_K(Y) = \frac{K}{Y} Y'_K = \frac{K}{a_0 K^{a_1} L^{a_2}} \cdot a_0 a_1 K^{a_1 - 1} L^{a_2} = a_1.$$

Аналогично можно показать, что *эластичность по труду* $E_L(Y)$ равна a_2.

Отсюда следует, что показатели a_1 и a_2 в формуле (9.2) приближенно показывают, на сколько процентов изменится выпуск продукции при изменении только затрат объема производственных фондов K или только труда L на 1% соответственно.

Иначе говоря, эластичность по капиталу $E_K(Y)$ показывает, на сколько процентов увеличится выпуск продукции, если затраты капитала K увеличатся примерно на 1% при неизменном живом труде L, а $E_L(Y)$ — если затраты труда L увеличатся на 1% при постоянном объеме капитала K.

Линии уровня производственной функции называются *изоквантами*. Для мультипликативной производственной функции уравнение изокванты имеет вид

$$a_0 K^{a_1} L^{a_2} = C.$$

Если отложить по осям абсцисс и ординат соответственно L и K (рис. 9.1), то изокванта является гиперболой, асимптотами которой служат оси координат.

Линии наибольшего роста производственной функции называются *изоклиналями*. Изоклинали ортогональны в текущей точке A изоквантам, т.е. их касательные пересекаются под прямым углом.

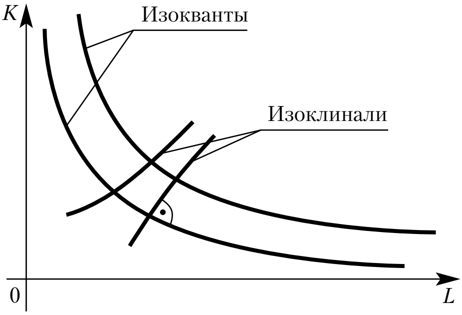


Рис. 9.1. **Производственные функции**

На изокванте производственная функция Y равна постоянному значению при разных значениях капитала K и труда L, т.е. увеличение количества одного фактора позволяет уменьшить количество другого, не меняя объема выпуска продукции y. Отсюда следует взаимозаменяемость ресурсов K и L.

Так как на изокванте $F(K, L)$ = const, то выполняется равенство

$$dF = \frac{\partial F}{\partial K} dK + \frac{\partial F}{\partial L} dL = 0.$$

Поскольку по свойству производственной функции обе частные производные $\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial K}$ положительны, то для выполнения последнего равенства на изокванте dK и dL должны иметь разные знаки.

Предельной нормой замены труда капиталом S_K называется отношение абсолютных величин дифференциалов капитала K и труда L

$$S_K = \left|\frac{dK}{dL}\right| = \frac{dK}{dL} = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K} = \frac{F'_L}{F'_K}.$$

Аналогично вычисляется *предельная норма замены капитала* K трудом L

$$S_L = \left|\frac{dL}{dK}\right| = \frac{dL}{dK} = \frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L} = \frac{F'_K}{F'_L}.$$

Для производственной функции вида (9.2)

$$Y = F(K, L) = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$$

можно записать

$$F'_K = a_0 a_1 K^{a_1 - 1} L^{a_2}; \quad F'_L = a_0 a_2 K^{a_1} L^{a_2 - 1}.$$

Тогда

$$S_K = \frac{F'_L}{F'_K} = \frac{a_0 a_2 K^{a_1} L^{a_2 - 1}}{a_0 a_1 K^{a_1 - 1} L^{a_2}} = \frac{a_2 K}{a_1 L}. \tag{9.3}$$

Аналогично

$$S_L = \frac{a_1 L}{a_2 K}. \tag{9.4}$$

Предельные нормы замены труда капиталом S_K и капитала трудом S_L показывают, на сколько единиц увеличатся затраты заменяющего ресурса, если затраты заменяемого ресурса уменьшатся на одну единицу при неизменном выпуске продукции.

Пример 9.1. Производственная функция имеет вид

$$Y = a_0 K^{0,75} L^{0,25}.$$

На сколько единиц должны увеличиться затраты труда L при уменьшении затрат капитала на одну единицу и при неизменном выпуске продукции, если отношение затрат труда к затратам капитала $\frac{K}{L}$ равно 6?

Решение. Искомое число единиц равно предельной норме замены капитала трудом S_L.

В производственной функции $a_1 = 0{,}75$; $a_2 = 0{,}25$. Тогда по формуле (9.4) можно записать

$$S_L = \frac{a_1 L}{a_2 K} = \frac{0{,}75}{0{,}25} \cdot \frac{1}{6} = 0{,}5.$$

Отсюда следует, что затраты труда увеличатся на пол-единицы. ■

9.2. Издержки производства

Линейная модель издержек. Точка безубыточности. При производстве Y единиц любой продукции *совокупные издержки* (*затраты*) $C(Y)$ состоят из двух слагаемых — постоянных (фиксированных) и переменных издержек

$$C(Y) = F + V.$$

Постоянные издержки F — это издержки, не зависящие от числа единиц произведенной продукции. Они включают в себя амортизацию, аренду помещений, проценты по займам и т.п.

Переменные издержки $V = V(Y)$ — это издержки, напрямую зависящие от количества произведенной продукции. Они включают в себя стоимость сырья, рабочей силы и т.п.

В простейшем случае переменные издержки V прямо пропорциональны количеству произведенной продукции Y, т.е.

$$V = aY.$$

Коэффициент пропорциональности a — это затраты на производство одной единицы продукции.

Тогда для совокупных издержек получаем уравнение, которое называется *линейной моделью издержек*,

$$C = C(Y) = F + aY.$$

Совокупный доход, или *выручка*, $R(Y)$, получаемый предприятием от продажи Y единиц произведенной продукции, определяется формулой

$$R(Y) = pY,$$

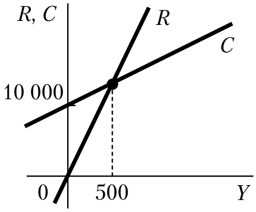
где p — цена единицы товара.

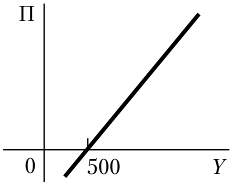
Прибыль $\Pi(Y)$ при этом определяется формулой

$$\Pi(Y) = R(Y) - C(Y).$$

Пример 9.2. Фиксированные издержки составляют 10 тыс. руб. в месяц, переменные издержки равны 30 руб. на единицу продукции. Цена единицы продукции составляет 50 руб.

Составить функции дохода, издержек и прибыли за месяц и построить их графики.





Решение. Из условия задачи ясно, что $F = 10\,000$; $a = 30$; $p = 50$.

Тогда

$$C(Y) = F + V(Y) = 10\,000 + 30Y,$$

$$R(Y) = 50Y.$$

Построим графики $R(Y)$ и $C(Y)$.

Таким образом, функция прибыли имеет вид

$$\Pi(Y) = 50Y - (10\,000 + 30Y) = \\ = 20Y - 10\,000.$$

Построен график $\Pi(Y)$. ■

Как очевидно из примера, при малых значениях $Y < 500$ прибыль отрицательна, т.е. производство убыточно. При увеличении Y прибыль возрастает и в некоторой точке $Y_0 = 500$ она обращается в нуль, после чего становится положительной.

Точка Y_0, в которой прибыль обращается в нуль, называется *точкой безубыточности* (в примере $Y_0 = 500$).

Пример 9.3. Издержки производства 100 шт. некоторого товара составляют 300 руб., а 500 шт. — 600 руб.

Определить издержки производства 400 шт. товара при условии, что функция издержек производства линейна.

Решение. График линейной функции издержек представляет собой прямую, на которой даны две точки: при $Y_1 = 100$ имеем $C_1 = 300$, а $Y_2 = 500$ соответствует $C_2 = 600$.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, имеет вид

$$C - C_1 = \frac{C_2 - C_1}{Y_2 - Y_1}(Y - Y_1).$$

Подставляя координаты точек в уравнение, получаем

$$C - 300 = \frac{600 - 300}{500 - 100}(Y - 100); \quad C = \frac{3}{4}Y + 225.$$

Если $Y = 400$, то $C = \frac{3}{4}Y + 225 = \frac{3}{4} \cdot 400 + 225 = 525$, т.е. искомая величина составляет 525 руб. ■

Предельными издержками производства в экономике называют производную функции издержек:

$$MC_Y = C'(Y) = \frac{dC}{dY}.$$

Эта величина характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Аналогичным образом могут быть определены *предельный доход*

$$MR_Y = R'(Y) = \frac{dR}{dY},$$

предельная прибыль

$$MI_Y = I'(Y) = \frac{dI}{dY}$$

и другие предельные величины.

Пример 9.4. Функция издержек имеет вид

$$C(Y) = 0{,}01Y^3 - 0{,}2Y^2 + 10Y + 2000.$$

Найти выражение для предельных издержек и посчитать их значение в точке $Y = 10$.

Решение.

$$MC_Y = C'(Y) = 0{,}03Y^2 - 0{,}4Y + 10;$$
$$MC_Y(10) = C'(10) = 0{,}0310^2 - 0{,}410 + 10 = 9.$$

Пользуясь формулой для приближенного значения приращения функции, вычисляемого с помощью дифференциала

$$\Delta C \approx dC = C'(Y)\Delta Y,$$

можно интерпретировать величину $C'(10)$ так: если произведено 10 изделий, то дополнительные издержки ΔC по производству 11-го изделия ($\Delta Y = 1$) приближенно равны $C'(10) = 9$. ■

Пример 9.5. Зависимость между издержками производства и объемом выпускаемой продукции выражается функцией

$$C(Y) = 50Y - 0{,}05Y^3.$$

Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 ед.

Решение. Средние издержки (на единицу продукции) выражаются отношением

$$C_{\text{ср}} = \frac{C(Y)}{Y} = \frac{50Y - 0{,}05Y^3}{Y} = 50 - 0{,}05Y^2.$$

При $Y = 10$ средние издержки (на единицу продукции) равны

$$C_{\text{ср}}(10) = 50 - 0{,}05 \cdot 102 = 45 \text{ ден. ед.}$$

Предельные издержки выражаются производной

$$C'(Y) = 50 - 0{,}15Y^2.$$

При $Y = 10$ предельные издержки составят

$$MC_Y(10) = Y'(10) = 50 - 0{,}15 \cdot 102 = 35 \text{ ден. ед.}$$

Итак, если средние издержки на производство единицы продукции составляют 45 ден. ед., то предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции при объеме выпускаемой продукции 10 ед. составляют 35 ден. ед. ■

Издержки хранения. Транспортные издержки. Если после изготовления товар реализуется не сразу, то к совокупным издержкам производства товара $C(Y)$ добавляются издержки его хранения $C_{\text{хр}}$.

Пусть товар завозится на склад партиями по x штук в одной партии в момент окончания реализации предыдущей партии, а реализуется с постоянной скоростью в течение времени t_0.

Тогда число z единиц товара на складе является функцией времени t, график которой приведен на рис. 9.2. Ясно, что при этом среднее число единиц товара на складе (средняя наполняемость склада) равно $\frac{x}{2}$.

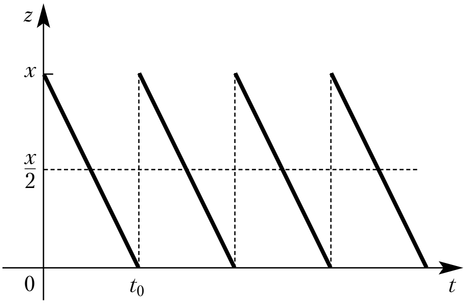


Рис. 9.2. **Издержки хранения**

Задачу нахождения объема партии x для обеспечения минимальных суммарных издержек производства и хранения

$$C = C(Y) + C_{\text{хр}}$$

рассмотрим на конкретном примере.

Пример 9.6. Компании требуется произвести за год 1000 ед. некоторого товара. Издержки подготовки производства одной партии составляют 20 ден. ед. Издержки производства составляют 8 ден. ед. за единицу товара, а годовые издержки хранения — 1 ден. ед. за единицу.

Найти такое число единиц товара в партии x, при котором суммарные издержки производства и хранения были бы минимальны.

Решение. При принятых обозначениях $Y = 1000$; $a = 8$. Обозначим b — годовые издержки хранения единицы товара на складе, а n — число партий товара.

Тогда

$$b = 1,\quad n = \frac{Y}{x} = \frac{1000}{x},\quad F = 20n = 20 \cdot \frac{1000}{x} = \frac{20\,000}{x},$$

$$V(Y) = aY = 8 \cdot 1000 = 8000.$$

Издержки производства составляют

$$C(Y) = F + V(Y) = \frac{20\,000}{x} + 8000.$$

Издержки хранения равны

$$C_{\text{хр}} = \frac{x}{2} b = \frac{x}{2} \cdot 1 = \frac{x}{2}.$$

Таким образом, суммарные издержки составляют

$$C_{\Sigma}(x) = C(Y) + C_{\text{хр}} = \frac{20\,000}{x} + 8000 + \frac{x}{2}.$$

Находим положительную критическую точку функции $C_{\Sigma}(x)$, приравнивая нулю ее производную,

$$C'_{\Sigma}(x) = \frac{20\,000}{x^2} + \frac{1}{2},\quad \frac{20\,000}{x^2} + \frac{1}{2} = 0,\quad x^2 = 40\,000,\quad x = 200.$$

Далее находим вторую производную функции $C_{\Sigma}(x)$ в критической точке $x = 200$

$$C''_{\Sigma}(x) = \frac{40\,000}{x^3},\quad C''_{\Sigma}(200) = \frac{40\,000}{200^3} = \frac{1}{200} > 0.$$

Следовательно, при $x = 200$ функция $C_{\Sigma}(x)$ имеет минимум.

Таким образом, в партии должно быть 200 ед. товара. ■

Рассмотрим на примере транспортные издержки $C_{тр}$, т.е. издержки, связанные с перевозкой товара.

Пример 9.7. Издержки перевозки двумя средствами транспорта в денежных единицах выражаются функциями

$$C_{тр1} = 150 + 0{,}5x \quad \text{и} \quad C_{тр2} = 250 + 0{,}25x,$$

где x — расстояние перевозки в километрах.

Определить расстояние, начиная с которого более экономичным становится второе средство, и транспортные издержки при перевозке на это расстояние.

Решение. Для определения искомого расстояния достаточно решить неравенство $C_{тр2} < C_{тр1}$, т.е. неравенство $250 + 0{,}25x < 150 + 0{,}5x$.

Отсюда имеем $0{,}25x > 100$ и $x > 400$.

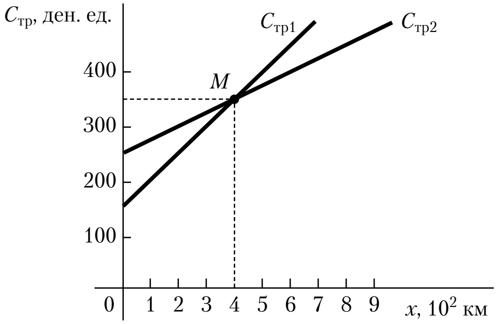
Получаем, что более экономичны перевозки вторым средством транспорта, начиная с расстояния $x = 400$ км. Транспортные издержки при этом расстоянии равны

$$C_{тр1} = 150 + 0{,}5x = 150 + 0{,}5 \cdot 400 = 350 \text{ ден. ед.}$$

или

$$C_{тр2} = 250 + 0{,}25x = 250 + 0{,}25 \cdot 400 = 350 \text{ ден. ед.}$$

Графическая иллюстрация решения этой задачи приведена на рисунке.



■

9.3. Поведение фирмы в условиях совершенной конкуренции

В условиях *совершенной конкуренции*, когда число участников рынка велико и каждая фирма не способна контролировать уровень цен, устойчивая продажа товаров возможна по преобладающей рыночной цене, которую будем обозначать p_0.

При этом суммарный доход составит $R(q) = qp_0$, соответственно средний доход $R_{\text{ср}} = \dfrac{R}{q} = p_0$ и предельный доход $R'(q) = p_0$ (рис. 9.3).

Таким образом, в условиях свободного конкурентного рынка средний и предельный доходы совпадают.

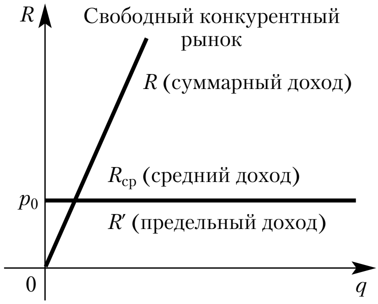


Рис. 9.3. **Совершенная конкуренция**

Будем считать, что при совершенной конкуренции определяемая рынком цена товара p_0 является постоянной и равновесной, т.е. по этой цене реализуется вся предложенная рынку продукция.

Тогда доход (выручка) R фирмы в заданном промежутке времени (например, за год) равен

$$R = p_0 Y,$$

где $Y = F(K, L)$ — объем выпускаемой фирмой продукции; K, L — объемы затраченных капитала и труда.

Издержки производства для фирмы в заданном промежутке — это общие выплаты по видам затрат.

Если p_1 и p_2 — расходы, затрачиваемые фирмой на единицу капитала и труда соответственно, то издержки C фирмы определяются по формуле

$$C = p_1 K + p_2 L.$$

Прибыль П фирмы в заданном промежутке времени — это разность между доходом R и издержками C, т.е.

$$\Pi(K, L) = R - C = p_0 F(K, L) - (p_1 K + p_2 L). \tag{9.5}$$

Целью функционирования фирмы является максимизация прибыли путем правильного распределения затрачиваемых ресурсов. Математически эта проблема представляет собой обычную задачу на нахождение максимума функции двух переменных.

Пусть производственная функция имеет вид

$$F(K, L) = a_0 K^{a_1} L^{a_2}.$$

Тогда целевая функция в соответствии с выражением (9.5) запишется

$$\Pi(K, L) = p_0 a_0 K^{a_1} L^{a_2} - (p_1 K + p_2 L) \to \max$$

при условии $K > 0$; $L > 0$.

Как обычно, при решении такой задачи находим критические точки функции $\Pi(K, L)$, записав выражения для частных производных и приравняв их нулю,

$$\Pi'_K = p_0 a_0 a_1 K^{a_1-1} L^{a_2} - p_1 = 0;$$
$$\Pi'_L = p_0 a_0 a_2 K^{a_1} L^{a_2-1} - p_2 = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} p_0 a_0 a_1 K^{a_1-1} L^{a_2} &= p_1; \\ p_0 a_0 a_2 K^{a_1} L^{a_2-1} &= p_2. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{a_1 L}{a_2 K} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{или} \quad L = \frac{a_2 p_1}{a_2 p_2} K \quad \text{или} \quad K = \frac{a_1 p_2}{a_2 p_1} L.$$

Подставив эти выражения в выражение (9.6) и разрешив последние относительно K и L, получаем координаты критической точки (K_0, L_0)

$$\begin{aligned} K_0 &= \left(\frac{p_0 a_0 a_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_2 p_1}{a_1 p_2}\right)^{\frac{a_2}{1-a_1-a_2}}; \\ L_0 &= \left(\frac{p_0 a_0 a_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_2 p_1}{a_1 p_2}\right)^{\frac{1-a_1}{1-a_1-a_2}}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Можно убедиться, что критическая точка (K_0, L_0) будет точкой максимума при выполнении условия

$$a_1 + a_2 < 1. \tag{9.8}$$

Таким образом, если производственная функция фирмы

$$Y = F(K, L) = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$$

удовлетворяет условию (9.8), то фирма получит наибольшую прибыль при значениях ресурсов K_0 и L_0, вычисленных по формулам (9.7).

Пример 9.8. Задана функция предельного дохода продавца

$$R'_q = 20 - 0{,}04q.$$

Найти функцию дохода продавца и закон спроса на продукцию, если цена единицы продукции равна p.

Решение. Так как предельный доход — это производная функции дохода, то

$$R(q) = \int (20 - 0{,}04q)dq = 20q - 0{,}04\frac{q^2}{2} + C = 20q - 0{,}02q^2 + C.$$

Поскольку при нулевом спросе на продукцию доход продавца равен нулю, то $R(0) = 0$ и, следовательно, $C = 0$. Тогда

$$R(q) = 20q - 0{,}02q^2.$$

Если каждая единица продукции продается по цене p, то доход $R = pq$. Следовательно, деля на q функцию дохода, находим закон спроса в виде обратной функции $p(q)$

$$p = 20 - 0{,}02q. \blacksquare$$

Пример 9.9. Производственная функция, характеризующая выпуск продукции фирмой за год, имеет вид

$$Y = 5K^{0{,}4}L^{0{,}4}.$$

Средняя стоимость одного часа труда составляет 100 руб., а стоимость единицы капитала (одного рубля) — 20% годовых. Цена выпускаемой фирмой продукции установлена рынком и составляет 50 руб.

Найти оптимальный состав ресурсов. Определить годовой выпуск продукции, издержки производства и прибыль при оптимальном составе ресурсов.

Решение. Оптимальный состав ресурсов находим по формулам (9.7). Запишем

$$K_0 = \left(\frac{p_0 a_0 a_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_2 p_1}{a_1 p_2}\right)^{\frac{a_2}{1-a_1-a_2}} =$$

$$= \left(\frac{50 \cdot 5 \cdot 0{,}4}{0{,}2}\right)^{\frac{1}{1-0{,}4-0{,}4}} \left(\frac{0{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}4 \cdot 100}\right)^{\frac{0{,}4}{1-0{,}4-0{,}4}} =$$

$$= 500^2 \cdot 0{,}002^2 = 125\,000\,000 \text{ руб.}$$

$$L_0 = \left(\frac{p_0 a_0 a_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-a_1-a_2}} \left(\frac{a_2 p_1}{a_1 p_2}\right)^{\frac{1-a_1}{1-a_1-a_2}} =$$

$$= \left(\frac{50 \cdot 5 \cdot 0{,}4}{0{,}2}\right)^{\frac{1}{1-0{,}4-0{,}4}} \left(\frac{0{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}4 \cdot 100}\right)^{\frac{1-0{,}4}{1-0{,}4-0{,}4}} = 500^2 \cdot 0{,}002^3 = 250\,000 \text{ ч.}$$

Таким образом, для получения максимальной прибыли фирма должна привлечь капитал 125 млн руб. и иметь в году 250 тыс. рабочих часов.

Если принять, что один работник отрабатывает в год 2200 ч, то штат предприятия должен состоять из

$$\frac{250\ 000}{2200} = 114 \text{ работников.}$$

Вычислим остальные показатели функционирования фирмы.

Оптимальное количество производимой за год продукции

$$Y_0 = 5K_0^{0,4}L_0^{0,4} = 5 \cdot 125\ 000\ 000^{0,4} \cdot 25\ 000^{0,4} = 1,25 \text{ млн изделий.}$$

Оптимальный доход (выручка) фирмы

$$R_0 = p_0Y_0 = 50 \cdot 1\ 250\ 000 = 62,5 \text{ млн руб.}$$

Оптимальные издержки производства предприятия

$$C_0 = p_1K_0 + p_2L_0 = 125\ 000\ 000 \cdot 0,2 + 100 \cdot 250\ 000 = 50 \text{ млн руб.}$$

Оптимальная годовая прибыль фирмы

$$\Pi_0 = R_0 - C_0 = 62,5 \text{ млн руб.} - 50 \text{ млн руб.} = 12,5 \text{ млн руб.} \blacksquare$$

9.4. Поведение фирмы в условиях несовершенной конкуренции

Рассмотрим *крайний случай несовершенной конкуренции*, т.е. монополию. В условиях монополии одна или несколько фирм полностью контролируют предложение определенной продукции и, следовательно, устанавливают цены на нее. При этом, как правило, с увеличением цены спрос на продукцию падает.

Будем полагать, что это происходит по прямой, т.е. кривая спроса — линейная убывающая функция вида (рис. 9.5)

$$p = b - aq.$$

Тогда суммарный доход от реализованной продукции составит

$$R(q) = pq = (b - aq)q = bq - aq^2.$$

В этом случае средний доход на единицу продукции составит

$$R_{\text{ср}} = \frac{R}{q} = b - aq,$$

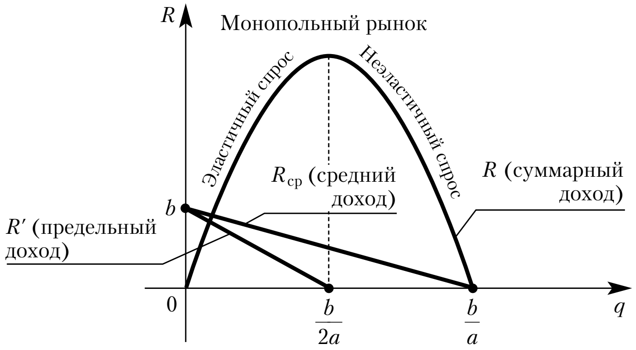


Рис. 9.4. **Несовершенная конкуренция**

а предельный доход, т.е. дополнительный доход от реализации единицы дополнительной продукции, составит (рис. 9.4)

$$R'_q = b - 2aq.$$

Следовательно, *в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению* (с меньшей скоростью) *среднего дохода.*

Прибыль монополиста определяется по формуле

$$\Pi(q) = R(q) - C(q),$$

где $C(q)$ — издержки производства.

Для нахождения максимума прибыли нужно продифференцировать последнее уравнение и приравнять производную нулю

$$\Pi'(q) = R'(q) - C'(q) = 0.$$

Отсюда следует, что для достижения максимальной прибыли предельный доход $R'(q) = \dfrac{dR(q)}{dq}$ должен быть равен предельным издержкам $C'(q) = \dfrac{dC(q)}{dq}$, т.е. $R'(q) = C'(q)$.

Если предельные издержки $C'(q)$ не являются линейными функциями спроса, то оптимальное (с точки зрения прибыли) значение спроса можно найти графическим методом.

Здесь следует иметь в виду: чтобы вся произведенная продукция была реализована, нужно обеспечить равенство значения спроса и объема производимой продукции.

Изобразим на координатной плоскости qp (см. рис. 9.5) прямую спроса $p(q)$, прямую предельного дохода $R'(q)$ и кривую предельных издержек $C'(q)$.

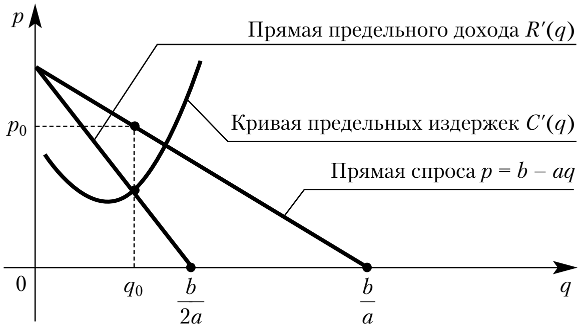


Рис. 9.5. **Оптимальный объем выпуска продукции**

Из графика очевидно, что оптимальным объемом выпуска продукции (*оптимальным спросом*) является значение q_0, соответствующее точке пересечения прямой предельного дохода и кривой предельных издержек.

Оптимальной ценой продукции при этом является значение p_0, соответствующее точке на кривой спроса с абсциссой q_0.

Пример 9.10. Спрос на продукцию, производимую монополистом, зависит от цены по формуле $q = 100 - 2p$ (изделий/день), где p — цена изделия в руб. Функция издержек монополиста имеет вид $C(Y) = 10 + 2Y$ (руб./день), где Y — объем выпуска продукции.

Определить оптимальные объем выпуска и цену продукции, а также максимальную прибыль монополиста.

Решение. Обратная функция спроса имеет вид

$$p = 50 - 0{,}5q.$$

Доход монополиста от продажи изделий составляет

$$R(q) = pq = 50q - 0{,}5q^2.$$

Для того чтобы не оставалось нереализованной продукции, объем выпуска должен быть равен спросу, т.е. $Y = q$. Поэтому функцию издержек можно записать в виде

$$C(q) = 10 + 2q.$$

Приравняв предельный доход $R'(q) = 50 - q$ предельным издержкам $C'(q) = 2$, находим оптимальный объем выпуска $q_0 = 48$ изделий/день.

Для определения оптимальной цены подставим это значение в функцию спроса

$$p_0 = 50 - 0{,}5q_0 = 50 - 0{,}5 \cdot 48 = 26 \text{ руб.}$$

Максимальную прибыль монополиста найдем по формуле

$$\Pi_{\max} = R(q_0) - C(q_0) = 50q_0 - q_0^2 - (10 + 2\,q_0) =$$
$$= 50 \cdot 48 - 0{,}5 \cdot 48^2 - (10 + 2 \cdot 48) = 1142 \text{ руб./день.} \ ■$$

9.5. Прикладные задачи в экономике

Вычисление налога на имущество предприятия. Если стоимость P имущества предприятия непрерывно изменяется в течение года в соответствии с зависимостью $P = f(t)$, то для вычисления налога на имущество используется понятие *среднего значения* $\overline{y}$ непрерывной функции $y = f(x)$ на промежутке $[a, b]$, которое находится по формуле

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Величина налога в этом случае определяется как

$$N = k\overline{P} = k\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \tag{9.9}$$

где k — коэффициент налогообложения, зависящий от вида предприятия; $\overline{P}$ — среднее значение стоимости имущества за год; T — промежуток времени, равный году.

Если интеграл в последнем равенстве невозможно найти по формуле Ньютона—Лейбница, то он может быть вычислен приближенно по формуле трапеций с разбиением года на 12 месяцев

$$N = \frac{k}{12}\left(\frac{f(0) + f(12)}{2} + f(1) + f(2) + \ldots + f(11)\right),$$

где $f(0)$ — стоимость имущества на 1 января; $f(1)$ — стоимость имущества на 1 февраля; ...; $f(11)$ — стоимость имущества на 1 декабря; $f(12)$ — стоимость имущества на 1 января следующего года.

Пример 9.11. Стоимость имущества в млн руб. в течение 2008 г. изменяется в соответствии с зависимостью

$$P = 250 + 50\sqrt{t},$$

где $t = 0$ на 1 января 2008 г. и $t = 1$ на 1 января 2009 г. Вычислить величину налога на имущество фирмы за 2008 г., если коэффициент налогообложения равен 0,005.

Решение. Из условия задачи следует

$$f(t) = 250 + 50\sqrt{t}\,,\ T = 1 \text{ и } k = 0{,}005.$$

Подставляя эти данные в формулу (9.9), получаем

$$N = k\bar{P} = 0{,}005\frac{1}{1}\int_0^1 (250 + 50t\sqrt{t}\,)dt = 0{,}005\left(250 + 50\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}dt\right) =$$

$$= 0{,}005\left(250 + 50\left.\frac{t^{3/2}}{5/2}\right|_0^1\right) = 0{,}005(250 + 20) = 1{,}35 \text{ млн руб. } ■$$

Задача максимизации прибыли. В ряде отраслей промышленности, например в горнодобывающей, после некоторого момента времени прибыль начинает убывать.

В этом случае необходимо найти момент времени, в который прибыль принимает максимальное значение, и своевременно остановить производство.

Пример 9.12. Скорости изменения издержек и дохода в условных денежных единицах в единицу времени имеют вид

$$C'(t) = 2 + t;$$

$$R'(t) = 17 - 2t.$$

Найти максимальное значение прибыли, которое можно получить от этого производства. Определить, когда производство следует остановить.

Решение. Вычислим предельное значение (т.е. производную) прибыли

$$\Pi'(t) = R'(t) - C'(t) = 17 - 2t - 2 - t = 15 - 3t,$$

$$\Pi'(t) = 0 \text{ при } t = 5,$$

$$\Pi''(5) = -3 < 0,$$

следовательно, $t = 5$ — точка максимума.

В точке максимума прибыль вычисляется выражением

$$\Pi(5) = \int_0^5 \Pi'(t)dt = \int_0^5 (15 - 3t)dt = \left.\left(15t - 3\,\frac{t^2}{2}\right)\right|_0^5 =$$

$$= 75 - \frac{3}{2}\cdot 25 = \frac{75}{2} \text{ ден. ед.}$$

Таким образом, максимальное значение прибыли составляет $\frac{75}{2}$ ден. ед. По истечении 5 у.е. времени производство следует приостановить. ■

Изменение капитала предприятия. Если $I(t)$ — зависимость изменения инвестиций, а $K(t)$ — капитал предприятия, то в первом приближении можно считать, что скорость роста капитала равна инвестициям

$$\frac{dK}{dT} = I(t).$$

Зная зависимость изменения инвестиций, можно найти изменение капитала за промежуток времени от t_1 до t_2

$$\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt. \tag{9.10}$$

Пример 9.13. Инвестор намерен непрерывно вкладывать средства в развитие фирмы по производству мебели в течение трех лет в соответствии с зависимостью

$$I(t) = 10(1 + t),$$

где $I(t)$ — годовой объем вкладываемых средств в млн руб. на момент времени t в годах.

Найти увеличение капитала фирмы через три года.

Решение. В соответствии с формулой (9.10)

$$\Delta K = \int_0^3 10(1 + t)dt = (10t + 5t^2)\Big|_0^3 = 75 \text{ млн руб.}$$

То есть через три года капитал фирмы увеличится на 75 млн руб. ■

Уравнение снабжения. *Уравнением снабжения* (*логистики*) называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dt} = py(m - y),$$

где p и m — постоянные.

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{y(m - y)} = pdt, \quad \frac{dy}{y^2 - my} = pdt.$$

Выделяем полный квадрат в знаменателе левой части равенства и интегрируем

$$\int \frac{dy}{\left(y - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4}} = -\int p dt,$$

$$\frac{1}{m} \ln \left| \frac{y - m}{y} \right| = -pt + C, \ \frac{y - m}{y} = e^{-mpt} e^C.$$

Из последнего равенства находим

$$y = \frac{m}{1 + e^{-mpt} e^C}.$$

Если обозначить $k = mp$, $A = e^C$, то получится функция, называемая *функцией снабжения* (*логистики*),

$$y = \frac{m}{1 + Ae^{-kt}},$$

где значение A определяется из начального условия.

Уравнение снабжения используется для ***моделирования ограниченного роста населения***.

Действительно, при $y = m$ имеем $\frac{dy}{dt} = 0$ и производная меняет знак с «+» на «–». Следовательно, $y = m$ — максимальное значение.

Если $y \ll m$, то

$$\frac{dy}{dt} \approx pmy = ky.$$

Уравнение $\frac{dy}{dt} = ky$ имеет решение $y = e^{kt}$ и описывает неограниченный экспоненциальный рост населения.

Пример 9.14. Пусть торговой фирмой реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени $t = 0$ из рекламы получили информацию 1% людей из общего числа m потенциальных покупателей.

Далее эта информация распространяется посредством информационных систем и, быть может, путем общения людей. Известно, что скорость роста числа знающих о продукции покупателей удовлетворяет уравнению логистики с постоянной $k = pm = 0{,}2$.

За какое время число людей, осведомленных о продукции фирмы, достигнет 80% от общего числа m потенциальных покупателей?

Решение. Воспользуемся уравнением логистики

$$\frac{dy}{dt} = py(m - y) = \frac{0{,}2}{m}(m - y), \quad \frac{mdy}{y(m - y)} = 0{,}2dt.$$

Интегрируем и, используя условие $y < m$, получаем

$$\ln\frac{m-y}{y} = -0{,}2t - C.$$

Пользуясь начальным условием $y = 0{,}01m$ при $t = 0$, находим значение C и подставляем его в решение

$$\ln\frac{0{,}99}{0{,}01} = -C, \quad \ln\frac{m-y}{99y} = -0{,}2t, \quad \frac{m-y}{99y} = e^{-0{,}2t},$$

$$y = \frac{m}{1+99e^{-0{,}2t}} \text{ — решение задачи.}$$

Найдем теперь значение t, при котором $y = 0{,}8m$,

$$0{,}8 = \frac{m}{1+99e^{-0{,}2t}}, \quad e^{-0{,}2t} = \frac{1}{396},$$

$$-0{,}2t = -\ln 396, \quad t = 5\ln 396 \approx 29{,}21 \text{ у.е. времени.} \blacksquare$$

Кривая обучения. Часто необходимо оценить, сколько времени потребуется для производства некоторого дополнительного количества продукции. Для подобных расчетов пользуются так называемой кривой обучения.

Пусть $T = F(x)$ — время, измеряемое в человеко-часах, необходимое для производства первых x единиц продукции. Тогда $f(x) = F'(x)$ приближенно равно времени, необходимому для производства $(x + 1)$-й единицы продукции.

Обычно используют функции вида

$$y = f(x) = ax^b,$$

где $a > 0$, $-1 \leqslant b < 0$.

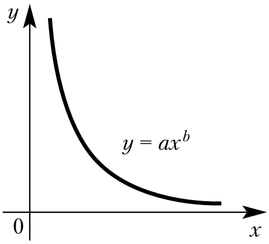


Рис. 9.6. **Кривая обучения**

График функции такого вида изображен на рис. 9.6 и называется *кривой обучения*.

Функция $f(x)$ — убывающая, так как время, необходимое для выполнения некоторой операции, убывает при возрастании числа повторов.

Время ΔT, необходимое для производства единиц продукции с номерами от $(n_1 + 1)$ до n_2, определяется формулой

$$\Delta T = \int_{n_1}^{n_2} f(x)dx.$$

Пример 9.15. После сборки 100 часов оказалось, что в дальнейшем время сборки часов убывает в соответствии с формулой

$$y = 15x^{-0,14},$$

где x — порядковый номер собираемых часов.

Найти время, которое потребуется для сборки еще 20 часов (т.е. с номера 101 до номера 120).

Решение.

$$\Delta T = \int_{100}^{120} 15x^{-0,14}dx = \frac{15x^{0,86}}{0,86}\Bigg|_{100}^{120} = \frac{1500}{86}(120^{0,86} - 100^{0,86}) =$$

$$= 8,91 \text{ у.е. времени. } \blacksquare$$

Пусть известна функция $t = t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x — порядковый номер изделия в партии.

Тогда *среднее время* $t_{\text{ср}}$, затраченное *на изготовление одного изделия в период освоения* от x_1 до x_2 изделий, вычисляется по формуле

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx. \quad (9.11)$$

Функция изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t\,(x)$ часто имеет вид

$$t = ax - b, \quad (9.12)$$

где a — затраты времени на первое изделие; b — показатель производственного процесса.

Пример 9.16. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ изделий, полагая в формуле (9.12) $a = 600$ мин, $b = 0,5$.

Решение. Используя формулу (9.11), получаем

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{121 - 100}\int_{100}^{121} 600x^{-1/2}dx = \frac{600}{21}2\sqrt{x}\Bigg|_{100}^{121} = \frac{400}{7} \approx 57,2 \text{ мин. } \blacksquare$$

Линейная модель амортизации. Существуют различные модели начисления амортизации на купленное предприятием оборудование.

Наиболее простая из них — линейная модель. Пользуясь ею, предприятие относит стоимость купленного оборудования на затраты производства *равными* долями.

Если известны начальная стоимость оборудования P, остаточная стоимость S и срок службы T, то ежегодная норма амортизации

$$a = \frac{P - S}{T}.$$

Стоимость оборудования $V(t)$ после t лет эксплуатации определяется по формуле

$$V(t) = P - \frac{P - S}{t} = P - at. \tag{9.13}$$

Последнее уравнение определяет прямую линию.

Аналогично можно определить стоимость потребительских товаров, например бытовой техники в процессе эксплуатации.

Пример 9.17. Предприятие купило прибор стоимостью 24 тыс. руб. Ежегодная норма амортизации составляет 10% от цены покупки.

Написать уравнение, определяющее стоимость прибора в зависимости от времени t. Найти стоимость прибора: а) через 5 лет; б) через 6 лет и 3 месяца.

Решение. По условию задачи P = 24 тыс. руб., $a = 0{,}1 \cdot 24 = 2{,}4$ тыс. руб./год.

Стоимость прибора в зависимости от времени t вычисляется по формуле (9.13):

$$V(t) = P - at = 24 - 2{,}4t.$$

Стоимость прибора через 5 лет будет составлять

$$V(5) = 24 - 2{,}4 \cdot 5 = 12 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогично через 6 лет и 3 месяца

$$V(6{,}25) = 24 - 2{,}4 \cdot 6{,}25 = 8{,}4 \text{ тыс. руб.} \blacksquare$$

Пример 9.18. Телевизор куплен за 10 000 руб. Срок службы телевизоров этой марки составляет 5 лет, остаточная стоимость равна нулю.

Построить график функции, определяющей стоимость телевизора в зависимости от времени t. За сколько нужно продать телевизор после 2,5 лет эксплуатации, чтобы получить прибыль 500 руб.?

Решение. По условию задачи P = 10 000 руб., $S = 0$, $T = 5$.

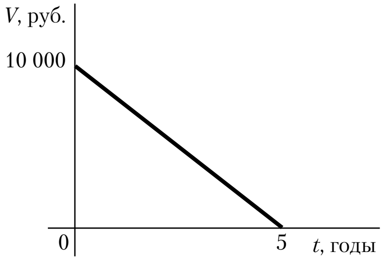
Тогда ежегодная норма амортизации

$$a = \frac{P - S}{T} = \frac{10\,000 - 0}{5} = 2000 \text{ руб./год.}$$

Стоимость телевизора в зависимости от времени t вычисляется по формуле (9.13):

$$V(t) = P - at = 10\,000 - 2000t.$$

График этой функции имеет вид



Стоимость телевизора через 2,5 года будет составлять

$$V(2{,}5) = 10\,000 - 2000 \cdot 5 = 5000 \text{ руб.}$$

Поэтому чтобы получить прибыль 500 руб., надо продать его за 5000 + 500 = 5500 руб. ■

Рассмотрим другие примеры прикладных задач экономики.

Пример 9.19. Объем продукции u, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением

$$u = \frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50 \text{ ед.}, \ 1 \leqslant t \leqslant 8,$$

где t — рабочее время в часах.

Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

Решение. Производительность труда выражается производной объема продукции по времени

$$z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100 \text{ ед./ч},$$

а скорость и темп изменения производительности — соответственно производной производительности труда $z'(t)$ и ее логарифмической производной

$$T_z(t) = [\ln z(t)]' = \frac{z'(t)}{z(t)}.$$

Тогда

$$z'(t) = -5t + 15 \text{ ед./ч}^2,$$

$$T_z(t)=\frac{z'(t)}{z(t)}=\frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2+15t+100}=\frac{2t-6}{t^2-6t-40}\ 1/\text{ч}.$$

В заданные моменты времени $t_1=1$ и $t_2=8-1=7$ соответственно имеем

$$z(1)=112{,}5\ \text{ед./ч},\quad z'(1)=10\ \text{ед./ч}^2,\quad T_z(1)=0{,}09\ 1/\text{ч}$$

и

$$z(7)=82{,}5\ \text{ед./ч},\quad z'(7)=-20\ \text{ед./ч}^2,\quad T_z(7)=-0{,}24\ 1/\text{ч}.$$

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака $z'(t)$ и $T_z(t)$ с «+» на «–» свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижением в последние часы. ■

Пример 9.20. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y тыс. руб. и выпуском продукции x млн руб. выражается функцией $y=-0{,}5x+80$.

Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн руб.

Решение. Вычислим эластичность себестоимости

$$E_x(y)=\frac{y'}{y}x=\frac{-0{,}5x}{-0{,}5x+80}=\frac{x}{x-160}.$$

При $x=60$ $E_x(y)=-0{,}6$, т.е. при выпуске продукции, равном 60 млн руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0,6%. ■

Пример 9.21. Опытным путем установлены функции спроса $q=\frac{p+8}{p+2}$ и предложения $s=p+0{,}5$, где q и s — количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p — цена товара.

Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение спроса и предложения при увеличении цены на 5% от равновесной.

Решение.

а) Равновесная цена определяется из условия $q=s$

$$\frac{p+8}{p+2}=p+0{,}5,$$

откуда $p=2$, т.е. равновесная цена равна 2 ден. ед.

б) Найдем эластичности спроса и предложения

$$E_p(q)=\frac{q'}{q}p=\frac{6p}{(p+2)(p+8)};\quad E_p(s)=\frac{s'}{s}p=\frac{2p}{2p+1}.$$

Для равновесной цены $p = 2$ после подстановки имеем $E_p(q) = -0{,}3$; $E_p(s) = 0{,}8$.

Так как полученные значения эластичностей по абсолютной величине меньше единицы, то и спрос, и предложение данного товара при равновесной (рыночной) цене неэластичны относительно цены. Это означает, что изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения. Так, при увеличении цены p на 1% спрос уменьшится на 0,3%, а предложение увеличится на 0,8%.

в) При увеличении цены p на 5% от равновесной спрос уменьшается на $5\% \cdot 0{,}3\% = 1{,}5\%$, а предложение возрастает на $5\% \cdot 0{,}8\% = 4\%$. ■

Пример 9.22. Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются кубической зависимостью

$$C(Y) = aY + \lambda Y^3, \quad a < p, \lambda > 0,$$

где Y — объем выпуска продукции.

Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль при условии, что вся выпущенная продукция реализуется.

Решение. Составим функцию прибыли

$$\Pi(Y) = pY - (aY + \lambda Y^3),$$

где pY — доход от реализуемой продукции.

Находим производную $\Pi'(Y) = (p - a) - 3\lambda Y^2$.

Вычислим критические точки: $\Pi'(Y) = (p - a) - 3\lambda Y^2 = 0$, откуда

$$Y = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}.$$

Вторую критическую точку с отрицательным знаком не рассматриваем по смыслу задачи.

Найдем вторую производную

$$\Pi''(Y) = -6\lambda Y.$$

В точке $Y = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ вторая производная равна

$$\Pi''\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) = -6\lambda\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}.$$

Так как вторая производная в рассматриваемой точке отрицательна, то в этой точке прибыль $\Pi(Y)$ максимальна.

Находим максимум функции прибыли (т.е. максимальный размер прибыли)

$$\Pi_{\max} = (p-a)\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}} - \lambda\frac{p-a}{3\lambda}\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}} = \frac{2(p-a)3\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}}. \blacksquare$$

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Как определяется производственная функция?

2. Запишите формулы мультипликативной производственной функции и производственной функции Кобба—Дугласа.

3. Что наиболее часто рассматривается в качестве ресурсов в производственной функции?

4. Какими показателями характеризуется производственная функция?

5. Сформулируйте основные свойства производственной функции.

6. Чему равна эластичность мультипликативной производственной функции по капиталу; по труду?

7. Как называются и как выглядят на координатной плоскости линии уровня производственной функции?

8. Как называются и как выглядят на координатной плоскости линии наибольшего роста производственной функции?

9. Как определяется предельная норма замены труда капиталом; капитала трудом? Что они показывают?

10. Как определяются совокупный доход (выручка) издержки и прибыль?

11. Как определяются постоянные и переменные издержки при производстве продукции?

12. Какая точка называется точкой безубыточности?

13. Что называют предельным доходом и предельными издержками?

14. Изложите методику определения оптимального объема выпуска продукции при совершенной конкуренции.

15. Какое условие должно выполняться для достижения максимальной прибыли монополиста?

16. Как найти оптимальный объем выпуска продукции в условиях монополии?

Задачи для самостоятельного решения

1. Производственная функция имеет вид

$$Y = a_0 K^{0,5} L^{0,2}.$$

Найти предельную норму замены труда капиталом, если в данном производстве затраты труда составляют 20 000 раб. ч в год, а годовые затраты капитала равны 500 млн руб.

2. Годовые издержки производства зонтов в рублях определяются по формуле

$$C(Y) = 487\,500 + 80Y + 0{,}01Y^2,$$

где Y — число выпущенных зонтов за год. Найти издержки производства и предельные издержки, если в предыдущем году было выпущено 10 000 зонтов.

3. В условии задачи 2 цена зонта, установленная рынком, составляет 300 руб. Найти:

а) точку безубыточности;

б) оптимальный годовой объем производства зонтов;

в) максимальную прибыль от продажи зонтов.

4. Цена каждого кресла, поставляемого мебельным комбинатом, равна 3000 руб. Издержки производства 20 кресел составляют 60 000 руб., а 10 кресел — 48 000 руб. Составить функцию дохода и функцию издержек, найти точку безубыточности, если известно, что функция издержек линейная.

5. Транспортные издержки $C_{\text{тр}1}$ в рублях перевозки некоторой продукции в грузовом автомобиле зависят от расстояния x в километрах в соответствии с зависимостью $C_{\text{тр}1} = 1000 + 20x + 0{,}3x^2$ $(x > 0)$, а издержки перевозки той же продукции по железной дороге определяются формулой $C_{\text{тр}2} = 6000 + 60x + 0{,}2x^2$. Начиная с какого расстояния перевозка по железной дороге становится более выгодной?

6. Цена, по которой фирма продает кофемолки, установлена рынком и равна 840 руб. Издержки производства C, руб., в текущем месяце зависят от объема производства Y по формуле $C = 200Y + Y^2$. Найти оптимальный месячный объем производства и максимальную прибыль фирмы.

7. Обратная функция спроса на товар, производимый монополистом, имеет вид $p = 580 - 2q - 0{,}1q^2$. Издержки производства зависят от объема производства Y по формуле $C(Y) = 130Y + Y^2$. Найти оптимальные объем производства и цену товара, а также максимальную прибыль монополиста.

8. Предприниматель купил фабрику за 370 млн руб. и потратил в течение года на приобретение оборудования для нее 60 млн руб. Найти величину налога на имущество, который должен заплатить предприниматель, если коэффициент налогообложения составляет 1%, а рост стоимости имущества фабрики можно считать линейным.

9. Численность населения $y(t)$ острова Бенедикт удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y' = 0{,}05y(1 - 10^{-6}y),$$

где t — время в годах. Через сколько лет население возрастет в 10 раз, если в настоящий момент на острове Бенедикт проживает 10 000 человек?

10. Петров купил компьютер за 15 тыс. руб. Ежегодная норма амортизации равна 20%. Найти стоимость компьютера через 3,5 года и срок службы компьютера.

Глава 10
ОБЩИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

10.1. Модели межотраслевого баланса. Модель Леонтьева

Рассмотрим модель многоотраслевой экономики, которая была разработана в 1936 г. американским экономистом В. Леонтьевым.

Пусть в стране имеется n отраслей хозяйства. Каждая отрасль производит некоторую продукцию. Часть продукции каждой отрасли идет на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного потребления (личного или общественного).

Рассмотрим процесс производства за некоторую плановую единицу времени, например за год.

Обозначим:

x_i — объем продукции i-й отрасли;

x_{ij} — часть объема продукции i-й отрасли, потребляемая j-й отраслью;

y_i — часть объема продукции i-й отрасли, поступающая для конечного потребления.

Так как валовой объем продукции любой i-й отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой n отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i, \quad i = 1, ..., n$$

или

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = 1, ..., n. \qquad (10.1)$$

Эти уравнения называются *соотношениями баланса*.

Будем считать, что все величины x_i, x_{ij}, y_i выражены в денежных единицах.

Введем понятие коэффициентов прямых затрат a_{ij}:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1, ..., n. \qquad (10.2)$$

Здесь под *коэффициентами прямых затрат* a_{ij} понимаются затраты продукции i-й отрасли на единицу продукции, выпускаемой j-й отраслью.

Можно полагать, что в течение года a_{ij} не изменяются. Это означает *линейную зависимость* материальных затрат от валового выпуска, т.е. выполняется равенство

$$x_{ij} = a_{ij}x_j,$$

вследствие чего построенная на этом основании модель межотраслевого баланса получила название *линейной*.

Подставляя эти выражения в соотношения баланса (10.1), получаем

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + y_i$$

или

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i, \quad i = 1, ..., n.$$

Из экономического смысла переменных ясно, что все величины x_i, a_{ij}, y_i — величины неотрицательные.

Если обозначить

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix},$$

то систему уравнений, представляющих собой соотношения баланса, можно записать в матричном виде

$$X = AX + Y. \qquad (10.3)$$

Обычно матрицу A называют *матрицей прямых затрат*, X — *матрицей-столбцом* (или вектором) *валового выпуска*, Y — *матрицей-столбцом* (вектором) *конечного продукта*.

Основная цель межотраслевого баланса состоит в том, чтобы отыскать такой вектор X, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор конечного продукта Y.

Система уравнений межотраслевого баланса решается методом обратной матрицы.

Записав соотношения баланса в матричной форме (10.3), имеем

$$\begin{aligned}&X = AX + Y \Rightarrow EX = AX + Y \Rightarrow EX - AX = Y \Rightarrow\\&\Rightarrow (E - A)X = Y \Rightarrow (E - A)^{-1}(E - A)X = (E - A)^{-1}Y \Rightarrow\\&\Rightarrow EX = (E - A)^{-1}Y \Rightarrow X = (E - A)^{-1}Y.\end{aligned} \tag{10.4}$$

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*, где E — единичная матрица.

Пример 10.1. Пусть в стране имеется три отрасли. Пронумеруем их по порядку № 1, № 2, № 3.

По результатам работы за истекший год определена матрица прямых затрат, имеющая вид

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Определить необходимый объем валового продукта каждой отрасли, если для конечного потребления необходимо 50, 40 и 80 условных ден. ед. продукции соответственно отраслей № 1, № 2 и № 3.

Решение. Найдем матрицу полных затрат $(E - A)^{-1}$. Для этого сначала запишем матрицу $(E - A)$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы можно вычислить по правилу Сарруса:

$$\Delta = \det(E - A) = \begin{vmatrix} 0{,}9 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}447.$$

Присоединенную матрицу найдем, вычислив алгебраические дополнения к элементам матрицы $(E - A)$ и транспонировав матрицу алгебраических дополнений

$$\overbrace{E - A} = \begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}12 & 0{,}15 \\ 0{,}17 & 0{,}70 & 0{,}13 \\ 0{,}11 & 0{,}19 & 0{,}61 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, обратная матрица $(E - A)^{-1}$ имеет вид

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \overbrace{E - A} =$$

$$= \frac{1}{0{,}447}\begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}12 & 0{,}15 \\ 0{,}17 & 0{,}70 & 0{,}13 \\ 0{,}11 & 0{,}19 & 0{,}61 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}208 & 0{,}268 & 0{,}336 \\ 0{,}380 & 1{,}566 & 0{,}291 \\ 0{,}246 & 0{,}425 & 1{,}365 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу-столбец (вектор) валового выпуска

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y = \begin{pmatrix} 1{,}208 & 0{,}268 & 0{,}336 \\ 0{,}380 & 1{,}566 & 0{,}291 \\ 0{,}246 & 0{,}425 & 1{,}365 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98{,}0 \\ 104{,}92 \\ 138{,}5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, валовой выпуск продукции отрасли № 1 должен составлять 98,0, отрасли № 2 – 104,92 и отрасли № 3 – 138,5 условных ден. ед. ■

10.2. Линейная модель обмена

В качестве примера математической модели экономического процесса, приводящейся к понятию собственного вектора и собственного значения матрицы, рассмотрим *линейную модель обмена* (*модель международной торговли*).

Пусть имеется n стран $S_1, S_2, ..., S_n$, национальный доход каждой из которых равен соответственно $x_1, x_2, ..., x_n$.

Обозначим коэффициентами a_{ij} долю национального дохода, которую страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i.

Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, ..., n. \qquad (10.5)$$

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, которая получила название *структурной матрицы торговли*.

В соответствии с выражением (10.5) сумма элементов любого столбца матрицы A равна единице. Можно доказать, что одним из собственных значений такой матрицы будет $\lambda = 1$.

Для любой страны S_i, $i = 1, 2, ..., n$ выручка от внутренней и внешней торговли составит

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n.$$

Для сбалансированной торговли необходима бездефицитность торговли каждой страны S_i, т.е. выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше ее национального дохода

$$p_i \geqslant x_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Если считать, что выполняется строгое неравенство $p_i > x_i$, то получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{n1}x_n > x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{n2}x_n > x_2, \\ \qquad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n > x_n. \end{cases} \qquad (10.6)$$

Сложив все неравенства системы (10.6), получим после группировки

$$x_1(a_{11} + a_{21} + ... + a_{n\,1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + ... + a_{n2}) + ... +$$
$$+ x_n(a_{1n} + a_{2n} + ... + a_{nn}) > x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

С учетом выражения (10.5) выражения в скобках равны единице, приходим к противоречивому неравенству

$$x_1 + x_2 + ... + x_n > x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Таким образом, неравенство $p_i > x_i$ невозможно, и условие $p_i \geqslant x_i$ принимает вид $p_i = x_i$.

Вводя вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ национальных доходов стран, получим матричное уравнение

$$AX = X, \tag{10.7}$$

где X — матрица-столбец из координат вектора $\vec{x}$, т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$.

Пример 10.2. Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти национальные доходы стран для сбалансированной торговли.

Решение. Находим собственный вектор $\vec{x}$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, решив уравнение

$$(A - E)X = 0$$

или систему

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

методом Гаусса.

Опуская промежуточные вычисления, найдем

$$x_1 = \frac{3}{2}c, \quad x_2 = 2c, \quad x_3 = c,$$

т.е.

$$x = \left(\frac{3}{2}c, 2c, c\right).$$

Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $\vec{x} = \left(\frac{3}{2}c, 2c, c\right)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран 3/2 : 2 : 1 или 3 : 4 : 2. ■

10.3. Общие модели развития экономики. Модель Солоу

Рассмотрим известную модель макроэкономической динамики развития с непрерывным временем.

Модель описывает динамику развития дохода страны $Y(t)$, который рассматривается как сумма потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$.

Основные допущения модели

1. Скорость роста дохода пропорциональна инвестициям

$$I(t) = B\frac{dY}{dt}.$$

Здесь коэффициент пропорциональности B называется *коэффициентом капиталоемкости прироста дохода*.

В модели считается, что инвестиции мгновенно переходят в прирост капитала.

2. Выбытие капитала отсутствует.

3. Затраты труда постоянны во времени.

4. Модель не учитывает технического прогресса.

Эти допущения существенно ухудшают возможность применения модели для непосредственного прогноза роста дохода. Однако простота модели позволяет хорошо изучить взаимосвязь динамики инвестиций $I(t)$ и роста дохода $Y(t)$.

Простейший вариант модели получается, если положить $C(t) = 0$, т.е. продукция государством не потребляется. Этот случай, конечно, совершенно нереален.

В модели весь доход направляется на инвестиции. Поэтому в результате анализа расчетов могут быть определены лишь максимально возможные темпы роста по формуле

$$Y(t) = C(t) + I(t) = 0 + B\frac{dY}{dt}.$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение

$$B\frac{dY}{dt} = Y \Rightarrow \frac{dY}{Y} = \frac{1}{B}dt \Rightarrow \ln Y = \frac{1}{B}t + \text{const}.$$

Потенцируя это равенство и положив, что в момент времени $t = 0$ доход равен Y_0, получаем

$$Y = Y_0 e^{\frac{1}{B}t}.$$

Темпом прироста функции в экономике называется отношение производной функции по времени к самой функции.

Темп прироста дохода, следовательно, равен

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{Y_0 \frac{1}{B} e^{\frac{1}{B}t}}{Y_0 e^{\frac{1}{B}t}} = \frac{1}{B}.$$

Так как в модели полагали, что потребление $C(t)$ отсутствует, то величина $\frac{1}{B}$ — это максимально возможный темп прироста дохода.

Пусть теперь потребление имеет место и постоянно во времени, т.е. $C(t) = C = \text{const}$. Тогда дифференциальное уравнение приобретает вид

$$Y = C + B\frac{dY}{dt} \quad \text{или} \quad B\frac{dY}{dt} - Y = C.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решая его с начальным условием $Y(0) = Y_0$, можно получить формулу

$$Y = (Y_0 - C)e^{\frac{1}{B}t} + C.$$

Темп прироста дохода в этом случае составляет

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{(Y_0 - C)\frac{1}{B}e^{\frac{1}{B}t}}{(Y_0 - C)e^{\frac{1}{B}t} + C} = \frac{\frac{1}{B}\left[(Y_0 - C)e^{\frac{1}{B}t} + C - C\right]}{(Y_0 - C)e^{\frac{1}{B}t} + C} =$$

$$= \frac{Y - C}{BY} = \frac{1}{B}\left(1 - \frac{C}{Y}\right).$$

Когда $t \to \infty$, растет доход Y при постоянном объеме потребления C. Тогда правая часть последнего выражения будет стремиться к $\frac{1}{B}$. Это означает, что при постоянном объеме потребления C и при росте дохода Y потребление составляет все меньшую долю от дохода.

Более сложной моделью экономического развития является *модель*, предложенная лауреатом Нобелевской премии Р. Солоу. Эта модель в отличие от предыдущей учитывает выбытие основного капитала, динамику трудовых ресурсов и технический прогресс. Кроме того, здесь ставится и решается задача максимизации уровня потребления.

Сформулируем лишь основные допущения модели Солоу, обозначения и выводы.

Допущения и обозначения модели Солоу.

1. Производственная функция имеет вид

$$Y = F(K, L).$$

2. Величина выбытия капитала W пропорциональна его величине K, т.е. выполняется равенство

$$W = \delta K,$$

где коэффициент δ называется *нормой выбытия*.

3. Норма инвестиций α считается постоянной величиной. Тогда величина инвестиций запишется как

$$I = \alpha Y.$$

4. Доход Y распределяется на потребление и инвестиции

$$Y = C + I.$$

5. Число занятых рабочих мест L растет с постоянным темпом n.

6. Технический прогресс имеет темп роста, равный g. Это означает, что эффективность труда на одного работающего растет с темпом g.

При сделанных допущениях производственную функцию можно рассматривать как зависимость производительности труда $y = \dfrac{Y}{L}$ от его капиталовооруженности $k = \dfrac{K}{L}$, т.е. $y = f(k)$.

В модели Солоу под L понимается число занятых работников при отсутствии технического прогресса либо число условных работников с одинаковой эффективностью при его наличии.

Заметим, что инвестиции I приводят к росту капиталовооруженности k.

Обозначим прирост капиталовооруженности в результате инвестиций через i, а потребление C на одну единицу труда L с постоянной эффективностью производства через c

$$i = \frac{I}{L}; \quad c = \frac{C}{L}.$$

Однако выбытие капитала с темпом δ, темпы роста численности работающих n и технического прогресса g приводят к снижению капиталовооруженности k.

Общий темп ее снижения равен

$$\delta + n + g,$$

следовательно, общая величина снижения капиталовооруженности равна

$$s = (\delta + n + g)k.$$

Величина k находится в состоянии устойчивого равновесия с устойчивым уровнем капиталовооруженности k^*, если ее прирост за счет инвестиций равен ее снижению за счет указанных факторов.

Так как

$$y = f(k),\ I = \alpha Y \quad \text{или} \quad i = \alpha y = \alpha f(k),$$

то условие равновесия капиталовооруженности k при значении k^* записывается в виде

$$s = i$$

или

$$(\delta + n + g)k^* = \alpha f(k^*).$$

Из рис. 10.1 следует устойчивость равновесия при $k = k^*$.

Так, если $k_1 < k^*$, то инвестиции $\alpha f(k_1)$ больше снижения капиталовооруженности

$$(\delta + n + g)k_1$$

и поэтому k растет.

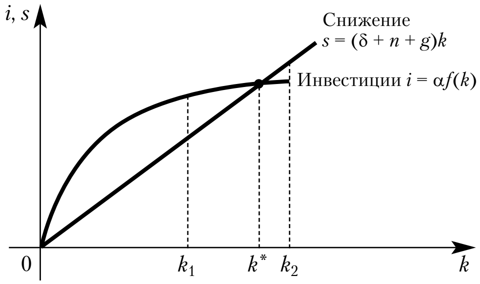


Рис. 10.1. **Условие равновесия капиталовооруженности**

Если $k^* < k_2$, то $\alpha f(k_2)$ меньше $(\delta + n + g)k_2$, капиталовооруженность падает, пока не достигнет k^*.

Если увеличить норму инвестиций α, то график $\alpha f(k)$ пойдет выше и пересечет прямую $(\delta + n + g)k$ правее. При этом увеличится устойчивый уровень капиталовооруженности k^* и, следовательно, устойчивый уровень дохода на единицу труда $f(k^*)$.

В устойчивом состоянии экономики темпы прироста показателей k, y, c, i равны нулю.

Поскольку это удельные показатели на единицу труда с постоянной эффективностью труда, которая растет с темпом g, то капитал K, доход Y, потребление C и инвестиции I растут также с темпом g.

Следовательно, модель Солоу показывает, что единственным источником длительного устойчивого дохода на одного работника, следовательно, и душевого потребления является технический прогресс.

Каждому уровню нормы инвестиций α соответствует свой уровень c^* устойчивого потребления на единицу труда с постоянной эффективностью.

Можно поставить задачу отыскания такого устойчивого состояния экономики, при котором величина c^* максимальна среди всех таких состояний.

Так как в любом устойчивом состоянии экономики выполняются равенства

$$i^* = \alpha f(k^*) = (\delta + n + g)k^*; \quad y^* = f(k^*);$$
$$c^* = y^* - i^* = f(k^*) - (\delta + n + g)k^*,$$

то, чтобы найти максимум c^*, продифференцируем по k^* функцию

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n + g)k^*.$$

Необходимое условие максимума

$$(c^*)' = [f(k^*) - (\delta + n + g)k^*]' = 0, \text{ т.е. } f'(k^*) - (\delta + n + g) = 0.$$

Отсюда получаем уравнение для нахождения точки максимума

$$f'(k^*) = \delta + n + g.$$

Последнее уравнение представляет собой правило выбора оптимального значения устойчивого уровня капиталовооруженности для максимизации уровня потребления и называется *«золотым правилом»*.

Соответствующий «золотому правилу» устойчивый уровень капиталовооруженности обозначается k^{**}, а норма инвестиций α^* для k^{**} называется *нормой инвестиций* по «золотому правилу» и может быть найдена по формуле

$$\alpha^* = \frac{(\delta + n + g)k^{**}}{f(k^{**})}.$$

Удельная величина потребления по «золотому правилу» определяется как разность между доходом и инвестициями

$$c^{**} = f(k^{**}) - (\delta + n + g)k^{**}.$$

На рис. 10.2 дана графическая иллюстрация «золотого правила».

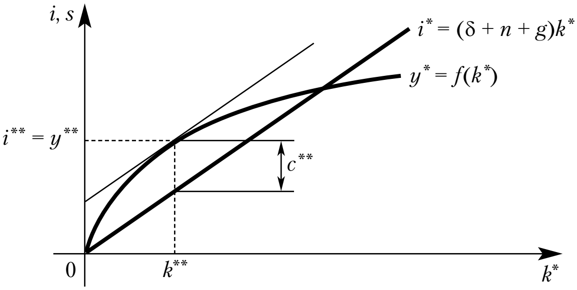


Рис. 10.2. **Иллюстрация «золотого правила»**

Если устойчивый уровень капиталовооруженности k^* меньше, чем k^{**}, то имеет смысл увеличить норму инвестиций α до значения α^*, а если $k^* > k^{**}$, то снизить α до α^*.

Тогда экономика постепенно выйдет на максимальный уровень удельного потребления c^{**}.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Изложите сущность модели Леонтьева.
2. Какие уравнения называются соотношениями баланса?
3. Что называют матрицей прямых затрат; вектором валового выпуска; вектором конечного продукта; матрицей полных затрат?
4. Изложите сущность линейной модели обмена.
5. Что называют коэффициентом капиталоемкости прироста дохода?
6. Что называют темпом прироста в экономике?
7. Изложите основные предпосылки и выводы модели Солоу.

Раздел III

ТЕСТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

Целью данного раздела является оказание помощи студентам в подготовке к аттестационной проверке их остаточных знаний, проводимой в форме тестирования по дисциплине «Математика» для экономических специальностей, специальностей «Менеджмент организаций» и «Государственное и муниципальное управление». Он включает в себя все разделы по данной дисциплине.

Здесь представлены 1175 вопросов, разбитых на 5 частей и 28 глав, а в конце приводятся правильные ответы.

Тесты составлены в соответствии с госстандартами изучения дисциплины студентами экономических специальностей на основе рекомендаций Национального аккредитационного агентства в сфере образования.

Часть	Глава	Страница учебника
1. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии	1. Матрицы и определители	268
	2. Системы линейных уравнений	286
	3. Векторы	292
	4. Собственные векторы и квадратичные формы	298
	5. Комплексные числа	299
	6. Элементы аналитической геометрии	302
2. Математический анализ и дифференциальные уравнения	7. Элементы теории множеств	315
	8. Числовые последовательности	318
	9. Предел и непрерывность функции	320
	10. Элементы дифференциального исчисления	328
	11. Функции нескольких переменных	340
	12. Неопределенный и определенный интегралы	345
	13. Числовые и степенные ряды	361
	14. Дифференциальные уравнения	368
	15. Элементы теории поля. Численное дифференцирование и интегрирование	381

Часть	Глава	Страница учебника
3. Теория вероятностей и математическая статистика	16. Случайные события и их вероятности	383
	17. Случайные величины	394
	18. Законы распределения	401
	19. Математическая статистика	407
4. Дискретная математика	20. Логика высказываний	416
	21. Алгебра логики	419
	22. Графы	422
	23. Элементы сетевого планирования и управления	424
	24. Элементы комбинаторики	426
5. Экономико-математические методы и модели	25. Математическое программирование	427
	26. Математические игры	436
	27. Элементы теории массового обслуживания	438
	28. Экономико-математические модели	441

Часть 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ЭЛЕМЕНТАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Глава 1. Матрицы и определители

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.1. При каком значении x матрицы A и B равны? $A = \begin{pmatrix} x^2 + 4x + 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	1) –2 ☐ 2) –1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 1 ☐
1.2. При каком значении y матрицы A и B равны? $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} y^2 - 6y + 15 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	1) 5 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
1.3. При каком значении z матрицы A и B равны? $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} z^2 - 4z + 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	1) 5 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.4. При каких значениях x и y матрицы A и B равны? $A=\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2x+y & -3 & -1 \\ 4 & 0 & 2x-y \end{pmatrix}$	1) $x=3; y=1$ ☐ 2) $x=1; y=2$ ☐ 3) $x=-3; y=2$ ☐ 4) $x=3; y=-1$ ☐
1.5. При каких значениях x и y матрицы A и B равны? $A=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} x+y & -2 \\ 5 & 4x-2y \end{pmatrix}$	1) $x=3; y=5$ ☐ 2) $x=4; y=5$ ☐ 3) $x=4; y=4$ ☐ 4) $x=4; y=2$ ☐
1.6. При каких значениях x и y матрицы A и B равны? $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5x-3y & -2 \\ 5 & x+3y \end{pmatrix}$	1) $x=1; y=1$ ☐ 2) $x=1; y=-1$ ☐ 3) $x=1; y=2$ ☐ 4) $x=1; y=-2$ ☐
1.7. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -8 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда сумма элементов $a_{13}+a_{22}+a_{31}$ этой матрицы равна...	1) 4 ☐ 2) −3 ☐ 3) 7 ☐ 4) −7 ☐
1.8. Заданы матрицы $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $4A-B^{\mathrm{T}}$, где B^{T} — транспонированная матрица B	1) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 17 & -5 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 13 & 18 & -1 \\ 8 & 7 & 11 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 15 & 24 & -9 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 33 & 30 \\ 36 & 33 \\ -21 & 39 \end{pmatrix}$ ☐
1.9. Заданы матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $3A+2B^{\mathrm{T}}$, где B^{T} — транспонированная матрица B	1) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 11 & -5 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 10 & 20 & -5 \\ 7 & 5 & 12 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 10 & -5 & 9 \\ 20 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 16 & 20 \\ 6 & 13 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.10. Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, то $B - 2A = \dots$	1) 2 ☐ 2) −15 ☐ 3) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ ☐ 5) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ☐
1.11. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, то $3A + 4B = \dots$	1) 3 ☐ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ 3) −2 ☐ 4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$ ☐ 5) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$ ☐
1.12. Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, то $A + 3B = \dots$	1) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ 2) 1 ☐ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ 4) −22 ☐ 5) $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ☐
1.13. Если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, то $2A - B = \dots$	1) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ ☐ 2) 3 ☐ 3) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ 4) −10 ☐ 5) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ☐
1.14. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, то $A + 3B = \dots$	1) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ ☐ 2) 1 ☐ 3) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ 4) −22 ☐ 5) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.15. Чему равен элемент c_{23} матрицы $C = 5A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	1) –9 ☐ 2) –12 ☐ 3) –11 ☐ 4) 6 ☐
1.16. Найти элемент c_{21} матрицы C, если $C = 2B + 5A$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	1) 11 ☐ 2) 12 ☐ 3) 16 ☐ 4) 17 ☐
1.17. Вычислить сумму элементов первого столбца матрицы $C = 2A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -6 & 2 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 12 \\ 7 & -12 & 8 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$	1) 11 ☐ 2) 12 ☐ 3) 13 ☐ 4) 14 ☐
1.18. Вычислить сумму элементов первого столбца матрицы $C = 2A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 5 & -6 & 7 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 11 & 12 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	1) –13 ☐ 2) –14 ☐ 3) –15 ☐ 4) –16 ☐
1.19. Вычислить сумму элементов первого столбца матрицы $C = 2A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -78 \\ 5 & 12 & -45 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 34 \end{pmatrix}$	1) –33 ☐ 2) –34 ☐ 3) –35 ☐ 4) –36 ☐
1.20. Если матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A - 2B$ имеет вид...	1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.21. Если матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A + 2B$ имеет вид...	1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ ☐
1.22. Если все элементы квадратной матрицы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю, то эта матрица...	1) вырожденная ☐ 2) треугольная ☐ 3) симметрическая ☐ 4) диагональная ☐
1.23. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = (3 \;\; -1 \;\; 4)$?	1) Только AB ☐ 2) Только BA ☐ 3) И то и другое ☐ 4) Ни то ни другое ☐
1.24. Какие существуют произведения матриц $A = (4 \;\; -1 \;\; -5)$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$?	1) Только AB ☐ 2) Только BA ☐ 3) И то и другое ☐ 4) Ни то ни другое ☐
1.25. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$?	1) И AB, и BA ☐ 2) Только AB ☐ 3) Только BA ☐ 4) Ни AB, ни BA ☐
1.26. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$?	1) Только AB ☐ 2) Только BA ☐ 3) И то и другое ☐ 4) Ни то ни другое ☐
1.27. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$?	1) И AB, и BA ☐ 2) Только AB ☐ 3) Только BA ☐ 4) Ни AB, ни BA ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.28. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$?	1) И *AB*, и *BA* ☐ 2) Только *AB* ☐ 3) Только *BA* ☐ 4) Ни *AB*, ни *BA* ☐
1.29. Даны матрицы *A* размерностью 3 × 5 и *B* размерностью 5 × 3. Произведение *AB* существует и имеет размерность...	1) 5 × 5 ☐ 2) 3 × 5 ☐ 3) 3 × 3 ☐ 4) 5 × 3 ☐
1.30. Даны матрицы *A* размерностью 4 × 6 и *B* размерностью 6 × 4. Произведение *AB* существует и имеет размерность...	1) 6 × 6 ☐ 2) 4 × 6 ☐ 3) 4 × 4 ☐ 4) 6 × 4 ☐
1.31. Для матриц *A* и *B* найдено произведение *AB*, причем $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда матрицей *B* может быть матрица...	1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $(5 \;\; 6 \;\; 1)$ ☐
1.32. Для матриц *A* и *B* найдено произведение *AB*, причем $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Тогда матрицей *B* может быть матрица...	1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $(5 \;\; 0 \;\; 1)$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ☐
1.33. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу *AB*	1) $\begin{pmatrix} 27 & 16 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 22 & 1 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ ☐ 5) $\begin{pmatrix} 41 & -10 \\ 25 & -8 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.34. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу AC	1) $\begin{pmatrix} 27 & 16 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 22 & 1 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ ☐ 5) $\begin{pmatrix} 41 & -10 \\ 25 & -8 \end{pmatrix}$ ☐
1.35. Даны матрицы $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу BC	1) $\begin{pmatrix} 27 & 16 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 22 & 1 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ ☐ 5) $\begin{pmatrix} 41 & -10 \\ 25 & -8 \end{pmatrix}$ ☐
1.36. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда произведение AB равно...	1) $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ☐
1.37. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда произведение AB равно...	1) $\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -8 & 20 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.38. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Сумма элементов матрицы AB равна...	1) 6 ☐ 2) 14 ☐ 3) 0 ☐ 4) 18 ☐
1.39. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Сумма элементов матрицы BA, расположенных на ее главной диагонали, равна...	1) 8 ☐ 2) 10 ☐ 3) 12 ☐ 4) 14 ☐
1.40. Чему равен элемент c_{23} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	1) 0 ☐ 2) 1 ☐ 3) 3 ☐ 4) 6 ☐
1.41. Чему равен элемент c_{21} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	1) −11 ☐ 2) −13 ☐ 3) −15 ☐ 4) −17 ☐
1.42. Чему равен элемент c_{31} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	1) 5 ☐ 2) 4 ☐ 3) 3 ☐ 4) 2 ☐
1.43. Чему равен элемент c_{32} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	1) −3 ☐ 2) 0 ☐ 3) 2 ☐ 4) 24 ☐
1.44. Чему равен элемент c_{21} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	1) −11 ☐ 2) −13 ☐ 3) −15 ☐ 4) −17 ☐
1.45. Чему равен элемент c_{31} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	1) 5 ☐ 2) 4 ☐ 3) 3 ☐ 4) 2 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.46. Чему равен элемент c_{32} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	1) −4 ☐ 2) 0 ☐ 3) 18 ☐ 4) 24 ☐
1.47. Произведением матриц $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ является...	1) $\begin{pmatrix} -5 & 25 & -4 \\ -10 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 17 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 15 & 21 & 5 \\ 18 & 12 & 11 \\ -2 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$ ☐
1.48. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда решением матричного уравнения $A + X = B$ является...	1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ☐
1.49. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда решением матричного уравнения $A + X = B$ является...	1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ☐
1.50. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -4 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Тогда решением матричного уравнения $2A + X = B$ является...	1) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 6 & 9 & -13 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -2 & -5 & 5 \\ 4 & 7 & -15 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -1 & -7 & -11 \\ -6 & -9 & -22 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} -1 & -7 & 13 \\ 10 & 15 & -22 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.51. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ равен...	1) 7 ☐ 2) −7 ☐ 3) −1 ☐ 4) 3 ☐
1.52. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$	1) 43 ☐ 2) 19 ☐ 3) 16 ☐ 4) 13 ☐
1.53. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$	1) 0 ☐ 2) −11 ☐ 3) −24 ☐ 4) −28 ☐
1.54. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 5 \end{vmatrix}$ равен нулю при $\alpha = ...$	1) 1 ☐ 2) 10 ☐ 3) −10 ☐ 4) 0 ☐
1.55. Определитель $\begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$ равен нулю при $\alpha = ...$	1) −4 ☐ 2) 3 ☐ 3) 0 ☐ 4) 4 ☐
1.56. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix}$ равен нулю при $\alpha = ...$	1) −3 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 0 ☐
1.57. Установить соответствие между α и значениями определителей $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix}$: А) $\alpha = 1$; Б) $\alpha = -4$; В) $\alpha = 2$; Г) $\alpha = 3$. а) $\Delta = -4$; б) $\Delta = 14$; в) $\Delta = 9$; г) $\Delta = 24$; д) $\Delta = 19$; е) $\Delta = -16$	1) А—в; Б—е; В—б; Г—д ☐ 2) А—г; Б—б; В—в; Г—а ☐ 3) А—в; Б—д; В—г; Г—а ☐ 4) А—г; Б—а; В—б; Г—в ☐ 5) А—в; Б—д; В—а; Г—г ☐
1.58. Установить соответствие между матрицей и ее определителем: А) $\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$; Б) $\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$; В) $\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$. а) 44; б) 240; в) −44; г) 120; д) 0	1) А—в; Б—б; В—д ☐ 2) А—а; Б—д; В—б ☐ 3) А—д; Б—в; В—б ☐ 4) А—а; Б—в; В—д ☐ 5) А—в; Б—д; В—б ☐
1.59. Установить соответствие между матрицей и ее определителем: А) $\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$; Б) $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$; В) $\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$. а) −145; б) 155; в) 145; г) 17; д) −17	1) А—в; Б—б; В—д ☐ 2) А—г; Б—д; В—б ☐ 3) А—д; Б—в; В—б ☐ 4) А—г; Б—д; В—а ☐ 5) А—в; Б—д; В—б ☐
1.60. Если все элементы определителя второго порядка умножить на 5, то новый определитель будет больше исходного...	1) в 25 раз ☐ 2) на 20 ☐ 3) в 5 раз ☐ 4) на 5 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.61. Формула вычисления определителя 3-го порядка $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ содержит следующие произведения:	1) bdk и ade ☐ 2) ade и cdg ☐ 3) cdg и afh ☐ 4) afh и bdk ☐
1.62. Формула вычисления определителя 3-го порядка $\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \\ o & p & r \end{vmatrix}$ содержит следующие произведения:	1) jlr и jno ☐ 2) jno и njl ☐ 3) njl и jlp ☐ 4) jlp и jlr ☐
1.63. Формула вычисления определителя 3-го порядка $\begin{vmatrix} x & y & z \\ k & l & m \\ n & o & p \end{vmatrix}$ содержит следующие произведения:	1) ykn и ymn ☐ 2) ymn и ykp ☐ 3) ykp и yzp ☐ 4) yzp и ykn ☐
1.64. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 7 & 5 & 2 \\ -4 & 10 & -14 \end{vmatrix}$ равен...	1) -140 ☐ 2) -280 ☐ 3) 560 ☐ 4) 0 ☐
1.65. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ равен...	1) $-4a_2b_2 + 5a_2b_1$ ☐ 2) $-4a_2b_2 - 5a_2b_1$ ☐ 3) $4a_2b_2 - 5a_2b_1$ ☐ 4) $-4a_2b_2 + 5a_2b_1$ ☐
1.66. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ равен...	1) $-2a_3b_1 - 3a_2b_1$ ☐ 2) $2a_3b_1 + 3a_2b_1$ ☐ 3) $-2a_3b_1 + 3a_2b_1$ ☐ 4) $2a_3b_1 - 3a_2b_1$ ☐
1.67. Определитель $\begin{vmatrix} -5 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \\ 50 & -100 & -50 \end{vmatrix}$ равен...	1) 2500 ☐ 2) 7500 ☐ 3) 0 ☐ 4) -7500 ☐
1.68. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ равен...	1) 18 ☐ 2) -74 ☐ 3) 74 ☐ 4) 0 ☐
1.69. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -8 \\ -3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$	1) -22 ☐ 2) -11 ☐ 3) 11 ☐ 4) 9 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.70. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$	1) −12 ☐ 2) 54 ☐ 3) −28 ☐ 4) 24 ☐
1.71. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	1) 0 ☐ 2) −20 ☐ 3) −25 ☐ 4) −35 ☐
1.72. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$	1) 5 ☐ 2) 13 ☐ 3) 17 ☐ 4) 49 ☐
1.73. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 5 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$	1) −40 ☐ 2) −54 ☐ 3) 38 ☐ 4) 40 ☐
1.74. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$	1) −14 ☐ 2) −15 ☐ 3) 14 ☐ 4) 15 ☐
1.75. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$	1) 31 ☐ 2) 35 ☐ 3) 37 ☐ 4) 39 ☐
1.76. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	1) −44 ☐ 2) −50 ☐ 3) −60 ☐ 4) −65 ☐
1.77. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$	1) 46 ☐ 2) 48 ☐ 3) 52 ☐ 4) 56 ☐
1.78. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$	1) 3 ☐ 2) 4 ☐ 3) −3 ☐ 4) −4 ☐ 5) −6 ☐
1.79. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 22 & -14 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 10 & -3 \end{vmatrix}$	1) 22 ☐ 2) −42 ☐ 3) 0 ☐ 4) 1 ☐ 5) 15 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.80. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	1) 8 ☐ 2) 4 ☐ 3) –3 ☐ 4) 12 ☐ 5) 0 ☐
1.81. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	1) –4 ☐ 2) 0 ☐ 3) 1 ☐ 4) 2 ☐ 5) –3 ☐
1.82. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	1) –2 ☐ 2) 0 ☐ 3) –1 ☐ 4) –3 ☐ 5) 4 ☐
1.83. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	1) 0 ☐ 2) –2 ☐ 3) 4 ☐ 4) 5 ☐ 5) –7 ☐
1.84. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$	1) 12 ☐ 2) 4 ☐ 3) 2 ☐ 4) 7 ☐ 5) 0 ☐
1.85. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	1) 0 ☐ 2) –5 ☐ 3) –7 ☐ 4) –9 ☐ 5) –11 ☐
1.86. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	1) 13 ☐ 2) 0 ☐ 3) 11 ☐ 4) 4 ☐ 5) 12 ☐
1.87. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$	1) 13 ☐ 2) 0 ☐ 3) 25 ☐ 4) 30 ☐ 5) 35 ☐
1.88. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	1) 5 ☐ 2) 10 ☐ 3) 25 ☐ 4) 30 ☐ 5) 35 ☐
1.89. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	1) 3 ☐ 2) 0 ☐ 3) 5 ☐ 4) 7 ☐ 5) 8 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.90. Алгебраическое дополнение элемента a_{23} определителя $A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ имеет вид...	1) $A_{23} = -\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ ☐ 2) $A_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ ☐ 3) $A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ ☐ 4) $A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ ☐
1.91. Алгебраическое дополнение элемента a_{23} определителя $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ имеет вид...	1) $A_{31} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ ☐ 2) $A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ ☐ 3) $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ☐ 4) $A_{31} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ☐
1.92. Найти алгебраическое дополнение A_{32} определителя $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$	1) –20 ☐ 2) –17 ☐ 3) 12 ☐ 4) 23 ☐
1.93. Найти алгебраическое дополнение A_{12} определителя $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	1) –9 ☐ 2) –10 ☐ 3) 10 ☐ 4) 16 ☐
1.94. Найти алгебраическое дополнение A_{23} определителя $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	1) –3 ☐ 2) –5 ☐ 3) –6 ☐ 4) –7 ☐
1.95. Найти алгебраическое дополнение A_{31} определителя $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & -2 \end{vmatrix}$	1) 4 ☐ 2) 11 ☐ 3) 12 ☐ 4) 19 ☐
1.96. Найти алгебраическое дополнение A_{23} определителя $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	1) 14 ☐ 2) 12 ☐ 3) 10 ☐ 4) 6 ☐
1.97. Найти алгебраическое дополнение A_{21} определителя $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	1) –3 ☐ 2) –4 ☐ 3) –5 ☐ 4) –6 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.98. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & -4 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	1) –3 ☐ 2) 0 ☐ 3) 48 ☐ 4) 32 ☐
1.99. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 18 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	1) –8 ☐ 2) –16 ☐ 3) –24 ☐ 4) –32 ☐
1.100. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$	1) –4 ☐ 2) –10 ☐ 3) 10 ☐ 4) 20 ☐
1.101. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$	1) –10 ☐ 2) –5 ☐ 3) –20 ☐ 4) –30 ☐
1.102. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$	1) 10 ☐ 2) 12 ☐ 3) 16 ☐ 4) 0 ☐
1.103. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	1) –7 ☐ 2) –2 ☐ 3) –1 ☐ 4) 12 ☐ 5) 0 ☐
1.104. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	1) 0 ☐ 2) –2 ☐ 3) –32 ☐ 4) –48 ☐ 5) –56 ☐
1.105. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ равен...	1) –24 ☐ 2) –38 ☐ 3) –66 ☐ 4) 0 ☐ 5) –88 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.106. Определитель $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ равен...	1) 5 ☐ 2) 2 ☐ 3) 1 ☐ 4) 0 ☐ 5) 3 ☐
1.107. Определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ равен...	1) 0 ☐ 2) 20 ☐ 3) 10 ☐ 4) –10 ☐ 5) –20 ☐
1.108. Определитель $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ равен...	1) –5 ☐ 2) –2 ☐ 3) –8 ☐ 4) 2 ☐ 5) 3 ☐
1.109. Определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ равен...	1) 0 ☐ 2) 20 ☐ 3) 40 ☐ 4) –10 ☐ 5) –20 ☐
1.110. Обратной к матрице $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ является...	1) $\begin{pmatrix} 1/11 & 1/4 \\ 1/8 & 1/3 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 6/55 & -8/55 \\ -4/55 & 11/55 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ ☐
1.111. Обратной к матрице $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ является...	1) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 1/8 & 1/5 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 2/31 & -5/31 \\ -3/31 & 8/31 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.112. Обратной к матрице $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 23 & 11 \end{pmatrix}$ является...	1) $\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -23 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -11 & -1 \\ -23 & -2 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/23 & 1/11 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} -11 & 1 \\ 23 & -2 \end{pmatrix}$ ☐
1.113. Обратной к матрице $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ является...	1) $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 \\ 1/4 & 1/7 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ ☐
1.114. Установить соответствие между двумя множествами... А) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; Б) $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$; В) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ -0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -0{,}3 & 0{,}4 \\ -1{,}4 & 1{,}8 \end{pmatrix}$; в) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}$; г) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}253 & 0{,}75 \\ -0{,}75 & 0{,}25 \end{pmatrix}$; д) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 2 & 1{,}5 \end{pmatrix}$	1) А—в; Б—б; В—д ☐ 2) А—а; Б—д; В—б ☐ 3) А—д; Б—в; В—г ☐ 4) А—а; Б—г; В—д ☐ 5) А—а; Б—б; В—в ☐
1.115. Установить соответствие между двумя множествами... А) $A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; Б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; В) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.	1) А—в; Б—б; В—д ☐ 2) А—а; Б—д; В—б ☐ 3) А—д; Б—в; В—г ☐ 4) А—а; Б—г; В—д ☐ 5) А—д; Б—а; В—б ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1{,}5 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -4 & 2{,}5 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$; в) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$; д) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	1) А—в; Б—б; В—д ☐ 2) А—а; Б—д; В—б ☐ 3) А—д; Б—в; В—г ☐ 4) А—а; Б—г; В—д ☐ 5) А—а; Б—б; В—в ☐
1.116. Чему равен ранг матрицы? $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
1.117. Чему равен ранг матрицы? $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 15 \end{pmatrix}$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
1.118. Чему равен ранг матрицы? $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
1.119. Чему равен ранг матрицы? $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
1.120. Чему равен ранг матрицы? $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
1.121. Чему равен ранг матрицы? $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ -18 & 0 & 6 \\ 36 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
1.122. Чему равен ранг матрицы? $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.123. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ равен...	1) 3 ☐ 2) 0 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
1.124. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ равен...	1) 3 ☐ 2) 2 ☐ 3) 1 ☐ 4) 0 ☐
1.125. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ равен...	1) 3 ☐ 2) 2 ☐ 3) 1 ☐ 4) 0 ☐
1.126. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 7 & -5 & 9 \\ -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ равен двум при λ, равном...	1) 3 ☐ 2) 2 ☐ 3) 1 ☐ 4) 0 ☐
1.127. Ранг квадратной матрицы A четвертого порядка равен $r(A) = 2$. Тогда определитель этой матрицы равен...	1) $\det A = 0$ ☐ 2) $\det A = 2$ ☐ 3) $\det A = 3$ ☐ 4) $\det A = 4$ ☐
1.128. Ранг квадратной матрицы A четвертого порядка равен $r(A) = 3$. Тогда определитель этой матрицы равен...	1) $\det A = 4$ ☐ 2) $\det A = 0$ ☐ 3) $\det A = 3$ ☐ 4) $\det A = 1$ ☐
1.129. Ранг квадратной матрицы A пятого порядка равен $r(A) = 3$. Тогда определитель этой матрицы равен...	1) $\det A = 5$ ☐ 2) $\det A = 2$ ☐ 3) $\det A = 3$ ☐ 4) $\det A = 0$ ☐

Глава 2. Системы линейных уравнений

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.1. Формулы вида $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$ для решения системы линейных уравнений через определители называются формулами...	1) треугольников ☐ 2) Кронекера ☐ 3) Капелли ☐ 4) Крамера ☐ 5) Коши — Буняковского ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.2. Как называется матрица системы линейных уравнений, дополненная столбцом свободных членов?	1) Однородная ☐ 2) Расширенная ☐ 3) Жорданова ☐ 4) Классическая ☐ 5) Полная ☐
2.3. Для системы линейных уравнений равенство рангов матрицы системы и расширенной матрицы системы является условием ее...	1) определенности ☐ 2) однородности ☐ 3) совместности ☐ 4) несовместности ☐ 5) неопределенности ☐
2.4. Как называется система линейных уравнений, в которой все свободные члены равны нулю?	1) Определенная ☐ 2) Однородная ☐ 3) Жорданова ☐ 4) Классическая ☐ 5) Базисная ☐
2.5. При решении системы уравнений с квадратной матрицей коэффициентов A можно применять правило Крамера, если...	1) определитель матрицы A равен нулю ☐ 2) ранг матрицы A равен числу ее столбцов ☐ 3) матрица A имеет два пропорциональных столбца ☐ 4) одна из строк матрицы является линейной комбинацией остальных ☐
2.6. При решении системы уравнений с квадратной матрицей коэффициентов A нельзя применять правило Крамера, если...	1) столбцы матрицы A линейно независимы ☐ 2) ранг матрицы системы не равен числу уравнений ☐ 3) строки матрицы A линейно независимы ☐ 4) определитель матрицы A не равен нулю ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.7. Дана система уравнений $\begin{cases}3x+2y=1\\6x+5y=4\end{cases}$. Для того чтобы найти значение переменной x при решении этой системы по формулам Крамера, достаточно вычислить только определители...	1) $\begin{vmatrix}3&2\\6&5\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}$ ☐ 2) $\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}3&1\\6&4\end{vmatrix}$ ☐ 3) $\begin{vmatrix}3&2\\6&5\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}3&1\\6&4\end{vmatrix}$ ☐ 4) $\begin{vmatrix}3&2\\6&5\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}3&1\\6&4\end{vmatrix}$ ☐
2.8. Дана система уравнений $\begin{cases}3x+2y=1\\6x+5y=4\end{cases}$. Для того чтобы найти значение переменной y при решении этой системы по формулам Крамера, достаточно вычислить только определители...	1) $\begin{vmatrix}3&2\\6&5\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}$ ☐ 2) $\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}3&1\\6&4\end{vmatrix}$ ☐ 3) $\begin{vmatrix}3&2\\6&5\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}3&1\\6&4\end{vmatrix}$ ☐ 4) $\begin{vmatrix}3&2\\6&5\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}3&1\\6&4\end{vmatrix}$ ☐
2.9. Дана система уравнений $\begin{cases}x-2y=3\\4x+5y=6\end{cases}$. Для того чтобы найти значение переменной x при решении этой системы по формулам Крамера, достаточно вычислить только определители...	1) $\begin{vmatrix}1&-2\\4&5\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}$ ☐ 2) $\begin{vmatrix}3&-2\\6&5\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}3&1\\6&4\end{vmatrix}$ ☐ 3) $\begin{vmatrix}1&-2\\4&5\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}3&-2\\6&5\end{vmatrix}$ ☐ 4) $\begin{vmatrix}1&-2\\4&5\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}3&-2\\6&5\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix}$ ☐
2.10. Расширенная матрица системы уравнений $\begin{cases}x-2y-z=3\\4x+5y+z=6\end{cases}$ имеет размерность...	1) 2 × 3 ☐ 2) 4 × 2 ☐ 3) 3 × 2 ☐ 4) 2 × 4 ☐
2.11. Дана система линейных уравнений $\begin{cases}x+7y=3\\-x+ay=5\end{cases}$. Система не имеет решений при $a=$ ...	1) –7 ☐ 2) –1/7 ☐ 3) 1/7 ☐ 4) 7 ☐
2.12. Дана система линейных уравнений $\begin{cases}4x-y=1\\ax-2y=3\end{cases}$. Система не имеет решений при $a=$ ...	1) –8 ☐ 2) –5 ☐ 3) 8 ☐ 4) 5 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.13. Система линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 4 \\ 3x_1 - 3x_2 = 7 \end{cases}$ решается по правилу Крамера. Установить соответствие между определителями системы и их значениями: А) Δ; Б) Δ_1; В) Δ_2. а) 9; б) –2; в) 23; г) 2	1) А—а; Б—в; В—б ☐ 2) А—а; Б—в; В—г ☐ 3) А—в; Б—а; В—б ☐ 4) А—г; Б—в; В—а ☐ 5) А—в; Б—а; В—г ☐
2.14. Система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$ решается по правилу Крамера. Установить соответствие между определителями системы и их значениями: А) Δ; Б) Δ_1; В) Δ_2. а) –17; б) 17; в) 18; г) 22	1) А—а; Б—в; В—б ☐ 2) А—а; Б—в; В—г ☐ 3) А—г; Б—а; В—б ☐ 4) А—г; Б—в; В—а ☐ 5) А—в; Б—а; В—г ☐
2.15. Система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$ решается по правилу Крамера. Установить соответствие между определителями системы и их значениями: А) Δ; Б) Δ_1; В) Δ_2. а) –3; б) 2; в) 16; г) 3	1) А—а; Б—в; В—б ☐ 2) А—в; Б—б; В—г ☐ 3) А—г; Б—а; В—б ☐ 4) А—г; Б—в; В—а ☐ 5) А—в; Б—а; В—г ☐
2.16. Решением системы уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ является...	1) $x_1 = -1; x_2 = -2$ ☐ 2) $x_1 = 1; x_2 = 3$ ☐ 3) $x_1 = 0; x_2 = 1$ ☐ 4) $x_1 = 1{,}5; x_2 = -0{,}5$ ☐ 5) $x_1 = 2; x_2 = -1$ ☐
2.17. Решением системы уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3 \\ 4x_1 + x_2 = -9 \end{cases}$ является...	1) $x_1 = 1{,}5; x_2 = 0{,}5$ ☐ 2) $x_1 = 2; x_2 = -2$ ☐ 3) $x_1 = -2; x_2 = -1$ ☐ 4) $x_1 = 1{,}1; x_2 = 0{,}8$ ☐ 5) $x_1 = 0{,}8; x_2 = -1$ ☐
2.18. Решением системы уравнений $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 = -3 \end{cases}$ является...	1) $x_1 = 1{,}5; x_2 = -2$ ☐ 2) $x_1 = 1; x_2 = -1$ ☐ 3) $x_1 = 2; x_2 = -1$ ☐ 4) $x_1 = 0{,}5; x_2 = -0{,}5$ ☐ 5) $x_1 = 0{,}5; x_2 = 0{,}5$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.19. Основная матрица системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_3 + 2x_2 - x_1 = 1 \\ x_3 - x_2 = 0 \\ x_3 + x_2 = 2 \end{cases}$ имеет вид...	1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐
2.20. Определитель основной матрицы системы линейных уравнений $\begin{cases} -2y + 6 = 0 \\ -y - 2z + 3 = 0 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ равен...	1) 10 ☐ 2) 8 ☐ 3) 76 ☐ 4) 80 ☐
2.21. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} -3x + \lambda y = 0 \\ -y - 3z = -5 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases}$. Эту систему нельзя решить методом Крамера при $\lambda = ...$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) −2 ☐ 4) −4 ☐
2.22. Чему равно значение x_1 в решении системы $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$?	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
2.23. Чему равно значение x_3 в решении системы $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -10 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8 \end{cases}$?	1) −1 ☐ 2) −2 ☐ 3) −3 ☐ 4) −4 ☐
2.24. Чему равно значение x_2 в решении системы $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$?	1) 4 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
2.25. Чему равно значение x_1 в решении системы $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$?	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐

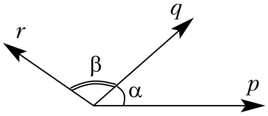
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.26. Чему равно значение x_1 в решении системы $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$?	1) 5 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
2.27. Чему равно значение x_2 в решении системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = -10 \end{cases}$?	1) 3 ☐ 2) 4 ☐ 3) 5 ☐ 4) 6 ☐
2.28. Чему равно значение x_3 в решении системы $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 20 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$?	1) 0 ☐ 2) –1 ☐ 3) –2 ☐ 4) –3 ☐
2.29. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$?	1) Ни одного ☐ 2) Одно ☐ 3) Три ☐ 4) Бесконечное множество ☐
2.30. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$?	1) Ни одного ☐ 2) Одно ☐ 3) Три ☐ 4) Бесконечное множество ☐
2.31. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$?	1) Ни одного ☐ 2) Одно ☐ 3) Три ☐ 4) Бесконечное множество ☐
2.32. При каком значении a_{22} система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 0 \\ -12x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$ имеет ненулевые решения?	1) 4 ☐ 2) –4 ☐ 3) –16 ☐ 4) –24 ☐
2.33. В системе уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_2 - 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$ в качестве свободных неизвестных можно выбрать...	1) x_4 ☐ 2) x_4, x_5 ☐ 3) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ☐ 4) x_1, x_2, x_3 ☐

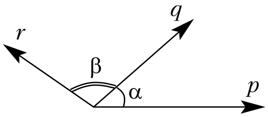
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.34. В системе уравнений $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$ в качестве свободных неизвестных можно выбрать...	1) x_4, x_5 ☐ 2) x_5 ☐ 3) x_4 ☐ 4) x_1, x_2, x_3 ☐

Глава 3. Векторы

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.1. Скалярное произведение $\langle a, b\rangle$ векторов $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ определяется по формуле...	1) $a_1a_2 + b_1b_2$ ☐ 2) $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$ ☐ 3) $a_1b_1 + a_2b_2$ ☐ 4) $(a_2 + a_1)(b_2 + b_1)$ ☐
3.2. Если α — угол между векторами a и b, то что определяется выражением $\dfrac{\langle a, b\rangle}{\lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert}$?	1) $\operatorname{tg}\alpha$ ☐ 2) α ☐ 3) $\sin\alpha$ ☐ 4) $\cos\alpha$ ☐
3.3. По какой формуле определяется длина (модуль) вектора a?	1) $\lvert a\rvert = a\cos\alpha$ ☐ 2) $\lvert a\rvert = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ ☐ 3) $\lvert a\rvert = \langle a, a\rangle$ ☐ 4) $\lvert a\rvert = \sqrt{a\cos\alpha}$ ☐
3.4. Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то эти векторы...	1) коллинеарны ☐ 2) противоположны ☐ 3) ортогональны ☐ 4) Фробениуса ☐
3.5. Даны три вектора: $a = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$; $b = (1, -3, -1)$; $c = \overrightarrow{AB}$, где $A\,(-1, 1, -3)$, $B\,(0, -2, -4)$. Какие из этих векторов равны?	1) Только a и b ☐ 2) Только a и c ☐ 3) Только b и c ☐ 4) Все равны ☐ 5) Равных нет ☐
3.6. Даны три вектора: $a = \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$; $b = (1, 5, -2)$; $c = \overrightarrow{AB}$, где $A\,(2, -2, 4)$, $B\,(1, 3, 2)$. Какие из этих векторов коллинеарны?	1) Только a и b ☐ 2) Только a и c ☐ 3) Только b и c ☐ 4) Все коллинеарны ☐ 5) Коллинеарных нет ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.7. Даны три вектора: $a = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$; $b = (-6, -2, -4)$; $c = \overrightarrow{AB}$, где $A\ (2, 0, 2)$, $B\ (-7, -3, -4)$. Какие из этих векторов коллинеарны?	1) Только a и b ☐ 2) Только a и c ☐ 3) Только b и c ☐ 4) Все коллинеарны ☐ 5) Коллинеарных нет ☐
3.8. Даны три вектора: $a = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$; $b = (1, 1, 2)$; с = $\overrightarrow{AB}$, где $A\ (2, 1, -1)$, $B\,(1, 2, 1)$. Какие из этих векторов коллинеарны?	1) Только a и b ☐ 2) Только a и c ☐ 3) Только b и c ☐ 4) Все коллинеарны ☐ 5) Коллинеарных нет ☐
3.9. Если $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$, то $\lvert\vec{a}\rvert = \ldots$	1) $\sqrt{23}$ ☐ 2) 7 ☐ 3) 13 ☐ 4) $\sqrt{11}$ ☐ 5) 11 ☐
3.10. Если $\vec{a} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 12\vec{k}$, то $\lvert\vec{a}\rvert = \ldots$	1) 14 ☐ 2) 16 ☐ 3) 22 ☐ 4) 10 ☐ 5) $\sqrt{124}$ ☐
3.11. Если $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, то $\lvert\vec{a}\rvert = \ldots$	1) 11 ☐ 2) 7 ☐ 3) 1 ☐ 4) $\sqrt{11}$ ☐ 5) –7 ☐
3.12. Если $\vec{a} = 10\vec{i} - 2\vec{j} + 11\vec{k}$, то $\lvert\vec{a}\rvert = \ldots$	1) 15 ☐ 2) 17 ☐ 3) $\sqrt{23}$ ☐ 4) 23 ☐ 5) 2 ☐
3.13. Если $\vec{a} = -6\vec{i} - 8\vec{j} + 24\vec{k}$, то $\lvert\vec{a}\rvert = \ldots$	1) 13 ☐ 2) 15 ☐ 3) 23 ☐ 4) 26 ☐ 5) $\sqrt{46}$ ☐
3.14. Найти длину вектора $d = 3a + 2(b - c)$, если $a = (2, 1, -2)$, $b = (5, -4, 3)$ и $c = (2, -1, 2)$	1) $\sqrt{125}$ ☐ 2) 15 ☐ 3) 13 ☐ 4) $3\sqrt{7}$ ☐
3.15. Заданы векторы $m = (4, 1, -1)$ и $n = (3, -1, 2)$. Длина вектора $4m - 6n$ равна...	1) $6\sqrt{10}$ ☐ 2) $\sqrt{323}$ ☐ 3) 17 ☐ 4) $5\sqrt{12}$ ☐
3.16. Задан вектор $p = (6, 3, 2)$. Длина вектора $4p$ равна...	1) $2\sqrt{154}$ ☐ 2) 28 ☐ 3) 17 ☐ 4) 19 ☐ 5) $5\sqrt{53}$ ☐
3.17. Найти длину вектора $d = a - 2b + 3c$, если $a = (2, -1, -1)$, $b = (1, -1, 2)$, $c = (2, -1, 3)$	1) $6\sqrt{5}$ ☐ 2) 7 ☐ 3) $3\sqrt{10}$ ☐ 4) $5\sqrt{6}$ ☐ 5) $2\sqrt{14}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.18. Найти скалярное произведение векторов $d = a + 4b$ и $f = 3c - b$, если $a = (2, -1, 4)$, $b = (1, -3, -1)$ и $c = (-1, 2, 5)$	1) –94 ☐ 2) –116 ☐ 3) –141 ☐ 4) –154 ☐ 5) –173 ☐
3.19. Заданы векторы $m = (3, 4, 5)$ и $n = (2, -1, 2)$. Скалярное произведение вектора m на вектор $m - n$ равно...	1) 38 ☐ 2) 35 ☐ 3) 34 ☐ 4) 31 ☐
3.20. Заданы векторы $m = (4, 2, 3)$ и $n = (3, 1, 5)$. Скалярное произведение вектора n на вектор $m - n$ равно...	1) 14 ☐ 2) 13 ☐ 3) 3 ☐ 4) –6 ☐
3.21. Заданы векторы $m = (1, 2, 3)$ и $n = (2, 2, 4)$. Скалярное произведение вектора n на вектор $m - n$ равно...	1) –6 ☐ 2) –4 ☐ 3) –8 ☐ 4) 8 ☐
3.22. Найти скалярное произведение векторов $d = a - b$ и $f = b + c$, если $a = (1, -1, -3)$, $b = (2, 1, 3)$, $c = (1, -1, 2)$	1) –54 ☐ 2) –45 ☐ 3) –33 ☐ 4) –18 ☐
3.23. Найти скалярное произведение векторов $d = 2a + 3b + c$ и $f = b - a - 2c$, если $a = (-1, -2, 4)$, $b = (1, 2, -1)$, $c = (3, 1, -1)$	1) –28 ☐ 2) –22 ☐ 3) –18 ☐ 4) –16 ☐
3.24. При каком значении x скалярное произведение векторов $a = (3x, -4, 2)$, $b = (2, 4x, 5)$ равно -10?	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
3.25. Расположить пары векторов в порядке увеличения их скалярных произведений $\langle a, b\rangle$: 1. $\begin{cases} a = (1, -2, 1) \\ b = (3, 2, 1) \end{cases}$; 2. $\begin{cases} a = (1, 2, 3) \\ b = (4, -2, 3) \end{cases}$; 3. $\begin{cases} a = (3, 1, 4) \\ b = (-1, 3, 2) \end{cases}$; 4. $\begin{cases} a = (-2, 2, 1) \\ b = (1, 4, 5) \end{cases}$	1) 1, 3, 2, 4 ☐ 2) 4, 2, 3, 1 ☐ 3) 2, 1, 4, 3 ☐ 4) 4, 3, 1, 2 ☐
3.26. Отношение скалярных произведений $\dfrac{\langle p, q\rangle}{\langle q, r\rangle}$ при $\lvert p\rvert = 2\sqrt{2}$; $\lvert r\rvert = 2$; $\alpha = 135°$; $\beta = 60°$ равно...  	1) 2 ☐ 2) –2 ☐ 3) 1 ☐ 4) –1 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.27. Отношение скалярных произведений $\frac{\langle p, q\rangle}{\langle q, r\rangle}$ при $\lvert p\rvert = 3\sqrt{2}$; $\lvert r\rvert = \sqrt{3}$; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 30^\circ$ равно... 	1) 3 ☐ 2) –2 ☐ 3) 1 ☐ 4) 4 ☐ 5) 2 ☐
3.28. Из векторов $a = (1, 0, -2)$; $b = (6, 5, 2)$; $c = (6, -5, 3)$ ортогональными являются...	1) a и b ☐ 2) b и c ☐ 3) a и c ☐ 4) a и b; a и c ☐
3.29. При каком положительном значении x векторы a и b ортогональны, если $a = (x, 2, -2)$, $b = (x, 2x, 6)$?	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
3.30. Длина медианы AM в треугольнике ABC с вершинами $A(1, 2)$, $B(2, 5)$, $C(7, 4)$ равна...	1) $2\sqrt{33}$ ☐ 2) 5 ☐ 3) 4 ☐ 4) $0{,}5\sqrt{74}$ ☐
3.31. Длина медианы AM в треугольнике ABC с вершинами $A(8, 6)$, $B(10, 12)$, $C(20, 18)$ равна...	1) $6\sqrt{57}$ ☐ 2) $\sqrt{130}$ ☐ 3) 18 ☐ 4) 12 ☐
3.32. В треугольнике ABC, где $A(3, 5)$, $B(11, 9)$, $C(7, 17)$, угол при вершине A равен...	1) $\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$ ☐ 2) $\frac{\pi}{4}$ ☐ 3) $\frac{\pi}{3}$ ☐ 4) $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ ☐
3.33. В треугольнике ABC, две стороны которого образованы векторами $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{k}$, косинус угла при вершине A равен...	1) 0,2 ☐ 2) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ☐ 3) $\frac{1}{4}$ ☐ 4) $\frac{4}{9}$ ☐
3.34. В треугольнике ABC, две стороны которого образованы векторами $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{j}$, косинус угла при вершине A равен...	1) 0 ☐ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ 3) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ☐ 4) $\frac{2}{3}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.35. Две смежные стороны параллелограмма образованы векторами $a = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ и $b = \vec{i} + 3\vec{k}$. Произведение длин диагоналей параллелограмма равно...	1) 40 ☐ 2) $3\sqrt{22}$ ☐ 3) $24\sqrt{2}$ ☐ 4) $20\sqrt{2}$ ☐
3.36. Две смежные стороны параллелограмма образованы векторами $a = 2\vec{i} + 4\vec{k}$ и $b = 4\vec{j}$. Сумма длин диагоналей параллелограмма равна...	1) 6 ☐ 2) 10 ☐ 3) $2\sqrt{14}$ ☐ 4) 12 ☐
3.37. Как называется максимально возможное число линейно независимых векторов в линейном (векторном) пространстве?	1) Норма ☐ 2) Квадратура ☐ 3) Базис ☐ 4) Надстройка ☐ 5) Размерность ☐
3.38. Как называется набор из n линейно независимых векторов в n-мерном векторном пространстве?	1) Норма ☐ 2) Квадратура ☐ 3) Базис ☐ 4) Надстройка ☐ 5) Размерность ☐
3.39. Даны векторы $a = (3, -2)$; $b = (6, 4)$; $c = (-3; -2)$. Какие пары векторов образуют базис пространства R^2?	1) Только (a и b) ☐ 2) Только (a и b) и (a и c) ☐ 3) Только (b и c) ☐ 4) Только (a и b) и (b и c) ☐ 5) Никакие ☐
3.40. Даны векторы $a = (-2, 5)$; $b = (2, -10)$; $c = (-4; 10)$. Какие пары векторов образуют базис пространства R^2?	1) Только (a и c) ☐ 2) Только (a и b) и (a и c) ☐ 3) Только (b и c) ☐ 4) Только (a и b) и (b и c) ☐ 5) Никакие ☐
3.41. Даны векторы $a = (2, 1)$; $b = (4, 2)$; $c = (-2; -1)$. Какие пары векторов образуют базис пространства R^2?	1) Только (a и b) ☐ 2) Только (a и b) и (a и c) ☐ 3) Только (b и c) ☐ 4) Только (a и c) и (b и c) ☐ 5) Никакие ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.42. Векторы $a = (3, 1)$ и $b = (-1, 2)$ образуют базис пространства R^2. Разложить по этому базису вектор $c = (10, 1)$	1) $c = 6a + 7b$ ☐ 2) $c = -2a + 3b$ ☐ 3) $c = 5a - 3b$ ☐ 4) $c = 2a + 5b$ ☐ 5) $c = 3a - b$ ☐
3.43. Векторы $a = (2, 2)$ и $b = (5, 1)$ образуют базис пространства R^2. Разложить по этому базису вектор $c = (11, -1)$	1) $c = 6a + 7b$ ☐ 2) $c = -2a + 3b$ ☐ 3) $c = 5a - 3b$ ☐ 4) $c = 2a + 5b$ ☐ 5) $c = 3a - b$ ☐
3.44. Векторы $a = (4, -1)$ и $b = (3, 2)$ образуют базис пространства R^2. Разложить по этому базису вектор $c = (11, -11)$	1) $c = 6a + 7b$ ☐ 2) $c = -2a + 3b$ ☐ 3) $c = 5a - 3b$ ☐ 4) $c = 2a + 5b$ ☐ 5) $c = 3a - b$ ☐
3.45. Векторы $a = (1, 1)$ и $b = (1, 2)$ образуют базис пространства R^2. Разложить по этому базису вектор $c = (13, 20)$	1) $c = 6a + 7b$ ☐ 2) $c = -2a + 3b$ ☐ 3) $c = 5a - 3b$ ☐ 4) $c = 2a + 5b$ ☐ 5) $c = 3a - b$ ☐
3.46. Вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, где $\vec{a} = (3, -1, 1)$; $\vec{b} = (1, 2, -3)$, равен...	1) (5, –10, 5) ☐ 2) (1, –10, 5) ☐ 3) (1, 10, 7) ☐ 4) (5, 10, 7) ☐
3.47. Вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, где $\vec{a} = (2, 3, 0)$; $\vec{b} = (-1, 1, -1)$, равен...	1) (–3, 2, 5) ☐ 2) (–2, 1, 1) ☐ 3) (5, 3, –2) ☐ 4) (1, 2, –1) ☐
3.48. Вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, где $\vec{a} = (3, 0, -1)$; $\vec{b} = (-3, 2, -1)$, равен...	1) (0, 0, 9) ☐ 2) (–2, 9, 1) ☐ 3) (2, 6, 6) ☐ 4) (3, 0, 12) ☐
3.49. Вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, где $\vec{a} = (-4, 0, 2)$; $\vec{b} = (1, 1, 2)$, равен...	1) (2, –2, 1) ☐ 2) (–2, 10, –4) ☐ 3) (5, 2, 5) ☐ 4) (–1, 12, 4) ☐ 5) (4, –5, 3) ☐
3.50. Вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, где $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{b} = -\vec{j} + 3\vec{k}$, равен...	1) (1, 6, 7) ☐ 2) (2, –10, 0) ☐ 3) (–1, 7, –3) ☐ 4) (6, –3, –1) ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.51. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (1, -3, 2)$; $\vec{b} = (2, -1, 0)$, равна...	1) $3\sqrt{5}$ ☐ 2) 7 ☐ 3) $\sqrt{12}$ ☐ 4) $\sqrt{53}$ ☐ 5) 6 ☐
3.52. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$, равна...	1) $\sqrt{5}$ ☐ 2) 1 ☐ 3) $\sqrt{7}$ ☐ 4) $\sqrt{3}$ ☐ 5) 2 ☐
3.53. Площадь треугольника *ABC* с координатами вершин $A(0, -1, 2)$; $B(1, 2, -1)$; $C(3, -2, 1)$, равна...	1) 8 ☐ 2) $5\sqrt{2}$ ☐ 3) $\frac{\sqrt{190}}{2}$ ☐ 4) 10 ☐ 5) $\frac{\sqrt{210}}{2}$ ☐
3.54. Смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, где $\vec{a} = (2, 1, 0)$; $\vec{b} = (0, -1, 1)$; $\vec{c} = (1, 0, 2)$, равно...	1) 3 ☐ 2) −3 ☐ 3) 1 ☐ 4) −1 ☐ 5) 0 ☐
3.55. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1, 3, -1)$; $\vec{b} = (0, 2, -2)$; $\vec{c} = (1, -2, 1)$, равен...	1) 6 ☐ 2) 7 ☐ 3) 8 ☐ 4) 9 ☐ 5) 10 ☐

Глава 4. Собственные векторы и квадратичные формы

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
4.1. Собственный вектор *x* и собственное значение λ квадратной матрицы *A* определяются равенством...	1) $\lambda A^{-1}x = x$ ☐ 2) $A = \lambda x$ ☐ 3) $\lambda Ax = x$ ☐ 4) $Ax = \lambda x$ ☐ 5) $x = \lambda A$ ☐
4.2. Вектор $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы *A*, соответствующим собственному значению $\lambda = 2$. Тогда произведение Ax равно...	1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ ☐
4.3. Вектор $x = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы *A*, соответствующим собственному значению $\lambda = 3$. Тогда произведение Ax равно...	1) $\begin{pmatrix} 18 \\ -3 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
4.4. Чему равно наибольшее собственное значение матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$?	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 6 ☐
4.5. Чему равно наибольшее собственное значение матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$?	1) 5 ☐ 2) 6 ☐ 3) 7 ☐ 4) 8 ☐
4.6. Чему равно наибольшее собственное значение матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$?	1) 1 ☐ 2) 3 ☐ 3) 5 ☐ 4) 7 ☐ 5) 9 ☐
4.7. Чему равно наибольшее собственное значение матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$?	1) 6 ☐ 2) 5 ☐ 3) 4 ☐ 4) 2 ☐ 5) 1 ☐
4.8. Квадратичная форма $4x_1^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_2^2$ является положительно определенной при λ, равном...	1) −3 ☐ 2) −2 ☐ 3) 3 ☐ 4) −4 ☐
4.9. Квадратичная форма $\lambda x_1^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 4x_2^2$ является положительно определенной при λ, равном...	1) 1 ☐ 2) −1 ☐ 3) 5 ☐ 4) −5 ☐
4.10. Матрице $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ соответствует квадратичная форма...	1) $2x^2 + 8xy + 3y^2$ ☐ 2) $2x^2 - 4xy + 3y^2$ ☐ 3) $2x^2 - 8xy + 3y^2$ ☐ 4) $6x^2 - 16xy + 6y^2$ ☐
4.11. Матрице $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ соответствует квадратичная форма...	1) $-9x^2 - xy - 9y^2$ ☐ 2) $3x^2 + 2xy - 3y^2$ ☐ 3) $3x^2 + xy - 3y^2$ ☐ 4) $3x^2 - 2xy - 3y^2$ ☐

Глава 5. Комплексные числа

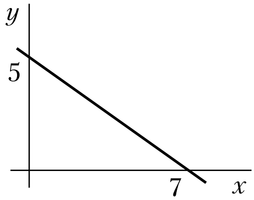
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
5.1. Модуль комплексного числа $5 + 12i$ равен...	1) 5 ☐ 2) 11 ☐ 3) 12 ☐ 4) 13 ☐
5.2. Модуль комплексного числа $1 + 3i$ равен...	1) 1 ☐ 2) 3 ☐ 3) $\sqrt{10}$ ☐ 4) $\sqrt{15}$ ☐

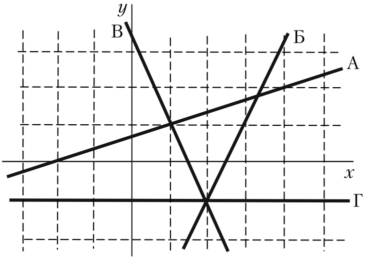
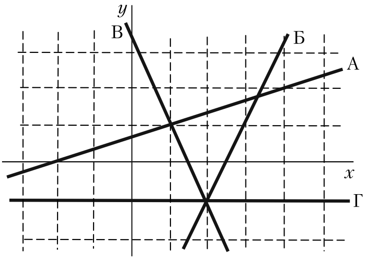
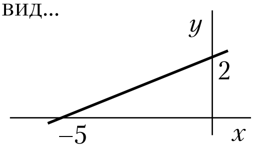
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
5.3. Аргумент комплексного числа $5 + 12i$ равен...	1) 0 ☐ 2) $\arccos\frac{5}{12}$ ☐ 3) $\arccos\frac{5}{13}$ ☐ 4) $\frac{\pi}{6}$ ☐ 5) $\frac{\pi}{4}$ ☐
5.4. Аргумент комплексного числа $\sqrt{3} + i$ равен...	1) 0 ☐ 2) $\arccos\frac{3}{5}$ ☐ 3) $\arccos\frac{4}{5}$ ☐ 4) $\frac{\pi}{6}$ ☐ 5) $\frac{\pi}{4}$ ☐
5.5. Преобразовать комплексное число $\sqrt{3} + i$ к тригонометрической форме записи	1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ☐ 2) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ☐ 3) $2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ☐ 4) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ☐
5.6. Сумма $2z_1 + 7z_2$, если $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 5 + 3i$, равна...	1) $37 + 19i$ ☐ 2) $23 + 33i$ ☐ 3) $57 - 2i$ ☐ 4) $43 + 29i$ ☐
5.7. Разность $3z_1 - 2z_2$, если $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 1 - 2i$, равна...	1) $4 + 21i$ ☐ 2) $10 + 7i$ ☐ 3) $15 + 2i$ ☐ 4) $4 + 13i$ ☐
5.8. Разность $4z_1 - 3z_2$, если $\mathrm{z}_1 = 3 + i$; $z_2 = 2 - 3i$, равна...	1) $6 + 13i$ ☐ 2) $21 - 2i$ ☐ 3) $16 + 3i$ ☐ 4) $-2 + 21i$ ☐
5.9. Разность $2z_1 - 5z_2$, если $z_1 = 3 + 3i$; $\mathrm{z}_2 = 1 - 2i$, равна...	1) $12 + 5i$ ☐ 2) $16 + i$ ☐ 3) $1 + 16i$ ☐ 4) $16 + 11i$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
5.10. Произведение z_1z_2, если $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = 4 + 5i$, равно...	1) $8 - 15i$ ☐ 2) $23 - 2i$ ☐ 3) $-7 - 2i$ ☐ 4) $20 + 25i$ ☐
5.11. Произведение z_1z_2, если $z_1 = 4 - i$; $z_2 = 4 + i$, равно...	1) $16 - i$ ☐ 2) 5 ☐ 3) 17 ☐ 4) $-17i$ ☐
5.12. Произведение z_1z_2, если $z_1 = 2 + 5i$; $\mathrm{z}_2 = 1 - i$, равно...	1) $2 + 8i$ ☐ 2) $12 - 2i$ ☐ 3) 10 ☐ 4) $7 + 3i$ ☐
5.13. Произведение z_1z_2, если $z_1 = 3 + i$; $z_2 = 7 - 2i$, равно...	1) $23 + i$ ☐ 2) $28 - 4i$ ☐ 3) $15 + 9i$ ☐ 4) $6 - 22i$ ☐
5.14. Произведение z_1z_2, если $z_1 = 4 + i$; $z_2 = 4 - 2i$, равно...	1) $16 - 2i$ ☐ 2) $18 - 4i$ ☐ 3) $8 + 6i$ ☐ 4) $16 + 12i$ ☐
5.15. Действительная часть комплексного выражения $\frac{x^2 - i}{x + 2i}$ равна...	1) $\frac{x - 1}{x + 1}$ ☐ 2) $\frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$ ☐ 3) $\frac{x^3 + 4}{x^2 + 4}$ ☐ 4) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ ☐ 5) $\frac{x^3 + 2}{x^2 + 4}$ ☐
5.16. Число, сопряженное комплексному числу $(3 - 5i)^2$, равно...	1) $-16 + 30i$ ☐ 2) $-16 - 30i$ ☐ 3) $34 + 30i$ ☐ 4) $34 - 30i$ ☐ 5) $9 - 25i$ ☐
5.17. Комплексное число $(1 - i)^2$ равно...	1) $2i$ ☐ 2) $1 + i$ ☐ 3) $2 - 2i$ ☐ 4) 2 ☐ 5) $-2i$ ☐
5.18. Действительная часть комплексного выражения $\frac{x - 3i}{x + i}$ равна...	1) $x - 2$ ☐ 2) $\frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$ ☐ 3) $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 1}$ ☐ 4) $\frac{x - 3}{x + 1}$ ☐ 5) $\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
5.19. Комплексное выражение $$\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^5$$ равно...	1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{20}+i\sin\frac{\pi}{20}\right)$ ☐ 2) $32\left(\cos\frac{\pi^5}{8}+i\sin\frac{\pi^5}{8}\right)$ ☐ 3) $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$ ☐ 4) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$ ☐

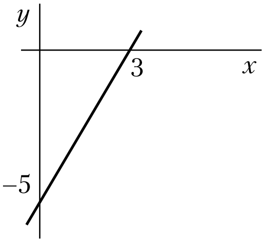
Глава 6. Элементы аналитической геометрии

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.1. Даны уравнения прямых: а) $2x + y = 0$; б) $x + y - 1 = 0$; в) $2x + y + 2 = 0$; г) $y = 2x - 3$. Выбрать те, которые проходят через начало координат	1) Только г) ☐ 2) Только в) ☐ 3) Только б) и г) ☐ 4) Только б) ☐ 5) Только а) ☐
6.2. Угловой коэффициент k и величина отрезка b, отсекаемого прямой $2x - 4y + 7 = 0$ на оси Oy, равны...	1) $b = 7$; $k = 2$ ☐ 2) $b = 3{,}5$; $k = 0{,}5$ ☐ 3) $b = 1{,}75$; $k = 0{,}5$ ☐ 4) $b = -2$; $k = -3{,}5$ ☐ 5) $b = -3$; $k = 2$ ☐
6.3. Угловой коэффициент k и величина отрезка b, отсекаемого прямой $5x + y - 6 = 0$ на оси ординат, равны...	1) $b = 6$; $k = 1$ ☐ 2) $b = -6$; $k = 5$ ☐ 3) $b = 1{,}2$; $k = 0{,}2$ ☐ 4) $b = 6$; $k = -5$ ☐
6.4. Угловой коэффициент k прямой равен... 	1) -5 ☐ 2) $-\frac{5}{7}$ ☐ 3) $\frac{5}{7}$ ☐ 4) $-\frac{7}{5}$ ☐ 5) $-3{,}5$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.5. Установите соответствие между уравнениями прямых и их угловыми коэффициентами: А) $x + 3y = 3$; Б) $5y + 1 = 0$; В) $6 - 2x = 0$. а) Не существует; б) -2; в) $-\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{3}$; д) 0	1) А—в; Б—д; В—а ☐ 2) А—г; Б—в; В—д ☐ 3) А—в; Б—д; В—г ☐ 4) А—г; Б—а; В—б ☐ 5) А—г; Б—д; В—а ☐
6.6. Даны графики прямых. Установить соответствие между графиками и их угловыми коэффициентами.  а) 0; б) 2; в) – 2; г) $\frac{1}{3}$; д) $-\frac{1}{3}$	1) А—в; Б—д; В—б; Г—а ☐ 2) А—г; Б—б; В—в; Г—а ☐ 3) А—в; Б—д; В—г; Г—а ☐ 4) А—г; Б –а; В—б; Г—в ☐ 5) А—в; Б—д; В—а; Г—г ☐
6.7. Даны графики прямых. Расположить обозначения этих прямых в порядке возрастания их угловых коэффициентов 	1) АБВГ ☐ 2) ВГАБ ☐ 3) ГВАБ ☐ 4) ГВБА ☐ 5) БАГВ ☐
6.8. Уравнение линии на рисунке имеет вид... 	1) $2x - 5y + 2 = 0$ ☐ 2) $y = 2x + 5$ ☐ 3) $y = -2{,}5x + 2$ ☐ 4) $y = 2{,}5x + 1$ ☐ 5) $2x - 5y + 10 = 0$ ☐

<table>
<tr><th>Задание</th><th>Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа</th></tr>
<tr><td>

6.9. Уравнение линии на рисунке имеет вид...

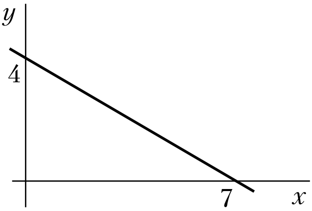


</td><td>

1) $-5x + 3y = -2$ ☐
2) $5x - 3y - 15 = 0$ ☐
3) $y = -5x + 3$ ☐
4) $y^2 = -5x + 3$ ☐
5) $5x - 3y + 15 = 0$ ☐

</td></tr>
<tr><td>

6.10. Уравнение линии на рисунке имеет вид...

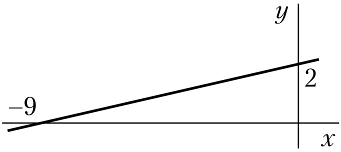


</td><td>

1) $(x - 7) + (y - 4) = 0$ ☐
2) $-7x + 4y = 0$ ☐
3) $\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = -1$ ☐
4) $\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = 1$ ☐
5) $7x + 4y = -1$ ☐

</td></tr>
<tr><td>

6.11. Уравнение линии на рисунке имеет вид...

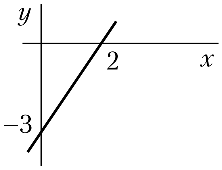


</td><td>

1) $-9xy = 2$ ☐
2) $(x-9)+(y+2)=0$ ☐
3) $-\frac{x}{9} + \frac{y}{2} = 1$ ☐
4) $-9x + 2y = 1$ ☐
5) $\frac{x}{9} - \frac{y}{2} = 1$ ☐

</td></tr>
<tr><td>

6.12. Уравнение линии на рисунке имеет вид...



</td><td>

1) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ ☐
2) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0$ ☐
3) $-6xy = 1$ ☐
4) $2x - 3y = 0$ ☐
5) $2x - 3y = 1$ ☐

</td></tr>
<tr><td>

6.13. Общее уравнение прямой, проходящей через точки (2, 3) и (−1, 4), имеет вид...

</td><td>

1) $x + 3y - 11 = 0$ ☐
2) $2x - 5y + 4 = 0$ ☐
3) $-2x - y + 8 = 0$ ☐
4) $x - 4y + 8 = 0$ ☐

</td></tr>
</table>

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.14. Общее уравнение прямой, проходящей через точки (3, 5) и (4, –1), имеет вид...	1) $x - 9y + 19 = 0$ ☐ 2) $2x - 5y + 8 = 0$ ☐ 3) $6x + y - 23 = 0$ ☐ 4) $5x - 2y + 21 = 0$ ☐
6.15. Расстояние между точками $A\,(1, 0)$ и $B\,(-2, -4)$ равно...	1) 4 ☐ 2) 5 ☐ 3) 6 ☐ 4) 8 ☐
6.16. Расстояние от точки (–5, 2) до оси Oy равно...	1) 5 ☐ 2) $\sqrt{34}$ ☐ 3) 2 ☐ 4) 3 ☐
6.17. Установить соответствие между элементами двух множеств: $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A и B: А) $\rho[A(5, 3); B(2, 4)]$; Б) $\rho[A(-2, 0); B(-2, \sqrt{5})]$; В) $\rho[A(8, -1); B(0, -1)]$. а) $\sqrt{5}$; б) 8 в) 5; г) $\sqrt{10}$; д) 10	1) А—а; Б—б; В—в ☐ 2) А—г; Б—в; В—д ☐ 3) А—в; Б—д; В—г ☐ 4) А—г; Б –а; В—б ☐ 5) А—в; Б—д; В—а ☐
6.18. Установить соответствие между элементами двух множеств: $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A и B: А) $\rho[A(1, 3); B(2, -1)]$; Б) $\rho[A(-1, 0); B(2, \sqrt{7})]$; В) $\rho[A(3, -1); B(-2, -1)]$. а) 4; б) 5 в) $\sqrt{17}$; г) 16; д) 17	1) А—а; Б—б; В—в ☐ 2) А—г; Б—в; В—д ☐ 3) А—в; Б—а; В—б ☐ 4) А—г; Б –а; В—б ☐ 5) А—в; Б—д; В—а ☐
6.19. Точка (2, –1) лежит на прямых а) $x + 2y - 3 = 0$; б) $3x - y - 7 = 0$; в) $y = -3x - 1$; г) $y = -2x + 3$	1) только а) и б) ☐ 2) только б) и г) ☐ 3) только б) ☐ 4) на всех ☐ 5) ни на одной ☐
6.20. Точка (3, 1) лежит на прямых а) $x - 4y + 1 = 0$; б) $y = -2x + 8$; в) $2x - 3y + 2 = 0$; г) $y = -3x + 10$	1) только а) и б) ☐ 2) только а) и г) ☐ 3) только а) ☐ 4) на всех ☐ 5) ни на одной ☐
6.21. Даны точки $A\,(-6, 1)$, $B\,(6, 10)$, $C\,(6, 1)$. Установить соответствие между отрезком и его длиной: А) $\|AB\|$; Б) $\|AC\|$; В) $\|BC\|$. а) 9; б) 12; в) 15; г) 11; д) 21	1) А—а; Б—б; В—в ☐ 2) А—в; Б—г; В—д ☐ 3) А—б; Б—д; В—г ☐ 4) А—а; Б—в; В—г ☐ 5) А—в; Б—б; В—а ☐

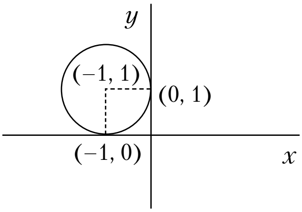
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.22. Даны точки $A(13, 2)$, $B(1, -3)$, $C(13, -3)$. Установить соответствие между отрезком и его длиной: А) $\lvert AB\rvert$; Б) $\lvert AC\rvert$; В) $\lvert BC\rvert$. а) 10; б) 13; в) 11; г) 12; д) 5	1) А—а; Б—б; В—в ☐ 2) А—в; Б—г; В—д ☐ 3) А—б; Б—д; В—г ☐ 4) А—а; Б—в; В—г ☐ 5) А—в; Б—д; В—а ☐
6.23. Даны точки $A(-1, 0)$, $B(2, 4)$, $C(2, 0)$. Установить соответствие между отрезком и его длиной: А) $\lvert AB\rvert$; Б) $\lvert AC\rvert$; В) $\lvert BC\rvert$. а) 4; б) 1; в) 8; г) 5; д) 3	1) А—а; Б—б; В—в ☐ 2) А—в; Б—г; В—д ☐ 3) А—г; Б—д; В—б ☐ 4) А—г; Б—д; В—а ☐ 5) А—в; Б—д; В—а ☐
6.24. Даны точки $A(10, -10)$ и $B(-6, 6)$. Тогда сумма координат середины отрезка AB равна...	1) 2 ☐ 2) −2 ☐ 3) 4 ☐ 4) −4 ☐ 5) 0 ☐
6.25. Расположить по возрастанию длины сторон треугольника ABC, если $A(5, 3)$; $B(0, -3)$; $C(3, 4)$	1) AC; BC; AB ☐ 2) AB; BC; AC ☐ 3) AB; AC; BC ☐ 4) BC; AC; AB ☐
6.26. Расположить по возрастанию длины сторон треугольника ABC, если $A(-1, 5)$; $B(7, 7)$; $C(-5, 7)$	1) AC; BC; AB ☐ 2) AC; AB; BC ☐ 3) AB; AC; BC ☐ 4) BC; AC; AB ☐
6.27. Даны точки $A(3, -1)$ и $B(2, 1)$. Тогда координаты точки M, симметричной точке A относительно точки B, равны...	1) (−3, 4) ☐ 2) (4, 3) ☐ 3) (3, 1) ☐ 4) (1, −3) ☐ 5) (1, 3) ☐
6.28. Угол между прямыми $y - 5x - 3 = 0$ и $2y + 3x + 5 = 0$ равен...	1) 0 ☐ 2) $\pi/2$ ☐ 3) $\pi/3$ ☐ 4) $\pi/6$ ☐ 5) $\pi/4$ ☐
6.29. С увеличением острых углов между ними пары прямых располагаются в порядке... а) $y - x - 7 = 0$; $y - 5x + 5 = 0$; б) $y - 7x - 10 = 0$; $y - 11x + 1 = 0$; в) $y - 2x - 3 = 0$; $y - 6x + 7 = 0$	1) в—а—б ☐ 2) а—б—в ☐ 3) б—в—а ☐ 4) в—б—а ☐
6.30. Прямые $y - 2x - 10 = 0$ и $3y - 6x + 2 = 0$...	1) пересекаются не под 90° ☐ 2) совпадают ☐ 3) перпендикулярны ☐ 4) параллельны ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.31. Прямые $2y - 7x - 4 = 0$ и $14y + 4x - 9 = 0$...	1) пересекаются не под 90° ☐ 2) совпадают ☐ 3) перпендикулярны ☐ 4) параллельны ☐
6.32. Прямые $3y - 15x + 27 = 0$ и $2y - 10x + 18 = 0$...	1) пересекаются не под 90° ☐ 2) совпадают ☐ 3) перпендикулярны ☐ 4) параллельны ☐
6.33. Прямые $2y + 8x - 7 = 0$ и $3y - 5x + 2 = 0$...	1) пересекаются не под 90° ☐ 2) совпадают ☐ 3) перпендикулярны ☐ 4) параллельны ☐
6.34. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1, 3)$ на прямую $x - 2y + 4 = 0$, имеет вид...	1) $4x - y + 10 = 0$ ☐ 2) $2x + y - 5 = 0$ ☐ 3) $2x - y + 1 = 0$ ☐ 4) $x + 2y - 7 = 0$ ☐
6.35. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1, 3)$ на прямую $4x - y + 9 = 0$, имеет вид...	1) $6x - y - 10 = 0$ ☐ 2) $x + 4y - 8 = 0$ ☐ 3) $4x - y - 1 = 0$ ☐ 4) $x + 4y - 13 = 0$ ☐
6.36. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1, 3)$ на прямую $3x + 5y - 8 = 0$, имеет вид...	1) $5x - 3y + 4 = 0$ ☐ 2) $5x + 3y - 8 = 0$ ☐ 3) $3x - 5y - 6 = 0$ ☐ 4) $x + 0{,}6y - 4 = 0$ ☐
6.37. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1, 3)$ на прямую $x - 6y + 4 = 0$, имеет вид...	1) $6x - y - 10 = 0$ ☐ 2) $3x + y - 8 = 0$ ☐ 3) $6x + y - 9 = 0$ ☐ 4) $x + 6y - 4 = 0$ ☐
6.38. Даны три прямые: а) $5 - 2x + 4y = 0$; б) $7 - 2y - 4x = 0$; в) $-4x + 2y - 4 = 0$. Перпендикулярными являются...	1) а) и в) ☐ 2) перпендикулярных нет ☐ 3) б) и в) ☐ 4) а) и б) ☐
6.39. Прямая, проходящая через точку (3, 2) и параллельная прямой $x + 3y - 4 = 0$, определяется уравнением...	1) $x + 3y - 9 = 0$ ☐ 2) $3x + y - 11 = 0$ ☐ 3) $3x + y = 0$ ☐ 4) $x + 3y - 8 = 0$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.40. Прямая, проходящая через точку (3, 2) и параллельная прямой $\frac{x}{-7} = \frac{y}{2}$, определяется уравнением...	1) $2x - 7y = 1$ ☐ 2) $7x - 2y = 7$ ☐ 3) $2x + 7y - 20 = 0$ ☐ 4) $x + 2y = 7$ ☐
6.41. Прямая, проходящая через точку (4, –1) и параллельная прямой $\frac{x}{-3} = \frac{y}{1}$, определяется уравнением...	1) $3x + y + 2 = 0$ ☐ 2) $x - 3y = 0$ ☐ 3) $x + 3y + 2 = 0$ ☐ 4) $x + 3y - 1 = 0$ ☐
6.42. Указать правильное соответствие между характером расположения прямой L: $Ax + By + C = 0$ на декартовой плоскости и значениями коэффициентов A, B, C: А) L параллельна прямой l: $x = -4$; Б) L перпендикулярна прямой l: $x - y + 1 = 0$; В) L совпадает с прямой l: $y + 3 = 0$. а) $A = 0$; $B \neq 0$; $C = 3B$; б) $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$; в) $A \neq 0$; $B = 0$; C — любое; г) $A = -B$; $A \neq 0$; C — любое; д) $A = B$; $A \neq 0$; C — любое	1) А—а; Б—б; В—в ☐ 2) А—в; Б—г; В—д ☐ 3) А—в; Б—д; В—г ☐ 4) А—а; Б—в; В—г ☐ 5) А—в; Б—д; В—а ☐
6.43. Указать правильное соответствие между характером расположения прямой L: $Ax + By + C = 0$ на декартовой плоскости и значениями коэффициентов A, B, C: А) L параллельна прямой l: $3x - y = 0$; Б) L перпендикулярна прямой l: $y = 2x$; В) L совпадает с прямой l: $x = 2y$. а) $A \neq 0$; $B = -2A$; $C = 0$; б) $A \neq 0$; $B = 2A$; C — любое; в) $A \neq 0$; $A = -3B$; $C \neq 0$; г) $A \neq 0$; $B = 2A$; $C = 0$; д) $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$	1) А—а; Б—б; В—в ☐ 2) А—в; Б—г; В—д ☐ 3) А—в; Б—б; В—а ☐ 4) А—а; Б—в; В—г ☐ 5) А—в; Б—д; В—а ☐
6.44. Уравнение $2x^2 - y^2 + x = 0$ определяет на плоскости...	1) окружность ☐ 2) прямую ☐ 3) гиперболу ☐ 4) параболу ☐ 5) эллипс ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.45. Уравнение $5x^2 + 5y^2 + 2x - 7 = 0$ определяет на плоскости...	1) параболу ☐ 2) прямую ☐ 3) эллипс ☐ 4) окружность ☐ 5) гиперболу ☐
6.46. Уравнение $x^2 + 2y^2 = 4$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐
6.47. Уравнение $6x^2 + 16y - 28x = 19$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐
6.48. Уравнение $3x^2 - 5y^2 - 9x + 2y = 0$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐
6.49. Уравнение $4x^2 + y^2 - 12x + y = 20$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐
6.50. Уравнение $28x + y = 26$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐
6.51. Уравнение $x^2 - 9x + y = 2$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐
6.52. Уравнение $3x^2 + 3y^2 - 6x + 3y = 10$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.53. Установить соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями А) $4y^2 = x^2$; Б) $x^2 + y^2 = 9$; В) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1$; Г) $\frac{4x^2}{9} + \frac{9y^2}{16} = 1$. а) парабола; б) окружность; в) гипербола; г) эллипс	1) А—в; Б—г; В—а; Г—б ☐ 2) А—г; Б—б; В—в; Г—а ☐ 3) А—а; Б—г; В—в; Г—б ☐ 4) А—в; Б –а; В—б; Г—г ☐ 5) А—а; Б—б; В—в; Г—г ☐
6.54. Установить соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями А) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{49} = 1$; Б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; В) $(x + 3)^2 + y^2 = 1$; Г) $(x + 1)^2 + y^2 = 1$. а) парабола; б) окружность; в) гипербола; г) эллипс	1) А—в; Б—г; В—а; Г—б ☐ 2) А—г; Б—б; В—в; Г—а ☐ 3) А—а; Б—г; В—в; Г—б ☐ 4) А—г; Б –а; В—б; Г—в ☐ 5) А—а; Б—б; В—в; Г—г ☐
6.55. Установить соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями А) $y^2 + x = 0$; Б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{49} = 1$; В) $-\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$; Г) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. а) парабола; б) окружность; в) гипербола; г) эллипс	1) А—а; Б—б; В—г; Г—в ☐ 2) А—г; Б—б; В—в; Г—а ☐ 3) А—а; Б—б; В—в; Г—г ☐ 4) А—г; Б –а; В—б; Г—в ☐ 5) А—а; Б—г; В—в; Г—б ☐
6.56. Центр окружности, заданной уравнением $3(x - 1)^2 + 3(y + 3)^2 = 25$, лежит в точке...	1) (–3, 9) ☐ 2) (3, –9) ☐ 3) (–1, 3) ☐ 4) (1, –3) ☐
6.57. Радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2y = 0$, равен...	1) 1 ☐ 2) 4 ☐ 3) 3 ☐ 4) –1 ☐
6.58. Расстояние между центрами окружностей, заданных уравнениями $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ и $x^2 + y^2 = 1$, равно...	1) 2 ☐ 2) 4 ☐ 3) $\sqrt{5}$ ☐ 4) $\sqrt{7}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.59. Вершина параболы $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0$ имеет координаты...	1) (1, 3) ☐ 2) (3, 1) ☐ 3) (–1, 3) ☐ 4) (–1, –3) ☐ 5) (3, 3) ☐
6.60. Вершина параболы $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$ имеет координаты...	1) (2, –2) ☐ 2) (–1, –4) ☐ 3) (–2, 4) ☐ 4) (–1, –2) ☐ 5) (2, –1) ☐
6.61. Вершина параболы $x^2 - 2x + y + 11 = 0$ имеет координаты...	1) (1, –10) ☐ 2) (–2, –4) ☐ 3) (–1, 4) ☐ 4) (10, –2) ☐ 5) (1, 4) ☐
6.62. Ветви параболы $2x - y^2 - 3y + 4 = 0$ направлены...	1) вниз ☐ 2) влево ☐ 3) вверх ☐ 4) вправо ☐
6.63. Каноническое уравнение окружности, показанной на рисунке, имеет вид...  	1) $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ ☐ 2) $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ ☐ 3) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ ☐ 4) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ☐ 5) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ☐
6.64. Радиус окружности, определяемой уравнением $x^2 + y^2 + 6y - 2x = 6$, равен...	1) 4 ☐ 2) $\sqrt{10}$ ☐ 3) $\sqrt{24}$ ☐ 4) 5 ☐ 5) $\sqrt{20}$ ☐
6.65. Радиус окружности, определяемой уравнением $x^2 + y^2 - 8y + 4x = 4$, равен...	1) 4 ☐ 2) $\sqrt{10}$ ☐ 3) $\sqrt{24}$ ☐ 4) 5 ☐ 5) $\sqrt{20}$ ☐
6.66. Радиус окружности, определяемой уравнением $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$, равен...	1) 4 ☐ 2) $\sqrt{10}$ ☐ 3) $\sqrt{14}$ ☐ 4) 5 ☐ 5) $2\sqrt{5}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.67. Координаты фокусов эллипса $25x^2 + 16y^2 = 400$ равны...	1) $F_1(-5, 0)$; $F_2(5, 0)$ ☐ 2) $F_1(0, -6)$; $F_2(0, 6)$ ☐ 3) $F_1(0, -5)$; $F_2(0, 5)$ ☐ 4) $F_1(0, -3)$; $F_2(0, 3)$ ☐ 5) $F_1(-3, 0)$; $F_2(3, 0)$ ☐
6.68. Расстояние между фокусами эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ равно...	1) 6 ☐ 2) 8 ☐ 3) 12 ☐ 4) 20 ☐
6.69. Расстояние между фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ равно...	1) 6 ☐ 2) 8 ☐ 3) 12 ☐ 4) 20 ☐
6.70. Расстояние между фокусами гиперболы $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{49} = 1$ равно...	1) 20 ☐ 2) 25 ☐ 3) 40 ☐ 4) 50 ☐
6.71. Мнимая полуось гиперболы, заданной уравнением $4x^2 - 9y^2 = 36$, равна...	1) 4 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
6.72. Вещественная (действительная) полуось гиперболы, заданной уравнением $16x^2 - 25y^2 = 400$, равна...	1) 3 ☐ 2) 4 ☐ 3) 5 ☐ 4) 20 ☐
6.73. Уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси *Ox* и проходящей через точку (4, –2), имеет вид...	1) $y^2 = 2x$ ☐ 2) $x^2 = 2y$ ☐ 3) $x^2 = y$ ☐ 4) $y^2 = x$ ☐
6.74. Какое из данных уравнений определяет плоскость: а) $x + 3xy - 7 = 0$; б) $y^2 = 2x - 3$; в) $x + 3y = 0$?	1) Только а) ☐ 2) Только а) и в) ☐ 3) Все ☐ 4) Только в) ☐ 5) Ни одно ☐
6.75. Из уравнений: а) $x\,2- 2y + 2z + 4 = 0$; б) $x + 2y - 6 = 0$; в) $x + 3y +3z = 5$ выберите те, которые определяют плоскость, параллельную оси *Oz*	1) Только в) ☐ 2) Только б) ☐ 3) Ни одно ☐ 4) Только а) ☐ 5) Только б) и в) ☐

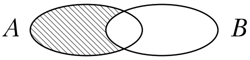
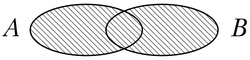
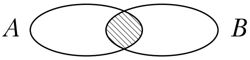
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.76. Из плоскостей: а) $3y - 2z + 4 = 0$; б) $x + z + 5 = 0$; в) $x - 3y + z = 0$ выберите те, которые параллельны оси Ox	1) Только а) ☐ 2) Ни одна ☐ 3) Только б) ☐ 4) Только а) и в) ☐ 5) Только в) ☐
6.77. Даны уравнения плоскостей: а) $x + 5y + 2z - 8 = 0$; б) $x - 3y + 4z = 3$ в) $z + 7 = 0$. Через начало координат проходят...	1) только а) и в) ☐ 2) только б) и в) ☐ 3) только б) ☐ 4) ни одна ☐ 5) все ☐
6.78. Общее уравнение плоскости, проходящей через точку (2, 1, –1) и параллельной плоскости $5x - 2y - z - 4 = 0$, имеет вид...	1) $5x + 2y + z - 6 = 0$ ☐ 2) $5x - 2y - z - 9 = 0$ ☐ 3) $5x - 2y - z - 15 = 0$ ☐ 4) $5x - 2y - z - 4 = 0$ ☐
6.79. Даны четыре плоскости: а) $-2y - 2z + 7 = 0$; б) $-8x + 8y - 2 = 0$; в) $-2x + y - 5 = 0$; г) $6x - 12y + 12z + 11 = 0$. Какие из них перпендикулярны плоскости $x - 2y + 2z + 6 = 0$?	1) Только а) и в) ☐ 2) Только б) ☐ 3) Только а) ☐ 4) Ни одна ☐ 5) Все ☐
6.80. Общее уравнение плоскости, проходящей через точку (2, –1, 2) и параллельной плоскости $x - 5y + 2z - 5 = 0$, имеет вид...	1) $x - 5y + 2z - 11 = 0$ ☐ 2) $x - 5y + 2z - 14 = 0$ ☐ 3) $5x + y - 2z - 7 = 0$ ☐ 4) $5x - y + 2z - 12 = 0$ ☐
6.81. Даны четыре плоскости: а) $3x - 2y - z + 14 = 0$; б) $-4x + 6y - 1 = 0$; в) $-4x + 2y - 1 = 0$; г) $2x - 4y + 4z + 1 = 0$. Какие из них перпендикулярны плоскости $6x + 4y - 4z + 2 = 0$?	1) Только а) и в) ☐ 2) Только б) ☐ 3) Только а) ☐ 4) Ни одна ☐ 5) Все ☐
6.82. Уравнения прямой, проходящей через точку A (5, 5, 5), перпендикулярно плоскости $5x - y - 10z - 3 = 0$, имеют вид...	1) $\frac{x-5}{5} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-5}{-10}$ ☐ 2) $\frac{x+5}{5} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z+5}{-10}$ ☐ 3) $\frac{x+5}{5} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+5}{10}$ ☐ 4) $\frac{x-5}{5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-5}{10}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.83. Если точка $P(-1, 2, 3)$ принадлежит плоскости $2x - 4y + Cz - 5 = 0$, то коэффициент C равен...	1) 2 ☐ 2) 3 ☐ 3) 5 ☐ 4) 7 ☐
6.84. Если плоскость $6x + 5y + 4z - 27 = 0$ проходит через точку $T(4, -5, z_0)$, то координата z_0 равна...	1) 2 ☐ 2) 3 ☐ 3) 5 ☐ 4) 7 ☐
6.85. Плоскость, проходящая через начало координат параллельно плоскости $4x + 8y - 12z - 5 = 0$, имеет уравнение...	1) $4x + 8y - 12z - 5 = 0$ ☐ 2) $x - 2y - 3z = 0$ ☐ 3) $x + 2y + 3z = 0$ ☐ 4) $x + 2y - 3z = 0$ ☐
6.86. Расстояние от точки $(3, -2, -6)$ до плоскости Oxy равно...	1) 6 ☐ 2) 7 ☐ 3) 2 ☐ 4) 3 ☐
6.87. Прямая $\frac{x-7}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{\alpha}$ пересекает плоскость $4x + 3y - z - 20 = 0$ только в том случае, когда α не равно...	1) −1 ☐ 2) 3 ☐ 3) 4 ☐ 4) $-\frac{1}{4}$ ☐
6.88. Прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{-4}$ и плоскость $2x - ky + z + 20 = 0$ параллельны при k, равном...	1) 0 ☐ 2) 3 ☐ 3) 4 ☐ 4) $-\frac{1}{4}$ ☐
6.89. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3, 3, 3)$ и ось Oy, имеет вид...	1) $x + z = 6$ ☐ 2) $x + y + z - 9 = 0$ ☐ 3) $x + y = 6$ ☐ 4) $x - z = 0$ ☐
6.90. Установить соответствие между уравнениями плоскостей и точками, которые лежат в этих плоскостях А) $y - 2x + 5z = 0$; Б) $2x - 3y + 7z + 7 = 0$; В) $x - 2y + z - 3 = 0$; Г) $x + 7y - z + 3 = 0$. а) (0, 0, 0); б) (−1, 3, 1); в) (2, 0, 1); г) (2, 0, 5); д) (3, 2, −1)	1) А—в; Б—д; В—б; Г—а ☐ 2) А—г; Б—б; В—в; Г—а ☐ 3) А—а; Б—д; В—в; Г—г ☐ 4) А—г; Б –а; В—б; Г—в ☐ 5) А—а; Б—б; В—в; Г—г ☐
6.91. Установить соответствие между уравнениями плоскостей и их положением в пространстве. А) $x - 2y + 11 = 0$; Б) $2z + 3 = 0$; В) $3y - 4 = 0$. а) параллельна оси z; б) это плоскость yOz; в) параллельна плоскости xOz; г) параллельна плоскости xOy.	1) А—а; Б—г; В—в ☐ 2) А—г; Б—б; В—в ☐ 3) А—а; Б—б; В—в ☐ 4) А—г; Б—а; В—б ☐ 5) А—а; Б—б; В—г ☐

Часть 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 7. Элементы теории множеств

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
7.1. Какой операции над множествами соответствует рисунок?  	1) $A \cap B$ ☐ 2) $A \setminus B$ ☐ 3) $A \cup B$ ☐ 4) $\overline{A}$ ☐
7.2. Какой операции над множествами соответствует рисунок?  	1) $A \cap B$ ☐ 2) $A \setminus B$ ☐ 3) $A \cup B$ ☐ 4) $\overline{A}$ ☐
7.3. Какой операции над множествами соответствует рисунок?  	1) $A \cap B$ ☐ 2) $A \setminus B$ ☐ 3) $A \cup B$ ☐ 4) $\overline{A}$ ☐
7.4. Какой операции над множествами соответствует формальное определение: $\{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$?	1) $A \cap B$ ☐ 2) $A \setminus B$ ☐ 3) $A \cup B$ ☐ 4) $\overline{A}$ ☐
7.5. Какое числовое множество имеет формальное определение $\{x \mid x = m / n,\ m \in Z, n \in N\}$?	1) N ☐ 2) Z ☐ 3) Q ☐ 4) R ☐
7.6. Какое подмножество R имеет формальное определение $\{x \mid a < x < b\}$?	1) Полуинтервал ☐ 2) Отрезок ☐ 3) Интервал ☐ 4) b-Окрестность точки a ☐
7.7. Какое подмножество R имеет формальное определение $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$?	1) Полуинтервал ☐ 2) Отрезок ☐ 3) Интервал ☐ 4) b-Окрестность точки a ☐
7.8. Какое подмножество R имеет формальное определение $\{x \mid a \leqslant x < b\}$?	1) Полуинтервал ☐ 2) Отрезок ☐ 3) Интервал ☐ 4) b-Окрестность точки a ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
7.9. $A = \{1, 3, 5, 6\}$; $B = \{2, 5, 6, 7\}$. Какая из указанных пар не входит в $B \times A$?	1) (6, 2) ☐ 2) (6, 3) ☐ 3) (5, 1) ☐ 4) (5, 6) ☐
7.10. $A = \{1, 3, 5, 6\}$; $B = \{2, 5, 6, 7\}$. Какая из указанных пар не входит в $A \times B$?	1) (3, 2) ☐ 2) (3, 5) ☐ 3) (6, 3) ☐ 4) (6, 7) ☐
7.11. $A = \{1, 3, 5, 6\}$; $B = \{2, 5, 6, 7\}$. Какая из указанных пар не входит в $A \times B$?	1) (1, 3) ☐ 2) (1, 6) ☐ 3) (5, 5) ☐ 4) (6, 6) ☐
7.12. $A = \{1, 3, 5, 6\}$; $B = \{2, 5, 6, 7\}$. Какая из указанных пар не входит в $B \times A$?	1) (2, 1) ☐ 2) (3, 1) ☐ 3) (5, 1) ☐ 4) (6, 1) ☐
7.13. Обладает ли отношение порядка «больше» свойствами рефлексивности (р), симметричности (с) и транзитивности (т)?	1) р — да, с — нет, т — нет ☐ 2) р — нет, с — да, т — нет ☐ 3) р — нет, с — нет, т — да ☐ 4) р — нет, с — да, т — да ☐
7.14. Обладает ли отношение порядка «больше или равно» свойствами рефлексивности (р), симметричности (с) и транзитивности (т)?	1) р — да, с — нет, т — нет ☐ 2) р — да, с — да, т — нет ☐ 3) р — да, с — нет, т — да ☐ 4) р — нет, с — да, т — да ☐
7.15. Обладает ли отношение эквивалентности свойствами рефлексивности (р), симметричности (с) и транзитивности (т)?	1) р — да, с — нет, т — нет ☐ 2) р — да, с — да, т — да ☐ 3) р — да, с — нет, т — да ☐ 4) р — нет, с — да, т — да ☐
7.16. Обладает ли отношение порядка «меньше» свойствами рефлексивности (р), симметричности (с) и транзитивности (т)?	1) р – да, с – нет, т – нет ☐ 2) р – нет, с – да, т – нет ☐ 3) р – нет, с – нет, т – да ☐ 4) р – нет, с – да, т – да ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
7.17. Дано универсальное множество $I = \{1, 2, ..., 10\}$, а также множества $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, $C = \{1, 4, 5, 6, 7, 10\}$. Найти множество $D = (A \setminus \overline{B}) \cup (B \setminus \overline{C})$	1) $\{5, 6, 10\}$ ☐ 2) $\{3, 5, 8\}$ ☐ 3) $\{2, 3, 5, 6, 8\}$ ☐ 4) $\{4, 6, 7, 10\}$ ☐ 5) $\{1, 2, 3, 10\}$ ☐
7.18. Дано универсальное множество $I = \{1, 2, ..., 10\}$, а также множества $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, $C = \{1, 4, 5, 6, 7, 10\}$. Найти множество $D = (A \cup \overline{B}) \cap (B \setminus C)$	1) $\{1, 5, 7, 10\}$ ☐ 2) $\{2, 5\}$ ☐ 3) $\{3, 8\}$ ☐ 4) $\{4, 5\}$ ☐ 5) $\{1, 3, 10\}$ ☐
7.19. Дано универсальное множество $I = \{1, 2, ..., 10\}$, а также множества $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, $C = \{1, 4, 5, 6, 7, 10\}$. Найти множество $D = (\overline{A} \cap \overline{C}) \setminus (\overline{B} \cap C)$	1) $\varnothing$ ☐ 2) $\{3, 6\}$ ☐ 3) $\{2, 8\}$ ☐ 4) $\{2, 9\}$ ☐ 5) $\{1, 2, 10\}$ ☐
7.20. Дано универсальное множество $I = \{1, 2, ..., 10\}$, а также множества $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, $C = \{1, 4, 5, 6, 7, 10\}$. Найти множество $D = (\overline{A} \cap B) \setminus (B \cap \overline{C})$	1) $\{5\}$ ☐ 2) $\{2\}$ ☐ 3) $\{2, 3, 5\}$ ☐ 4) $\{4, 6\}$ ☐ 5) $\varnothing$ ☐
7.21. Даны множества $A = \{2, 3, 6, 7\}$ и $B = \{3, 4, 10\}$. Составить график Q соответствия $q = (A, B, Q)$, если известно, что элементы B большие, чем 7, соответствуют элементам, делящимся на 3 из A	1) $\{(4, 3), (10, 6)\}$ ☐ 2) $\{(3, 10), (6, 10)\}$ ☐ 3) $\{(3, 3), (3, 4),$ $(6, 3), (6, 4)\}$ ☐ 4) $\{(2, 10), (7, 10)\}$ ☐
7.22. Дано множество $A=\{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$. Найти график R отношения (A, A, R), характеризующегося признаком «разность — натуральное число, делящееся на 3»	1) $\{(15, 5), (10, 2)\}$ ☐ 2) $\{(20, 5), (15, 5),$ $(10, 5), (5, 2)\}$ ☐ 3) $\{(20, 2), (15, 3)\}$ ☐ 4) $\{(20, 2), (20, 5),$ $(15, 3), (5, 2)\}$ ☐
7.23. Дано множество $A=\{1, 3, 7, 9, 10\}$. Найти график R отношения (A, A, R), характеризующегося признаком «разность — натуральное число не больше двух»	1) $\{(1, 3), (9, 10)\}$ ☐ 2) $\{(10, 9)\}$ ☐ 3) $\{(10, 9), (9, 7),$ $(3, 1)\}$ ☐ 4) $\{(10, 3), (9, 1)\}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
7.24. Дано множество $A = \{2, 3, 10, 15, 17\}$. Найти график R отношения (A, A, R), характеризующегося признаком «частное — натуральное число»	1) $\{(10, 2), (3, 2)\}$ ☐ 2) $\{(17, 2), (10, 3)\}$ ☐ 3) $\{(15, 3)\}$ ☐ 4) $\{(15, 3), (10, 2)\}$ ☐

Глава 8. Числовые последовательности

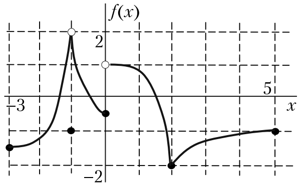
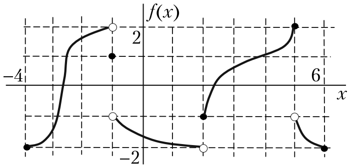
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
8.1. Общий член последовательности $1; \frac{2}{5}; \frac{3}{5^2}; \frac{4}{5^3}$ ... имеет вид...	1) $a_n = (-1)^n \frac{n}{5^{n-1}}$ ☐ 2) $a_n = \frac{n}{5^{n-1}}$ ☐ 3) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{5^n}$ ☐ 4) $a_n = \frac{n}{5^n}$ ☐
8.2. Первые три члена числовой последовательности: $\frac{1}{7}; \frac{1}{10}; \frac{1}{13}$. Тогда формула общего члена этой последовательности имеет вид...	1) $a_n = \frac{1}{3n + 4}$ ☐ 2) $a_n = \frac{1}{2^n + 5}$ ☐ 3) $a_n = \frac{1}{8n - 1}$ ☐ 4) $a_n = \frac{1}{(n + 5)(n + 1)}$ ☐
8.3. Известны первые три члена числовой последовательности: $\frac{1}{4}; \frac{1}{10}; \frac{1}{18}$. Тогда формула общего члена этой последовательности имеет вид...	1) $a_n = \frac{1}{2^n(n + 1)}$ ☐ 2) $a_n = \frac{1}{(n + 2)(n + 1)}$ ☐ 3) $a_n = \frac{1}{6n - 2}$ ☐ 4) $a_n = \frac{1}{n(n + 3)}$ ☐
8.4. Известны первые три члена числовой последовательности: $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{19}$. Тогда формула общего члена этой последовательности имеет вид...	1) $a_n = \frac{1}{2n^2 + 1}$ ☐ 2) $a_n = \frac{1}{n(n + 2)}$ ☐

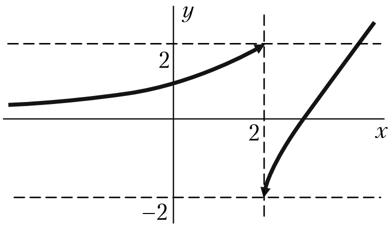
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
	3) $a_n = \dfrac{1}{2^n + 1}$ ☐ 4) $a_n = \dfrac{1}{4n - 1}$ ☐
8.5. Общий член последовательности $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{5}{27}; \frac{7}{81}$ ... имеет вид...	1) $a_n = \dfrac{2n + 1}{3^n}$ ☐ 2) $a_n = (-1)^n \dfrac{2n - 1}{3^n}$ ☐ 3) $a_n = \dfrac{2n - 1}{3^n}$ ☐ 2) $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{2n + 1}{3^n}$ ☐
8.6. Общий член числовой последовательности $-\frac{1}{4}; \frac{5}{16}; -\frac{9}{64}; \frac{13}{256}$ ... имеет вид...	1) $a_n = \dfrac{(-1)^n(4n - 3)}{4^n}$ ☐ 2) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(4n-3)}{4^n}$ ☐ 3) $a_n = \dfrac{(-1)^n(4n + 1)}{4n}$ ☐ 4) $a_n = \dfrac{(-1)^n(4n + 1)}{4^n}$ ☐
8.7. Установить соответствие между числовой последовательностью и формулой ее общего члена А) $1; \frac{5}{4 \cdot 2!}; \frac{10}{8 \cdot 3!}$ ...; Б) $\frac{2 \cdot 2}{1!}; \frac{2^2 \cdot 3}{2!}; \frac{2^3 \cdot 4}{3!}$ ...; В) $\frac{3}{2!}; \frac{9}{4!}; \frac{19}{6!}$ ... а) $a_n = \dfrac{2n^2+1}{(2n)!}$; б) $a_n = \dfrac{n^2+1}{(2n-1)!}$; в) $a_n = \dfrac{n^2+1}{2^n \cdot n!}$; г) $a_n = \dfrac{2^n(n+1)}{n!}$; д) $a_n = \dfrac{2n^2}{(2n)!}$	1) А—в; Б—д; В—б ☐ 2) А—г; Б—б; В—в ☐ 3) А—в; Б—г; В—а ☐ 4) А—г; Б—а; В—б ☐ 5) А—а; Б—б; В—в ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
8.8. Пятый член числовой последовательности $\left\{\frac{5(n-1)}{n!}\right\}$ равен...	1) $\frac{5}{6}$ ☐ 2) 31 ☐ 3) 1 ☐ 4) $\frac{1}{6}$ ☐
8.9. Первый член числовой последовательности $\left\{\frac{(n+1)(n+9)}{n!}\right\}$ равен...	1) 10 ☐ 2) 30 ☐ 3) 20 ☐ 4) $\frac{2}{60}$ ☐

Глава 9. Предел и непрерывность функции

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.1. Сумма целых значений x из области определения функции $y = \sqrt{3-x} + \lg(x+2) + 7x - 1$ равна...	1) 2 ☐ 2) 5 ☐ 3) 4 ☐ 4) 0 ☐
9.2. Дана функция $y = \sqrt{6x - x^2} + \ln(x-3)$. Тогда областью ее определения является множество...	1) [3; 6] ☐ 2) [6; +∞) ☐ 3) (3; 6] ☐ 4) (3; 6) ☐
9.3. Установить соответствие между функцией и ее областью определения: А) $y = \operatorname{tg} x$; Б) $y = \sqrt[3]{x}$; В) $y = \sqrt{x^2 - 1}$. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $x \neq k\pi,\ k \in Z$; в) $(-1; 1)$; г) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$; д) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$	1) А—а; Б—б; В—в ☐ 2) А—г; Б—а; В—д ☐ 3) А—д; Б—б; В—г ☐ 4) А—г; Б –в; В—б ☐ 5) А—д; Б—г; В—б ☐
9.4. Найти область значений функции $y = x^2 + 4x + 6$	1) [–2; +∞) ☐ 2) [1,5; +∞) ☐ 3) [1,75; +∞) ☐ 4) [2; +∞) ☐
9.5. Дана функция $y = \sqrt{x^2 + 5x + 4} + 9$. Тогда областью ее значений является множество...	1) [9; +∞) ☐ 2) [–9; +∞) ☐ 3) (–∞;–4] ∪ [–1;+∞) ☐ 4) (11; +∞) ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.6. Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ нечетна, если функция $g(x)$ задается формулой: а) $g(x) = 6x$; б) $g(x) = 3x^2 - 1$; в) $g(x) = x^4$; г) $g(x) = x^5$	1) Только а) и в) ☐ 2) Только а) и г) ☐ 3) Только а), в) и г) ☐ 4) Все ☐ 5) Ни одной ☐
9.7. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[-3; 5]$ графиком:  Какие из следующих утверждений являются правильными: а) при любом значении x выполняется неравенство $f(x) < 2$; б) множеством значений является отрезок $[-2, 2]$; в) на отрезке $[-3, -1]$ функция $f(x)$ возрастает; г) уравнение $f(x) = -1$ имеет четыре корня?	1) Только а) и в) ☐ 2) Только а) и г) ☐ 3) Только а), в) и г) ☐ 4) Все ☐ 5) Ни одного ☐
9.8. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[-4; 6]$ графиком:  Какие из следующих утверждений являются правильными: а) при любом значении x выполняется неравенство $f(x) - 4$; б) уравнение $f(x) = -2$ имеет три корня; в) среди значений функции $f(x)$ на отрезке $[-4; -1]$ есть наибольшее и наименьшее; г) на отрезке $[2; 5]$ функция $f(x)$ возрастает?	1) Только а) и г) ☐ 2) Только а) и в) ☐ 3) Только а), в) и г) ☐ 4) Все ☐ 5) Ни одного ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.9. Наименьшее значение y из области значений функции $y = x^2 + 4x - 7$ равно...	1) −11 ☐ 2) −6 ☐ 3) −7 ☐ 4) −10 ☐
9.10. Наименьшее значение y из области значений функции $y = 5x^2 + 10x - 1$ равно...	1) −26 ☐ 2) −2 ☐ 3) −6 ☐ 4) −1 ☐
9.11. Если графику функции $y = f(x)$ соответствует условие $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = a$, то значение a равно... 	1) −2 ☐ 2) −∞ ☐ 3) 2 ☐ 4) +∞ ☐
9.12. Значение предела $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2(x^2 - 9)}{x - 3}$ равно...	1) 12 ☐ 2) 0 ☐ 3) 6 ☐ 4) ∞ ☐
9.13. Значение предела $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ равно...	1) 0 ☐ 2) ∞ ☐ 3) 4 ☐ 4) 2 ☐
9.14. Значение предела $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ равно...	1) 2 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0 ☐ 4) ∞ ☐
9.15. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 6x + 8}$	1) −4,5 ☐ 2) −5 ☐ 3) −5,5 ☐ 4) −6 ☐
9.16. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 6}$	1) 0,2 ☐ 2) 0,3 ☐ 3) 0,4 ☐ 4) 0,5 ☐
9.17. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 10x + 16}{x^2 - x - 6}$	1) −0,4 ☐ 2) −0,8 ☐ 3) −1 ☐ 4) −1,2 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.18. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2+2x-35}{x^2+4x-21}$	1) 1,2 ☐ 2) 1,5 ☐ 3) 2 ☐ 4) 2,4 ☐
9.19. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+7x-18}{x^2-8x+12}$	1) –2,25 ☐ 2) –2,5 ☐ 3) –2,75 ☐ 4) –3 ☐
9.20. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-x-42}{x^2-9x+14}$	1) 2 ☐ 2) 2,25 ☐ 3) 2,5 ☐ 4) 2,6 ☐ 5) 2,75 ☐
9.21. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+8x-33}{x^2+4x-21}$	1) 1,2 ☐ 2) 1,4 ☐ 3) 1,6 ☐ 4) 1,8 ☐
9.22. Предел $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5x^2+13x-6}{2x^2+5x-3}$ равен...	1) 4/17 ☐ 2) 7/3 ☐ 3) 17/7 ☐ 4) –17 ☐ 5) –7/3 ☐
9.23. Предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-11x+6}{3x^2-4x-4}$ равен...	1) 0,5 ☐ 2) 0,625 ☐ 3) 3/4 ☐ 4) 1,325 ☐ 5) ∞ ☐
9.24. Предел $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+9x+2}{11x^2+7x-4}$ равен...	1) –1/3 ☐ 2) 3/4 ☐ 3) –1/4 ☐ 4) 3/2 ☐ 5) 1/3 ☐
9.25. Предел $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-9x-18}{3x^2-10x-48}$ равен...	1) 23/5 ☐ 2) 5/17 ☐ 3) 15/26 ☐ 4) –15/23 ☐ 5) 15/23 ☐
9.26. Предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{7x^2-18x-40}{5x^2-11x-36}$ равен...	1) 38/29 ☐ 2) 18/43 ☐ 3) 8/51 ☐ 4) 19/23 ☐ 5) 4/5 ☐
9.27. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{19x^4+7x^2-24x+17}{5x^4-2x^3+19x+41}$ равен...	1) 17/41 ☐ 2) 0 ☐ 3) 19/5 ☐ 4) ∞ ☐
9.28. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16x^6+9x^4-32x+19}{8x^6-12x^5+12x+38}$ равен...	1) 2 ☐ 2) 0,5 ☐ 3) ∞ ☐ 4) 1 ☐
9.29. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-23x+15}{7x+x^2-43}$ равен...	1) ∞ ☐ 2) 15/43 ☐ 3) 1 ☐ 4) 1/7 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.30. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-13x+42}{9x+x^2-90}$ равен...	1) ∞ ☐ 2) 7/15 ☐ 3) 1/9 ☐ 4) 1 ☐
9.31. Имеют ли следующие функции конечный предел при $x\to+\infty$ а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{1-\sqrt{x}}$; б) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^5+1}+1}{x-1}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И а), и б) ☐ 4) Ни а), ни б) ☐
9.32. Имеют ли следующие функции конечный предел при $x\to+\infty$ а) $f(x)=\dfrac{x^5-x^7+2}{x^6+1}$; б) $f(x)=\dfrac{1-2x^2}{x^2+x+1}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И а), и б) ☐ 4) Ни а), ни б) ☐
9.33. Имеют ли следующие функции конечный предел при $x\to+\infty$ а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1}$; б) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+5}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И а), и б) ☐ 4) Ни а), ни б) ☐
9.34. Имеют ли следующие функции конечный предел при $x\to+\infty$ а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^5+1}-1}{x+1}$; б) $f(x)=\dfrac{1-3x^8}{x^2+5}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И а), и б) ☐ 4) Ни а), ни б) ☐
9.35. Конечный предел при $x\to\infty$ имеют следующие функции: а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+1}+1}{x-2}$; б) $f(x)=\dfrac{x^4-x^7+2}{x+2x^2}$; в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+3}{x-2}$; г) $f(x)=\dfrac{x^5+2x+\sqrt{x}+1}{1-x^5}$	1) Только г) ☐ 2) Только а) и б) ☐ 3) Только в) и г) ☐ 4) Только а) и в) ☐ 5) Ни одна ☐

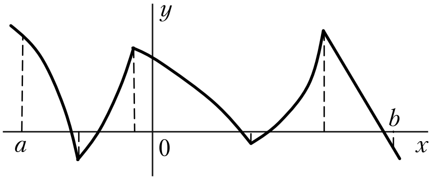
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.36. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ равен...	1) e^2 ☐ 2) $\sqrt{e}$ ☐ 3) $0{,}5e$ ☐ 4) $2e$ ☐ 5) 1 ☐
9.37. Установить соответствие между пределами и их значениями: А) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x^2-1)}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-3}{3^x-3}$; В) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x-1}$. а) 2; б) 0; в) $\dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{1}{3}$; д) 3	1) А—а; Б—б; В—в ☐ 2) А—г; Б—в; В—д ☐ 3) А—в; Б—б; В—г ☐ 4) А—г; Б –а; В—б ☐ 5) А—в; Б—д; В—а ☐
9.38. Установить соответствие между пределами и их значениями: А) $\lim\limits_{x\to 0} x^2e^x$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}+1}{e^x}$; В) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{4x^4+1}}$. а) $-\infty$; б) $\dfrac{1}{2}$; в) 2 ; г) ; д) 0	1) А—а; Б—б; В—в ☐ 2) А—г; Б—в; В—д ☐ 3) А—д; Б—б; В—г ☐ 4) А—г; Б –в; В—б ☐ 5) А—д; Б—г; В—б ☐
9.39. Установить соответствие между пределами и их значениями: А) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+x^2+5}{4x^4-x+1}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+3}{3x^3+5x^2+1}$; В) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+8}{3x^2+7x-1}$; Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+7x^2+1}{4x^3-x-11}$. а) ∞; б) 3; в) $\dfrac{5}{3}$; г) 0; д) $\dfrac{7}{4}$	1) А—д; Б—б; В—в; Г—а ☐ 2) А—г; Б—в; В—д; Г—б ☐ 3) А—в; Б—б; В—г; Г—а ☐ 4) А—д; Б—г; В—а; Г—б ☐ 5) А—д; Б—б; В—в; Г—а ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.40. Установить соответствие между пределами и их значениями: А) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+6x+3}{8x^3-4x^2+1}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+5}{3x^3-9x^2+1}$; В) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+9x+7}{9x^2+6x+1}$; Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+3x^3+1}{x^4-x^2+8}$. а) 5; б) ∞; в) $\dfrac{1}{9}$; г) $\dfrac{1}{3}$; д) $\dfrac{5}{8}$; е) 0.	1) А—д; Б—е; В—б; Г—а ☐ 2) А—г; Б—в; В—д; Г—б ☐ 3) А—в; Б—е; В—г; Г—а ☐ 4) А—д; Б—е; В—в; Г—б ☐ 5) А—д; Б—б; В—в; Г—а ☐
9.41. Число точек разрыва функции $y=\dfrac{1}{x^3(x^2+1)(x-1)^4}$ равно...	1) 4 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 7 ☐
9.42. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x-24}$	1) –3 и 8 ☐ 2) 3 и 8 ☐ 3) 3 и –8 ☐ 4) –3 и –8 ☐
9.43. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{x+5}{x^2-x-42}$	1) –7 и 6 ☐ 2) 7 и 6 ☐ 3) 7 и –6 ☐ 4) –7 и –6 ☐
9.44. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{x+1}{x^2+9x+20}$	1) –5 и 4 ☐ 2) 5 и 4 ☐ 3) 5 и –4 ☐ 4) –5 и –4 ☐
9.45. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{3x-4}{x^2+10x-11}$	1) –11 и 1 ☐ 2) 11 и 1 ☐ 3) 11 и –1 ☐ 4) –11 и –1 ☐
9.46. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{2x-5}{3x^2-2x-8}$	1) 2 и 4/3 ☐ 2) 2 и –4/3 ☐ 3) 2 и –3/4 ☐ 4) –2 и 3/4 ☐
9.47. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{3x+1}{21x^2+11x-2}$	1) 2/7 и 1/3 ☐ 2) –2/3 и –1/7 ☐ 3) –2/3 и 1/7 ☐ 4) –2/7 и –1/3 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.48. Точка $x = 4$ для функции $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-4}, \text{ если } x < 4 \\ e^x, \text{ если } x \geqslant 4 \end{cases}$$ является...	1) точкой устранимого разрыва ☐ 2) точкой разрыва 1-го рода (неустранимый разрыв) ☐ 3) точкой разрыва 2-го рода ☐ 4) точкой непрерывности ☐
9.49. Точка $x = 2$ для функции $$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 2 \\ 3^x - 5, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$ является...	1) точкой устранимого разрыва ☐ 2) точкой разрыва 1-го рода (неустранимый разрыв) ☐ 3) точкой разрыва 2-го рода ☐ 4) точкой непрерывности ☐
9.50. Горизонтальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{3+4x}{x}$ является прямая, определяемая уравнением...	1) $y = -\dfrac{4}{3}$ ☐ 2) $x = 0$ ☐ 3) $x = -\dfrac{4}{3}$ ☐ 4) $y = 4$ ☐
9.51. Горизонтальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{x}{3x+4}$ является прямая, определяемая уравнением...	1) $x = 0$ ☐ 2) $y = \dfrac{1}{3}$ ☐ 3) $x = \dfrac{4}{3}$ ☐ 4) $y = \dfrac{4}{3}$ ☐
9.52. Вертикальная асимптота графика функции $y = \dfrac{x-3}{(\sqrt[3]{x}+2)(x^2+4)}$ определяется уравнением...	1) $x = -8$ ☐ 2) $y = \dfrac{1}{8}$ ☐ 3) $x = -2$ ☐ 4) $x = 3$ ☐
9.53. Наклонной асимптотой графика функции $y = \dfrac{4x^2+2x-2}{2x+1}$ является прямая...	1) $y = 2x$ ☐ 2) $y = x + 2$ ☐ 3) график не имеет наклонных асимптот ☐ 4) $y = 4x - 2$ ☐
9.54. Угловой коэффициент наклонной асимптоты графика функции $y = \dfrac{8x - x^2}{x+2}$ равен...	1) -1 ☐ 2) 8 ☐ 3) 4 ☐ 4) $-\dfrac{1}{2}$ ☐

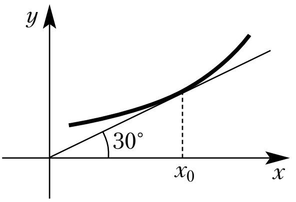
Глава 10. Элементы дифференциального исчисления

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.1. Как определяется производная функции $y = f(x)$?	1) $y' = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x}$ ☐ 2) $y' = \lim\limits_{x \to 0} \frac{y}{x}$ ☐ 3) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ☐ 4) $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 1} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ☐ 5) $y' = \frac{y}{x}$ ☐
10.2. Если α — угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$, то $y' = ...$	1) $\operatorname{tg} \alpha$ ☐ 2) $\operatorname{ctg} \alpha$ ☐ 3) $\sin \alpha$ ☐ 4) $\cos \alpha$ ☐ 5) α ☐
10.3. Если $y = uv$, то $y' = ...$	1) $u'v'$ ☐ 2) $u'v - uv'$ ☐ 3) $\frac{u'v + uv'}{uv}$ ☐ 4) $u' + v'$ ☐ 5) $u'v + uv'$ ☐
10.4. Если $y = \frac{u}{v}$, то $y' = ...$	1) $u'v - uv'$ ☐ 2) $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ ☐ 3) $\frac{u'v + uv'}{v^2}$ ☐ 4) $u' - v'$ ☐ 5) $\frac{u'}{v'}$ ☐
10.5. Если $y = x^{\alpha}$, то $y' = ...$	1) x^{α} ☐ 2) $\alpha x^{\alpha-1}$ ☐ 3) $x^{\alpha} \ln \alpha$ ☐ 4) $\alpha x^{\alpha+1}$ ☐ 5) $x^{2\alpha-1}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.6. Если $y = a^x$, то $y' = ...$	1) xa^{x-1} ☐ 2) a^x ☐ 3) a^{x-1} ☐ 4) ax^{a-1} ☐ 5) $a^x \ln a$ ☐
10.7. Функция задана графически. Определить количество точек, принадлежащих интервалу (a, b), в которых не существует производная.  	1) 3 ☐ 2) 4 ☐ 3) 5 ☐ 4) 6 ☐
10.8. Найти производную функции $y = x^4e^{5x}$	1) $20x^3e^{5x}$ ☐ 2) $4x^3e^{5x}$ ☐ 3) $4x^3e^{5x} + 5x^4e^{5x}$ ☐ 4) $20x^3e^{5x} + x^4e^{5x}$ ☐ 5) $4x^3 + 5e^{5x}$ ☐
10.9. Найти производную функции $y = x^6\sin 2x$	1) $6x^5\cos 2x$ ☐ 2) $12x^5\cos 2x$ ☐ 3) $6x^5\sin 2x - 2x^6\cos 2x$ ☐ 4) $6x^5\sin 2x + 2x^6\cos 2x$ ☐
10.10. Найти производную функции $y = x^3\ln 3x$	1) $3x^2\ln 3x + x^2$ ☐ 2) $3x^2$ ☐ 3) x^2 ☐ 4) $9x^2\ln x + 3x^3$ ☐
10.11. Найти производную функции $y = \sin^2(x^2)$	1) $2\cos 2x$ ☐ 2) $2x\sin(2x^2)$ ☐ 3) $2\cos(x^2) + 2x\sin^2 2x$ ☐ 4) $2\sin(x^2)$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.12. Найти производную функции $$y = \frac{x^3}{\sin x}$$	1) $\dfrac{3x^2}{\cos x}$ ☐ 2) $\dfrac{3x^2\cos x}{\sin^2 x}$ ☐ 3) $\dfrac{3x^2\sin x - x^3\cos x}{\sin^2 x}$ ☐ 4) $\dfrac{-3x^2\cos x + x^3\sin x}{\cos x}$ ☐
10.13. Найти производную функции $$y = 5^x\cos 2x$$	1) $5^x\ln 5\cos 2x -$ $- 25x\sin 2x$ ☐ 2) $-25x\ln 5\sin 2x$ ☐ 3) $-5x\ln 5\sin 2x$ ☐ 4) $5x\cos 2x - 5x\sin 2x$ ☐
10.14. Найти производную функции $$y = x^x$$	1) x^x ☐ 2) $x^x\ln x$ ☐ 3) xx^{x-1} ☐ 4) $x^x(\ln x + 1)$ ☐
10.15. Производная функции $y = e^{x^2+1}$ равна...	1) $y' = -2xe^{x^2+1}$ ☐ 2) $y' = xe^{x^2+1}$ ☐ 3) $y' = e^{x^2+1}$ ☐ 4) $y' = 2xe^{x^2+1}$ ☐
10.16. Производная функции $$y = \cos(3x^2 + 2)$$ равна...	1) $y' = 6x\sin(3x^2 + 2)$ ☐ 2) $y' = x\sin(3x^2 + 2)$ ☐ 3) $y' = -6x\sin(3x^2 + 2)$ ☐ 4) $y' = -\sin(3x^2 + 2)$ ☐
10.17. Производная частного $y = \dfrac{x+5}{x+1}$ равна...	1) $y' = \dfrac{4}{(x+1)^2}$ ☐ 2) $y' = -\dfrac{4}{x+1}$ ☐ 3) $y' = \dfrac{2x+6}{(x+1)^2}$ ☐ 4) $y' = -\dfrac{4}{(x+1)^2}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.18. Производная частного $y = \dfrac{x+3}{x+2}$ равна...	1) $y' = -\dfrac{1}{x+2}$ ☐ 2) $y' = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$ ☐ 3) $y' = \dfrac{2x+5}{(x+2)^2}$ ☐ 4) $y' = \dfrac{1}{(x+2)^2}$ ☐
10.19. Производная частного $y = \dfrac{x}{x-1}$ равна...	1) $y' = -\dfrac{1}{x-1}$ ☐ 2) $y' = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ ☐ 3) $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$ ☐ 4) $y' = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ ☐
10.20. Установить соответствие между функциями и их производными: А) $y = e^{-3x}$; Б) $y = \sin(-5x+1)$; В) $y = \ln(x^2+1)$. а) $\dfrac{2x}{1+x^2}$; б) $\dfrac{1}{1+x^2}$; в) $-3xe^{-3x-1}$; г) $-5\cos(5x-1)$; д) $-3e^{-3x}$	1) А—б; Б—г; В—в ☐ 2) А—д; Б—г; В—а ☐ 3) А—б; Б—а; В—в ☐ 4) А—д; Б—в; В—г ☐ 5) А—д; Б—г; В—в ☐
10.21. Установить соответствие между функциями и их производными: А) $y = e^{\sin x}$; Б) $y = \sqrt{\ln x}$; В) $y = \sqrt{1-\sqrt{x}}$. а) $\dfrac{1}{2\sqrt{\ln x}}$; б) $\cos x\, e^{\sin x}$; в) $-\dfrac{1}{4\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$; г) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; д) $\sin x\, e^{\sin x-1}$	1) А—б; Б—г; В—в ☐ 2) А—д; Б—а; В—в ☐ 3) А—б; Б—а; В—в ☐ 4) А—д; Б—в; В—г ☐ 5) А—д; Б—г; В—в ☐

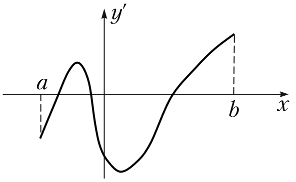
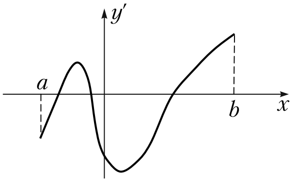
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.22. Пусть $u(x)$ — некоторая дифференцируемая функция по x. Установите соответствие между функциями и их производными по x: А) $y = 3^u$; Б) $y = \sin(u)$; В) $y = \log_2(u)$. а) $\frac{1}{u}u'$; б) $\frac{1}{u}\log_2 e \cdot u'$; в) $3^u \cdot u'$; г) $\cos(u) \cdot u'$; д) $3^u \ln 3 \cdot u'$	1) А—д; Б—г; В—б ☐ 2) А—д; Б—г; В—а ☐ 3) А—в; Б—г; В—б ☐ 4) А—в; Б—г; В—а ☐ 5) А—д; Б—г; В—в ☐
10.23. Значение производной функции $y = \dfrac{10x+1}{e^{3x}}$ в точке $x = 0$ равно...	1) 13 ☐ 2) 7 ☐ 3) 10 ☐ 4) 9 ☐
10.24. Значение производной функции $y = xe^x$ в точке $x = 0$ равно...	1) e ☐ 2) 0 ☐ 3) –1 ☐ 4) 1 ☐
10.25. Значение производной функции $y = (4x + 3)\ln x$ в точке $x = 1$ равно...	1) 11 ☐ 2) 7 ☐ 3) –7 ☐ 4) 4 ☐
10.26. Найти производную функции $y = \dfrac{x+1}{x-4}$ в точке $x = 3$	1) –3,5 ☐ 2) –4 ☐ 3) –4,5 ☐ 4) –5 ☐
10.27. Найти производную функции $y = \dfrac{x^2-3}{x^3+2}$ в точке $x = 2$	1) 0,24 ☐ 2) 0,28 ☐ 3) 0,32 ☐ 4) 0,36 ☐
10.28. Найти производную функции $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+2}\right)$ в точке $x = 3$.	1) 0,4 ☐ 2) 0,3 ☐ 3) 0,2 ☐ 4) 0,1 ☐
10.29. График функции $y = f(x)$ изображен на рисунке  Тогда значение производной этой функции в точке x_0 равно...	1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ☐ 3) $-\sqrt{3}$ ☐ 4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ☐

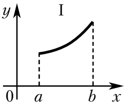
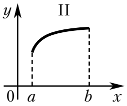
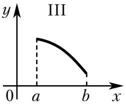
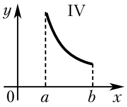
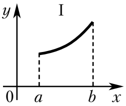
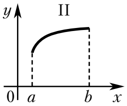
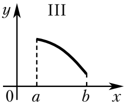
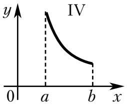
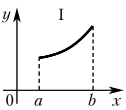
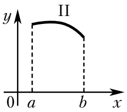
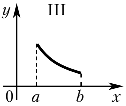
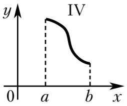
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.30. Касательная к графику функции $f(x) = 3x^2 - x - 10$ образует с положительным направлением оси Ox угол arctg 17. Тогда абсцисса точки касания равна...	1) 3 ☐ 2) 17 ☐ 3) 840 ☐ 4) $2\frac{2}{3}$ ☐
10.31. Уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке (2; 8) имеет вид...	1) $2x - y + 16 = 0$ ☐ 2) $y - 12 = 0$ ☐ 3) $12x - y - 24 = 0$ ☐ 4) $2x - y - 8 = 0$ ☐ 5) $12x - y - 16 = 0$ ☐
10.32. Уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{3}{x^2 + 2}$ в точке (1; 1) имеет вид...	1) $2x - 3y - 5 = 0$ ☐ 2) $x + 2y - 7 = 0$ ☐ 3) $2x + 3y - 5 = 0$ ☐ 4) $x - 2y - 3 = 0$ ☐ 5) $x + 2y - 2 = 0$ ☐
10.33. Уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{4}{x^3 + 3}$ в точке (1; 1) имеет вид...	1) $3x - y - 2 = 0$ ☐ 2) $x + y - 2 = 0$ ☐ 3) $y - 1 = 0$ ☐ 4) $3x + 4y - 7 = 0$ ☐ 5) $3x - 4y + 1 = 0$ ☐
10.34. Уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{1}{x - 1}$ в точке (2; 1) имеет вид...	1) $x + y - 3 = 0$ ☐ 2) $2x - y - 3 = 0$ ☐ 3) $x - 2y = 0$ ☐ 4) $x + 2y - 4 = 0$ ☐
10.35. Уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{3}{x^3 + x + 1}$ в точке (0; 3) имеет вид...	1) $3x + y + 1 = 0$ ☐ 2) $3x + y - 3 = 0$ ☐ 3) $3x - 4y - 5 = 0$ ☐ 4) $3x + 4y - 12 = 0$ ☐
10.36. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 11 + 2t + 5t^2$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t = 1$ равна...	1) 18 ☐ 2) 12 ☐ 3) 7 ☐ 4) 23 ☐
10.37. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 1 + 7t + 10t^2$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t = 1$ равна...	1) 18 ☐ 2) 27 ☐ 3) 28 ☐ 4) 17 ☐

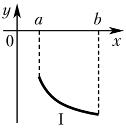
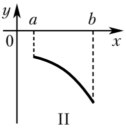
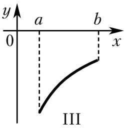
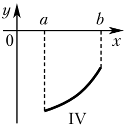
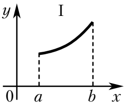
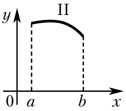
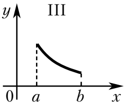
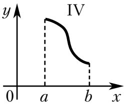
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.38. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 4 + 10t^2$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при $t = 1$ равна...	1) 14 ☐ 2) 24 ☐ 3) 10 ☐ 4) 20 ☐
10.39. Материальная точка движется по закону $S = 5\sin 2t + 3t^2 + 4t$. Тогда ее ускорение в момент времени $t = 0$ равно...	1) 6 ☐ 2) 5 ☐ 3) 1 ☐ 4) −14 ☐
10.40. Производная второго порядка функции $y = e^{3x+2}$ имеет вид...	1) $9e$ ☐ 2) $3e^x$ ☐ 3) $9e^{3x+2}$ ☐ 4) $9e^{3x}$ ☐
10.41. Производная второго порядка функции $y = e^{5x-1}$ имеет вид...	1) $25e^{5x-1}$ ☐ 2) $25e^{5x}$ ☐ 3) $25e$ ☐ 4) $5e^x$ ☐
10.42. Производная второго порядка функции $y = \ln 11x$ имеет вид...	1) $\frac{1}{x^2}$ ☐ 2) $-\frac{1}{x^2}$ ☐ 3) $\frac{11}{x}$ ☐ 4) $-\frac{11}{x^2}$ ☐
10.43. Производная второго порядка функции $y = x^2e^x$ имеет вид...	1) $2xe^x$ ☐ 2) $2e^x$ ☐ 3) $e^x(2x + x^2)$ ☐ 4) $e^x(x^2 + 4x + 2)$ ☐
10.44. Найти вторую производную функции $y = \sin 2x$	1) $-4\sin 2x$ ☐ 2) $4\sin 2x$ ☐ 3) $8\sin x$ ☐ 4) $-8\sin x$ ☐
10.45. Найти вторую производную функции $y = \cos(x^2)$	1) $-2\sin(x^2) +$ $+ 2x^2\cos(x^2)$ ☐ 2) $-2\cos(2x) +$ $+ 4x^2\sin(2x)$ ☐ 3) $-2\sin(x^2) -$ $- 4x^2\cos(x^2)$ ☐ 4) $-4x^2\cos(2x)$ ☐
10.46. Найти вторую производную функции $y = x\ln x$	1) $\ln x + 1$ ☐ 2) $\frac{\ln x}{x}$ ☐ 3) 1 ☐ 4) $\frac{1}{x}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.47. Найти вторую производную функции $y = x\sqrt{x}$	1) $\dfrac{2}{3\sqrt{x}}$ ☐ 2) $\dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ ☐ 3) $\dfrac{3}{4\sqrt{x}}$ ☐ 4) $3\sqrt{x}$ ☐
10.48. Найти вторую производную функции $y = e^{x^2}$	1) $e^{x^2}(4x^2 + 2)$ ☐ 2) $4x^2e^{x^2}$ ☐ 3) $2e^{2x}$ ☐ 4) $e^{x^2}(2x^2 + 4)$ ☐
10.49. Найти вторую производную функции $y = x\cos 3x$	1) $-9\cos 3x$ ☐ 2) $3\cos 3x - 6x\sin 3x$ ☐ 3) $-6\sin 3x - 9x\cos 3x$ ☐ 4) $3\sin 3x - 9x\cos 3x$ ☐
10.50. Найти вторую производную функции $y = \sin 3x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{6}$	1) -3 ☐ 2) -5 ☐ 3) -6 ☐ 4) -9 ☐
10.51. Дифференциал функции $y = f(x)$ определяется по формуле...	1) $dy = \dfrac{dx}{y'}$ ☐ 2) $dy = (\ln y)'dx$ ☐ 3) $dy = f(x)dx$ ☐ 4) $dy = dx$ ☐ 5) $dy = y'dx$ ☐
10.52. Какое равенство определяет инвариантность формы записи дифференциала?	1) $dy = \text{const}$ ☐ 2) $dy = y(\ln x)'dx$ ☐ 3) $dy = y'_x dx = y'_u du$ ☐ 4) $dy = dx$ ☐
10.53. Что равно длине отрезка, отсекаемого касательной к графику функции от приращения функции?	1) Дифференциал ☐ 2) Производная ☐ 3) Вторая производная ☐ 4) Определенный интеграл ☐
10.54. Чему при малых x приближенно равно выражение $f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$?	1) $f''(x_0)$ ☐ 2) $f(x_0 + \Delta x)$ ☐ 3) $f(x_0 - \Delta x)$ ☐ 4) $f(\Delta x)$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.55. Если к пределу $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ применить правило Лопиталя, то он примет вид...	1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x^2}$ ☐ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ ☐ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$ ☐ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$ ☐
10.56. Если к пределу $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_2 x}{e^{2x}}$ применить правило Лопиталя, то он примет вид...	1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_2 x}{2e^{2x}}$ ☐ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2xe^{2x}\ln 2}$ ☐ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-2x\ln x}{xe^{2x}\ln 2}$ ☐ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^{2x}\ln 2}$ ☐
10.57. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{4x}$ равен...	1) 4/7 ☐ 2) 0 ☐ 3) ∞ ☐ 4) 1 ☐ 5) 7/4 ☐
10.58. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{5x}$ равен...	1) 1 ☐ 2) 1/2 ☐ 3) ∞ ☐ 4) 2 ☐ 5) 0 ☐
10.59. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{4x}$ равен...	1) 4 ☐ 2) 1/4 ☐ 3) 1 ☐ 4) ∞ ☐ 5) 0 ☐
10.60. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\ln(1+2x)}$ равен...	1) 0 ☐ 2) 1/4 ☐ 3) 1 ☐ 4) 2 ☐ 5) 1/2 ☐
10.61. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ равен...	1) 8 ☐ 2) 4 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐ 5) 0 ☐
10.62. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$ равен...	1) 0 ☐ 2) 1/2 ☐ 3) 1 ☐ 4) 2 ☐ 5) 4 ☐
10.63. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+3x)}$ равен...	1) e ☐ 2) $\sqrt[3]{e}$ ☐ 3) 1 ☐ 4) 1/3 ☐ 5) 3 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.64. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-2}{\ln x}$ равен...	1) 0 ☐ 2) 1 ☐ 3) −1 ☐ 4) 2 ☐ 5) −2 ☐
10.65. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$ равен...	1) 0 ☐ 2) −1 ☐ 3) −3 ☐ 4) −6 ☐ 5) −9 ☐
10.66. Необходимым условием максимума дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 является...	1) $f'(x_0) > 0$ 2) $f'(x_0) = 0$ 3) $f'(x_0) < 0$ 4) $f''(x_0) = 0$
10.67. Необходимым условием минимума дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 является...	1) $f'(x_0) < 0$ 2) $f''(x_0) = 0$ 3) $f'(x_0) > 0$ 4) $f'(x_0) = 0$
10.68. Необходимым условием точки перегиба дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 является...	1) $f''(x_0) = 0$ 2) $f'(x_0) = 0$ 3) $f''(x_0) > 0$ 4) $f''(x_0) < 0$
10.69. Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Укажите количество точек экстремума функции, если график ее производной имеет вид 	1) 0 ☐ 2) 1 ☐ 3) 2 ☐ 4) 3 ☐
10.70. Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Укажите количество точек максимума функции, если график ее производной имеет вид 	1) 0 ☐ 2) 1 ☐ 3) 2 ☐ 4) 3 ☐

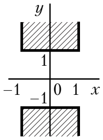
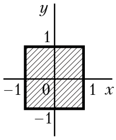
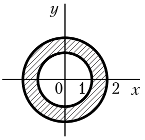
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.71. График какой функции на всем отрезке $[a, b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0$; $y' < 0$; $y'' < 0$?    	1) Все графики ☐ 2) Только I и IV ☐ 3) Только II и III ☐ 4) Только II ☐ 5) Только III ☐
10.72. График какой функции на всем отрезке $[a, b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0$; $y' > 0$; $y'' > 0$?    	1) Только I ☐ 2) Все графики ☐ 3) Только III ☐ 4) Только II ☐ 5) Только I и III ☐
10.73. График какой функции на всем отрезке $[a, b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0$; $y' < 0$; $y'' > 0$?    	1) Все графики ☐ 2) Только II ☐ 3) Только III ☐ 4) Только II и III ☐ 5) Только I и III ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.74. График какой функции на всем отрезке $[a, b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y < 0$; $y' < 0$; $y'' < 0$?  I  II  III  IV	1) Только IV ☐ 2) Только I и II ☐ 3) Только II ☐ 4) Только II и III ☐ 5) Только I ☐
10.75. График какой функции на всем отрезке $[a, b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0$; $y' < 0$; $y'' > 0$? I  II  III  IV  	1) Только I ☐ 2) Только I и II ☐ 3) Только II ☐ 4) Только III ☐ 5) Только I и IV ☐
10.76. Найти точку максимума функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 72x + 7$	1) $x = -4$ ☐ 2) $x = 3$ ☐ 3) $x = -3$ ☐ 4) $x = 4$ ☐
10.77. Найти точку минимума функции $y = x^3 - 6x^2 - 63x + 14$	1) $x = 3$ ☐ 2) $x = 7$ ☐ 3) $x = -3$ ☐ 4) $x = -7$ ☐
10.78. Найти точку минимума функции $y = 2x^3 - 24x + 3$	1) $x = -1$ ☐ 2) $x = 1$ ☐ 3) $x = -2$ ☐ 4) $x = 2$ ☐
10.79. Найти точку перегиба функции $y = x^3 - 24x^2 + 3x + 7$	1) $x = 2$ ☐ 2) $x = 6$ ☐ 3) $x = 8$ ☐ 4) $x = 12$ ☐
10.80. Найти точку максимума функции $y = 2x^3 - 27x^2 + 108x + 4$	1) $x = 1$ ☐ 2) $x = 2$ ☐ 3) $x = 3$ ☐ 4) $x = 6$ ☐
10.81. Найти точку минимума функции $y = x^2 - 8x + 5$	1) $x = -5$ ☐ 2) $x = 4$ ☐ 3) $x = 5$ ☐ 4) $x = 8$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.82. Найти точку максимума функции $y = -x^2 - 12x + 31$	1) $x = -2$ ☐ 2) $x = -3$ ☐ 3) $x = -5$ ☐ 4) $x = -6$ ☐
10.83. Точкой максимума функции $y = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$ является точка x, равная...	1) $2 + 2\sqrt{2}$ ☐ 2) $2 - 2\sqrt{2}$ ☐ 3) 2 ☐ 4) −2 ☐
10.84. Длина промежутка убывания функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 10x + 4$ равна...	1) 5 ☐ 2) 6 ☐ 3) 7 ☐ 4) 8 ☐
10.85. Длина промежутка возрастания функции $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 28x - 7$ равна...	1) 5 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
10.86. Длина промежутка убывания функции $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 22x + 3$ равна...	1) 13 ☐ 2) 11 ☐ 3) 7 ☐ 4) 3 ☐
10.87. Длина промежутка убывания функции $y = x^3 - 12x + 9$ равна...	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
10.88. Длина промежутка убывания функции $y = x^3 + 9x^2 + 24x - 15$ равна...	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 5 ☐
10.89. Наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x - 1$ на отрезке [0, 3] равно...	1) −1 ☐ 2) −4 ☐ 3) 0 ☐ 4) −5 ☐
10.90. Наибольшее значение функции $y = -x^2 + 4x + 5$ на отрезке [0, 5] равно...	1) 8 ☐ 2) 5 ☐ 3) 0 ☐ 4) 9 ☐

Глава 11. Функции нескольких переменных

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
11.1. Как называется предел отношения приращения $\Delta_x z$ функции $z = f(x, y)$ к приращению x переменной x при стремлении x к нулю?	1) Условный экстремум ☐ 2) Градиент ☐ 3) Частный дифференциал ☐ 4) Производная по направлению ☐ 5) Частная производная ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
11.2. Как называется выражение $\nabla z = (z'_x, z'_y)$?	1) Условный экстремум ☐ 2) Градиент ☐ 3) Частный дифференциал ☐ 4) Производная по направлению ☐ 5) Частная производная ☐
11.3. Что определяется выражением $z'_x\cos\alpha + z'_y\cos\beta$	1) Условный экстремум ☐ 2) Градиент ☐ 3) Частный дифференциал ☐ 4) Производная по направлению ☐ 5) Частная производная ☐
11.4. К чему относится определение: существует окрестность такая, что для всех точек $M(x, y)$, принадлежащих этой окрестности и удовлетворяющих уравнению связи $g(x, y) = C$, выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $[f(x, y) > f(x_0, y_0)]$	1) Условный экстремум ☐ 2) Градиент ☐ 3) Частный дифференциал ☐ 4) Производная по направлению ☐ 5) Частная производная ☐
11.5. Дана функция двух переменных $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$. Тогда область определения этой функции изображена на рисунке...  *а*  *б*  *в*	1) *а* ☐ 2) *б* ☐ 3) *в* ☐ 4) ни на одном из них ☐
11.6. Частная производная по y функции $z = \frac{1}{3}x^3 - xy - 3y^2 + 11x + 7y$ равна...	1) $z'_y = x^2 - y + 11$ ☐ 2) $z'_y = -xy - 6y + 18$ ☐ 3) $z'_y = x^2 - x + 7$ ☐ 4) $z'_y = -x - 6y + 7$ ☐ 5) $z'_y = -x - 3y + 11$ ☐
11.7. Частная производная по x функции $z = x^3 + 3x^2 - 5xy - 4y^2 + 15y - 8$ равна...	1) $z'_x = 3x^2 + 6x - 8$ ☐ 2) $z'_x = 3x^2 + 6x - 5y$ ☐ 3) $z'_x = 6x^2 + 6x - 13y + 15$ ☐ 4) $z'_x = x^3 + 3x^2 - 5xy$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
11.8. Частная производная по y функции $z = x^5y^2 + 2x^3y^3 - 3x^2 - 7y^2 + 5x + 19$ равна...	1) $z'_y = 10x^4y + 18x^2y^2 - 11xy$ ☐ 2) $z'_y = x^4y + 2x^2y^2 - 14y$ ☐ 3) $z'_y = 2x^5y + 6x^3y^2 - 14y$ ☐ 4) $z'_y = 2x^5y + 18x^2y^2 - 14y$ ☐ 5) $z'_y = 10x^5y + 18x^3y^3 - 11xy$ ☐
11.9. Частная производная по x функции $z = 3x^2y^3 + 2x^2y^2 - 6y^5 + 3x^2 + 25$ равна...	1) $z'_x = 9x^2y^2 + 4x^2y - 30y$ ☐ 2) $z'_x = 18xy^2 + 8xy - 18xy^4$ ☐ 3) $z'_x = 6xy^3 + 4xy^2 + 6x$ ☐ 4) $z'_x = 3x^2y^3 + 2x^2y^2 + 6x$ ☐
11.10. Частная производная по x функции $z = 5x^3 + x^2 + y^2 - 6y + 28$ равна...	1) $z'_x = 15x^2 + 2x$ ☐ 2) $z'_x = 15x^2 + 2x + 2y - 6$ ☐ 3) $z'_x = 2y - 6$ ☐ 4) $z'_x = \frac{5}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 28x$ ☐
11.11. Частная производная по y функции $z = 3\ln(x^2 + 2y^3)$ равна...	1) $z'_y = \dfrac{6x + 18y^2}{x^2 + 2y^2}$ ☐ 2) $z'_y = \dfrac{3}{2x + 6y^2}$ ☐ 3) $z'_y = \dfrac{3}{x^2 + 2y^3}$ ☐ 4) $z'_y = \dfrac{18y^2}{x^2 + 2y^3}$ ☐
11.12. Частная производная второго порядка z''_{xy} функции $z = x^2y^3$ равна...	1) $4y^3$ ☐ 2) $2xy^2$ ☐ 3) $2xy^3 + 3x^2y^2$ ☐ 4) $6xy^2$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
11.13. Смешанная производная z''_{xy} функции $z = \sin xy - 6xy^3$ равна...	1) $\cos xy - xy \sin xy - 18y^2$ ☐ 2) 0 ☐ 3) $18y^2$ ☐ 4) $-xy \sin xy - 18y^2$ ☐
11.14. Найти частную производную $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке (5, 2) функции $z = \dfrac{x^2}{y^3+2}$	1) –2 ☐ 2) –3 ☐ 3) –4 ☐ 4) –5 ☐
11.15. Найти частную производную $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ в точке (2, 2) функции $z = \dfrac{y+3}{x^3-3}$	1) –1 ☐ 2) –1,6 ☐ 3) –2 ☐ 4) –2,4 ☐
11.16. Найти частную производную $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $(\sqrt{2}, 3)$ функции $z = \dfrac{x^2+3}{y^2+1}$	1) –0,3 ☐ 2) –0,5 ☐ 3) –0,7 ☐ 4) –0,9 ☐
11.17. Найти частную производную $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ в точке (3, 2) функции $z = \dfrac{y-5}{x^2+x-2}$	1) 0,35 ☐ 2) 0,28 ☐ 3) 0,21 ☐ 4) 0,14 ☐
11.18. Найти частную производную $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ в точке (2, –3) функции $z = \dfrac{2y+1}{x^2+6}$	1) 0,05 ☐ 2) 0,1 ☐ 3) 0,15 ☐ 4) 0,2 ☐
11.19. Найти частную производную $z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ в точке (1, 1) функции $z = \dfrac{xy}{xy+1}$	1) 0,2 ☐ 2) 0,25 ☐ 3) 0,5 ☐ 4) 0,75 ☐
11.20. Найти критическую точку функции $z = x^2 + 3xy - \dfrac{7}{2}y^2 - 5x + 4y + 18$	1) $M(1, 1)$ ☐ 2) $M(1, 2)$ ☐ 3) $M(2, 1)$ ☐ 4) $M(2, 2)$ ☐
11.21. Найти критическую точку функции $z = 3x^2 - 7xy - \dfrac{1}{2}y^2 - 25x + 20y + 6$	1) $M(2, -1)$ ☐ 2) $M(3, -2)$ ☐ 3) $M(3, -1)$ ☐ 4) $M(-2, 1)$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
11.22. Найти критическую точку функции $z = 2x^2 - 2xy + 3y^2 - 18x - 16y + 7$	1) $M\ (2, 5)$ ☐ 2) $M\ (3, 7)$ ☐ 3) $M\ (3, 5)$ ☐ 4) $M\ (7, 5)$ ☐
11.23. Найти критическую точку функции $z = 9x^2 + xy + y^2 - 25x - 15y + 14$	1) $M\ (1, 7)$ ☐ 2) $M\ (3, 1)$ ☐ 3) $M\ (3, -1)$ ☐ 4) $M\ (7, -3)$ ☐
11.24. Найти критическую точку функции $z = 5x^2 + 2xy - 2y^2 - 10x - 24y + 1$	1) $M\ (2, -5)$ ☐ 2) $M\ (2, 5)$ ☐ 3) $M\ (5, 3)$ ☐ 4) $M\ (-5, -3)$ ☐
11.25. Точкой экстремума функции $z = 3x^2 + 4y^2 - 48x + 16y + 12$ является точка...	1) $M\ (2, -6)$ ☐ 2) $M\ (8, -2)$ ☐ 3) $M\ (-2, 6)$ ☐ 4) $M\ (6, -8)$ ☐
11.26. Точкой экстремума функции $z = 9x^2 + y^2 + 18x - 4y + 7$ является точка...	1) $M\ (2, -4)$ ☐ 2) $M\ (1, -2)$ ☐ 3) $M\ (-2, 4)$ ☐ 4) $M\ (-1, 2)$ ☐
11.27. Если $U = \ln(3x - y^2 + z^3)$, то значение U'_z в точке $M(1, 0, 1)$ равно...	1) 0,5 ☐ 2) 0,25 ☐ 3) 0,75 ☐ 4) 1 ☐ 5) 2 ☐
11.28. Если $U = e^{(2x - 3y + z^2)}$, то значение U'_y в точке $M(1, 1, 1)$ равно...	1) 0 ☐ 2) $-3e^{-3}$ ☐ 3) 1 ☐ 4) $-e^6$ ☐ 5) -3 ☐
11.29. Если $U = \ln(x^2 - y + 6z)$, то значение U'_z в точке $M(1, 3, 1)$ равно...	1) 2/3 ☐ 2) 3/2 ☐ 3) $-1/3$ ☐ 4) 0 ☐ 5) -2 ☐
11.30. Если $U = \sin(x + y^2 - 2z)$, то значение U'_z в точке $M(0, 0, \pi)$ равно...	1) -2 ☐ 2) 2 ☐ 3) 0 ☐ 4) -1 ☐ 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐
11.31. Если $U = \cos(2x^2 + y + z^3)$, то значение U'_y в точке $M(0, \frac{\pi}{4}, 0)$ равно...	1) 1 ☐ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ 3) 0 ☐ 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
11.32. Функция $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - C)$ является функцией...	1) Лежандра ☐ 2) Лагранжа ☐ 3) Лобачевского ☐ 4) Коши ☐ 5) Лопиталя ☐
11.33. Максимум функции $z = xy$ при условии $x + y = 3$ равен...	1) 5 ☐ 2) 0,75 ☐ 3) 4,5 ☐ 4) 2,25 ☐
11.34. Максимум функции $z = xy$ при условии $x + y = 6$ равен...	1) 18 ☐ 2) 1,5 ☐ 3) 9 ☐ 4) 19,5 ☐

Глава 12. Неопределенный и определенный интегралы

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.1. Неопределенный интеграл — это...	1) числовой интервал ☐ 2) уравнение ☐ 3) совокупность функций ☐ 4) число ☐ 5) функция ☐
12.2. Как называется функция $F(x)$ по отношению к функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$?	1) Оригинальная ☐ 2) Первообразная ☐ 3) Характеристическая ☐ 4) Исходная ☐ 5) Производная ☐
12.3. $[\int f(x)dx]' = \ldots$	1) $f(x)dx$ ☐ 2) $df(x)$ ☐ 3) $f(x) + C$ ☐ 4) $f(x)$ ☐
12.4. Множество первообразных функции $f(x) = e^{-5x}$ имеет вид...	1) $\frac{1}{5}e^{-5x} + C$ ☐ 2) $e^{-5x} + C$ ☐ 3) $-\frac{1}{5}e^{-5x} + C$ ☐ 4) $-5e^{-5x} + C$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.5. Множество первообразных функции $f(x) = e^{3x}$ имеет вид...	1) $-\frac{1}{3}e^{3x} + C$ ☐ 2) $\frac{1}{3}e^{3x} + C$ ☐ 3) $e^{3x} + C$ ☐ 4) $3e^{3x} + C$ ☐
12.6. Множество первообразных функции $f(x) = e^{2x}$ имеет вид...	1) $-\frac{1}{2}e^{2x} + C$ ☐ 2) $e^{2x} + C$ ☐ 2) $\frac{1}{2}e^{2x} + C$ ☐ 4) $2e^{2x} + C$ ☐
12.7. Какие из этих функций являются первообразными функции $y = e^{7+5x}$: а) e^{7-5x}; б) $5e^{7+5x}$?	1) только а) ☐ 2) только б) ☐ 3) и а), и б) ☐ 4) ни а), ни б) ☐
12.8. Какие из этих функций являются первообразными функции $y = e^{7+5x}$: а) $\frac{1}{5}e^{7-5x} + 31$; б) $\frac{1}{5}e^{7+5x}$?	1) только а) ☐ 2) только б) ☐ 3) и а), и б) ☐ 4) ни а), ни б) ☐
12.9. Какие из этих функций являются первообразными функции $y = e^{7x+15}$: а) e^{7x+15}; б) $\frac{1}{7}e^{7x+15} + 11$?	1) только а) ☐ 2) только б) ☐ 3) и а), и б) ☐ 4) ни а), ни б) ☐
12.10. Какие из этих функций являются первообразными функции $y = e^{7x+15}$: а) $\frac{1}{7}e^{7x+15}$; б) $7e^{7x+15}$?	1) только а) ☐ 2) только б) ☐ 3) и а), и б) ☐ 4) ни а), ни б) ☐
12.11. Первообразными функциями $y = 15\sin 6x$ являются... а) $-2{,}5\cos 6x + 39$; б) $90\cos 6x$; в) $-15\cos 6x - 25$; г) $-2{,}5\cos 6x$	1) а) и в) ☐ 2) а) и г) ☐ 3) только б) ☐ 4) ни одна ☐
12.12. Чему равен неопределенный интеграл $\int x^6 dx$?	1) $\frac{x^7}{7} + C$ ☐ 2) $x^7 + C$ ☐ 3) $6x^5 + C$ ☐ 4) $\frac{x^6}{6} + C$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.13. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$?	1) $-\mathrm{tg}\, x + C$ ☐ 2) $-\mathrm{ctg}\, x + C$ ☐ 3) $\mathrm{tg}\, x + C$ ☐ 4) $\mathrm{ctg}\, x + C$ ☐
12.14. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$?	1) $\mathrm{ctg}\, x + C$ ☐ 2) $-\mathrm{tg}\, x + C$ ☐ 3) $-\mathrm{ctg}\, x + C$ ☐ 4) $\mathrm{tg}\, x + C$ ☐
12.15. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{1 + x^2}$?	1) $\ln\,(1+x^2) + C$ ☐ 2) $\mathrm{arcctg}\, x + C$ ☐ 3) $\mathrm{arctg}\, x + C$ ☐ 4) $\ln x + C$ ☐
12.16. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 25}}$?	1) $\ln\lvert 5+\sqrt{x^2+25}\,\rvert + C$ ☐ 2) $0{,}2\mathrm{arctg}(0{,}2x) + C$ ☐ 3) $\arcsin(0{,}2x) + C$ ☐ 4) $\ln\lvert x+\sqrt{x^2+25}\,\rvert + C$ ☐
12.17. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - x^2}}$?	1) $\ln\lvert x+\sqrt{x^2+25}\,\rvert + C$ ☐ 2) $\arcsin(0{,}2x) + C$ ☐ 3) $\ln\lvert 5+\sqrt{x^2+25}\,\rvert + C$ ☐ 4) $0{,}2\mathrm{arctg}(0{,}2x) + C$ ☐
12.18. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 25}$?	1) $\ln\lvert x+\sqrt{x^2+25}\,\rvert + C$ ☐ 2) $\ln\lvert 5+\sqrt{x^2+25}\,\rvert + C$ ☐ 3) $0{,}2\mathrm{arctg}(0{,}2x) + C$ ☐ 4) $\arcsin(0{,}2x) + C$ ☐
12.19. Установить соответствие между интегралом и его значением: А) $\int \frac{dx}{x}$; Б) $\int \sin x\, dx$; В) $\int \frac{dx}{1 + x^2}$; Г) $\int x^4 dx$. а) $-\cos x + C$; б) $\ln\lvert x\rvert + C$; в) $\cos x + C$; г) $\mathrm{arctg}\, x + C$; д) $\frac{x^5}{5} + C$	1) А—б; Б—в; В—г; Г—д ☐ 2) А—б; Б—а; В—г; Г—д ☐ 3) А—г; Б—а; В—в; Г—д ☐ 4) А—г; Б—в; В—а; Г—д ☐ 5) А—а; Б—б; В—в; Г—г ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.20. Установить соответствие между интегралом и его значением: А) $\int\frac{dx}{x}$; Б) $\int\sin x\,dx$; В) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; Г) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}$. а) $\ln\lvert x\rvert+C$; б) $-\cos x+C$; в) $\operatorname{tg}x+C$; г) $\arcsin x+C$; д) $\operatorname{arctg}x+C$	1) А—а; Б—в; В—г; Г—д ☐ 2) А—б; Б—а; В—г; Г—д ☐ 3) А—а; Б—б; В—д; Г—в ☐ 4) А—г; Б—в; В—а; Г—д ☐ 5) А—а; Б—б; В—г; Г—в ☐
12.21. Установить соответствие между интегралом и его значением: А) $\int\operatorname{tg}2x\,dx$; Б) $\int 2^{2x}dx$; В) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$. а) $\arcsin 2x+C$; б) $\ln\lvert\cos 2x\rvert+C$; в) $-\frac{1}{2}\ln\lvert\cos 2x\rvert+C$; г) $\frac{2^{2x}}{\ln 4}+C$; д) $\frac{1}{2}\arcsin 2x+C$	1) А—а; Б—в; В—г ☐ 2) А—б; Б—г; В—а ☐ 3) А—в; Б—г; В—д ☐ 4) А—в; Б—г; В—а ☐ 5) А—б; Б—г; В—д ☐
12.22. Установить соответствие между интегралом и его значением: А) $\int\frac{dx}{(2x)^2-4}$; Б) $\int 2^{x^4}x^3dx$; В) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$. а) $\frac{2^{x^4}}{4\ln 2}+C$; б) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}3x+C$; в) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}3x+C$; г) $\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert+C$; д) $\frac{1}{8}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert+C$	1) А—а; Б—в; В—г ☐ 2) А—д; Б—а; В—б ☐ 3) А—в; Б—г; В—д ☐ 4) А—д; Б—а; В—в ☐ 5) А—б; Б—г; В—д ☐
12.23. Чему равна величина d в равенстве $\int\sqrt[10]{x^9}\,dx=\frac{x^d}{d}+C$?	1) 0,45 ☐ 2) 1,1 ☐ 3) 1,9 ☐ 4) 2,45 ☐
12.24. Чему равна величина b в равенстве $\int\frac{dx}{x^2-b^2}=\ln\left\lvert\frac{x-0{,}5}{x+0{,}5}\right\rvert+C$?	1) 0,5 ☐ 2) 0,75 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) 1 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.25. Чему равна величина b в равенстве $\int \frac{dx}{4x^2-b} = 0{,}25\ln\left\|\frac{x-0{,}5}{x+0{,}5}\right\| + C$?	1) 4 ☐ 2) 0,25 ☐ 3) 2,25 ☐ 4) 1 ☐
12.26. Чему равна величина b в равенстве $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{1}{b}x^b + C$?	1) 0,2 ☐ 2) 0,4 ☐ 3) 1,4 ☐ 4) 1,6 ☐
12.27. Чему равна величина b в равенстве $\int \frac{dx}{\sqrt[10]{x^7}} = \frac{1}{b}x^b + C$?	1) 0,3 ☐ 2) 0,7 ☐ 3) 1,3 ☐ 4) 1,7 ☐
12.28. Чему равна величина b в равенстве $\int \frac{dx}{25x^2+1} = \frac{1}{b}\operatorname{arctg} 5x + C$?	1) 1 ☐ 2) 5 ☐ 3) 25 ☐ 4) 125 ☐
12.29. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$?	1) $2\operatorname{tg} 2x + C$ ☐ 2) $\frac{0{,}25}{\sin^2 2x} + C$ ☐ 3) $\operatorname{tg} 2x + C$ ☐ 4) $0{,}5\operatorname{tg} 2x + C$ ☐
12.30. Интеграл $\int \sin(5x+3)dx$ равен...	1) $-\cos(5x+3) + C$ ☐ 2) $-\cos\left(\frac{5x^2}{2} + 3x\right) + C$ ☐ 3) $-\frac{1}{5}\cos(5x+3) + C$ ☐ 4) $-\frac{1}{5}\cos\left(\frac{5x^2}{2} + 3x\right) + C$ ☐
12.31. Интеграл $\int\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)dx$ равен...	1) $2x - \ln^2\|x\| + C$ ☐ 2) $x^2 + \frac{1}{x} + C$ ☐ 3) $x^2 - \ln\frac{1}{x} + C$ ☐ 4) $x^2 + \ln\left\|\frac{1}{x}\right\| + C$ ☐
12.32. Интеграл $\int 7e^{7x}dx$ равен...	1) $7e^{7x} + C$ ☐ 2) $\frac{1}{7}e^{7x} + C$ ☐ 3) $e^{7x} + C$ ☐ 4) $7e^{x} + C$ ☐

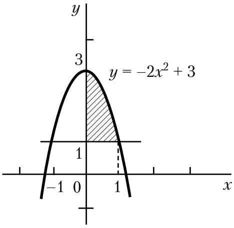
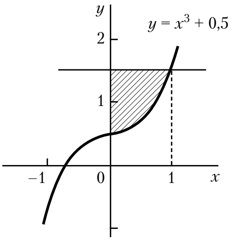
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.33. Интеграл $\int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^5}$ равен...	1) $\frac{4}{(e^x+1)^4} + C$ ☐ 2) $\frac{6}{(e^x+1)^6} + C$ ☐ 3) $\frac{-1}{6(e^x+1)^6} + C$ ☐ 4) $-\ln\lvert e^x+1\rvert + C$ ☐ 5) $\frac{-1}{4(e^x+1)^4} + C$ ☐
12.34. Интеграл $\int \frac{x^2 dx}{x^6+1}$ равен...	1) $(\operatorname{arctg} x)^3 + C$ ☐ 2) $\frac{1}{3}\left\lvert\frac{x^3-1}{x^3+1}\right\rvert + C$ ☐ 3) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + C$ ☐ 4) $\frac{1}{3}\ln\lvert x^3+1\rvert + C$ ☐ 5) $\operatorname{arctg} x^3 + C$ ☐
12.35. Интеграл $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x+1}$ равен...	1) $-\operatorname{arctg}(\cos x) + C$ ☐ 2) $\operatorname{arctg}(\cos x) + C$ ☐ 3) $\frac{1}{\cos^2 x+1} + C$ ☐ 4) $\ln\lvert\cos^2 x+1\rvert + C$ ☐ 5) $(\cos^2 x+1) + C$ ☐
12.36. Интеграл $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^{10}}}$ равен...	1) $\frac{1}{5}\arcsin(x^5) + C$ ☐ 2) $(\arcsin x)^5 + C$ ☐ 3) $\frac{1}{5}\ln\lvert x^5+\sqrt{x^{10}-1}\rvert+C$ ☐ 4) $\arcsin(x^5) + C$ ☐ 5) $\frac{1}{5}(\arcsin x)^5 + C$ ☐
12.37. Интеграл $\int \frac{x^3 dx}{x^4-1}$ равен...	1) $\ln\lvert x^4-1\rvert + C$ ☐ 2) $\frac{3}{4}\ln\lvert x^4-1\rvert + C$ ☐ 3) $3\ln\lvert x^4-1\rvert + C$ ☐ 4) $-\frac{1}{(x^4-1)^3} + C$ ☐ 5) $\frac{1}{4}\ln\lvert x^4-1\rvert + C$ ☐

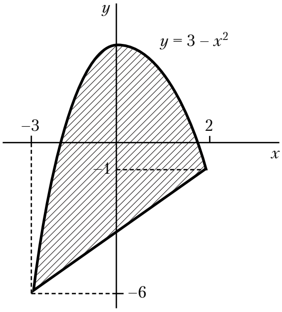
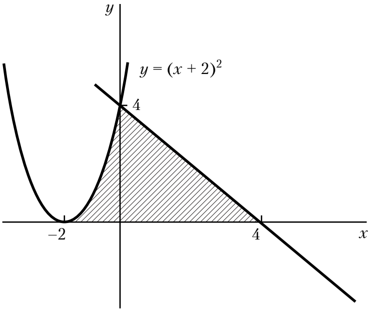
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.38. Найдите интеграл $\int x^2 3^{x^3} dx$	1) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$ ☐ 2) $\frac{1}{20}\ln\left\|\frac{2x+5}{2x-5}\right\| + C$ ☐ 3) $-\frac{1}{20}\ln\left\|\frac{2x+5}{2x-5}\right\| + C$ ☐ 4) $\frac{3^{x^3}}{3} + C$ ☐ 5) $\frac{3^{x^3}}{3\ln 3} + C$ ☐
12.39. Найдите интеграл $\int \cos 2x\, dx$	1) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$ ☐ 2) $\frac{1}{20}\ln\left\|\frac{2x+5}{2x-5}\right\| + C$ ☐ 3) $-\frac{1}{20}\ln\left\|\frac{2x+5}{2x-5}\right\| + C$ ☐ 4) $\frac{3^{x^3}}{3} + C$ ☐ 5) $\frac{3^{x^3}}{3\ln 3} + C$ ☐
12.40. Правильную рациональную дробь $\frac{x+1}{(x+3)x^2}$ можно представить в виде суммы простейших дробей...	1) $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x+3}$ ☐ 2) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$ ☐ 3) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3}$ ☐ 4) $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(x+3)}$ ☐
12.41. Правильную рациональную дробь $\frac{2x+1}{(x+1)^2(x^2+4x+4)^2}$ можно представить в виде суммы простейших дробей...	1) $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2} +$ $+ \frac{D}{x^2+4x+5} +$ $+ \frac{Ex+F}{(x^2+4x+5)^2}$ ☐ 2) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} +$ $+ \frac{Cx+D}{x^2+4x+5} +$ $+ \frac{Ex+F}{(x^2+4x+5)^2}$ ☐

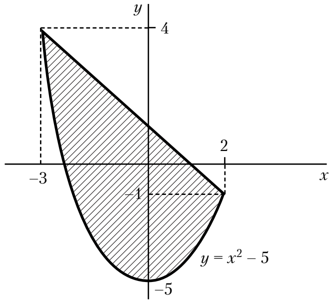
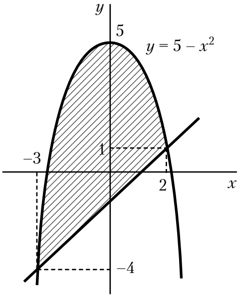
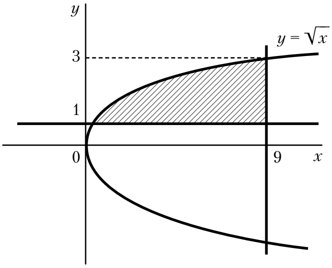
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
	3) $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x^2+4x+5}+\frac{D}{(x^2+4x+5)^2}$ ☐ 4) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{5}{x^2+4x+5}+\frac{2}{(x^2+4x+5)^2}$ ☐
12.42. Установите соответствие между неопределенными интегралами и разложениями подынтегральных функций на элементарные дроби: А) $\int\frac{9x-15}{x(x-12)}dx$; Б) $\int\frac{3x^2+1}{x^2(x^2-x+2)}dx$; В) $\int\frac{x^3+4}{x^3(x-10)}dx$; Г) $\int\frac{1}{x(x^2+19)}dx$. а) $\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+19}$; б) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-12}$; в) $\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{x-10}$; г) $\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2-x+2}$; д) $\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x^2-x+2}$	1) А—б; Б—д; В—в; Г—а ☐ 2) А—б; Б—г; В—в; Г—а ☐ 3) А—б; Б—а; В—в; Г—д ☐ 4) А—г; Б—в; В—а; Г—д ☐ 5) А—а; Б—б; В—в; Г—г ☐
12.43. В неопределенном интеграле $\int\frac{x}{\sqrt{x}-1}dx$ введена новая переменная $t=\sqrt{x}$. Тогда интеграл примет вид...	1) $2\int\frac{t^3}{t-1}dt$ ☐ 2) $\int\frac{t^3}{2(t-1)}dt$ ☐ 3) $\int\frac{t^2}{t^2-1}dt$ ☐ 4) $2\int(t^2-1)dt$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.44. Определенный интеграл — это...	1) числовой интервал ☐ 2) уравнение ☐ 3) совокупность функций ☐ 4) число ☐ 5) функция ☐
12.45. Формула $\int\limits_b^a f(x)dx = F(x)\Big\|_a^b = F(b) - F(a)$ называется формулой...	1) Коши—Буняковского ☐ 2) Ньютона—Лейбница ☐ 3) Фробениуса—Перрона ☐ 4) Больцано—Коши ☐ 5) Бойля—Мариотта ☐
12.46. Если $f(x)$ определена в точке a, то чему равен $\int\limits_b^a f(x)dx$?	1) $F(a)$ ☐ 2) a ☐ 3) a^2 ☐ 4) 1 ☐ 5) 0 ☐
12.47. Согласно теореме о среднем если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется точка c $[a, b]$ такая, что $\int\limits_b^a f(x)dx = ...$	1) $f(c)(b - a)$ ☐ 2) $abf(c)$ ☐ 3) $(a - c)(b - c)$ ☐ 4) $F(c)$ ☐ 5) $f(c)$ ☐
12.48. Ненулевая функция $y = f(x)$ является нечетной на отрезке $[-8, 8]$. Тогда $\int\limits_8^8 f(x)dx$ равен...	1) $\frac{1}{16}\int\limits_0^1 f(x)dx$ ☐ 2) $2\int\limits_0^8 f(x)dx$ ☐ 3) $16\int\limits_0^1 f(x)dx$ ☐ 4) 0 ☐
12.49. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx$	1) 4,125 ☐ 2) 3,625 ☐ 3) 3,375 ☐ 4) 3,125 ☐
12.50. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$	1) 0,4 ☐ 2) 0,5 ☐ 3) 0,75 ☐ 4) 1 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.51. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 x^4 dx$	1) 5,5 ☐ 2) 5,8 ☐ 3) 6 ☐ 4) 6,2 ☐
12.52. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_3^4 (x-1)dx$	1) 2,5 ☐ 2) 3,5 ☐ 3) 4,5 ☐ 4) 5,5 ☐
12.53. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_2^4 (x^2-2x)dx$	1) 3 ☐ 2) 10/3 ☐ 3) 20/3 ☐ 4) 6 ☐
12.54. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-1}^2 (x^2+3)dx$	1) 6 ☐ 2) 8 ☐ 3) 10 ☐ 4) 12 ☐
12.55. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0,5}^1 \left(x+\frac{1}{x^5}\right)dx$	1) 4,125 ☐ 2) 4,25 ☐ 3) 4,375 ☐ 4) 5,125 ☐
12.56. Определенный интеграл $\int\limits_1^5 (3x^2+2)dx$ равен...	1) 118 ☐ 2) 123 ☐ 3) 132 ☐ 4) 138 ☐
12.57. Определенный интеграл $\int\limits_1^7 (6x^2+1)dx$ равен...	1) 663 ☐ 2) 690 ☐ 3) 696 ☐ 4) 716 ☐
12.58. Определенный интеграл $\int\limits_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t}$ равен...	1) $3+\ln 3$ ☐ 2) $\ln 3$ ☐ 3) $\ln 4$ ☐ 4) $\ln 5$ ☐ 5) $-1+\ln 6$ ☐
12.59. Определенный интеграл $\int\limits_1^{\pi/2} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ равен...	1) $1+\ln 2$ ☐ 2) $\ln 4$ ☐ 3) $1+\ln 5$ ☐ 4) $\ln 2$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.60. Значение интеграла $\int\limits_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ равно...	1) 0 ☐ 2) 2 ☐ 3) 1 ☐ 4) 6 ☐
12.61. Определенный интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/6} \sin 6x\,dx$ равен...	1) 0 ☐ 2) −12 ☐ 3) $\frac{1}{3}$ ☐ 4) $-\frac{1}{3}$ ☐
12.62. Определенный интеграл $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^3 x}{x}$ равен...	1) 1 ☐ 2) $\frac{1}{3}$ ☐ 3) $\frac{1}{4}$ ☐ 4) $\frac{4}{3}$ ☐
12.63. Определенный интеграл $\int\limits_{0}^{1} xe^x dx$ равен...	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) $\frac{3}{2}$ ☐
12.64. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, определяется интегралом...  	1) $\int\limits_{-1}^{0} (-2x^2+3)dx$ ☐ 2) $\int\limits_{0}^{1} (2-2x^2)dx$ ☐ 3) $\int\limits_{0}^{1} (2x^2-2)dx$ ☐ 4) $\int\limits_{0}^{3} (3-2x^2)dx$ ☐
12.65. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, определяется интегралом...  	1) $\int\limits_{0}^{1} (1-x^3)dx$ ☐ 2) $\int\limits_{0}^{1,5} (1{,}5-x^3)dx$ ☐ 3) $\int\limits_{0}^{1} (x^3-1)dx$ ☐ 4) $\int\limits_{0}^{1} (x^3+0{,}5)dx$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.66. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 3x^2$, $x = 1$, вычисляется с помощью определенного интеграла...	1) $\int_0^1 x^2 dx$ ☐ 2) $\int_0^1 (3x^3 - x^2)dx$ ☐ 3) $\int_0^1 (x^2 - 3x^2)dx$ ☐ 4) $\int_0^1 3x^2 dx$ ☐
12.67. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом...  	1) $\int_{-3}^{2}[(x-3)-(3-x^2)]dx$ ☐ 2) $\int_{-3}^{2}[(3-x^2)-(x-3)]dx$ ☐ 3) $2\int_{-3}^{0}[(3-x^2)-(x-3)]dx$ ☐ 4) $2\int_{-3}^{0}(3-x^2)dx$ ☐ 5) $2\int_{-3}^{0}(3 - x^2 - x)dx$ ☐
12.68. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом...  	1) $-\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx+\int_{0}^{4}(4-x)dx$ ☐ 2) $\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx-\int_{0}^{4}(4-x)dx$ ☐ 3) $\int_{-2}^{4}(x + 2)^2dx$ ☐ 4) $\int_{-2}^{4}(4 - x)dx$ ☐ 5) $\int_{-2}^{0}(x+2)^2dx+\int_{0}^{4}(4-x)dx$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.69. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом...  	1) $\int_{-3}^{2}[(x^2-5)-(x+1)]dx$ ☐ 2) $\int_{-3}^{2}[(1-x)-(x^2-5)]dx$ ☐ 3) $2\int_{-3}^{0}[(1-x)-(x^2-5)]dx$ ☐ 4) $2\int_{0}^{2}[(x^2-5)-(1-x)]dx$ ☐ 5) $\int_{-3}^{2}[(1-x)+(x^2-5)]dx$ ☐
12.70. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом...  	1) $2\int_{0}^{2}(6 - x^2 - x)dx$ ☐ 2) $\int_{0}^{2}(5 - x^2)dx$ ☐ 3) $\int_{-3}^{2}[(5-x^2)-(x+1)]dx$ ☐ 4) $\int_{-3}^{2}(6 - x^2 - x)dx$ ☐ 5) $\int_{-3}^{2}(5 - x^2)dx$ ☐
12.71. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом...  	1) $\int_{1}^{9}(1 - x^2)dx$ ☐ 2) $\int_{1}^{9}(\sqrt{x} - 1)dx$ ☐ 3) $\int_{1}^{9}(x^2 - 1)dx$ ☐ 4) $\int_{0}^{9}(\sqrt{x} - 1)dx$ ☐ 5) $\int_{0}^{9}(1 - \sqrt{x})dx$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.72. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 2$, осью x, осью y и прямой $x = 1$	1) 7/3 ☐ 2) 2/3 ☐ 3) 1/3 ☐ 4) 4/3 ☐
12.73. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = (x - 3)^2$, осью x и осью y	1) 8/3 ☐ 2) 6 ☐ 3) 9 ☐ 4) 10 ☐ 5) 12 ☐
12.74. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^{\frac{7}{3}}$, осью y и прямой $y = 1$	1) 0,6 ☐ 2) 0,7 ☐ 3) 0,8 ☐ 4) 0,9 ☐ 5) 1,0 ☐
12.75. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \cos x$, осью x и прямыми $x = \pi/6$ и $x = \pi/2$	1) 0,2 ☐ 2) 0,25 ☐ 3) 0,4 ☐ 4) 0,5 ☐ 5) 0,75 ☐
12.76. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^9$, осью x и прямой $x = 1$	1) 0,05 ☐ 2) 0,1 ☐ 3) 0,15 ☐ 4) 0,2 ☐ 5) 0,25 ☐
12.77. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin 2x$, осью x и прямыми $x = \pi/6$ и $x = \pi/2$	1) 1 ☐ 2) 0,75 ☐ 3) 0,5 ☐ 4) 0,25 ☐ 5) 0,2 ☐
12.78. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{x}$, осью x и прямыми $x = e$ и $x = e^5$	1) 4 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
12.79. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 2x$, осью x и прямой $x = 3$	1) 12 ☐ 2) 14 ☐ 3) 15 ☐ 4) 18 ☐
12.80. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \cos 2x$, осью x, осью y и прямой $x = \pi/12$	1) $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ 2) 0,5 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.81. Если $\int\limits_0^1 3f(x)dx = 3$ и $\int\limits_0^4 f(x)dx = 5$, то $\int\limits_0^4 3f(x)dx$ равен...	1) 8 ☐ 2) 2 ☐ 3) 12 ☐ 4) 18 ☐
12.82. Если $\int\limits_0^1 3f(x)dx = 3$ и $\int\limits_1^3 f(x)dx = -5$, то $\int\limits_0^3 3f(x)dx$ равен...	1) –2 ☐ 2) –24 ☐ 3) –8 ☐ 4) –6 ☐
12.83. В определенном интеграле $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{3+\sqrt{x}}$ введена новая переменная $t = \sqrt{x}$. Тогда интеграл примет вид...	1) $\int\limits_0^{16} \frac{t^2dt}{3+t}$ ☐ 2) $\int\limits_0^4 \frac{dt}{3+t}$ ☐ 3) $\int\limits_0^8 \frac{dt}{3+t}$ ☐ 4) $\int\limits_0^4 \frac{2t\,dt}{3+t}$ ☐
12.84. Сходящимися являются несобственные интегралы: а) $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\frac{8}{3}}dx$; б) $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{5}}dx$; в) $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\frac{5}{3}}dx$; г) $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{8}}dx$	1) а) и в) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) а) и г) ☐ 4) б) и в) ☐ 5) Только а) ☐
12.85. Сходящимися являются несобственные интегралы: а) $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\frac{6}{5}}dx$; б) $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\frac{5}{6}}dx$; в) $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\frac{4}{5}}dx$; г) $\int\limits_1^{+\infty} x^{-\frac{5}{4}}dx$	1) а) и в) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) а) и г) ☐ 4) б) и в) ☐ 5) Только а) ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.86. Сходящимися являются несобственные интегралы: а) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{6}}dx$; б) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{3}}dx$; в) $\int_1^{+\infty} x^{-6}dx$; г) $\int_1^{+\infty} x^{-3}dx$	1) а) и в) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) а) и б) ☐ 4) в) и г) ☐ 5) Только а) ☐
12.87. Несобственный интеграл $\int_4^{+\infty}(x-3)^{-2}dx$ равен...	1) 1/3 ☐ 2) −1 ☐ 3) 1 ☐ 4) 1/4 ☐
12.88. Несобственный интеграл $\int_4^{+\infty}(x+1)^{-4}dx$ равен...	1) 1/3 ☐ 2) −1 ☐ 3) 1 ☐ 4) 1/4 ☐
12.89. Несобственный интеграл $\int_4^{+\infty}\frac{6}{x^2}dx$ равен...	1) 0 ☐ 2) 1 ☐ 3) 2 ☐ 4) ∞ (расходится) ☐
12.90. Пусть $S=\int_1^4 dx\int_{-8}^{-5} f(x,y)dy$. Тогда область интегрирования D данного интеграла имеет вид...	1) квадрата ☐ 2) треугольника ☐ 3) окружности с радиусом $\sqrt{3}$ ☐ 4) прямоугольника ☐
12.91. Пусть $S=\int_{-5}^{-4} dy\int_0^1 f(x,y)dx$. Тогда область интегрирования D данного интеграла имеет вид...	1) квадрата ☐ 2) треугольника ☐ 3) окружности с радиусом 1 ☐ 4) прямоугольника ☐

Глава 13. Числовые и степенные ряды

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
13.1. Необходимое условие сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ записывается в виде...	1) $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ ☐ 2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ☐ 3) $\lim_{n\to\infty} a_n < 0$ ☐ 4) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ☐
13.2. Для исследования сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{3^n(n+1)!}$ следует применить...	1) признак Даламбера ☐ 2) признак Лейбница ☐ 3) признак Коши ☐ 4) предельный признак сравнения ☐
13.3. Для исследования сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n}{n^5+2n^2}$ следует применить...	1) признак Даламбера ☐ 2) признак Лейбница ☐ 3) признак Коши ☐ 4) предельный признак сравнения ☐
13.4. Для исследования сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-8}{n^2+2n}$ следует применить...	1) предельный признак сравнения ☐ 2) признак Даламбера ☐ 3) признак Лейбница ☐ 4) необходимое условие ☐
13.5. Для исследования сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3-3n}{n^4+5n^2}$ следует применить...	1) предельный признак сравнения ☐ 2) признак Даламбера ☐ 3) признак Лейбница ☐ 4) признак Коши ☐
13.6. Необходимое условие сходимости не выполнено для рядов... а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^5+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n+3}\right)$	1) а), б) и г) ☐ 2) а) и б) ☐ 3) б) и г) ☐ 4) только б) ☐ 5) только г) ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
13.7. Необходимое условие сходимости не выполнено для рядов... а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{1}{n+3}+2\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^3+4}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$	1) а), б) и г) ☐ 2) а) и б) ☐ 3) а) и г) ☐ 4) только а) ☐ 5) только г) ☐
13.8. Какой ряд сходится: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{1000n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n}{n^3+1}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐
13.9. Какой ряд сходится: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n^2+1}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐
13.10. Какой ряд сходится: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+1)(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐
13.11. Какой ряд сходится: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{3^n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+5}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐
13.12. Из рядов а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{7n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{2n^3-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ сходятся...	1) только в) ☐ 2) только а) и б) ☐ 3) ни один не сходится ☐ 4) только б) ☐ 5) только б) и в) ☐
13.13. Из рядов а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n\sqrt{n}}$ сходятся...	1) только б) ☐ 2) только в) ☐ 3) только б) и в) ☐ 4) ни один не сходится ☐ 5) только а) и в) ☐
13.14. Из рядов а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ сходятся...	1) только а) и б) ☐ 2) сходятся все ☐ 3) только б) ☐ 4) только б) и в) ☐ 5) только а) ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
13.15. Из рядов а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{15n^2-n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$ сходятся...	1) только а) ☐ 2) только в) ☐ 3) только б) и в) ☐ 4) ни один не сходится ☐ 5) только б) ☐
13.16. Из рядов а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1/2}+1}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ сходятся...	1) ни один не сходится ☐ 2) только а) и в) ☐ 3) только а) и б) ☐ 4) Только а) ☐ 5) Только б) ☐
13.17. Указать сходящиеся числовые ряды: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$	1) а), б) и в) ☐ 2) а) и в) ☐ 3) а) и г) ☐ 4) Только а) ☐ 5) Только в) ☐
13.18. Указать сходящиеся числовые ряды: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[9]{n^5}}$	1) а), б) и в) ☐ 2) а) и г) ☐ 3) а) и в) ☐ 4) Только а) ☐ 5) Только в) ☐
13.19. Сходящимися среди числовых рядов являются... а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}$	1) а), б) и в) ☐ 2) а) и г) ☐ 3) а) и в) ☐ 4) только а) ☐ 5) только в) ☐
13.20. Знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n-1}$	1) абсолютно сходится ☐ 2) условно сходится ☐ 3) расходится ☐
13.21. Знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$	1) абсолютно сходится ☐ 2) условно сходится ☐ 3) расходится ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
13.22. Знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 5^n$	1) абсолютно сходится ☐ 2) условно сходится ☐ 3) расходится ☐
13.23. Установить соответствие между видами сходимости и знакопеременными рядами: А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$; Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+7}$; В) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n$. а) абсолютно сходится; б) условно сходится; в) расходится	1) А—а; Б—б; В—в ☐ 2) А—б; Б—а; В—в ☐ 3) А—в; Б—б; В—а ☐ 4) А—а; Б—в; В—б ☐ 5) А—б; Б—в; В—а ☐
13.24. Установить соответствие между видами сходимости и знакопеременными рядами: А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 7^n$; Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}$; В) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}$. а) абсолютно сходится; б) условно сходится; в) расходится	1) А—а; Б—б; В—в ☐ 2) А—б; Б—а; В—в ☐ 3) А—в; Б—а; В—б ☐ 4) А—а; Б—в; В—б ☐ 5) А—в; Б—б; В—а ☐
13.25. Степенным рядом называется ряд вида...	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ ☐ 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(x-x_0)}$ ☐ 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)$ ☐ 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(x-x_0)^n}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
13.26. Ряд Тэйлора функции $f(x)$ имеет вид...	1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x-x_0)^n$ ☐ 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ ☐ 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n}(x-x_0)^n$ ☐ 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{f^{(n)}(x_0)}(x-x_0)^n$ ☐
13.27. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+4)x^n}{3^n(n+7)}$	1) 1/3 ☐ 2) 3 ☐ 3) 6 ☐ 4) 9 ☐
13.28. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{7n+2}$	1) 1/7 ☐ 2) 1 ☐ 3) 7 ☐ 4) 9 ☐
13.29. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5n+11}$	1) 1 ☐ 2) 1/5 ☐ 3) 1/16 ☐ 4) 5 ☐
13.30. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{8^n(n+1)}$	1) 8 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0,125 ☐ 4) 0,25 ☐
13.31. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}$ равен...	1) ∞ ☐ 2) 16 ☐ 3) 4 ☐ 4) 1 ☐
13.32. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6n^3+5}$ равен...	1) 1 ☐ 2) 16 ☐ 3) ∞ ☐ 4) 1/6 ☐
13.33. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ равен...	1) 1 ☐ 2) 1/3 ☐ 3) ∞ ☐ 4) 3 ☐
13.34. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{7}{3n^4+2n}x^n$ равен...	1) ∞ ☐ 2) 1 ☐ 3) 7 ☐ 4) 1/3 ☐

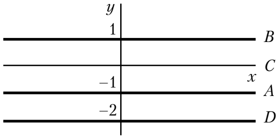
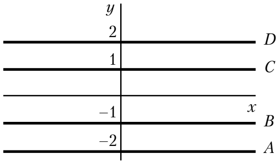
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
13.35. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5}{7^n}x^n$ равен...	1) 5 ☐ 2) ∞ ☐ 3) 5/7 ☐ 4) 7 ☐
13.36. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{2n+1}$ равен...	1) 1 ☐ 2) 3 ☐ 3) 1/3 ☐ 4) 3/2 ☐
13.37. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ равен 10. Тогда интервал сходимости имеет вид...	1) (–5, 5) ☐ 2) (–10, 10) ☐ 3) (0, 10) ☐ 4) (–10, 0) ☐
13.38. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ равен 9. Тогда интервал сходимости имеет вид...	1) (0, 9) ☐ 2) (–9, 0) ☐ 3) (–9, 9) ☐ 4) (–4,5, 4,5) ☐
13.39. Интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{3}\right)^n$ имеет вид (a, b). Тогда $a + b$ равно...	1) 12 ☐ 2) 9 ☐ 3) 6 ☐ 4) 3 ☐
13.40. Интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n2^n}$ имеет вид (a, b). Тогда $a + b$ равно...	1) 2 ☐ 2) 8 ☐ 3) 4 ☐ 4) 16 ☐
13.41. Интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ имеет вид (a, b). Тогда $a + b$ равно...	1) 0 ☐ 2) 1 ☐ 3) 2 ☐ 4) 4 ☐
13.42. Количество целых чисел, принадлежащих интервалу сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{8^n\sqrt[3]{8n^2+1}}$, равно...	1) 3 ☐ 2) 4 ☐ 3) 5 ☐ 4) 6 ☐
13.43. Количество целых чисел, принадлежащих интервалу сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{9^n\sqrt[3]{9n^2+1}}$, равно...	1) 7 ☐ 2) 8 ☐ 3) 9 ☐ 4) 10 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
13.44. Количество целых чисел, принадлежащих интервалу сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{5^n\sqrt[5]{2n^2+1}}$, равно...	1) 0 ☐ 2) 1 ☐ 3) 2 ☐ 4) 3 ☐
13.45. Первый отличный от нуля коэффициент разложения функции $y = \sin 2x$ в ряд Тэйлора по степеням x равен...	1) 1/2 ☐ 2) 1 ☐ 3) 2 ☐ 4) 4 ☐
13.46. Первый отличный от нуля коэффициент разложения функции $y = 3\sin x$ в ряд Тэйлора по степеням x равен...	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 6 ☐
13.47. Если $f(x) = x^3 - 1$, то коэффициент a_4 разложения данной функции в ряд Тэйлора по степеням $(x - 1)$ равен...	1) 1 ☐ 2) 3 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) 0 ☐
13.48. Если $f(x) = 5 - 3x^3$, то коэффициент a_6 разложения данной функции в ряд Тэйлора по степеням $(x - 2)$ равен...	1) 0 ☐ 2) 9 ☐ 3) 10 ☐ 4) 18 ☐
13.49. Если $f(x) = x^3 - 3$, то коэффициент a_4 разложения данной функции в ряд Тэйлора по степеням $(x - 3)$ равен...	1) 3 ☐ 2) 0,25 ☐ 3) 0 ☐ 4) 1 ☐
13.50. Если $f(x) = 5 + x^3$, то коэффициент a_5 разложения данной функции в ряд Тэйлора по степеням $(x + 2)$ равен...	1) 0 ☐ 2) 5 ☐ 3) 6 ☐ 4) 4 ☐
13.51. Функция $y = x^5 + 2x^2 + x - 10$ разложена в ряд Тэйлора по степеням $(x - 1)$. Тогда коэффициент при $(x - 1)^2$ равен...	1) 24 ☐ 2) 0 ☐ 3) –6 ☐ 4) 12 ☐

Глава 14. Дифференциальные уравнения

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.1. Даны уравнения: а) $xdy = ydx$; б) $x = y''\ln\left(\frac{y}{x}\right)$; в) $1 + y^2 = \frac{y'}{x}$; г) $y - 9x + 20y = 0$. Какие из них являются дифференциальными уравнениями первого порядка?	1) а) и б) ☐ 2) а) и в) ☐ 3) а) и г) ☐ 4) Только г) ☐ 5) Только в) ☐
14.2. Укажите дифференциальные уравнения первого порядка: а) $2x + 6 = \frac{y''}{y'}$; б) $2y\sqrt{x} = x$; в) $\frac{x}{y'} = \ln y$; г) $\frac{dy}{y} = \sqrt{x}dx$	1) а) и б) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) в) и г) ☐ 4) Только г) ☐ 5) Только в) ☐
14.3. Укажите дифференциальные уравнения первого порядка: а) $(2x + 6)y =2$; б) $\frac{dy}{x^2} = ydx$; в) $y'y'' - x = \ln 2$; г) $y' + x = y$	1) а) и б) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) в) и г) ☐ 4) Только г) ☐ 5) Только в) ☐
14.4. Даны уравнения: а) $\frac{y''}{y'} = e^{3y}$; б) $(2 - x)y^2 = y$; в) $x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0$; г) $(x^2 - 9) = 6y'$. Какие из них являются дифференциальными уравнениями первого порядка?	1) а) и б) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) в) и г) ☐ 4) Только б) ☐ 5) Только г) ☐
14.5. Каков порядок дифференциального уравнения $(y')^4 - (y''')^4 + 2y = 0$?	1) 1-й ☐ 2) 2-й ☐ 3) 3-й ☐ 4) 4-й ☐
14.6. Каков порядок дифференциального уравнения $y^{\mathrm{IV}} - y^{(6)} + y' = 0$?	1) 1-й ☐ 2) 2-й ☐ 3) 3-й ☐ 4) 4-й ☐
14.7. Как называется дифференциальное уравнение $y' - 2\frac{y}{x^2} = 2x^3$?	1) С разделяющимися переменными ☐ 2) Однородное ☐ 3) Линейное 1-го порядка ☐ 4) Линейное 2-го порядка ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.8. Как называется дифференциальное уравнение $(x^4 + 5)y' + xy^3 = 0$?	1) С разделяющимися переменными ☐ 2) Однородное ☐ 3) Линейное 1-го порядка ☐ 4) Линейное 2-го порядка ☐
14.9. Как называется дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{x^2 - xy}{y^2 + 5xy}$?	1) С разделяющимися переменными ☐ 2) Однородное ☐ 3) Линейное 1-го порядка ☐ 4) Линейное 2-го порядка ☐
14.10. Как называется дифференциальное уравнение $y'' + 4y' + 13y = 5x$?	1) С разделяющимися переменными ☐ 2) Однородное ☐ 3) Линейное 1-го порядка ☐ 4) Линейное 2-го порядка ☐
14.11. Нахождение частных решений дифференциальных уравнений по начальным условиям называется решением задачи...	1) Бернулли ☐ 2) Коши ☐ 3) Лагранжа ☐ 4) Лейбница ☐
14.12. Дифференциальное уравнение $y'' - y' - 3y = 0$ является...	1) уравнением Бернулли ☐ 2) уравнением с разделяющимися коэффициентами ☐ 3) линейным неоднородным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами ☐ 4) линейным однородным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.13. Дифференциальное уравнение $y' + xy' = x^5$ является...	1) уравнением Бернулли ☐ 2) уравнением с разделяющимися коэффициентами ☐ 3) линейным неоднородным уравнением 1-го порядка ☐ 4) однородным дифференциальным уравнением ☐
14.14. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями второго порядка являются... а) $x^2y' + 2y - 15x + 3 = 0$; б) $xy\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} + 3y = 7x$; в) $y\frac{d^2y}{dx^2} + 4y\frac{dy}{dx} + 12x = 0$; г) $xy\frac{\partial z}{\partial x} + 5y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$	1) а) и б) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) в) и г) ☐ 4) б) и в) ☐ 5) только б) ☐
14.15. Дано дифференциальное уравнение $(x-1)y' = y - 1$ при $y(2) = 1$. Тогда интегральная кривая, которая определяет решение этого уравнения, имеет вид...  	1) *B* ☐ 2) *D* ☐ 3) *A* ☐ 4) *C* ☐
14.16. Дано дифференциальное уравнение $(x+2)y' = y + 2$ при $y(-1) = -2$. Тогда интегральная кривая, которая определяет решение этого уравнения, имеет вид...  	1) *A* ☐ 2) *B* ☐ 3) *C* ☐ 4) *D* ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.17. Общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = x^2dx$ имеет вид...	1) $\arccos y = \frac{x^3}{3} + C$ ☐ 2) $\operatorname{arctg} y = \frac{x^3}{3} + C$ ☐ 3) $\arcsin y = 2x + C$ ☐ 4) $\arcsin y = \frac{x^3}{3} + C$ ☐
14.18. Общий интеграл дифференциального уравнения $y^2dy = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ имеет вид...	1) $y^3 = \sqrt{x} + C$ ☐ 2) $2y = \ln\|x\| + C$ ☐ 3) $\frac{y^3}{3} = 2\sqrt{x} + C$ ☐ 4) $y = \sqrt{x} + C$ ☐
14.19. Общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2} = xdx$ имеет вид...	1) $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$ ☐ 2) $y = \frac{x^2}{2} + C$ ☐ 3) $\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$ ☐ 4) $-\frac{1}{y} = x^2 + C$ ☐
14.20. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и его общим решением: А) $y' - 3x^2y = 0$; Б) $y' - 6x^5y = 0$; В) $y' = 3xy$. а) $\ln\|y\| = x^2 + C$; б) $\ln\|y\| = \frac{3}{2}x^2 + C$; в) $\ln\|y\| = x^3 + C$; г) $\ln\|y\| = x^6 + C$	1) А—б; Б—г; В—а ☐ 2) А—а; Б—г; В—в ☐ 3) А—б; Б—в; В—а ☐ 4) А—в; Б—а; В—б ☐ 5) А—в; Б—г; В—б ☐
14.21. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и его общим решением: А) $y' - 14x^{13}y = 0$; Б) $y' - 7x^6y = 0$; В) $y' = 14xy$. а) $\ln\|y\| = x^{14} + C$; б) $\ln\|y\| = 7x^2 + C$; в) $\ln\|y\| = x^7 + C$; г) $\ln\|y\| = 14x^2 + C$	1) А—б; Б—г; В—а ☐ 2) А—а; Б—г; В—в ☐ 3) А—а; Б—в; В—б ☐ 4) А—в; Б—а; В—б ☐ 5) А—а; Б—г; В—б ☐
14.22. Каково общее решение дифференциального уравнения $y' - 3x^2 = 0$?	1) $y = x^2 + C$ ☐ 2) $y = x^3 + C$ ☐ 3) $y = Cx^3$ ☐ 4) $y = Cx^2$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.23. Каково общее решение дифференциального уравнения $y' - \sin x = 0$?	1) $y = C\cos x$ ☐ 2) $y = C\sin x$ ☐ 3) $y = \cos x + C$ ☐ 4) $y = -\cos x + C$ ☐
14.24. Каково общее решение дифференциального уравнения $y' - \cos x = 0$?	1) $y = C\cos x$ ☐ 2) $y = C\sin x$ ☐ 3) $y = \sin x + C$ ☐ 4) $y = -\sin x + C$ ☐
14.25. Каково общее решение дифференциального уравнения $x^2y' = 1$?	1) $y = -2x^{-3} + C$ ☐ 2) $y = -x^{-1} + C$ ☐ 3) $y = 2\ln x + C$ ☐ 4) $y = \ln\lvert Cx^2\rvert$ ☐
14.26. Каково общее решение дифференциального уравнения $(x^2 + 16)y' = 1$?	1) $y = \mathrm{arctg}\, 0{,}25x + C$ ☐ 2) $y = 0{,}25\mathrm{arctg}\, 0{,}25x + C$ ☐ 3) $y = 4\ln\lvert x\rvert + C$ ☐ 4) $y = \ln\lvert Cx\rvert$ ☐
14.27. Каково общее решение дифференциального уравнения $\cos^2 2x \cdot y' = 2$?	1) $y = \mathrm{arctg}\, 2x + C$ ☐ 2) $y = 0{,}5\mathrm{tg}\, 2x + C$ ☐ 3) $y = 2\,\mathrm{tg}\, 2x + C$ ☐ 4) $y = \mathrm{tg}\, 2x + C$ ☐
14.28. Каково общее решение дифференциального уравнения $2\sqrt{x} \cdot y' = 1$?	1) $y = x^{0{,}5} + C$ ☐ 2) $y = 0{,}5\ln\lvert x\rvert + C$ ☐ 3) $y = x^2 + C$ ☐ 4) $y = -x^{0{,}5} + C$ ☐
14.29. Общее решение дифференциального уравнения $xy' - 2y = x^4$ имеет вид...	1) $y = x^2 + C$ ☐ 2) $y = x^2C$ ☐ 3) $y = x^2C + \frac{1}{2}x^4$ ☐ 4) $y = \frac{1}{2}x^4 + C$ ☐
14.30. Частное решение дифференциального уравнения $(3 + e^x)y' = ye^x$ при $y\,(0) = 8$ имеет вид...	1) $3 + 5e^x$ ☐ 2) $6 + 2e^x$ ☐ 3) $6 + e^{2x}$ ☐ 4) $9 - e^x$ ☐
14.31. Частное решение дифференциального уравнения $y' = y\,\mathrm{tg}\, x$ при $y(0) = 2$ имеет вид...	1) $-2\cos x$ ☐ 2) $2\sin^2 x$ ☐ 3) $\dfrac{2}{\cos x}$ ☐ 4) $2\mathrm{ctg}\, x$ ☐ 5) $-\cos 2x$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.32. Частное решение дифференциального уравнения $(1 + x^3)y' = 3x^2y$ при $y(1) = 4$ имеет вид...	1) $3x^2 + 1$ ☐ 2) $4x$ ☐ 3) $5x^3 - 1$ ☐ 4) $2x^3 + 2$ ☐ 5) $4x^2$ ☐
14.33. Частное решение дифференциального уравнения $y'\operatorname{tg}x = y$ при $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет вид...	1) $\sin x + 1$ ☐ 2) $\sin x$ ☐ 3) $-\sin x$ ☐ 4) $\cos x$ ☐ 5) $\cos x + 1$ ☐
14.34. Частное решение дифференциального уравнения $x^2y' - y^2 = 0$ при $y(1) = 1$ имеет вид...	1) $2x - 1$ ☐ 2) $x + 3$ ☐ 3) $3x - 2$ ☐ 4) $x - 1$ ☐ 5) x ☐
14.35. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ является...	1) $C_1x^2 + C_2$ ☐ 2) $C_1x^2 + C_2x + 1$ ☐ 3) $x^2/4 + C_1x + C_2$ ☐ 4) $C_1x^3 + C_2$ ☐ 5) $3x^2 + C$ ☐
14.36. Общим решением дифференциального уравнения $yy'' - (y')^2 = 0$ является...	1) $y = C_1\ln\lvert x\rvert + C_2$ ☐ 2) $y = \frac{C_1}{x + C_1}$ ☐ 3) $y = C_2e^{C_1x}$ ☐ 4) $y = 0$ ☐ 5) $y = C_1e^x + C_2$ ☐
14.37. Общим решением дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{x^2}$ является...	1) $-\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x} + C_2$ ☐ 2) $\frac{1}{x} + C_1x + C_2$ ☐ 3) $-\ln\lvert x\rvert + C_1x^2 + C_2x$ ☐ 4) $-\frac{1}{x} + C_1x + C_2$ ☐ 5) $-\ln\lvert x\rvert + C_1x + C_2$ ☐
14.38. Общим решением дифференциального уравнения $y'' = 4\cos 2x$ является...	1) $C_1\sin 2x + C_2$ ☐ 2) $-\cos 2x + C_1x + C_2$ ☐ 3) $C_1\cos 2x + C_2$ ☐ 4) $4\cos 2x + C_1x + C_2$ ☐ 5) $-2\cos 2x + C_1x + C_2$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.39. Общим решением дифференциального уравнения $xy'' - 2y' = 0$ является...	1) $C_1x^3 + C_2$ ☐ 2) $C_1x^2 + C_2$ ☐ 3) $C_1x^3 + C_2x$ ☐ 4) $C_1\frac{x}{2} + 2C_2$ ☐ 5) $2x^2 + C_1 + C_2$ ☐
14.40. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = \cos 5x$ имеет вид...	1) $y = -\frac{1}{125}\sin 5x + C$ ☐ 2) $y = -\sin 5x +$ $+ \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐ 3) $y = \frac{1}{125}\sin 5x +$ $+ \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐ 4) $y = -\frac{1}{125}\sin 5x +$ $+ \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐
14.41. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = \sin 3x$ имеет вид...	1) $y = \frac{1}{27}\cos 3x +$ $+ \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐ 2) $y = \cos 3x +$ $+ \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐ 3) $y = \frac{1}{27}\cos 3x + C$ ☐ 4) $y = -\frac{1}{27}\cos 3x +$ $+ \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐
14.42. Дано дифференциальное уравнение $y' = -2$. Тогда функция $y = 2 - kx$ является его решением при k, равном...	1) 1 ☐ 2) −1 ☐ 3) 2 ☐ 4) −2 ☐
14.43. Дано дифференциальное уравнение $y' = (2k - 2)x^3$. Тогда функция $y = x^4 - 3$ является его решением при k, равном...	1) 2 ☐ 2) 3 ☐ 3) 1 ☐ 4) 0 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.44. Дано дифференциальное уравнение $y' = (k+1)x^2$. Тогда функция $y = x^3$ является его решением при k, равном...	1) 3 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 2 ☐
14.45. Если $y(x)$ — решение уравнения $y' = \frac{y-1}{x}$, удовлетворяющее условию $y(2) = 3$, тогда $y(1) = ...$	1) 3 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 2 ☐
14.46. Если $y(x)$ — решение уравнения $y' = \cos 2x \cdot y$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$, тогда $y(3) = ...$	1) 3 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 2 ☐
14.47. Функция $y = \frac{a}{x^3}$ будет частным решением задачи Коши $y' + b\frac{y}{x} = 0$; $y(-2) = 2$ при a и b, равных...	1) $a = -16$; $b = 3$ ☐ 2) $a = -8$; $b = 3$ ☐ 3) $a = -16$; $b = 1$ ☐ 4) $a = -8$; $b = 1$ ☐
14.48. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = 12x - 3$ имеет вид...	1) $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 +$ $+ \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐ 2) $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + C$ ☐ 3) $y = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 +$ $+ \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐ 4) $y = x^4 - x^3 + C_1x^2 +$ $+ C_2x + C_3$ ☐
14.49. Порядок дифференциального уравнения $y'' + \frac{2x}{x^2+4}y' = x$ можно понизить заменой...	1) $y' = z(x)$ ☐ 2) $y' = z(y)$ ☐ 3) $y'' = z(x)$ ☐ 4) $y'' = z(y)$ ☐
14.50. Дано дифференциальное уравнение $y'' + 5y' + 6y = 0$. Тогда соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид...	1) $1 + 5k + 6k^2 = 0$ ☐ 2) $k^2 - 5k - 6 = 0$ ☐ 3) $k^2 - 5k + 6 = 0$ ☐ 4) $k^2 + 5k + 6 = 0$ ☐
14.51. Однородному дифференциальному уравнению второго порядка $3y'' + 5y' + 2y = 0$ соответствует характеристическое уравнение...	1) $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ ☐ 2) $3\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$ ☐ 3) $3\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$ ☐ 4) $3\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.52. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с различными действительными корнями характеристического уравнения $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$ имеет вид...	1) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$ ☐ 2) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$ ☐ 3) $y = C_1x + C_2e^{-2x}$ ☐ 4) $y = (C_1 + C_2)e^{2x}$ ☐
14.53. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с различными действительными корнями характеристического уравнения $\lambda_1 = 6$ и $\lambda_2 = -1$ имеет вид...	1) $y = C_1e^{x} + C_2e^{-6x}$ ☐ 2) $y = C_1\cos x + C_2\sin 6x$ ☐ 3) $y = C_1e^{4x} + C_2$ ☐ 4) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{6x}$ ☐
14.54. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с различными действительными корнями характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$ имеет вид...	1) $y = C_1e^{x} + C_2e^{3x}$ ☐ 2) $y = C_1e^{x} + C_2xe^{3x}$ ☐ 3) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ ☐ 4) $y = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x$ ☐
14.55. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с равными действительными корнями характеристического уравнения $\lambda_{12} = -1$ имеет вид...	1) $y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$ ☐ 2) $y = (C_1 + C_2x)e^{x}$ ☐ 3) $y = C_1 + C_2xe^{3x}$ ☐ 4) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$ ☐
14.56. Каково общее решение дифференциального уравнения $$y'' + 3y' + 2y = 0?$$	1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x}$ ☐ 2) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$ ☐ 3) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{x}$ ☐ 4) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$ ☐
14.57. Каково общее решение дифференциального уравнения $$y'' + 2y' + 2y = 0?$$	1) $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x}$ ☐ 2) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$ ☐ 3) $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$ ☐ 4) $y = e^{x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$ ☐
14.58. Каково общее решение дифференциального уравнения $$y'' + 6y' + 25y = 0?$$	1) $y = e^{-3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$ ☐ 2) $y = e^{3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$ ☐ 3) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$ ☐ 4) $y = (C_1 + C_2x)e^{-3x}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.59. Каково общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$?	1) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$ ☐ 2) $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$ ☐ 3) $y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ☐ 4) $y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ☐
14.60. Каково общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 8y = 0$?	1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ ☐ 2) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$ ☐ 3) $y = e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ☐ 4) $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ☐
14.61. Каково общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 35y = 0$?	1) $y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-5x}$ ☐ 2) $y = (C_1 + C_2 x)e^{x}$ ☐ 3) $y = e^{x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$ ☐ 4) $y = e^{x}(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x)$ ☐
14.62. Каково общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 30y = 0$?	1) $y = e^{-x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$ ☐ 2) $y = e^{-x}(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x)$ ☐ 3) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-5x}$ ☐ 4) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-6x}$ ☐
14.63. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 12y' + 40y = 0$ является...	1) $y = e^{6x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$ ☐ 2) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}$ ☐ 3) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{x}$ ☐ 4) $y = e^{6x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ☐
14.64. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 16y' + 55y = 0$ является...	1) $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$ ☐ 2) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{12x}$ ☐ 3) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{11x}$ ☐ 4) $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-11x}$ ☐

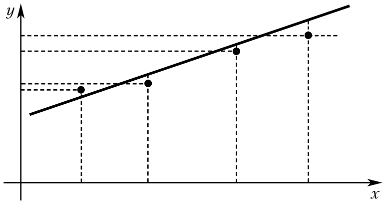
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.65. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 13y' + 42y = 0$ является...	1) $y = C_1e^{-11x} + C_2e^{-2x}$ ☐ 2) $y = C_1e^{6x} + C_2e^{7x}$ ☐ 3) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{11x}$ ☐ 4) $y = C_1\cos 7x +$ $+ C_2\sin 7x$ ☐
14.66. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 19y' + 90y = 0$ является...	1) $y = C_1e^{10x} + C_2e^{9x}$ ☐ 2) $y = C_1e^{8x} + C_2e^{11x}$ ☐ 3) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{7x}$ ☐ 4) $y = C_1\cos 9x +$ $+ C_2\sin 9x$ ☐
14.67. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 16y' + 65y = 0$ является...	1) $y = C_1e^{5x} + C_2e^{11x}$ ☐ 2) $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{-11x}$ ☐ 3) $y = e^{8x}(C_1\cos x +$ $+ C_2\sin x)$ ☐ 4) $y = e^{8x}(C_1\cos 2x +$ $+ C_2\sin 2x)$ ☐
14.68. Частное решение $y_{\text{чн}}$ неоднородного линейного дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 35y = e^{4x}x$ нужно искать в виде...	1) $y_{\text{чн}} = e^{4x}B_0x$ ☐ 2) $y_{\text{чн}} = e^{-4x}B_0x$ ☐ 3) $y_{\text{чн}} = e^{4x}x(B_0x + B_1)$ ☐ 4) $y_{\text{чн}} = e^{4x}(B_0x + B_1)$ ☐
14.69. Частное решение $y_{\text{чн}}$ неоднородного линейного дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 35y = e^{7x}x$ нужно искать в виде...	1) $y_{\text{чн}} = e^{7x}B_0x$ ☐ 2) $y_{\text{чн}} = e^{-7x}B_0x$ ☐ 3) $y_{\text{чн}} = e^{7x}x(B_0x + B_1)$ ☐ 4) $y_{\text{чн}} = e^{7x}(B_0x + B_1)$ ☐
14.70. Частное решение $y_{\text{чн}}$ неоднородного линейного дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}x$ нужно искать в виде...	1) $y_{\text{чн}} = e^{3x}x(B_0x + B_1)$ ☐ 2) $y_{\text{чн}} = e^{3x}(B_0x + B_1)$ ☐ 3) $y_{\text{чн}} = e^{3x}x^2(B_0x + B_1)$ ☐ 4) $y_{\text{чн}} = e^{3x}B_0x$ ☐
14.71. Частное решение $y_{\text{чн}}$ неоднородного линейного дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{2x}x$ нужно искать в виде...	1) $y_{\text{чн}} = e^{2x}x(B_0x + B_1)$ ☐ 2) $y_{\text{чн}} = e^{2x}(B_0x + B_1)$ ☐ 3) $y_{\text{чн}} = e^{2x}x^2(B_0x + B_1)$ ☐ 4) $y_{\text{чн}} = e^{2x}B_0x$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.72. Установить общий вид частного решения дифференциального уравнения $y'' + 7y' + 3y = 7 + 3x$	1) $y(x)_{\text{чн}} = C_0x$ ☐ 2) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x^2$ ☐ 3) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x$ ☐ 4) $y(x)_{\text{чн}} =$ $= (C_0 + C_1x)x$ ☐ 5) $y(x)_{\text{чн}} =$ $= (C_0 + C_1x)x^2$ ☐
14.73. Установить общий вид частного решения дифференциального уравнения $y'' + 7y' = 7 + 3x$	1) $y(x)_{\text{чн}} = C_0x$ ☐ 2) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x^2$ ☐ 3) $м = C_0 + C_1x$ ☐ 4) $y(x)_{\text{чн}} =$ $= (C_0 + C_1x)x$ ☐ 5) $y(x)_{\text{чн}} =$ $= (C_0 + C_1x)x^2$ ☐
14.74. Установить общий вид частного решения дифференциального уравнения $y'' - 2 = 5 + 3x$	1) $y(x)_{\text{чн}} = C_0x$ ☐ 2) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x^2$ ☐ 3) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x$ ☐ 4) $y(x)_{\text{чн}} =$ $= (C_0 + C_1x)x$ ☐ 5) $y(x)_{\text{чн}} =$ $= (C_0 + C_1x)x^2$ ☐
14.75. Дано дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 5y = 4e^{5x}$. Общим видом частного решения данного уравнения является...	1) $y(x)_{\text{чн}} =$ $= C_0\cos 5x + C_1\sin 5x$ ☐ 2) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x$ ☐ 3) $y(x)_{\text{чн}} = C_0xe^{5x}$ ☐ 4) $y(x)_{\text{чн}} = C_0e^{5x}$ ☐
14.76. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и общим видом его частного решения: А) $y'' + 5y' + 8y = 8 + 8x$; Б) $y'' + 5y' = 5 + 8x$; В) $y'' - 2 = 3 + 8x$. а) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x^2$; б) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x$; в) $y(x)_{\text{чн}} = C_0x$; г) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x$; д) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x^2$	1) А—а; Б—б; В—г ☐ 2) А—д; Б—б; В—в ☐ 3) А—г; Б—в; В—а ☐ 4) А—г; Б—б; В—а ☐ 5) А—а; Б—г; В—в ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.77. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и общим видом его частного решения: А) $y'' + 7y' + 9y = 7 + 9x$; Б) $y'' + 7y' = 7 + 9x$; В) $y'' - 2 = 5 + 9x$. а) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x^2$; б) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x$; в) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x^2$; г) $y(x)_{\text{чн}} = C_0x$; д) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)$	1) А—б; Б—а; В—г ☐ 2) А—д; Б—б; В—в ☐ 3) А—б; Б—д; В—в ☐ 4) А—г; Б—б; В—а ☐ 5) А—а; Б—г; В—в ☐
14.78. Функция $y = (C_1 + C_2x)e^x$ является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения. Тогда его характеристическое уравнение имеет вид...	1) $k^2 - 2k + 1 = 0$ ☐ 2) $k^2 + 2k + 1 = 0$ ☐ 3) $k^2 - 1 = 0$ ☐ 4) $k^2 + k = 0$ ☐
14.79. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и его характеристическим уравнением: А) $y^{\text{IV}} - y''' + y'' = 0$; Б) $y^{\text{IV}} - y''' + y'' + y' = 0$; В) $y^{\text{IV}} - y''' + y' + y = 0$. а) $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = 0$; б) $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$; в) $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda + 1 = 0$; г) $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$; д) $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 = 0$	1) А—а; Б—б; В—г ☐ 2) А—д; Б—б; В—в ☐ 3) А—б; Б—в; В—г ☐ 4) А—д; Б—в; В—б ☐ 5) А—а; Б—г; В—в ☐
14.80. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и его характеристическим уравнением: А) $y^{\text{IV}} - 2y''' + y'' + y = 0$; Б) $y^{\text{IV}} + 2y'' + y' + y = 0$; В) $y''' + 2y'' + y' + y = 0$. а) $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 + 1 = 0$; б) $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda + 1 = 0$; в) $\lambda^4 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$; г) $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$; д) $\lambda^3 + 2\lambda^3 + \lambda = 0$	1) А—а; Б—б; В—г ☐ 2) А—д; Б—б; В—в ☐ 3) А—б; Б—в; В—г ☐ 4) А—а; Б—в; В—д ☐ 5) А—а; Б—в; В—г ☐

Глава 15. Элементы теории поля. Численное дифференцирование и интегрирование

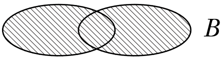
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
15.1. Что описывается следующим равенством: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + f(t)\vec{k}$?	1) Уравнение нормальной плоскости к кривой ☐ 2) Дивергенция ☐ 3) Векторное поле ☐ 4) Радиус-вектор точки кривой ☐ 5) Градиент функции ☐
15.2. Что описывается следующим равенством: $\frac{dx_A}{dt}(x - x_A) + \frac{dy_A}{dt}(y - y_A) + \frac{dz_A}{dt}(z - z_A) = 0$?	1) Уравнение нормальной плоскости к кривой ☐ 2) Дивергенция ☐ 3) Векторное поле ☐ 4) Радиус-вектор точки кривой ☐ 5) Градиент функции ☐
15.3. Что описывается следующим выражением: $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$?	1) Уравнение нормальной плоскости к кривой ☐ 2) Дивергенция ☐ 3) Векторное поле ☐ 4) Радиус-вектор точки кривой ☐ 5) Градиент функции ☐
15.4. Что описывается следующим выражением: $\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$?	1) Уравнение нормальной плоскости к кривой ☐ 2) Дивергенция ☐ 3) Векторное поле ☐ 4) Радиус-вектор точки кривой ☐ 5) Градиент функции ☐
15.5. Что описывается следующим выражением: $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$?	1) Уравнение нормальной плоскости к кривой ☐ 2) Дивергенция ☐ 3) Векторное поле ☐ 4) Радиус-вектор точки кривой ☐ 5) Градиент функции ☐

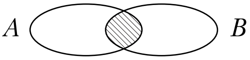
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
15.6. При каком виде аппроксимации используется следующая формула: $\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}$?	1) Среднеквадратическое приближение ☐ 2) Интерполяция функции ☐ 3) Аппроксимация y' ☐ 4) Аппроксимация y'' ☐
15.7. При каком виде аппроксимации используется следующая формула: $\varphi(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$?	1) Среднеквадратическое приближение ☐ 2) Интерполяция функции ☐ 3) Аппроксимация y' ☐ 4) Аппроксимация y'' ☐
15.8. При каком виде аппроксимации используется следующая формула: $\frac{y_2 - y_0}{2h}$?	1) Среднеквадратическое приближение ☐ 2) Интерполяция функции ☐ 3) Аппроксимация y' ☐ 4) Аппроксимация y'' ☐
15.9. При каком виде аппроксимации используется следующая формула: $S = \sum_{i=1}^{n}[\varphi(x_i) - y_i]^2$?	1) Среднеквадратическое приближение ☐ 2) Интерполяция функции ☐ 3) Аппроксимация y' ☐ 4) Аппроксимация y'' ☐
15.10. При каком виде аппроксимации используется следующая схема?  	1) Среднеквадратическое приближение ☐ 2) Интерполяция функции ☐ 3) Аппроксимация y' ☐ 4) Аппроксимация y'' ☐
15.11. Представленная ниже формула численного интегрирования называется... $\int_a^b f(x)dx \approx$ $\approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right)$	1) формула Симпсона ☐ 2) формула прямоугольников ☐ 3) формула треугольников ☐ 4) формула трапеций ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
15.12. Представленная ниже формула численного интегрирования называется... $$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[y_1 + y_2 + ... + y_n]$$	1) формула Симпсона ☐ 2) формула прямоугольников ☐ 3) формула треугольников ☐ 4) формула трапеций ☐
15.13. Представленная ниже формула численного интегрирования называется... $$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + + ... y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... y_{2m-1})]$$	1) формула Симпсона ☐ 2) формула прямоугольников ☐ 3) формула треугольников ☐ 4) формула трапеций ☐
15.14. В каком математическом процессе используется формула Симпсона?	1) Интерполяция функций ☐ 2) Численное интегрирование ☐ 3) Аппроксимация y'' ☐ 4) Численное дифференцирование ☐
15.15. В каком математическом процессе используется формула трапеций?	1) Интерполяция функций ☐ 2) Численное интегрирование ☐ 3) Аппроксимация y'' ☐ 4) Численное дифференцирование ☐

Часть 3
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Глава 16. Случайные события и их вероятности

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
16.1. Какой операции над событиями соответствует рисунок?  	1) AB ☐ 2) $\overline{A}$ ☐ 3) $A + B$ ☐ 4) $A - B$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
16.2. Какой операции над событиями соответствует рисунок?  	1) AB ☐ 2) $\overline{A}$ ☐ 3) $A + B$ ☐ 4) $A - B$ ☐
16.3. Если объективно шансы на наступление событий A и B одинаковы, то события A и B...	1) противоположные ☐ 2) совместные ☐ 3) несовместные ☐ 4) равновозможные ☐
16.4. Если в эксперименте возможны n элементарных исходов, а событие A наступает в результате m из них, то вероятность события A равна...	1) $\frac{m}{n-m}$ ☐ 2) $\frac{n}{m}$ ☐ 3) $\frac{m}{n}$ ☐ 4) $\frac{n-m}{n}$ ☐
16.5. Вероятность достоверного события равна...	1) 0,99 ☐ 2) –1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 1 ☐
16.6. Вероятность невозможного события равна...	1) 1 ☐ 2) –1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 0,0002 ☐
16.7. Несовместные события не образуют полную группу событий, если их вероятности равны...	1) $P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{1}{5}$; $P(C) = \frac{3}{5}$ ☐ 2) $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{4}$; $P(C) = \frac{1}{4}$ ☐ 3) $P(A) = \frac{1}{7}$; $P(B) = \frac{2}{7}$; $P(C) = \frac{4}{7}$ ☐ 4) $P(A) = \frac{1}{12}$; $P(B) = \frac{3}{4}$; $P(C) = \frac{3}{12}$ ☐

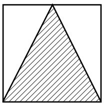
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
16.8. Несовместные события не образуют полную группу событий, если их вероятности равны...	1) $P(A) = \frac{5}{6}$; $P(B) = \frac{1}{12}$; $P(C) = \frac{1}{12}$ ☐ 2) $P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{1}{6}$; $P(C) = \frac{1}{7}$ ☐ 3) $P(A) = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{1}{8}$; $P(C) = \frac{5}{8}$ ☐ 4) $P(A) = \frac{5}{15}$; $P(B) = \frac{2}{5}$; $P(C) = \frac{4}{15}$ ☐
16.9. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет 3 очка, равна...	1) 0,5 ☐ 2) 0,1 ☐ 3) 1/6 ☐ 4) 1/3 ☐
16.10. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет 5 очков, равна...	1) 5/6 ☐ 2) 1/6 ☐ 3) 0,1 ☐ 4) 1/5 ☐
16.11. Вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет 1 или 2, или 6 очков, составляет...	1) 0,5 ☐ 2) 1/3 ☐ 3) 1/12 ☐ 4) 1/9 ☐
16.12. Вероятность того, что при бросании одного игрального кубика выпадет четное число очков, равна...	1) 1/12 ☐ 2) 2 ☐ 3) 12 ☐ 4) 1/2 ☐
16.13. Вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет 0 очков, составляет...	1) 1 ☐ 2) 0 ☐ 3) 1/6 ☐ 4) 1/12 ☐
16.14. Вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет 7 очков, составляет...	1) 0 ☐ 2) 6/7 ☐ 3) 1 ☐ 4) 7/6 ☐
16.15. Вероятность того, что при бросании одного игрального кубика выпадет количество очков не менее 2, но не более 4, составляет...	1) 9 ☐ 2) 1/2 ☐ 3) 1/9 ☐ 4) 1/3 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
16.16. Из урны, в которой находятся 4 белых и 9 черных шаров, вынимают наудачу один шар. Тогда вероятность того, что этот шар будет белым, равна...	1) 4/13 ☐ 2) 2/7 ☐ 3) 1 ☐ 4) 4/9 ☐
16.17. В ящике 11 белых, 3 красных и 6 синих шаров. Достают один шар. Вероятность того, что он белый, равна...	1) 0,45 ☐ 2) 9/11 ☐ 3) 1/3 ☐ 4) 0,55 ☐
16.18. Вероятность того, что 1 сентября произвольно выбранного года придется на воскресенье, равна...	1) 12/365 ☐ 2) 1/2 ☐ 3) 1/7 ☐ 4) 1/365 ☐
16.19. Чему равна вероятность того, что день рождения произвольно выбранного студента будет 30-го числа? Високосными годами пренебречь	1) 11/365 ☐ 2) 1/365 ☐ 3) 12/365 ☐ 4) 1/7 ☐
16.20. Из колоды 36 карт достают одну карту. Чему равна вероятность того, что это валет или дама?	1) 2/9 ☐ 2) 1/4 ☐ 3) 1/36 ☐ 4) 1/9 ☐
16.21. В ящике 65 годных и 35 бракованных деталей. Достают одну деталь. Чему равна вероятность того, что она бракованная?	1) 0,65 ☐ 2) 7/13 ☐ 3) 0,5 ☐ 4) 0,35 ☐
16.22. За контрольную по математике из 30 студентов группы пятеро получили оценку «5», 12 студентов — «4», 10 студентов получили тройки, а остальные — двойки. Чему равна вероятность того, что наугад взятый студент группы получил двойку?	1) 0,1 ☐ 2) 0,15 ☐ 3) 0,2 ☐ 4) 0,25 ☐ 5) 0,3 ☐
16.23. Игральная кость бросается один раз. Вероятность того, что появится не более 4 очков, равна...	1) 1/6 ☐ 2) 1 ☐ 3) 1/2 ☐ 4) 2/3 ☐ 5) 1/3 ☐
16.24. Игральная кость бросается один раз. Вероятность того, что появится более 5 очков, равна...	1) 1/2 ☐ 2) 2/3 ☐ 3) 1 ☐ 4) 1/3 ☐ 5) 1/6 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
16.25. Теорема сложения вероятностей для совместных событий A и B определяется формулой...	1) $P(A + B) = P(A) + P(B) + P(AB)$ ☐ 2) $P(A + B) = P(AB) - P(A) - P(B)$ ☐ 3) $P(A + B) = P(A)+P(B)$ ☐ 4) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ ☐
16.26. Теорема умножения вероятностей для зависимых событий A и B определяется формулой...	1) $P(AB) = P(A)P(B) - P(\mathrm{A}+B)$ ☐ 2) $P(AB) = P(A)P(B/A)$ ☐ 3) $P(AB) = P(A/B)P(B/A)$ ☐ 4) $P(AB) = P(A)P(B)$ ☐
16.27. В лотерее 1000 билетов. На один билет выпадает выигрыш 5000 руб., на 10 билетов — выигрыши по 1000 руб., на 50 билетов — выигрыши по 200 руб., на 100 билетов — выигрыши по 50 руб.; остальные билеты — проигрышные. Покупается один билет. Тогда вероятность выигрыша 50 или 1000 руб. равна...	1) 0,011 ☐ 2) 0,11 ☐ 3) 11/161 ☐ 4) 11/989 ☐
16.28. В урне находятся 1 белый и 2 черных шара. Из урны поочередно изымаются шары. После первого изъятия шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Тогда вероятность того, что оба шара белые, равна...	1) 2/3 ☐ 2) 2/9 ☐ 3) 1/6 ☐ 4) 1/9 ☐
16.29. В урне находятся 2 белых и 2 черных шара. Из урны поочередно вынимают 2 шара, но после первого вынимания шар возвращается в урну и шары перемешиваются. Тогда вероятность того, что оба шара белые, равна...	1) 1/16 ☐ 2) 1/2 ☐ 3) 1/6 ☐ 4) 1/4 ☐
16.30. По оценкам экспертов, вероятности банкротства для двух предприятий, производящих разнотипную продукцию, равны 0,2 и 0,25. Тогда вероятность банкротства обоих предприятий равна...	1) 0,6 ☐ 2) 0,45 ☐ 3) 0,05 ☐ 4) 0,5 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
16.31. В цехе работают 5 женщин и 2 мужчины. Для беседы по жребию выбирают двоих. Тогда вероятность, что это мужчина и женщина, равна...	1) 7/10 ☐ 2) 10/ 21 ☐ 3) 1/10 ☐ 4) 5/21 ☐
16.32. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Чему равна вероятность того, что при трех выстрелах не будет ни одного промаха?	1) 0,49 ☐ 2) 0,049 ☐ 3) 0,21 ☐ 4) 0,343 ☐
16.33. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Чему равна вероятность того, что при двух выстрелах не будет ни одного промаха?	1) 3/9 ☐ 2) 0,16 ☐ 3) 0,36 ☐ 4) 0,24 ☐
16.34. В ящике 25 деталей, из которых 9 бракованных. Сборщик наугад достает 3 детали. Какова вероятность того, что все три не бракованные?	1) 28/115 ☐ 2) 8/23 ☐ 3) 16/91 ☐ 4) 40/133 ☐
16.35. В одном ящике 2 белых и 8 красных шаров, а в другом 4 белых и 6 красных. Из каждого ящика наугад вынимают по 1 шару. Какова вероятность того, что они оба красные?	1) 0,92 ☐ 2) 0,48 ☐ 3) 0,36 ☐ 4) 0,3 ☐
16.36. В одном ящике 20 белых и 10 красных шаров, а в другом 15 белых и 15 красных. Из каждого ящика наугад вынимают по 1 шару. Какова вероятность того, что хотя бы один из них белый?	1) 0,7 ☐ 2) 0,64 ☐ 3) 7/8 ☐ 4) 5/6 ☐
16.37. Из карточек разрезной азбуки сложено слово АЛГЕБРА. Из этого слова наугад берут 2 карточки. Какова вероятность того, что на них нет ни буквы А, ни буквы Е?	1) 3/4 ☐ 2) 4/7 ☐ 3) 2/7 ☐ 4) 1/2 ☐
16.38. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 наугад выбирают 3 цифры. Какова вероятность того, что они все нечетные?	1) 1/2 ☐ 2) 1/14 ☐ 3) 3/14 ☐ 4) 1/6 ☐
16.39. В ящике 17 годных и 8 бракованных деталей. Из него наугад достают 2 детали. Какова вероятность того, что они обе бракованные?	1) 7/90 ☐ 2) 0,1 ☐ 3) 7/75 ☐ 4) 0,14 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
16.40. В урне 10 красных, 20 синих и 15 зеленых шаров. Из нее наугад достают 1 шар. Какова вероятность того, что этот шар синий, если известно, что он не зеленый?	1) 0,075 ☐ 2) 0,25 ☐ 3) 2/3 ☐ 4) 0,2 ☐
16.41. В урне 21 белых и 19 черных шаров. Из урны вынимают сразу 2 шара. Вероятность того, что оба шара будут белыми, равна...	1) 1/2 ☐ 2) 7/26 ☐ 3) 1/4 ☐ 4) 19/80 ☐ 5) 13/51 ☐
16.42. В урне 21 белых и 19 черных шаров. Из урны вынимают сразу 2 шара. Вероятность того, что шары разного цвета, равна...	1) 8/17 ☐ 2) 41/80 ☐ 3) 3/5 ☐ 4) 24/51 ☐ 5) 133/260 ☐
16.43. Случайные события A и B, удовлетворяющие условиям $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}4$; $P(AB) = 0{,}2$, являются...	1) несовместными и зависимыми ☐ 2) совместными и зависимыми ☐ 3) совместными и независимыми ☐ 4) несовместными и независимыми ☐
16.44. Из каждой из двух колод вынимают по одной карте. События A — «карта из первой колоды — красной масти» и B — «карта из второй колоды бубновой масти» являются...	1) несовместными и зависимыми ☐ 2) совместными и зависимыми ☐ 3) совместными и независимыми ☐ 4) несовместными и независимыми ☐
16.45. Бросают 2 кубика. События A — «на первом кубике выпала тройка» и B — «на втором кубике выпала шестерка» являются...	1) несовместными и зависимыми ☐ 2) совместными и зависимыми ☐ 3) совместными и независимыми ☐ 4) несовместными и независимыми ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
16.46. При бросании точки на плоскость достоверно ее попадание в круг площадью S; попадание в любую точку круга равновероятно. Вероятность $p(A)$ ее попадания в концентрический круг площади s равна...	1) $p(A) = 1 - \frac{s}{S}$ ☐ 2) $p(A) = S - s$ ☐ 3) $p(A) = \frac{s}{S}$ ☐ 4) $p(A) = \sqrt{\frac{s}{S}}$ ☐
16.47. В квадрат со стороной 13 брошена точка.  Тогда вероятность того, что она попадет в заштрихованную область, равна...	1) 1/13 ☐ 2) 1/2 ☐ 3) 2/13 ☐ 4) 2 ☐
16.48. A — случайное событие, H_1 и H_2 образуют полную группу событий. Верным является утверждение...	1) $p(A) = p(A/H_1) + p(A/H_2)$ ☐ 2) $p(A) = 1 - p(A/H_1) + p(A/H_2)$ ☐ 3) $p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)p(A/H_2)$ ☐ 4) $p(A) = p(A/H_1)p(A/H_2)$ ☐
16.49. Событие A может наступить лишь при условии появления двух несовместных событий B_1 и B_2, образующих полную группу событий. Известны: вероятность $P(B_1) = \frac{3}{4}$, условные вероятности $P(A/B_1) = \frac{1}{4}$ и $P(A/B_2) = \frac{1}{2}$. Тогда вероятность $P(A)$ равна...	1) 3/16 ☐ 2) 3/4 ☐ 3) 1/4 ☐ 4) 5/16 ☐
16.50. По мишени производится три выстрела. Значение вероятности ни одного попадания при всех трех выстрелах равно 0,5; значение вероятности ровно одного попадания 0,3; значение вероятности ровно двух попаданий 0,15. Тогда значение вероятности того, что мишень будет поражена три раза, равно...	1) 0,05 ☐ 2) 0,95 ☐ 3) 0,15 ☐ 4) 0,45 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
16.51. По мишени производится три выстрела. Значение вероятности ни одного попадания при всех трех выстрелах равно 0,6; значение вероятности ровно одного попадания 0,2; значение вероятности ровно двух попаданий 0,1. Тогда значение вероятности того, что мишень будет поражена не более одного раза, равно...	1) 0,6 ☐ 2) 0,7 ☐ 3) 0,8 ☐ 4) 0,2 ☐
16.52. Имеются две одинаковые на вид урны. В первой урне находятся 4 красных и 3 черных шара. Во второй урне — 2 белых и 1 черный шар. Из наудачу взятой урны взяли 1 шар. Тогда вероятность того, что этот шар черный, равна...	1) 1/7 ☐ 2) 8/21 ☐ 3) 2/5 ☐ 4) 1/3 ☐
16.53. Имеются две одинаковые на вид урны. В первой урне находятся 3 белых и 2 черных шара. Во второй урне — 4 белых, 1 черный шар и 1 красный шар. Из наудачу взятой урны взяли 1 шар. Тогда вероятность того, что этот шар белый, равна...	1) 19/30 ☐ 2) 2/5 ☐ 3) 8/15 ☐ 4) 7/11 ☐
16.54. В первой урне 4 черных и 6 белых шаров. Во второй урне 3 белых и 7 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынимают 1 шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна...	1) 0,9 ☐ 2) 0,45 ☐ 3) 0,4 ☐ 4) 0,15 ☐
16.55. В первом ящике 7 красных и 9 синих шаров, а во втором — 4 красных и 11 синих. Из произвольного ящика достают 1 шар. Вероятность того, что он синий, равна...	1) $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{16}+\frac{11}{15}\right)$ ☐ 2) $\frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}+\frac{4}{11}\right)$ ☐ 3) $\frac{9}{16}+\frac{11}{15}$ ☐ 4) $\frac{9}{16}\cdot\frac{11}{15}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
16.56. С первого станка на сборку поступает 45%, а со второго — 55% всех деталей. Среди деталей с первого станка 90% стандартных, а со второго 80%. Тогда вероятность того, что наугад взятая деталь окажется нестандартной, равна...	1) 0,135 ☐ 2) 0,155 ☐ 3) 0,215 ☐ 4) 0,225 ☐
16.57. В урне лежат 3 белых и 2 черных шара. Последовательно без возвращения и наудачу извлекают 3 шара. Тогда вероятность того, что первый шар будет белым, а второй и третий — черными, равна...	1) 1/10 ☐ 2) 6/125 ☐ 3) 8/27 ☐ 4) 12/125 ☐
16.58. В урне лежат 2 белых и 3 черных шара. Последовательно без возвращения и наудачу извлекают 3 шара. Тогда вероятность того, что первый и второй шар будут белыми, а третий — черным, равна...	1) 12/125 ☐ 2) 1/10 ☐ 3) 18/25 ☐ 4) 1/5 ☐
16.59. На сборку поступили одинаковые детали из трех цехов: из цеха № 1 — 100 деталей, из цеха № 2 — 200 деталей и из цеха № 3 — 700 деталей. Известно, что в цехе № 1 2% изготовляемых деталей бракованные, в цехе № 2 — 3% и в цехе № 3 — 1%. Найдите вероятность того, что наугад взятая сборщиком деталь бракованная	1) 0,015 ☐ 2) 0,022 ☐ 3) 0,011 ☐ 4) 0,013 ☐
16.60. В магазин поступает продукция трех фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 10%, второй — 40% и третьей — 50% изделий. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 1%, для второй — 3% и для третьей — 5%. Вероятность того, что оказавшееся нестандартным изделие произведено на третьей фабрике, равна...	1) 17/23 ☐ 2) 12/29 ☐ 3) 25/38 ☐ 4) 1/3 ☐ 5) 3/5 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
16.61. С первого автомата на сборку поступает 25%, со второго — 30%, с третьего — 45% деталей. Первый автомат дает в среднем 0,1% брака, второй — 0,4%, третий — 0,2%. Вероятность того, что оказавшаяся бракованной деталь изготовлена на втором автомате, равна...	1) 4/9 ☐ 2) 24/47 ☐ 3) 12/23 ☐ 4) 6/13 ☐ 5) 47/91 ☐
16.62. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 15%, вторая — 25%, третья — 60% всех изделий. Брак продукции составляет соответственно 2, 4 и 5%. Вероятность того, что оказавшийся бракованным болт произведен на первой машине, равна...	1) 5/61 ☐ 2) 2/27 ☐ 3) 1/30 ☐ 4) 14/259 ☐ 5) 3/43 ☐
16.63. В магазин поступает продукция трех фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 10%, второй — 15% и третьей — 75% изделий. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 2%, для второй — 5% и для третьей — 1%. Вероятность того, что оказавшееся нестандартным изделие произведено на первой фабрике, равна...	1) 9/23 ☐ 2) 2/17 ☐ 3) 7/46 ☐ 4) 5/29 ☐ 5) 1/3 ☐
16.64. В магазин поступает продукция трех фабрик. Причем продукция первой фабрики составляет 30%, второй — 50% и третьей — 20% изделий. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 4%, для второй — 1% и для третьей — 5%. Вероятность того, что оказавшееся нестандартным изделие произведено на второй фабрике, равна...	1) 7/18 ☐ 2) 1/5 ☐ 3) 6/23 ☐ 4) 5/27 ☐ 5) 3/11 ☐
16.65. Игральную кость бросают 8 раз. Вероятность того, что ровно 4 раза выпадет грань с четным числом очков, равна...	1) 1/256 ☐ 2) 35/128 ☐ 3) 27/128 ☐ 4) 1/8 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
16.66. Игральную кость бросают 5 раз. Вероятность того, что ровно 2 раза выпадет грань с четным числом очков, равна...	1) 5/16 ☐ 2) 1/32 ☐ 3) 7/64 ☐ 4) 1/4 ☐
16.67. Вероятность покупки неспелого арбуза на рынке равна 0,2. Некто каждый день покупает на рынке арбуз. Какова вероятность того, что в течение четырех дней он купит не менее 3 спелых арбузов?	1) 0,6354 ☐ 2) 0,7248 ☐ 3) 0,8192 ☐ 4) 0,8576 ☐
16.68. Вероятность попадания стрелка в цель равна 0,9. Найти вероятность того, что из четырех выстрелов он попадет в цель ровно 2 раза	1) 0,0512 ☐ 2) 0,0240 ☐ 3) 0,0486 ☐ 4) 0,0832 ☐
16.69. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 1/3. Тогда вероятность того, что при 4 выстрелах будет хотя бы одно попадание, равна...	1) 3/4 ☐ 2) 65/81 ☐ 3) 16/81 ☐ 4) 2/3 ☐
16.70. Что нужно применить для вычисления вероятности того, что в 200 повторных независимых испытаниях событие *A* произойдет ровно 60 раз, если вероятность события *A* в отдельном испытании 0,4?	1) Формулу Бернулли ☐ 2) Локальную теорему Лапласа ☐ 3) Формулу Пуассона ☐ 4) Интегральную теорему Лапласа ☐

Глава 17. Случайные величины

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
17.1. Вероятность того, что случайная величина *X* примет значение меньшее чем *x*, — это...	1) плотность распределения ☐ 2) функция распределения ☐ 3) мода распределения ☐ 4) медиана распределения ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
17.2. Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины X, то $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = ...$	1) 1 ☐ 2) $+\infty$ ☐ 3) 0 ☐ 4) 0,5 ☐
17.3. Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины X, то $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = ...$	1) 1 ☐ 2) $+\infty$ ☐ 3) 0 ☐ 4) 0,5 ☐
17.4. Если $F(x)$ — функция распределения, $p(x)$ — плотность распределения случайной величины X, то...	1) $p(x) = F'(x)$ ☐ 2) $p(x) = F(x) - F(0)$ ☐ 3) $p(x) = 0{,}5[F(x) - F(0)]$ ☐ 4) $p(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$ ☐
17.5. Если $p(x)$ — плотность распределения случайной величины X, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = ...$	1) $+\infty$ ☐ 2) 0 ☐ 3) 0,5 ☐ 4) 1 ☐
17.6. В какой полуплоскости координатной плоскости лежит кривая распределения любой случайной величины?	1) Верхней ☐ 2) Нижней ☐ 3) Левой ☐ 4) Правой ☐
17.7. По какой формуле вычисляется математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения?	1) $M(X) = p_1 + ... + p_n$ ☐ 2) $M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$ ☐ 3) $M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$ ☐ 4) $M(X) = x_1 + ... + x_n$ ☐
17.8. По какой формуле вычисляется математическое ожидание непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения $p(x)$?	1) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx$ ☐ 2) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 p(x)dx$ ☐ 3) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx$ ☐ 4) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$ ☐

<table>
<tr><th>Задание</th><th>Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа</th></tr>
<tr><td>17.9. Упрощенная формула вычисления дисперсии случайной величины X имеет вид...</td><td>1) $D(X) = M(X^2) - 2M(X)$ ☐
2) $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ ☐
3) $D(X) = M(X) - \sqrt{M(X)}$ ☐
4) $D(X) = M(X^2) - M(X)$ ☐</td></tr>
<tr><td>17.10. Среднеквадратическое отклонение σ_X случайной величины X определяется по формуле...</td><td>1) $\sigma_X = 0{,}5D(X)$ ☐
2) $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$ ☐
3) $\sigma_X = \dfrac{D(X)}{M(X)}$ ☐
4) $\sigma_X = D(X) - M(X)$ ☐</td></tr>
<tr><td>17.11. Дан закон распределения дискретной случайной величины X
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,1</td><td>a</td><td>0,2</td><td>0,6</td></tr>
</table>
Тогда значение a равно...</td><td>1) 0,1 ☐
2) –0,9 ☐
3) 0,2 ☐
4) 0,9 ☐</td></tr>
<tr><td>17.12. Дан закон распределения дискретной случайной величины X
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,2</td><td>a</td><td>0,4</td><td>0,1</td></tr>
</table>
Тогда значение a равно...</td><td>1) 0,4 ☐
2) 0,3 ☐
3) –0,7 ☐
4) 0,7 ☐</td></tr>
<tr><td>17.13. Дан закон распределения дискретной случайной величины X
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>a</td></tr>
</table>
Тогда значение a равно...</td><td>1) 0,2 ☐
2) 0,7 ☐
3) –0,7 ☐
4) 0,1 ☐</td></tr>
<tr><td>17.14. Дискретная случайная величина задана законом распределения
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,4</td></tr>
</table>
Тогда значение функции распределения $F(3)$ равно...</td><td>1) 0,7 ☐
2) 0,2 ☐
3) 0,9 ☐
4) 0,3 ☐</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Задание</th><th>Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа</th></tr>
<tr><td>17.15. Дискретная случайная величина задана законом распределения
<table>
<tr><td>x_i</td><td>–2</td><td>–1</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,3</td><td>0,3</td><td>0,3</td><td>0,1</td></tr>
</table>
Тогда значение функции распределения $F(0)$ равно...</td><td>1) 0,4 ☐
2) 0,9 ☐
3) 0,6 ☐
4) 0,3 ☐</td></tr>
<tr><td>17.16. Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найти $M(X)$.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>–3</td><td>–1</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,3</td></tr>
</table></td><td>1) –0,1 ☐
2) 0,1 ☐
3) 0,3 ☐
4) 0,5 ☐</td></tr>
<tr><td>17.17. Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найти $M(X)$.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,5</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr>
</table></td><td>1) 3,8 ☐
2) 4,2 ☐
3) 4,4 ☐
4) 4,6 ☐</td></tr>
<tr><td>17.18. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения. Найти $D(X)$.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,4</td><td>0,2</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr>
</table></td><td>1) 1,33 ☐
2) 1,62 ☐
3) 1,81 ☐
4) 1,96 ☐</td></tr>
<tr><td>17.19. Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найти $M(X)$.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr>
</table></td><td>1) 7,6 ☐
2) 7,4 ☐
3) 7,2 ☐
4) 6,8 ☐</td></tr>
<tr><td>17.20. Дискретная случайная величина задана рядом распределения. Найти $M(X)$.
<table>
<tr><td>x_i</td><td>0</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>25</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,2</td><td>0,4</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr>
</table></td><td>1) 7,5 ☐
2) 8 ☐
3) 8,5 ☐
4) 9 ☐</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Задание</th><th>Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа</th></tr>
<tr><td>

17.21. Распределение дискретной случайной величины задано таблицей. Математическое ожидание равно...

<table>
<tr><td>x_i</td><td>3</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,1</td><td>0,5</td><td>0,4</td></tr>
</table>

</td><td>1) 4,9 ☐
2) 5,2 ☐
3) 5,7 ☐
4) 6,1 ☐</td></tr>
<tr><td>

17.22. Распределение дискретной случайной величины задано таблицей. Дисперсия равна...

<table>
<tr><td>x_i</td><td>2</td><td>5</td><td>8</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,5</td></tr>
</table>

</td><td>1) 3,69 ☐
2) 5,49 ☐
3) 7,81 ☐
4) 9,33 ☐</td></tr>
<tr><td>

17.23. Распределение дискретной случайной величины задано таблицей. Математическое ожидание равно...

<table>
<tr><td>x_i</td><td>–1</td><td>–2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,7</td></tr>
</table>

</td><td>1) 4,5 ☐
2) 3,5 ☐
3) 3 ☐
4) 2 ☐</td></tr>
<tr><td>

17.24. Распределение дискретной случайной величины задано таблицей. Математическое ожидание равно...

<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td>10</td><td>15</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,3</td><td>0,3</td><td>0,4</td></tr>
</table>

</td><td>1) 9,3 ☐
2) 10,1 ☐
3) 10,9 ☐
4) 11,3 ☐</td></tr>
<tr><td>

17.25. Дискретная случайная величина задана законом распределения. Тогда ее математическое ожидание равно 3,3, если...

<table>
<tr><td>x_i</td><td>–1</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>0,1</td><td>a</td><td>b</td></tr>
</table>

</td><td>1) $a = 0{,}1;\ b = 0{,}9$ ☐
2) $a = 0{,}2;\ b = 0{,}7$ ☐
3) $a = 0{,}8;\ b = 0{,}1$ ☐
4) $a = 0{,}1;\ b = 0{,}8$ ☐</td></tr>
<tr><td>

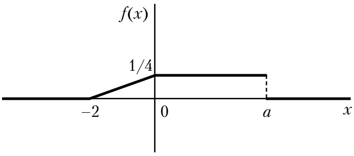
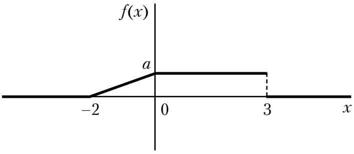
17.26. Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины X имеет вид

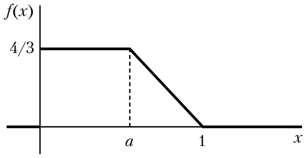
$$F(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 2,\\ 0{,}2 & 2<x\leqslant 4,\\ 0{,}7 & 4<x\leqslant 5,\\ 1 & x>5.\end{cases}$$

Тогда вероятность $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$ равна...

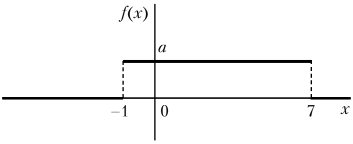
</td><td>1) 0,2 ☐
2) 0,9 ☐
3) 0,7 ☐
4) 0,8 ☐</td></tr>
</table>

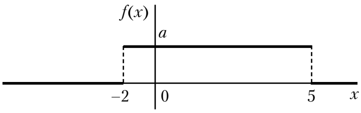
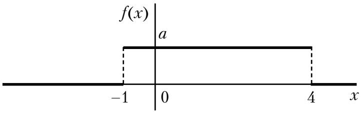
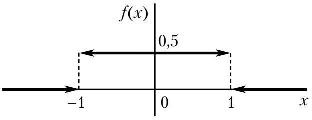
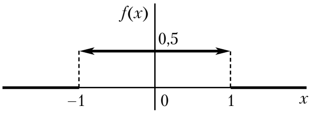
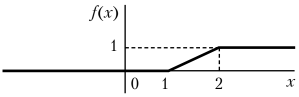
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
17.27. Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины X имеет вид $$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 3, \\ 0{,}2 & 3 < x \leqslant 4, \\ 0{,}6 & 4 < x \leqslant 6, \\ 1 & x > 5. \end{cases}$$ Тогда вероятность $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$ равна...	1) 0,8 ☐ 2) 0,6 ☐ 3) 0,4 ☐ 4) 0,2 ☐
17.28. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения $$F(x) = \begin{cases} C & x \leqslant 2, \\ 2x - 4 & 2 < x \leqslant 2{,}5, \\ 1 & x > 2{,}5. \end{cases}$$ Тогда значение C равно...	1) 2,25 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 0,5 ☐
17.29. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant -1, \\ 1 - x^2 & -1 < x \leqslant 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$ Тогда значение дифференциальной функции (плотности) распределения этой случайной величины в точке $x = -\frac{1}{2}$ равно...	1) 0,5 ☐ 2) 0,75 ☐ 3) 1 ☐ 4) 0,25 ☐
17.30. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ \frac{x^2}{9} & 0 < x \leqslant 3, \\ 1 & x > 3. \end{cases}$$ Тогда вероятность того, что эта случайная величина примет значение, заключенное в интервале (2, 4), равна...	1) $\frac{4}{9}$ ☐ 2) $\frac{5}{9}$ ☐ 3) $\frac{2}{9}$ ☐ 4) $\frac{1}{2}$ ☐
17.31. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 3, \\ x - 3 & 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ 1 & x > 4. \end{cases}$$ Чему равна вероятность события $X < 3{,}6$?	1) 0,2 ☐ 2) 0,3 ☐ 3) 0,5 ☐ 4) 0,6 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
17.32. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 3, \\ x - 3 & 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ 1 & x > 4. \end{cases}$ Чему равна вероятность события $3{,}1 < X < 4{,}5$?	1) 0,9 ☐ 2) 0,7 ☐ 3) 0,5 ☐ 4) 0,3 ☐
17.33. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 3, \\ x - 3 & 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ 1 & x > 4. \end{cases}$ Найти $M(X)$	1) 3,2 ☐ 2) 3,5 ☐ 3) 3,6 ☐ 4) 3,8 ☐
17.34. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 3, \\ x - 3 & 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ 1 & x > 4. \end{cases}$ Найти $D(X)$	1) 1/3 ☐ 2) 1/4 ☐ 3) 1/6 ☐ 4) 1/12 ☐
17.35. График плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины приведен на рисунке  Тогда значение a равно...	1) 6 ☐ 2) 3 ☐ 3) 5 ☐ 4) 4 ☐
17.36. График плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины приведен на рисунке  Тогда значение a равно...	1) 0,4 ☐ 2) 0,75 ☐ 3) 0,5 ☐ 4) 0,25 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
17.37. График плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины приведен на рисунке  Тогда значение a равно...	1) 0,5 ☐ 2) 0,6 ☐ 3) 0,75 ☐ 4) 0,7 ☐

Глава 18. Законы распределения

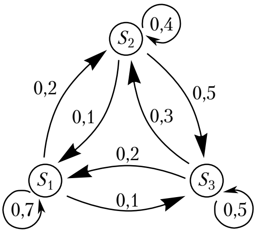
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
18.1. По какой формуле определяется математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$?	1) $M(x) = \frac{a+b}{2}$ ☐ 2) $M(x) = \frac{a+b}{12}$ ☐ 3) $M(x) = \frac{b-a}{2}$ ☐ 4) $M(x) = b - a$ ☐
18.2. По какой формуле определяется дисперсия случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$?	1) $D(x) = \frac{b-a}{2}$ ☐ 2) $D(x) = \frac{(b-a)^2}{2}$ ☐ 3) $D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$ ☐ 4) $D(x) = (b-a)^2$ ☐
18.3. График плотности распределения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(-1, 7)$, имеет вид  Тогда значение a равно...	1) 1 ☐ 2) 1/6 ☐ 3) 1/7 ☐ 4) 1/8 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
18.4. График плотности распределения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(-2, 5)$, имеет вид  Тогда значение a равно...	1) 1 ☐ 2) 1/5 ☐ 3) 1/7 ☐ 4) 1/3 ☐
18.5. График плотности распределения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(-1, 4)$, имеет вид  Тогда значение a равно...	1) 0,2 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) 0,33 ☐
18.6. Если график плотности распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид  то $D(6X + 5) = ...$	1) 9 ☐ 2) 6 ☐ 3) 21 ☐ 4) 12 ☐ 5) 15 ☐
18.7. Если график плотности распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид  то $M(2X + 7) = ...$	1) 11 ☐ 2) 0 ☐ 3) 7 ☐ 4) −1 ☐ 5) 1 ☐
18.8. Если график функции распределения случайной величины X имеет вид, то $M(4X) = ...$  	1) 4 ☐ 2) 5 ☐ 3) 6 ☐ 4) 8 ☐ 5) 9 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
18.9. Непрерывная случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-1, 5]$. Найти $D(X)$	1) 3 ☐ 2) 2 ☐ 3) 1 ☐ 4) 0,75 ☐
18.10. Случайная величина распределена равномерно на интервале (0, 6). Тогда ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны...	1) 4 и $\frac{4}{3}$ ☐ 2) 2 и 3 ☐ 3) 3 и 3 ☐ 4) 3 и 2 ☐
18.11. По какой формуле определяется плотность распределения $p(x)$ случайной величины X, распределенной по показательному закону, при $x \geqslant 0$?	1) $p(x) = 1 - \lambda e^{-\lambda x}$ ☐ 2) $p(x) = e^{-\lambda x}$ ☐ 3) $p(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ☐ 4) $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ☐
18.12. По какой формуле определяется функция распределения $F(x)$ случайной величины X, распределенной по показательному закону, при $x \geqslant 0$?	1) $F(x) = 1 - \lambda e^{-\lambda x}$ ☐ 2) $F(x) = e^{-\lambda x}$ ☐ 3) $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ☐ 4) $F(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ☐
18.13. По какой формуле определяется математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X, распределенной по показательному закону?	1) $M(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ ☐ 2) $M(X) = \frac{1}{\lambda}$ ☐ 3) $M(X) = e^{-\lambda}$ ☐ 4) $M(X) = 1 - e^{-\lambda}$ ☐
18.14. По какой формуле определяется дисперсия $D(X)$ случайной величины X, распределенной по показательному закону?	1) $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ ☐ 2) $D(X) = \frac{1}{\lambda}$ ☐ 3) $D(X) = e^{-\lambda}$ ☐ 4) $D(X) = 1 - e^{-\lambda}$ ☐
18.15. По какой формуле определяется плотность распределения $p(x)$ случайной величины X, распределенной по нормальному закону?	1) $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$ ☐ 2) $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ ☐ 3) $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}}$ ☐ 4) $p(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ ☐

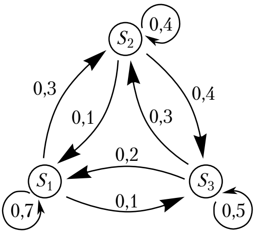
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
18.16. Чему равно математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону с плотностью распределения $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$?	1) a ☐ 2) e ☐ 3) σ ☐ 4) σ^2 ☐ 5) $\sqrt{2\pi}$ ☐
18.17. Чему равна дисперсия случайной величины X, распределенной по нормальному закону с плотностью распределения $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$?	1) a ☐ 2) e ☐ 3) σ ☐ 4) σ^2 ☐ 5) $\sqrt{2\pi}$ ☐
18.18. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$. Тогда математическое ожидание этой нормально распределенной случайной величины равно...	1) 18 ☐ 2) 4 ☐ 3) 3 ☐ 4) 9 ☐
18.19. Если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$, то $D(2X + 1) = ...$	1) 8 ☐ 2) 15 ☐ 3) 16 ☐ 4) 36 ☐ 5) 27 ☐
18.20. Если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}$, то $M(4X + 7) = ...$	1) 8 ☐ 2) 15 ☐ 3) 16 ☐ 4) 36 ☐ 5) 27 ☐
18.21. Если X — нормально распределенная случайная величина, у которой $a = 4;\ \sigma = 3,\ \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, то вероятность неравенства $1 < X < 13$ равна...	1) $0{,}5[\Phi(3) - \Phi(1)]$ ☐ 2) $0{,}5\Phi(3)$ ☐ 3) $0{,}5\Phi(1)$ ☐ 4) $0{,}5[\Phi(3) + \Phi(1)]$ ☐ 5) $\Phi(3)$ ☐
18.22. Если X – нормально распределенная случайная величина, у которой $a = 5;\ \sigma = 2,\ \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, то вероятность неравенства $4 < X < 6$ равна...	1) $0{,}5[\Phi(1) - \Phi(0{,}5)]$ ☐ 2) $0{,}5\Phi(0{,}5)$ ☐ 3) $\Phi(0{,}5)$ ☐ 4) $\Phi(1)$ ☐ 5) $0{,}5\Phi(1)$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
18.23. Если X – нормально распределенная случайная величина, у которой $a = 8; \sigma = 3, \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, то вероятность неравенства $11 < X < 14$ равна...	1) 0,5[Φ(2) + Φ(1)] ☐ 2) Φ(2) ☐ 3) Φ(1) ☐ 4) 0,5[Φ(2) – Φ(1)] ☐ 5) 0,5 Φ(2) ☐
18.24. Если X – нормально распределенная случайная величина, у которой $a = 4; \sigma = 3, \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, то вероятность неравенства $4 < X < 10$ равна...	1) 0,5Φ(2) ☐ 2) 0,5[Φ(2) – Φ(1)] ☐ 3) 0,5Φ(1) ☐ 4) Φ(2) ☐ 5) Φ(1) ☐
18.25. Вероятность появления события A в 20 повторных независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,85. Тогда математическое ожидание числа появлений этого события равно...	1) 2,55 ☐ 2) 16,15 ☐ 3) 3 ☐ 4) 17 ☐
18.26. Вероятность появления события A в 20 повторных независимых испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, равна 0,7. Тогда математическое ожидание числа появлений этого события равно...	1) 4,2 ☐ 2) 6 ☐ 3) 14 ☐ 4) 13,3 ☐
18.27. Вероятность годного изделия 0,5. Чему приближенно равна вероятность того, что в партии из 400 изделий число годных лежит в пределах от 180 до 220?	1) 0,5[Φ(1,5) + Φ(1)] ☐ 2) 0,5[Φ(2) – Φ(1)] ☐ 3) Φ(1,5) ☐ 4) Φ(2) ☐ 5) 0,5Φ(2) ☐
18.28. Неравенство Маркова имеет вид...	1) $P(X < \xi) \leqslant 1 - \frac{M(X)}{\xi}$ ☐ 2) $P(X < \xi) \geqslant 1 - \frac{M(X)}{\xi}$ ☐ 3) $P(X < \xi) = 1 - \frac{M(X)}{\xi}$ ☐ 4) $P(X = \xi) \leqslant 1 - \frac{M(X)}{\xi}$ ☐
18.29. Наиболее общим случаем закона больших чисел является теорема...	1) Муавра – Лапласа ☐ 2) Чебышева ☐ 3) Маркова ☐ 4) Ляпунова ☐

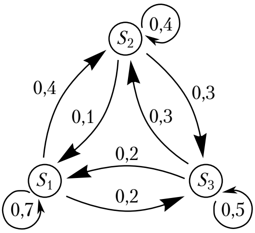
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
18.30. Состав исправных (состояние S_1) и требующих ремонта (состояние S_2) машин в автопарке в начале года определяется соотношением $k = \frac{N(S_1)}{N(S_2)} = 8:1$, а вероятности переходов между этими состояниями по истечении года характеризуются матрицей $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$. Тогда в конце года (или в начале следующего года) соотношение k будет равно...	1) 3 : 1 ☐ 2) 13 : 6 ☐ 3) 14 : 5 ☐ 4) 5 : 4 ☐
18.31. Состав исправных (состояние S_1) и требующих ремонта (состояние S_2) машин в автопарке в начале года определяется соотношением $k = \frac{N(S_1)}{N(S_2)} = 7:2$, а вероятности переходов между этими состояниями по истечении года характеризуются матрицей $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$. Тогда в конце года (или в начале следующего года) соотношение k будет равно...	1) 23 : 7 ☐ 2) 77 : 13 ☐ 3) 3 : 1 ☐ 4) 13 : 7 ☐
18.32. Дана матрица переходных вероятностей марковской системы $\begin{pmatrix} 0{,}7 & a & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & b \\ c & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Тогда граф состояний этой системы имеет вид... А)  	1) А ☐ 2) Б ☐ 3) В ☐ 4) Г ☐

<table>
<tr><th>Задание</th><th>Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа</th></tr>
<tr><td>

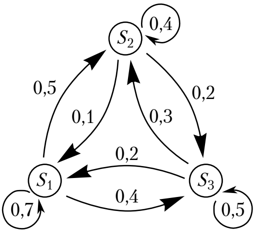
Б)



В)



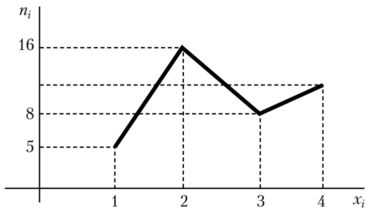
Г)

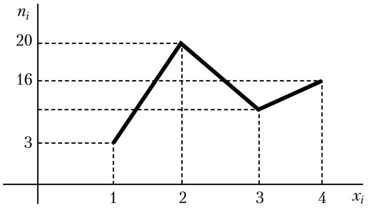
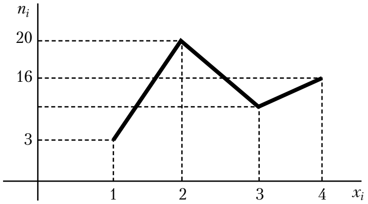
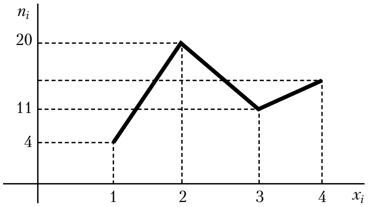


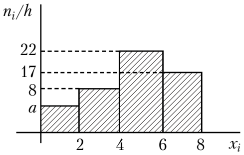
</td><td></td></tr>
</table>

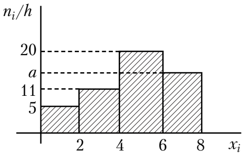
Глава 19. Математическая статистика

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
19.1. Если N — объем генеральной совокупности, а n — объем выборки, то общее число различных бесповторных выборок равно...	1) $P_N - P_n$ ☐ 2) C_N^n ☐ 3) N^n ☐ 4) A_N^n ☐
19.2. Если α_0 — точное значение параметра генеральной совокупности, α — точечная оценка этого параметра, то требование несмещенности оценки математически записывается в виде...	1) $D(\alpha) \to \min$ ☐ 2) $\alpha = \alpha_0$ ☐ 3) $M(\alpha) = \alpha_0$ ☐ 4) $\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_0$ ☐

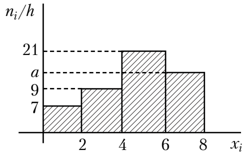
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
19.3. Если α_0 — точное значение параметра генеральной совокупности, α — точечная оценка этого параметра, то требование состоятельности оценки математически записывается в виде...	1) $D(\alpha) \to \min$ ☐ 2) $\alpha = \alpha_0$ ☐ 3) $M(\alpha) = \alpha_0$ ☐ 4) $\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_0$ ☐
19.4. Если α_0 — точное значение параметра генеральной совокупности, α — точечная оценка этого параметра, то требование эффективности оценки математически записывается в виде...	1) $D(\alpha) \to \min$ ☐ 2) $\alpha = \alpha_0$ ☐ 3) $M(\alpha) = \alpha_0$ ☐ 4) $\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha_0$ ☐
19.5. Являются ли выборочная средняя $\overline{x}$ и выборочная дисперсия σ^2 несмещенными точечными оценками генеральной средней $\overline{x}_0$ и генеральной дисперсии σ_0^2 соответственно?	1) И та и другая ☐ 2) Ни та ни другая ☐ 3) Только $\overline{x}$ ☐ 4) Только σ^2 ☐
19.6. Исправленная выборочная статистическая дисперсия определяется по формуле...	1) $s^2 = \dfrac{\sigma^2}{n-1}$ ☐ 2) $s^2 = \dfrac{n}{n-1}\sigma^2$ ☐ 3) $s^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$ ☐ 4) $s^2 = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2$ ☐
19.7. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 40$, полигон частот которой имеет вид  Тогда число вариант $x_i = 4$ в выборке равно...	1) 12 ☐ 2) 11 ☐ 3) 10 ☐ 4) 40 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
19.8. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 53$, полигон частот которой имеет вид  Тогда число вариант $x_i = 3$ в выборке равно...	1) 14 ☐ 2) 53 ☐ 3) 15 ☐ 4) 13 ☐
19.9. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 51$, полигон частот которой имеет вид  Тогда число вариант $x_i = 3$ в выборке равно...	1) 11 ☐ 2) 13 ☐ 3) 51 ☐ 4) 12 ☐
19.10. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$, полигон частот которой имеет вид  Тогда число вариант $x_i = 4$ в выборке равно...	1) 15 ☐ 2) 16 ☐ 3) 14 ☐ 4) 50 ☐

<table>
<tr><th>Задание</th><th>Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа</th></tr>
<tr><td>19.11. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n = 50
<table>
<tr><td>x_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>n_i</td><td>n_1</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td></tr>
</table>
Тогда n_1 равен...</td><td>1) 50 ☐
2) 26 ☐
3) 27 ☐
4) 10 ☐</td></tr>
<tr><td>19.12. Мода вариационного ряда 4, 5, 7, 7, 8, 9 равна...</td><td>1) 7 ☐ 2) 4 ☐
3) 40 ☐ 4) 9 ☐</td></tr>
<tr><td>19.13. Мода вариационного ряда 1, 2, 3, 3, 4, 6 равна...</td><td>1) 3 ☐ 2) 4 ☐
3) 6 ☐ 4) 20 ☐</td></tr>
<tr><td>19.14. Мода вариационного ряда 1, 2, 4, 5, 6, 6, 8 равна...</td><td>1) 8 ☐ 2) 5 ☐
3) 6 ☐ 4) 1 ☐</td></tr>
<tr><td>19.15. Мода вариационного ряда 1, 2, 2, 3, 4, 5 равна...</td><td>1) 5 ☐ 2) 3 ☐
3) 2 ☐ 4) 17 ☐</td></tr>
<tr><td>19.16. Статистическое распределение выборки имеет вид
<table>
<tr><td>x_i</td><td>–2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>n_i</td><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>7</td></tr>
</table>
Тогда относительная частота варианты x_2 = 2 равна...</td><td>1) 4 ☐
2) 0,2 ☐
3) 0,65 ☐
4) 0,5 ☐</td></tr>
<tr><td>19.17. По выборке объема n = 100 построена гистограмма частот


Тогда значение a равно...</td><td>1) 53 ☐
2) 3 ☐
3) 2 ☐
4) 4 ☐</td></tr>
<tr><td>19.18. По выборке объема n = 100 построена гистограмма частот


Тогда значение a равно...</td><td>1) 14 ☐
2) 64 ☐
3) 13 ☐
4) 15 ☐</td></tr>
</table>

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
19.19. По выборке объема $n = 100$ построена гистограмма частот  Тогда значение a равно...	1) 13 ☐ 2) 63 ☐ 3) 14 ☐ 4) 12 ☐
19.20. Интересуясь размером проданной в магазине мужской обуви, мы получили данные по 100 проданным парам обуви и нашли эмпирическую функцию распределения: $F_{100}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 37, \\ 0{,}04, & \text{если } 37 < x \leqslant 38, \\ 0{,}14, & \text{если } 38 < x \leqslant 39, \\ 0{,}29, & \text{если } 39 < x \leqslant 40, \\ 0{,}52, & \text{если } 40 < x \leqslant 41, \\ 0{,}78, & \text{если } 41 < x \leqslant 42, \\ 0{,}92, & \text{если } 42 < x \leqslant 43, \\ 1, & \text{если } x > 43. \end{cases}$ Обуви 39-го размера было продано...	1) 12 ☐ 2) 23 ☐ 3) 21 ☐ 4) 10 ☐ 5) 15 ☐
19.21. С помощью журнала посещаемости собраны данные о числе пропущенных занятий по математике (за один семестр) у 25 студентов I курса. В итоге получены значения: 2, 2, 0, 1, 6, 3, 0, 1, 5, 4, 0, 3, 3, 2, 1, 2, 0, 0, 2, 3, 6, 0, 3, 0, 1. Значение эмпирической функции распределения $F_{25}(3)$ по данной выборке равно...	1) 12/25 ☐ 2) 17/25 ☐ 3) 11/25 ☐ 4) 16/25 ☐ 5) 14/25 ☐
19.22. В результате 10 измерений некоторой физической величины одним прибором (без математических погрешностей) получены следующие результаты: 92; 94; 100; 102; 104; 104; 105; 107; 110; 112. Несмещенная оценка этой величины равна...	1) 106 ☐ 2) 105 ☐ 3) 94 ☐ 4) 103 ☐ 5) 100 ☐

<table>
<tr><th>Задание</th><th>Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа</th></tr>
<tr><td>19.23. После восьми заездов автомобиля на определенной трассе были получены следующие значения его максимальной скорости (в м/сек): 31; 41; 34; 40; 38; 35, 38, 39. Значение несмещенной оценки максимальной скорости автомобиля равно...</td><td>1) 30 ☐
2) 33 ☐
3) 31 ☐
4) 38 ☐
5) 37 ☐</td></tr>
<tr><td>19.24. Из генеральной совокупности извлечена выборка и получен статистический ряд распределения исследуемого признака
<table>
<tr><td>x_i</td><td>2</td><td>4</td><td>10</td><td>12</td></tr>
<tr><td>m_i</td><td>7</td><td>15</td><td>9</td><td>9</td></tr>
</table>
Несмещенная оценка генеральной средней равна...</td><td>1) 5,8 ☐
2) 6,2 ☐
3) 6,8 ☐
4) 7 ☐
5) 7,2 ☐</td></tr>
<tr><td>19.25. Из генеральной совокупности извлечена выборка и получен статистический ряд распределения исследуемого признака
<table>
<tr><td>x_i</td><td>–5</td><td>–1</td><td>2</td><td>10</td></tr>
<tr><td>m_i</td><td>12</td><td>8</td><td>13</td><td>17</td></tr>
</table>
Несмещенная оценка генеральной средней равна...</td><td>1) 1,28 ☐
2) 1,44 ☐
3) 1,96 ☐
4) 2,56 ☐
5) 2,72 ☐</td></tr>
<tr><td>19.26. Из генеральной совокупности извлечена выборка и получен статистический ряд распределения исследуемого признака
<table>
<tr><td>x_i</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>10</td></tr>
<tr><td>m_i</td><td>5</td><td>8</td><td>5</td><td>2</td></tr>
</table>
Выборочная дисперсия равна...</td><td>1) 3,5 ☐
2) 4 ☐
3) 4,5 ☐
4) 5 ☐
5) 5,5 ☐</td></tr>
<tr><td>19.27. Проведено четыре измерения (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 2; 3; 6; 9. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна...</td><td>1) 5 ☐
2) 5,5 ☐
3) 5,25 ☐
4) 6 ☐</td></tr>
</table>

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
19.28. Проведено четыре измерения (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 3; 4; 6; 8. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна...	1) 5,5 ☐ 2) 5 ☐ 3) 5,25 ☐ 4) 6 ☐
19.29. Проведено четыре измерения (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 3; 3; 9; 16. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна...	1) 9 ☐ 2) 9,5 ☐ 3) 8 ☐ 4) 7,75 ☐
19.30. Проведено четыре измерения (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 5; 6; 9; 12. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна...	1) 7 ☐ 2) 8,5 ☐ 3) 8,25 ☐ 4) 8 ☐
19.31. Для выборки объема $n = 12$ вычислена выборочная дисперсия $D_в = 132$. Тогда исправленная выборочная дисперсия s^2 для этой выборки равна...	1) 120 ☐ 2) 121 ☐ 3) 150 ☐ 4) 144 ☐
19.32. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 11; 13; 15. Тогда несмещенная оценка дисперсии измерений равна...	1) 3 ☐ 2) 0 ☐ 3) 8 ☐ 4) 4 ☐
19.33. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами и имеет следующие результаты наблюдаемых значений: 38; 18; 8; 26; 10; 24; 15; 21. Значение параметра распределения a этой случайной величины следует оценить как...	1) 8 ☐ 2) 20 ☐ 3) 24 ☐ 4) 26 ☐ 5) 27 ☐
19.34. Случайная величина X распределена по показательному закону. По результатам наблюдаемых значений 17; 9; 30; 7; 35; 23; 14; 25 этой случайной величины параметр распределения следует оценить как...	1) 0,05 ☐ 2) 0,15 ☐ 3) 0,2 ☐ 4) 0,5 ☐ 5) 1 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
19.35. Дана выборка объема *n*. Если значение признака у каждого элемента выборки уменьшить в 8 раз, то выборочная дисперсия...	1) не изменится ☐ 2) уменьшится в 64 раза ☐ 3) уменьшится в 8 раз ☐ 4) увеличится в 8 раз ☐
19.36. Дана выборка объема *n*. Если значение признака у каждого элемента выборки уменьшить на 7 единиц, то выборочная дисперсия...	1) уменьшится на 7 единиц ☐ 2) уменьшится в 7 раз ☐ 3) увеличится на 7 единиц ☐ 4) не изменится ☐
19.37. Дана выборка объема *n*. Если значение признака у каждого элемента выборки увеличить в 2 раза, то выборочная дисперсия...	1) уменьшится в 2 раза ☐ 2) увеличится в 4 раза ☐ 3) не изменится ☐ 4) увеличится в 2 раза ☐
19.38. Если t — корень уравнения $\Phi(t) = \gamma$, то доверительный интервал генеральной средней с доверительной вероятностью имеет вид...	1) $\left(\overline{x}-\frac{t\sigma_0}{\sqrt{n}}; \overline{x}+\frac{t\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$ ☐ 2) $\left(\overline{x}-\frac{\sqrt{n}\,t}{\sigma_0}; \overline{x}+\frac{\sqrt{n}\,t}{\sigma_0}\right)$ ☐ 3) $(\overline{x}-\sigma_0 t; \overline{x}+\sigma_0 t)$ ☐ 4) $[(t-1)\overline{x}; t\overline{x}]$ ☐
19.39. Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 13. Тогда его интервальная оценка может иметь вид...	1) (11,8; 12,8) ☐ 2) (13; 14,6) ☐ 3) (11,6; 13) ☐ 4) (11,8; 14,2) ☐
19.40. Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 11. Тогда его интервальная оценка может иметь вид...	1) (10,1; 11,9) ☐ 2) (10,1; 11) ☐ 3) (10,1; 10,8) ☐ 4) (11; 11,9) ☐
19.41. Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 16. Тогда его интервальная оценка может иметь вид...	1) (16; 17,1) ☐ 2) (14,9; 16) ☐ 3) (14,9; 17,1) ☐ 4) (14,9; 15,2) ☐
19.42. Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 10. Тогда его интервальная оценка может иметь вид...	1) (10; 10,9) ☐ 2) (8,5; 11,5) ☐ 3) (8,4; 10) ☐ 4) (8,6; 9,6) ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
19.43. Вероятность ошибки 1-го рода при проверке статистических гипотез называется...	1) мощность критерия ☐ 2) степень свободы ☐ 3) уровень значимости ☐ 4) статистика критерия ☐
19.44. Вероятность недопущения ошибки 2-го рода при проверке статистических гипотез называется...	1) мощность критерия ☐ 2) степень свободы ☐ 3) уровень значимости ☐ 4) статистика критерия ☐
19.45. Статистический критерий называется критерием согласия, если...	1) $\alpha = 0{,}05$ ☐ 2) $\beta \to 1$ при $n \to \infty$ ☐ 3) $\beta = 1 - \alpha$ ☐ 4) $\alpha \to 0$ при $n \to \infty$ ☐
19.46. Статистика критерия согласия χ^2 Пирсона определяется по формуле...	1) $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{m_i}{(m_i - m_i')^2}$ ☐ 2) $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{m_i}{m_i'}$ ☐ 3) $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{m_i - m_i'}{m_i'}$ ☐ 4) $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'}$ ☐
19.47. Если основная гипотеза имеет вид H_0: $p = 0{,}4$, то конкурирующей может быть гипотеза...	1) H_1: $p \leqslant 0{,}4$ ☐ 2) H_1: $p \neq 0{,}3$ ☐ 3) H_1: $p \geqslant 0{,}4$ ☐ 4) H_1: $p > 0{,}4$ ☐
19.48. Если основная гипотеза имеет вид H_0: $a = 13$, то конкурирующей может быть гипотеза...	1) H_1: $a \geqslant 13$ ☐ 2) H_1: $a \neq 13$ ☐ 3) H_1: $a \leqslant 13$ ☐ 4) H_1: $a \leqslant 23$ ☐
19.49. Если основная гипотеза имеет вид H_0: $a = 17$, то конкурирующей может быть гипотеза...	1) H_1: $a \geqslant 17$ ☐ 2) H_1: $a \neq 17$ ☐ 3) H_1: $a \leqslant 27$ ☐ 4) H_1: $a \leqslant 17$ ☐
19.50. Если основная гипотеза имеет вид H_0: $\sigma^2 = 1$, то конкурирующей может быть гипотеза...	1) H_1: $\sigma^2 \leqslant 1$ ☐ 2) H_1: $\sigma^2 \geqslant 1$ ☐ 3) H_1: $\sigma^2 \neq 3$ ☐ 4) H_1: $\sigma^2 < 1$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
19.51. Если основная гипотеза имеет вид H_0: $a = 12$, то конкурирующей может быть гипотеза...	1) H_1: $a \neq 12$ ☐ 2) H_1: $a \leqslant 12$ ☐ 3) H_1: $a \geqslant 12$ ☐ 4) H_1: $a \geqslant 3$ ☐
19.52. Если основная гипотеза имеет вид H_0: $a = 10$, то конкурирующей может быть гипотеза...	1) H_1: $a \geqslant 10$ ☐ 2) H_1: $a \neq 10$ ☐ 3) H_1: $a \leqslant 20$ ☐ 4) H_1: $a \leqslant 10$ ☐
19.53. Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид $y = -0{,}8 + 1{,}2x$, среднеквадратические отклонения равны $\sigma_x = 0{,}28$, $\sigma_y = 0{,}56$. Тогда коэффициент корреляции равен...	1) 0,6 ☐ 2) –0,6 ☐ 3) 2,4 ☐ 4) 0,19 ☐
19.54. Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид $y = 2{,}8 + 0{,}8x$, среднеквадратические отклонения равны $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 3{,}2$. Тогда коэффициент корреляции равен...	1) 0,5 ☐ 2) 3,36 ☐ 3) 5,12 ☐ 4) –0,5 ☐
19.55. Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид $y = 4{,}2 - 0{,}6x$, среднеквадратические отклонения равны $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 1{,}2$. Тогда коэффициент корреляции равен...	1) 1 ☐ 2) –0,36 ☐ 3) –1,44 ☐ 4) –1 ☐

Часть 4
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Глава 20. Логика высказываний

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
20.1. Как называется логическая операция, при которой составное высказывание истинно тогда и только тогда, когда оба простых высказывания истинны?	1) Конъюнкция ☐ 2) Импликация ☐ 3) Эквивалентность ☐ 4) Отрицание ☐ 5) Дизъюнкция ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
20.2. Как называется логическая операция, при которой составное высказывание ложно тогда и только тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно?	1) Конъюнкция ☐ 2) Импликация ☐ 3) Эквивалентность ☐ 4) Отрицание ☐ 5) Дизъюнкция ☐
20.3. Как называется логическая операция, при которой составное высказывание ложно тогда и только тогда, когда оба элементарных высказывания ложны?	1) Конъюнкция ☐ 2) Импликация ☐ 3) Эквивалентность ☐ 4) Отрицание ☐ 5) Дизъюнкция ☐
20.4. Как называется логическая операция, при которой составное высказывание истинно тогда и только тогда, когда элементарные высказывания либо оба истинны, либо оба ложны?	1) Конъюнкция ☐ 2) Импликация ☐ 3) Эквивалентность ☐ 4) Отрицание ☐ 5) Дизъюнкция ☐
20.5. Формализовать составное высказывание: «Если свидетель не сказал правду, то неверно, что Петров совершил кражу или избил прохожего» при следующих обозначениях элементарных высказываний: X — свидетель сказал правду; Y — Петров совершил кражу; Z — Петров избил прохожего	1) $\bar{X} \to \bar{Y} \wedge \bar{Z}$ ☐ 2) $\bar{X} \to \overline{Y \vee Z}$ ☐ 3) $\bar{X} \to \bar{Y} \vee \bar{Z}$ ☐ 4) $\overline{X \to Y \vee Z}$ ☐ 5) $\bar{X} \to \overline{Y \wedge Z}$ ☐
20.6. Формализовать составное высказывание: «Неверно, что если Петров невиновен и свидетель сказал правду, то суд вынес обвинительный приговор» при следующих обозначениях элементарных высказываний: X — Петров виновен; Y — свидетель сказал правду; Z — суд вынес обвинительный приговор	1) $\bar{X} \wedge \overline{Y \to Z}$ ☐ 2) $(\bar{X} \to \bar{Y}) \wedge \bar{Z}$ ☐ 3) $\overline{(\bar{X} \to Y) \to Z}$ ☐ 4) $\bar{X} \to \overline{Y \wedge Z}$ ☐ 5) $\bar{X} \to (\bar{Y} \wedge \bar{Z})$ ☐
20.7. Формализовать составное высказывание: «Преступник совершает кражу и суд не выносит ему обвинительный приговор тогда и только тогда, когда свидетель не говорит правду» при следующих обозначениях элементарных высказываний: X — преступник совершает кражу; Y — суд выносит ему обвинительный приговор; Z — свидетель говорит правду	1) $(X \wedge \bar{Y}) \leftrightarrow \bar{Z}$ ☐ 2) $(X \to \bar{Y}) \leftrightarrow \bar{Z}$ ☐ 3) $(X \vee \bar{Y}) \leftrightarrow \bar{Z}$ ☐ 4) $X \wedge \overline{Y \to Z}$ ☐ 5) $X \wedge (\bar{Y} \wedge \bar{Z})$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
20.8. Формализовать составное высказывание: «Неверно, что если свидетель не сказал правду и Петров был осужден, то его адвокат не подал жалобу» при следующих обозначениях элементарных высказываний: X — свидетель сказал правду; Y — Петров был осужден; Z — его адвокат подал жалобу	1) $\overline{(\bar{X} \vee Y) \leftrightarrow \bar{Z}}$ ☐ 2) $\overline{(\bar{X} \vee Y)} \leftrightarrow \bar{Z}$ ☐ 3) $\overline{(\bar{X} \wedge Y)} \leftrightarrow \bar{Z}$ ☐ 4) $\overline{(\bar{X} \wedge Y) \rightarrow \bar{Z}}$ ☐ 5) $\bar{X} \wedge (Y \rightarrow \bar{Z})$ ☐
20.9. Если в последнем столбце таблицы истинности формулы только единицы, то формула называется...	1) контрапозиция ☐ 2) тавтология ☐ 3) импликация ☐ 4) противоречие ☐ 5) эквивалентность ☐
20.10. Если в последнем столбце таблицы истинности формулы только нули, то формула называется...	1) контрапозиция ☐ 2) тавтология ☐ 3) импликация ☐ 4) противоречие ☐ 5) эквивалентность ☐
20.11. Как называется равносильность $X \rightarrow Y \equiv \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$?	1) Закон идемпотентности ☐ 2) Закон дистрибутивности ☐ 3) Закон де Моргана ☐ 4) Закон противоречия ☐ 5) Закон контрапозиции ☐
20.12. Как называется равносильность $X \vee X \equiv X$?	1) Закон идемпотентности ☐ 2) Закон дистрибутивности ☐ 3) Закон де Моргана ☐ 4) Закон противоречия ☐ 5) Закон контрапозиции ☐
20.13. Как называется равносильность $X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$?	1) Закон идемпотентности ☐ 2) Закон дистрибутивности ☐ 3) Закон де Моргана ☐ 4) Закон противоречия ☐ 5) Закон контрапозиции ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
20.14. Как называется равносильность $X \wedge \overline{X} \equiv 0$?	1) Закон идемпотентности ☐ 2) Закон дистрибутивности ☐ 3) Закон де Моргана ☐ 4) Закон противоречия ☐ 5) Закон контрапозиции ☐
20.15. Как называется равносильность $X \wedge Y \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$?	1) Закон идемпотентности ☐ 2) Закон дистрибутивности ☐ 3) Закон де Моргана ☐ 4) Закон противоречия ☐ 5) Закон контрапозиции ☐

Глава 21. Алгебра логики

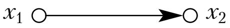
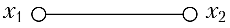
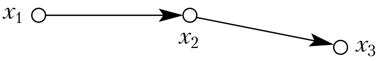
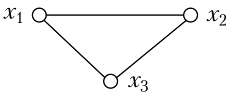
<table>
<tr><th>Задание</th><th colspan="4">Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа</th></tr>
<tr><td rowspan="2">21.1. Всего булевых функций одной булевой переменной имеется...</td><td>1) 16</td><td>☐</td><td>2) 8</td><td>☐</td></tr>
<tr><td>3) 4</td><td>☐</td><td>4) 1</td><td>☐</td></tr>
<tr><td rowspan="2">21.2. Всего булевых функций двух булевых переменных имеется...</td><td>1) 16</td><td>☐</td><td>2) 8</td><td>☐</td></tr>
<tr><td>3) 4</td><td>☐</td><td>4) 1</td><td>☐</td></tr>
<tr><td>21.3. Булева функция $z = f(x_1, x_2)$, определяемая ниже, называется...
<table>
<tr><td>x_1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>z</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table></td><td colspan="4">1) штрих Шеффера ☐
2) стрелка Пирса ☐
3) конъюнкция ☐
4) дизъюнкция ☐
5) импликация ☐</td></tr>
<tr><td>21.4. Булева функция $z = f(x_1, x_2)$, определяемая ниже, называется...
<table>
<tr><td>x_1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>z</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table></td><td colspan="4">1) штрих Шеффера ☐
2) стрелка Пирса ☐
3) конъюнкция ☐
4) дизъюнкция ☐
5) импликация ☐</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Задание</th><th>Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа</th></tr>
<tr><td>21.5. Булева функция $z = f(x_1, x_2)$, определяемая ниже, называется...
<table>
<tr><td>x_1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>z</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>1) штрих Шеффера ☐
2) стрелка Пирса ☐
3) конъюнкция ☐
4) дизъюнкция ☐
5) импликация ☐</td></tr>
<tr><td>21.6. Булева функция $z = f(x_1, x_2)$, определяемая ниже, называется...
<table>
<tr><td>x_1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>z</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table></td><td>1) штрих Шеффера ☐
2) стрелка Пирса ☐
3) конъюнкция ☐
4) дизъюнкция ☐
5) импликация ☐</td></tr>
<tr><td>21.7. Булева функция $z = f(x_1, x_2)$, определяемая ниже, называется...
<table>
<tr><td>x_1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>x_2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>z</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table></td><td>1) штрих Шеффера ☐
2) стрелка Пирса ☐
3) конъюнкция ☐
4) дизъюнкция ☐
5) импликация ☐</td></tr>
<tr><td>21.8. Упростить формулу
$\overline{\overline{\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1} + \overline{x}_3}$</td><td>1) $x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3$ ☐
2) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ ☐
3) $x_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_3$ ☐
4) $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3$ ☐
5) $x_1 + x_2 \cdot \overline{x}_3$ ☐</td></tr>
<tr><td>21.9. Упростить формулу
$\overline{x_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_1}$</td><td>1) $x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3$ ☐
2) $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3$ ☐
3) $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_3$ ☐
4) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ ☐
5) $x_1 + x_2 \cdot \overline{x}_3$ ☐</td></tr>
<tr><td>21.10. Упростить формулу
$\overline{\overline{\overline{x}_1 + x_2} \cdot x_3}$</td><td>1) $x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3$ ☐
2) $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3$ ☐
3) $\overline{x}_1 \cdot x_2 + \overline{x}_3$ ☐
4) $x_1 + x_2 + x_3$ ☐
5) $\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3$ ☐</td></tr>
<tr><td>21.11. Упростить формулу
$\overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x_2 \cdot \overline{x}_3}}$</td><td>1) $x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3$ ☐
2) $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3$ ☐
3) $\overline{x}_1 \cdot x_2 + \overline{x}_3$ ☐
4) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ ☐
5) $x_1 + x_2 \cdot \overline{x}_3$ ☐</td></tr>
</table>

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
21.12. По таблице истинности составить СДНФ для функции $z = f(x_1, x_2, x_3)$ и упростить $\begin{array}{ccccccccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$	1) $z = x_1$ ☐ 2) $z = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$ ☐ 3) $z = \overline{x}_3$ ☐ 4) $z = x_2 \cdot x_3$ ☐ 5) $z = x_1 + x_2$ ☐
21.13. По таблице истинности составить СКНФ для функции $z = f(x_1, x_2, x_3)$ и упростить $\begin{array}{ccccccccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$	1) $z = x_3$ ☐ 2) $z = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$ ☐ 3) $z = \overline{x}_1$ ☐ 4) $z = \overline{x}_3$ ☐ 5) $z = x_1 + x_2$ ☐
21.14. По таблице истинности составить СКНФ для функции $z = f(x_1, x_2, x_3)$ и упростить $\begin{array}{ccccccccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	1) $z = \overline{x}_2 + \overline{x}_3$ ☐ 2) $z = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$ ☐ 3) $z = \overline{x}_1$ ☐ 4) $z = \overline{x}_3$ ☐ 5) $z = x_1 + x_2$ ☐
21.15. По таблице истинности составить СКНФ для функции $z = f(x_1, x_2, x_3)$ и упростить $\begin{array}{ccccccccc} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$	1) $z = \overline{x}_2 + \overline{x}_3$ ☐ 2) $z = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$ ☐ 3) $z = \overline{x}_1$ ☐ 4) $z = \overline{x}_3$ ☐ 5) $z = x_1 + x_2$ ☐
21.16. Упростить формулу $\overline{a \cdot b + \overline{d}} \cdot \overline{c} + \overline{\overline{d} \cdot (a + b)}$	1) $\overline{b} + \overline{c}$ ☐ 2) $d + \overline{a} \cdot \overline{b}$ ☐ 3) $c \cdot \overline{d}$ ☐ 4) $\overline{a} + \overline{b} \cdot d$ ☐ 5) $\overline{a} + c \cdot d$ ☐
21.17. Упростить формулу $\overline{\overline{b \cdot \overline{c} + d} + \overline{c} \cdot d + a \cdot c \cdot \overline{d}}$ при $c = 1$	1) d ☐ 2) $c + \overline{d}$ ☐ 3) 1 ☐ 4) $b \cdot \overline{d} + d$ ☐ 5) 0 ☐

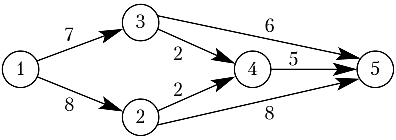
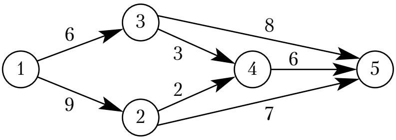
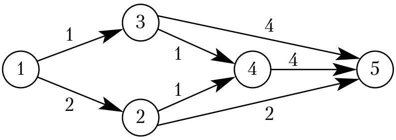
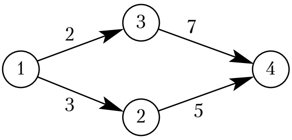
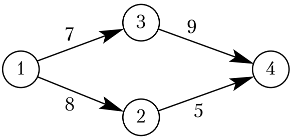
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
21.18. Упростить формулу $(a + b + c) \cdot a \cdot b + b + c$	1) $a + c$ ☐ 2) 0 ☐ 3) $b \cdot c$ ☐ 4) c ☐ 5) $b + c$ ☐
21.19. Упростить формулу $\overline{(a + b \cdot \overline{c}) \cdot d} + \overline{c \cdot \overline{d}} + \overline{a} \cdot (c + \overline{d})$	1) $\overline{c} + \overline{a} \cdot d$ ☐ 2) 1 ☐ 3) $a \cdot (\overline{b} + c)$ ☐ 4) $a \cdot c + \overline{d}$ ☐ 5) $\overline{c} + d$ ☐
21.20. Упростить формулу $\overline{a} \cdot (a \cdot b + \overline{c}) + b \cdot \overline{c} + \overline{a \cdot b \cdot \overline{c}}$ при $a = 1$	1) b ☐ 2) $\overline{b}$ ☐ 3) $b \cdot \overline{c}$ ☐ 4) $\overline{b} \cdot c$ ☐ 5) 1 ☐

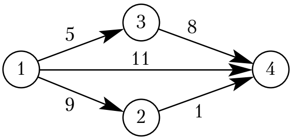
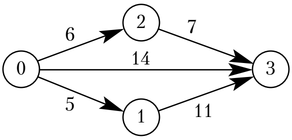
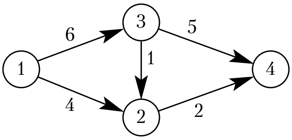
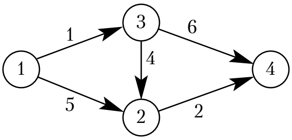
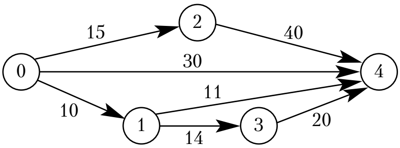
Глава 22. Графы

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
22.1. Как называется элемент графа, изображенный ниже?  	1) Стрелка ☐ 2) Цепь ☐ 3) Дуга ☐ 4) Ребро ☐
22.2. Как называется элемент графа, изображенный ниже?  	1) Ребро ☐ 2) Путь ☐ 3) Линия ☐ 4) Дуга ☐
22.3. Как называется элемент графа, изображенный ниже?  	1) Маршрут ☐ 2) Контур ☐ 3) Цепь ☐ 4) Путь ☐
22.4. Как называется элемент графа, изображенный ниже?  	1) Цикл ☐ 2) Цепь ☐ 3) Контур ☐ 4) Треугольник ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
22.5. Как называется граф, не содержащий петель и параллельных дуг?	1) Гамильтонов ☐ 2) Неориентированный ☐ 3) Полный ☐ 4) Простой ☐ 5) Эйлеров ☐
22.6. Как называется число дуг, инцидентных данной вершине?	1) Полустепень исхода ☐ 2) Степень вершины ☐ 3) Вес вершины ☐ 4) Индекс вершины ☐ 5) Полустепень захода ☐
22.7. Как называется число, приписываемое ребру на графе?	1) Вес ребра ☐ 2) Модуль ребра ☐ 3) Степень ребра ☐ 4) Полустепень ребра ☐ 5) Индекс ребра ☐
22.8. Как называется граф, у которого все отрезки, соединяющие вершины, являются дугами?	1) Эйлеров ☐ 2) Гамильтонов ☐ 3) Простой ☐ 4) Орграф ☐ 5) Неориентированный ☐
22.9. Как называется граф, в котором существует цикл, проходящий через все ребра графа, причем по одному разу?	1) Эйлеров ☐ 2) Гамильтонов ☐ 3) Простой ☐ 4) Орграф ☐ 5) Неориентированный ☐
22.10. Как называется граф, в котором существует цикл, проходящий через все вершины графа, причем по одному разу?	1) Эйлеров ☐ 2) Гамильтонов ☐ 3) Простой ☐ 4) Орграф ☐ 5) Неориентированный ☐

Глава 23. Элементы сетевого планирования и управления

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
23.1. Ближайшим сроком завершения комплекса работ, представленного сетевой моделью, является... 	1) 13 ☐ 2) 16 ☐ 3) 15 ☐ 4) 14 ☐
23.2. Ближайшим сроком завершения комплекса работ, представленного сетевой моделью, является... 	1) 15 ☐ 2) 17 ☐ 3) 16 ☐ 4) 14 ☐
23.3. Ближайшим сроком завершения комплекса работ, представленного сетевой моделью, является... 	1) 4 ☐ 2) 5 ☐ 3) 6 ☐ 4) 7 ☐
23.4. Критическими работами в сетевой модели комплекса работ являются... 	1) (1, 3) и (3, 4) ☐ 2) (3, 4) и (2, 4) ☐ 3) (1, 2) и (2, 4) ☐ 4) (1, 3) и (2, 4) ☐
23.5. Критическими работами в сетевой модели комплекса работ являются... 	1) (1, 2) и (3, 4) ☐ 2) (1, 2) и (1, 3) ☐ 3) (1, 2) и (2, 4) ☐ 4) (1, 3) и (3, 4) ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
23.6. Для сетевого графика, изображенного на рисунке, длина критического пути равна...  	1) 34 ☐ 2) 10 ☐ 3) 13 ☐ 4) 11 ☐
23.7. Для сетевого графика, изображенного на рисунке, длина критического пути равна...  	1) 16 ☐ 2) 13 ☐ 3) 14 ☐ 4) 43 ☐
23.8. Полный резерв времени для выполнения работы (2, 4) в сетевой модели комплекса работ равен...  	1) 2 ☐ 2) 3 ☐ 3) 0 ☐ 4) 1 ☐
23.9. Полный резерв времени для выполнения работы (3, 2) в сетевой модели комплекса работ равен...  	1) 2 ☐ 2) 3 ☐ 3) 0 ☐ 4) 1 ☐
23.10. Для сетевого графика, изображенного на рисунке, критическими являются работы...  	1) (0, 2) и (2, 4) ☐ 2) (0, 1) и (1, 4) ☐ 3) (0, 4) ☐ 4) (0, 1), (1, 3) и (3, 4) ☐

Глава 24. Элементы комбинаторики

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
24.1. Число размещений из n по k определяется по формуле...	1) $A_n^k = \frac{k!}{n!}$ ☐ 2) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ☐ 3) $A_n^k = \frac{n!}{k!}$ ☐ 4) $A_n^k = (n-k)!$ ☐
24.2. Число сочетаний из n по k определяется по формуле...	1) $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ ☐ 2) $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ☐ 3) $C_n^k = \frac{n!}{k!}$ ☐ 4) $C_n^k = k!(n-k)!$ ☐
24.3. Сколько прямых можно провести через 6 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, так, чтобы каждая прямая проходила через две из заданных точек?	1) $6!$ ☐ 2) $\frac{6!}{2!}$ ☐ 3) $\frac{6!}{3!3!}$ ☐ 4) $\frac{6!}{4!2!}$ ☐ 5) $\frac{6!}{3!}$ ☐
24.4. В пространстве даны 9 точек, причем никакие 4 из них не лежат в одной плоскости. Сколько различных плоскостей можно провести через эти 9 точек так, чтобы каждая плоскость проходила через три из заданных точек?	1) $\frac{9!}{6!3!}$ ☐ 2) $4!$ ☐ 3) $\frac{9!}{4!5!}$ ☐ 4) $3!$ ☐ 5) $\frac{9!}{3!}$ ☐
24.5. Сколько различных восьмизначных чисел, начинающихся цифрой 3 и оканчивающихся цифрой 7, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 при условии, что каждая цифра в обозначении числа встречается 1 раз?	1) $8!$ ☐ 2) $\frac{6!}{4!2!}$ ☐ 3) $\frac{8!}{4!}$ ☐ 4) $\frac{6!}{2!}$ ☐ 5) $6!$ ☐
24.6. Сколько различных правильных дробей можно составить из чисел 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19?	1) $\frac{9!}{7!}$ ☐ 2) $\frac{9!}{7!2!}$ ☐ 3) $9!$ ☐ 4) $\frac{9!}{2!}$ ☐ 5) $\frac{9!}{3!4!}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
24.7. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 при условии, что каждая цифра в обозначении числа встречается 1 раз?	1) $\frac{8!}{4!}$ ☐ 2) $\frac{8!}{4!4!}$ ☐ 3) 4! ☐ 4) 6! ☐ 5) 8! ☐
24.8. Количество способов, которыми можно расставить 6 различных книг на полке, равно...	1) 1024 ☐ 2) 216 ☐ 3) 12 ☐ 4) 720 ☐ 5) 36 ☐
24.9. Количество способов, которыми можно выбрать для дежурства 3 студента из 9, равно...	1) 78 ☐ 2) 91 ☐ 3) 84 ☐ 4) 80 ☐

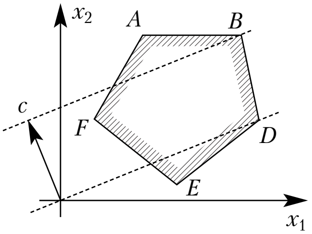
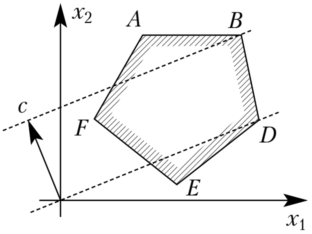
Часть 5

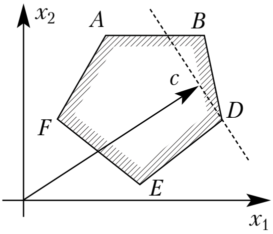
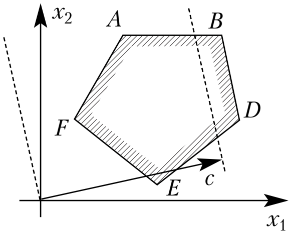
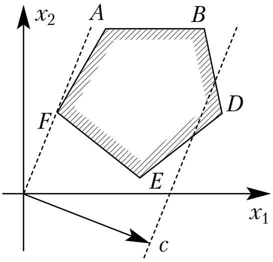
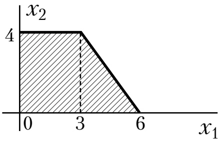
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

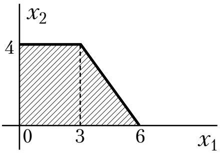
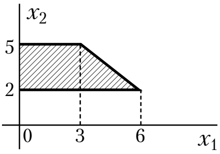
Глава 25. Математическое программирование

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
25.1. Какой знак используется в системе ограничений в стандартной форме ЗЛП (кроме ограничений, связанных с неотрицательностью переменных)?	1) $\geqslant$ ☐ 2) $\leqslant$ ☐ 3) = ☐ 4) Любой из трех ☐
25.2. Какой знак используется в системе ограничений в канонической форме ЗЛП (кроме ограничений, связанных с неотрицательностью переменных)?	1) $\geqslant$ ☐ 2) $\leqslant$ ☐ 3) = ☐ 4) Любой из трех ☐
25.3. Как называется форма ЗЛП, в которой все ограничения кроме ограничений, связанных с неотрицательностью переменных, записаны в виде неравенств со знаком?	1) Классическая ☐ 2) Каноническая ☐ 3) Гауссовская ☐ 4) Стандартная ☐
25.4. Как называется форма ЗЛП, в которой все ограничения кроме ограничений, связанных с неотрицательностью переменных, записаны в виде уравнений?	1) Классическая ☐ 2) Каноническая ☐ 3) Гауссовская ☐ 4) Стандартная ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
25.5. К какой форме ЗЛП сводится задача о планировании производства?	1) Классическая ☐ 2) Каноническая ☐ 3) Гауссовская ☐ 4) Стандартная ☐
25.6. Входят ли планы $x = (1, 1)$ и $x = (4, 7)$ в множество допустимых планов ЗЛП с системой ограничений: $-2x_1 + x_2 \leqslant 2; x_1 - 3x_2 \geqslant -9;$ $4x_1 + 3x_2 \leqslant 24; x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0?$	1) Только $x = (1, 1)$ ☐ 2) Только $x = (4, 7)$ ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐
25.7. Входят ли планы $x = (2, 3)$ и $x = (3, 5)$ в множество допустимых планов ЗЛП с системой ограничений: $2x_1 - 3x_2 \leqslant 0; -5x_1 + 9x_2 \leqslant 45;$ $x_1 + 2x_2 \geqslant 4; x_1 \leqslant 5; x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0?$	1) Только $x = (2, 3)$ ☐ 2) Только $x = (3, 5)$ ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐
25.8. Входят ли планы $x = (3, 6)$ и $x = (1, 3)$ в множество допустимых планов ЗЛП с системой ограничений: $-x_1 + x_2 \leqslant 2; 2x_1 + 3x_2 \geqslant 16;$ $x_1 + x_2 \leqslant 10; 2x_1 - x_2 \leqslant 8; x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0?$	1) Только $x = (3, 6)$ ☐ 2) Только $x = (1, 3)$ ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐
25.9. Входят ли планы $x = (2, 1)$ и $x = (5, 3)$ в множество допустимых планов ЗЛП с системой ограничений: $3x_1 - x_2 \geqslant 0; x_1 - x_2 \geqslant -2; 4x_1 - x_2 \leqslant 16;$ $2x_1 - x_2 \leqslant 6; x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0?$	1) Только $x = (2, 1)$ ☐ 2) Только $x = (5, 3)$ ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐
25.10. Входят ли планы $x = (1, 0)$ и $x = (3, 3)$ в множество допустимых планов ЗЛП с системой ограничений: $-3x_1 + 2x_2 \leqslant 6; x_1 + 2x_2 \leqslant 10;$ $x_1 - 3x_2 \leqslant 6; x_1 + x_2 \geqslant 3; x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0?$	1) Только $x = (1, 0)$ ☐ 2) Только $x = (3, 3)$ ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐
25.11. Каков градиент целевой функции для ЗЛП $Q = 3x_1 - x_2 \to \max$ $-2x_1 + x_2 \leqslant 2; x_1 - 3x_2 \geqslant -9;$ $4x_1 + 3x_2 \leqslant 24; x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0?$	1) (–9, 24) ☐ 2) (1, –3) ☐ 3) (–2, 1) ☐ 4) (4, 3) ☐ 5) (3, –1) ☐
25.12. Каков градиент целевой функции для ЗЛП $Q = 4x_1 + 3x_2 \to \max$ $-4x_1 + x_2 \leqslant 0; x_1 - x_2 \geqslant -3;$ $2x_1 - 3x_2 \leqslant 6; x_1 \leqslant 6; x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0?$	1) (4, 3) ☐ 2) (2, –3) ☐ 3) (5, –2) ☐ 4) (–4, 1) ☐ 5) (1, –1) ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
25.13. Каков оптимальный план, если при решении ЗЛП на max линия уровня при движении в направлении градиента Q выходит из множества допустимых планов в точке пересечения прямых $3x_1 + x_2 = 6$ и $-2x_1 + x_2 = 1$?	1) (3, 1) ☐ 2) (1, 3) ☐ 3) (1, 2) ☐ 4) (2, 0) ☐
25.14. Каков оптимальный план, если при решении ЗЛП на max линия уровня при движении в направлении градиента Q выходит из множества допустимых планов в точке пересечения прямых $x_1 - x_2 = -1$ и $4x_1 - x_2 = 11$?	1) (8, 6) ☐ 2) (6, 8) ☐ 3) (5, 4) ☐ 4) (4, 5) ☐
25.15. Каков оптимальный план, если при решении ЗЛП на max линия уровня при движении в направлении градиента Q выходит из множества допустимых планов в точке пересечения прямых $2x_1 + 5x_2 = 19$ и $x_1 + 2x_2 = 8$?	1) (4, 1) ☐ 2) (3, 2) ☐ 3) (2, 3) ☐ 4) (1, 4) ☐
25.16. Решением ЗЛП на max является точка...  	1) F ☐ 2) E ☐ 3) D ☐ 4) B ☐ 5) A ☐
25.17. Решением ЗЛП на min является точка...  	1) F ☐ 2) E ☐ 3) D ☐ 4) B ☐ 5) A ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
25.18. Решением ЗЛП на max является точка...  	1) *F* ☐ 2) *E* ☐ 3) *D* ☐ 4) *B* ☐ 5) *A* ☐
25.19. Решением ЗЛП на min является точка...  	1) *F* ☐ 2) *E* ☐ 3) *D* ☐ 4) *B* ☐ 5) *A* ☐
25.20. Решением ЗЛП на max является точка...  	1) *F* ☐ 2) *E* ☐ 3) *D* ☐ 4) *B* ☐ 5) *A* ☐
25.21. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид  Тогда максимальное значение функции $Z - 4x_1 + 4x_2$ равно...	1) 26 ☐ 2) 28 ☐ 3) 30 ☐ 4) 24 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
25.22. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид  Тогда максимальное значение функции $Z = 2x_1 + 6x_2$ равно...	1) 30 ☐ 2) 24 ☐ 3) 32 ☐ 4) 26 ☐
25.23. Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид  Тогда максимальной значение функции $Z = x_1 + 2x_2$ равно...	1) 11 ☐ 2) 14 ☐ 3) 10 ☐ 4) 13 ☐
25.24. Максимальное значение функции $F = 2x_1 - x_2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \leqslant 3;$ $x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0$ равно...	1) 8 ☐ 2) 5 ☐ 3) 6 ☐ 4) 1 ☐
25.25. Максимальное значение функции $F = 2x_1 - x_2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \leqslant 3;$ $x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0$ равно...	1) 0 ☐ 2) –1 ☐ 3) –2 ☐ 4) –3 ☐
25.26. Максимальное значение функции $F = 3x_1 + 2x_2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \leqslant 6;$ $x_1 \leqslant 4;$ $x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0$ равно...	1) 12 ☐ 2) 14 ☐ 3) 16 ☐ 4) 18 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
25.27. Максимальное значение функции $F = 5x_1 + x_2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \leqslant 6;$ $x_1 \leqslant 4;$ $x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0$ равно...	1) 23 ☐ 2) 6 ☐ 3) 22 ☐ 4) 14 ☐
25.28. Максимальное значение функции $F = x_1 + 5x_2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \leqslant 6;$ $x_1 \leqslant 4;$ $x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0$ равно...	1) 14 ☐ 2) 16 ☐ 3) 22 ☐ 4) 30 ☐
25.29. Для изготовления изделий *A* и *B* склад может отпустить металла не более 80 кг, причем на одно изделие *A* расходуется 2 кг, а на изделие *B* — 1 кг металла. Укажите план производства, при котором обеспечен наибольший доход, если изделий *A* требуется изготовить не более 30 шт., а изделий *B* — не более 40 шт., причем одно изделие *A* стоит 5 ден. ед., а одно изделие *B* — 3 ден. ед.	1) $x_A = 20; x_B = 40$ ☐ 2) $x_A = 20; x_B = 45$ ☐ 3) $x_A = 30; x_B = 25$ ☐ 4) $x_A = 25; x_B = 50$ ☐ 5) $x_A = 45; x_B = 15$ ☐
25.30. Ранг матрицы системы ограничений ЗЛП с 5 переменными равен 3. Сколько свободных переменных содержат выражения для общего решения системы ограничений?	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
25.31. Ранг матрицы системы ограничений ЗЛП с 5 переменными равен 3. Сколько базисных переменных содержат выражения для общего решения системы ограничений?	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
25.32. В качестве разрешающего элемента при выборе начального опорного плана ЗЛП при решении симплекс-методом надо брать элемент матрицы системы ограничений, у которого θ...	1) наименьшая в строке ☐ 2) наименьшая в столбце ☐ 3) наибольшая в строке ☐ 4) наибольшая в столбце ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
25.33. Какие должны быть значения Δ_j в симплекс-таблице для того, чтобы рассматриваемый план ЗЛП был оптимальным при решении задачи на max?	1) Все неотрицательные ☐ 2) Все неположительные ☐ 3) Все отрицательные ☐ 4) Все положительные ☐
25.34. Какие должны быть значения Δ_j в симплекс-таблице для того, чтобы рассматриваемый план ЗЛП был оптимальным при решении задачи на min?	1) Все неотрицательные ☐ 2) Все неположительные ☐ 3) Все отрицательные ☐ 4) Все положительные ☐
25.35. Сколько дополнительных переменных вводится при решении симплекс-методом ЗЛП с системой ограничений $5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 3; x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 4;$ $3x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 12; x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; x_3 \geqslant 0?$	1) 4 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
25.36. Сколько дополнительных переменных вводится при решении симплекс-методом ЗЛП с системой ограничений $5x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geqslant 3; x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 4;$ $3x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 12; x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0; x_3 \geqslant 0?$	1) 4 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
25.37. В процессе решения симплекс-методом ЗЛП на min получено: $\Delta_1 = 0; \Delta_2 = \frac{38}{13}; \Delta_3 = \frac{77}{25}; \Delta_4 = 0; \Delta_5 = 0.$ Какую переменную нужно ввести в базис?	1) Никакую ☐ 2) x_1 ☐ 3) x_2 ☐ 4) x_3 ☐
25.38. В процессе решения симплекс-методом ЗЛП на max получено: $\Delta_1 = -\frac{14}{3}; \Delta_2 = 0; \Delta_3 = \frac{31}{12}; \Delta_4 = 0; \Delta_5 = 0.$ Какую переменную нужно ввести в базис?	1) Никакую ☐ 2) x_1 ☐ 3) x_2 ☐ 4) x_3 ☐
25.39. В процессе решения симплекс-методом ЗЛП на min получено: $\Delta_1 = -\frac{14}{3}; \Delta_2 = 0; \Delta_3 = \frac{31}{12}; \Delta_4 = 0; \Delta_5 = 0.$ Какую переменную целесообразно ввести в базис?	1) Никакую ☐ 2) x_1 ☐ 3) x_2 ☐ 4) x_3 ☐

<table>
<tr><th>Задание</th><th>Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа</th></tr>
<tr><td>25.40. Общее решение системы ограничений при оптимальном плане ЗЛП, полученное симплекс-методом, имеет вид $x_2 = 5 - x_1 - 2x_4$; $x_3 = 1 + 3x_1 - x_4$; $x_5 = 2 - x_1 + x_4$. Каков оптимальный план ЗЛП?</td><td>1) (5; 1; 2; 0; 0) ☐
2) (0; 5; 1; 0; 2) ☐
3) (5; 0; 1; 0; 2) ☐
4) (5; 1; 0; 0; 0) ☐</td></tr>
<tr><td>25.41. Общее решение системы ограничений при оптимальном плане ЗЛП, полученное симплекс-методом, имеет вид $x_1 = 7 - x_2 + 4x_3$; $x_4 = 5x_2 - 2x_3$; $x_5 = 2 - x_2 + x_3$. Каков оптимальный план ЗЛП?</td><td>1) (7; 5; 2; 0; 0) ☐
2) (7; 0; 0; 5; 2) ☐
3) (7; 0; 0; 0; 2) ☐
4) (7; 2; 0; 0; 0) ☐</td></tr>
<tr><td>25.42. Симплекс-методом найден оптимальный план $x^* = (1; 0; 6; 0; 2)$ для ЗЛП с целевой функцией
$$Q = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min.$$
Чему равно наименьшее значение целевой функции в этой ЗЛП?</td><td>1) 8 ☐
2) 15 ☐
3) 10 ☐
4) 0 ☐</td></tr>
<tr><td>25.43. Симплекс-методом найден оптимальный план $x^* = (2; 0; 5; 4; 0)$ для ЗЛП с целевой функцией
$$Q = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max.$$
Чему равно наибольшее значение целевой функции в этой ЗЛП?</td><td>1) 7 ☐
2) 11 ☐
3) 13 ☐
4) 17 ☐</td></tr>
<tr><td>25.44. Транспортная задача будет закрытой, если...
<table>
<tr><td></td><td>50</td><td>60 + b</td><td>200</td></tr>
<tr><td>100 + a</td><td>7</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>200</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr>
</table></td><td>1) $a = 30$; $b = 10$ ☐
2) $a = 30$; $b = 20$ ☐
3) $a = 30$; $b = 40$ ☐
4) $a = 30$; $b = 5$ ☐</td></tr>
<tr><td>25.45. Транспортная задача будет закрытой, если...
<table>
<tr><td></td><td>30</td><td>100 + b</td></tr>
<tr><td>20</td><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>30 + a</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>100</td><td>6</td><td>8</td></tr>
</table></td><td>1) $a = 55$; $b = 80$ ☐
2) $a = 55$; $b = 65$ ☐
3) $a = 55$; $b = 70$ ☐
4) $a = 55$; $b = 75$ ☐</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Задание</th><th>Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа</th></tr>
<tr><td>

25.46. Транспортная задача будет закрытой, если...

<table>
<tr><th></th><th>30</th><th>100 + b</th></tr>
<tr><td>20</td><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>30 + a</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>100</td><td>6</td><td>8</td></tr>
</table>

</td><td>

1) $a = 50$; $b = 75$ ☐
2) $a = 50$; $b = 70$ ☐
3) $a = 50$; $b = 65$ ☐
4) $a = 50$; $b = 60$ ☐

</td></tr>
<tr><td>

25.47. Транспортная задача будет закрытой, если...

<table>
<tr><th></th><th>30</th><th>100 + b</th></tr>
<tr><td>20</td><td>3</td><td>9</td></tr>
<tr><td>30 + a</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>100</td><td>6</td><td>8</td></tr>
</table>

</td><td>

1) $a = 60$; $b = 75$ ☐
2) $a = 60$; $b = 85$ ☐
3) $a = 60$; $b = 80$ ☐
4) $a = 60$; $b = 70$ ☐

</td></tr>
<tr><td>

25.48. Транспортная задача будет закрытой, если...

<table>
<tr><th></th><th>50</th><th>60 + b</th><th>200</th></tr>
<tr><td>100 + a</td><td>7</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>200</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr>
</table>

</td><td>

1) $a = 40$; $b = 40$ ☐
2) $a = 40$; $b = 20$ ☐
3) $a = 40$; $b = 30$ ☐
4) $a = 40$; $b = 10$ ☐

</td></tr>
<tr><td>

25.49. Среди транспортных задач закрытыми являются...

1.

<table>
<tr><th rowspan="2">Мощности поставщиков</th><th colspan="4">Мощности потребителей</th></tr>
<tr><th>22</th><th>34</th><th>41</th><th>28</th></tr>
<tr><td>31</td><td>10</td><td>7</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>37</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>38</td><td>8</td><td>7</td><td>6</td><td>7</td></tr>
</table>

2.

<table>
<tr><th rowspan="2">Мощности поставщиков</th><th colspan="4">Мощности потребителей</th></tr>
<tr><th>25</th><th>34</th><th>44</th><th>20</th></tr>
<tr><td>41</td><td>10</td><td>7</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>48</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>38</td><td>8</td><td>7</td><td>6</td><td>7</td></tr>
</table>

3.

<table>
<tr><th rowspan="2">Мощности поставщиков</th><th colspan="4">Мощности потребителей</th></tr>
<tr><th>32</th><th>34</th><th>40</th><th>22</th></tr>
<tr><td>41</td><td>10</td><td>7</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>48</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>39</td><td>8</td><td>7</td><td>6</td><td>7</td></tr>
</table>

</td><td>

1) 1 ☐
2) 1, 2 ☐
3) 2 ☐
4) 3 ☐

</td></tr>
</table>

Глава 26. Математические игры

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
26.1. Максимин — это...	1) цена игры ☐ 2) матрица игры ☐ 3) нижняя цена игры ☐ 4) верхняя цена игры ☐
26.2. Минимакс — это...	1) цена игры ☐ 2) матрица игры ☐ 3) нижняя цена игры ☐ 4) верхняя цена игры ☐
26.3. Игра имеет седловую точку, если...	1) $\alpha > \beta$ ☐ 2) $\alpha = \beta$ ☐ 3) $\alpha \neq \beta$ ☐ 4) $\alpha < \beta$ ☐
26.4. Нижняя цена матричной игры, заданной платежной матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, равна...	1) 2 ☐ 2) 6 ☐ 3) 4 ☐ 4) 5 ☐
26.5. Нижняя цена матричной игры, заданной платежной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, равна...	1) 1 ☐ 2) 4 ☐ 3) 2 ☐ 4) 3 ☐
26.6. Нижняя цена матричной игры, заданной платежной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, равна...	1) 5 ☐ 2) 3 ☐ 3) 4 ☐ 4) 1 ☐
26.7. Нижняя цена матричной игры, заданной платежной матрицей $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, равна...	1) 8 ☐ 2) 5 ☐ 3) 7 ☐ 4) 9 ☐
26.8. Верхняя цена матричной игры, заданной платежной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, равна...	1) 4 ☐ 2) 5 ☐ 3) 3 ☐ 4) 1 ☐
26.9. Найти верхнюю цену игры $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	1) 4 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
26.10. Найти верхнюю цену игры $$Q=\begin{pmatrix}1&5&-1&-3\\3&1&2&-4\\-2&1&4&1\\5&-3&-3&6\end{pmatrix}$$	1) 6 ☐ 2) 4 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
26.11. Найти верхнюю цену игры $$Q=\begin{pmatrix}4&0&-1&-5\\-2&3&5&-1\\0&1&2&6\\-1&-1&1&-3\end{pmatrix}$$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 5 ☐
26.12. Найти нижнюю цену игры $$Q=\begin{pmatrix}-3&0&-1&-2\\-2&3&5&-6\\0&1&-2&1\\1&1&1&-3\end{pmatrix}$$	1) 0 ☐ 2) 1 ☐ 3) –6 ☐ 4) –2 ☐
26.13. Основная теорема теории игр «Каждая конечная матричная игра имеет, по крайней мере, одно решение среди смешанных стратегий» — это теорема...	1) Сэвиджа ☐ 2) Колмогорова ☐ 3) Вальда ☐ 4) Байеса ☐ 5) Неймана ☐
26.14. Вероятность p_1^* применения стратегии A_1 в решении игры 22 определяется по формуле...	1) $p_1^*=\dfrac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$ ☐ 2) $p_1^*=\dfrac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$ ☐ 3) $p_1^*=\dfrac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$ ☐ 4) $p_1^*=\dfrac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$ ☐
26.15. Найти оптимальную смешанную стратегию S_B^* игрока B в матричной игре $Q=\begin{pmatrix}4&-5\\-6&10\end{pmatrix}$	1) (0,3; 0,7) ☐ 2) (0,7; 0,3) ☐ 3) (0,4; 0,6) ☐ 4) (0,6; 0,4) ☐
26.16. Найти оптимальную смешанную стратегию S_A^* игрока A в матричной игре $Q=\begin{pmatrix}-7&9\\4&-5\end{pmatrix}$	1) (0,36; 0,64) ☐ 2) (0,56; 0,44) ☐ 3) (0,44; 0,56) ☐ 4) (0,64; 0,36) ☐
26.17. Найти цену матричной игры $$Q=\begin{pmatrix}24&-11\\-10&5\end{pmatrix}$$	1) –0,1 ☐ 2) 0,1 ☐ 3) 0,2 ☐ 4) 0,3 ☐

<table>
<tr><th>Задание</th><th>Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа</th></tr>
<tr><td>26.18. Точка, в которой в кооперативной игре достигается максимум произведения $(C_A - C_A^*)(C_B - C_B^*)$, называется...</td><td>1) точка равновесия ☐
2) точка решения Нэша ☐
3) точка угрозы ☐
4) седловая точка ☐</td></tr>
<tr><td>26.19. Человек, участвующий в игре с природой, называется...</td><td>1) статистик ☐
2) природовед ☐
3) стратег ☐
4) теоретик ☐</td></tr>
<tr><td>26.20. Оптимальной стратегией в статистической игре, потери в которой представлены в таблице, по критерию Байеса является стратегия...
<table>
<tr><th></th><th>p_i</th><th>В_1</th><th>В_2</th><th>В_3</th><th>В_4</th></tr>
<tr><td>П_1</td><td>0,4</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>П_2</td><td>0,3</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>П_3</td><td>0,2</td><td>2</td><td>7</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>П_4</td><td>0,1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>
</td><td>1) B_1 ☐
2) B_2 ☐
3) B_3 ☐
4) B_4 ☐</td></tr>
</table>

Глава 27. Элементы теории массового обслуживания

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
27.1. Если в любой момент времени вероятностные характеристики случайного процесса в будущем зависят только от состояния системы в данный момент, то случайный процесс называется...	1) марковский ☐ 2) гауссовский ☐ 3) колмогоровский ☐ 4) чебышевский ☐
27.2. Если вероятность попадания на малый промежуток времени двух и более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события, то поток событий называется...	1) без последействия ☐ 2) случайный ☐ 3) ординарный ☐ 4) стационарный ☐
27.3. Сколько состояний имеет одноканальная СМО с отказами?	1) ∞ ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
27.4. Если λ — интенсивность потока заявок, а μ — интенсивность потока обслуживания канала, то относительная пропускная способность одноканальной СМО с отказами равна...	1) $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ ☐ 2) $\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}$ ☐ 3) $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ ☐ 4) $\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$ ☐
27.5. Если λ — интенсивность потока заявок, а μ — интенсивность потока обслуживания канала, то вероятность отказа одноканальной СМО с отказами равна...	1) $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ ☐ 2) $\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}$ ☐ 3) $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ ☐ 4) $\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$ ☐
27.6. Если λ — интенсивность потока заявок, а μ — интенсивность потока обслуживания канала, то абсолютная пропускная способность одноканальной СМО с отказами равна...	1) $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ ☐ 2) $\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}$ ☐ 3) $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ ☐ 4) $\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$ ☐
27.7. Относительная пропускная способность многоканальной СМО с отказами, имеющей *n* каналов, равна...	1) $1-\frac{\rho^n}{n!}p_0$ ☐ 2) $\frac{\rho^n}{n!}p_0$ ☐ 3) $\rho\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right)$ ☐ 4) $\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+...+\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$ ☐
27.8. Вероятность отказа многоканальной СМО с отказами, имеющей *n* каналов, равна...	1) $1-\frac{\rho^n}{n!}p_0$ ☐ 2) $\frac{\rho^n}{n!}p_0$ ☐ 3) $\rho\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right)$ ☐ 4) $\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+...+\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$ ☐
27.9. Вероятность того, что все каналы свободны, в многоканальной СМО с отказами, имеющей *n* каналов, равна...	1) $1-\frac{\rho^n}{n!}p_0$ ☐ 2) $\frac{\rho^n}{n!}p_0$ ☐ 3) $\rho\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right)$ ☐ 4) $\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+...+\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
27.10. Среднее число занятых каналов в многоканальной СМО с отказами, имеющей *n* каналов, равно...	1) $1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0$ ☐ 2) $\frac{\rho^n}{n!}p_0$ ☐ 3) $\rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0\right)$ ☐ 4) $\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+...+\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$ ☐
27.11. Сколько состояний имеет одноканальная СМО с ожиданием?	1) ∞ ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
27.12. Среднее число заявок в одноканальной СМО с ожиданием определяется по формуле...	1) $L_{\text{сист}} = \frac{\rho}{1-\rho}$ 2) $L_{\text{сист}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ 3) $L_{\text{сист}} = 1-\rho$ 4) $L_{\text{сист}} = \frac{1}{1-\rho}$
27.13. Найти относительную пропускную способность одноканальной системы массового обслуживания с отказами, если интенсивность входящего потока заявок равна 80 заявок/ч, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки 3 мин.	1) 0,8 ☐ 2) 0,6 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) 0,2 ☐
27.14. Найти относительную пропускную способность одноканальной системы массового обслуживания с отказами, если интенсивность входящего потока заявок равна 40 заявок/ч, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки 1 мин.	1) 0,8 ☐ 2) 0,6 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) 0,2 ☐
27.15. Найти относительную пропускную способность одноканальной системы массового обслуживания с отказами, если интенсивность входящего потока заявок равна 20 заявок/ч, а средняя продолжительность обслуживания одной заявки 0,75 мин.	1) 0,8 ☐ 2) 0,6 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) 0,2 ☐

Глава 28. Экономико-математические модели

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
28.1. Числовая оценка приобретаемого потребителем набора товаров, которая тем выше, чем предпочтительнее набор, называется...	1) функция спроса ☐ 2) функция полезности ☐ 3) предельная полезность ☐ 4) функция предложения ☐
28.2. Линия уровня функции полезности называется...	1) изокванта ☐ 2) кривая «доход-потребление» ☐ 3) кривая «цена-потребление» ☐ 4) кривая безразличия ☐
28.3. Дана функция полезности $u = 6\sqrt{x} + y$. Тогда кривая безразличия задается уравнением...	1) $6\sqrt{x} + y = C$ ☐ 2) $\frac{3}{\sqrt{x}} + 1 = C$ ☐ 3) $\frac{6\sqrt{x}}{y} = C$ ☐ 4) $6y\sqrt{x} = C$ ☐
28.4. Дана функция полезности $u = x + 2\sqrt{y}$. Тогда кривая безразличия задается уравнением...	1) $\frac{x}{2\sqrt{y}} = C$ ☐ 2) $x + 2\sqrt{y} = C$ ☐ 3) $1 + \frac{1}{\sqrt{y}} = C$ ☐ 4) $2x\sqrt{y} = C$ ☐
28.5. Дана функция полезности $u = x + 4\sqrt{y}$. Тогда кривая безразличия задается уравнением...	1) $1 + \frac{2}{\sqrt{y}} = C$ ☐ 2) $\frac{x}{4\sqrt{y}} = C$ ☐ 3) $4x\sqrt{y} = C$ ☐ 4) $x + 4\sqrt{y} = C$ ☐
28.6. Дана функция полезности $u = 3\sqrt{x} + y$. Тогда кривая безразличия задается уравнением...	1) $3\sqrt{x} + y = C$ ☐ 2) $\frac{3}{2\sqrt{x}} + 1 = C$ ☐ 3) $3y\sqrt{x} = C$ ☐ 4) $\frac{3\sqrt{x}}{y} = C$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
28.7. Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена на благо $x = 20$, на благо $y = 10$, доход потребителя равен 200. Тогда оптимальный набор благ потребителя имеет вид...	1) $x = 0; y = 20$ ☐ 2) $x = 8; y = 4$ ☐ 3) $x = 5; y = 10$ ☐ 4) $x = 10; y = 10$ ☐
28.8. Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена на благо $x = 10$, на благо $y = 20$, доход потребителя равен 200. Тогда оптимальный набор благ потребителя имеет вид...	1) $x = 10; y = 5$ ☐ 2) $x = 10; y = 10$ ☐ 3) $x = 20; y = 0$ ☐ 4) $x = 4; y = 8$ ☐
28.9. Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена на благо $x = 20$, на благо $y = 5$, доход потребителя равен 200. Тогда оптимальный набор благ потребителя имеет вид...	1) $x = 4; y = 24$ ☐ 2) $x = 20; y = 20$ ☐ 3) $x = 5; y = 20$ ☐ 4) $x = 0; y = 40$ ☐
28.10. Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$. Цена на благо $x = 5$, на благо $y = 10$, доход потребителя равен 200. Тогда оптимальный набор благ потребителя имеет вид...	1) $x = 20; y = 20$ ☐ 2) $x = 40; y = 0$ ☐ 3) $x = 20; y = 10$ ☐ 4) $x = 8; y = 16$ ☐
28.11. Функция полезности потребителя имеет вид $U = U(X, Y) = X^{0,4}Y^{0,5}$. Тогда при $X = Y$ предельная норма замещения продукта Y продуктом X $k = -\frac{U'_Y}{U'_X}$ равна...	1) 1,25 ☐ 2) 0,8 ☐ 3) –1,25 ☐ 4) –0,8 ☐
28.12. Функция спроса на товар имеет вид $q = 247 - 6p$ (штук в час), а функция предложения $s = p^2$ (штук в час), где p — цена единицы товара в рублях. Найти равновесную цену товара	1) 20 ☐ 2) 17 ☐ 3) 15 ☐ 4) 13 ☐ 5) 11 ☐
28.13. Дана функция спроса $q = \frac{p + 10}{p + 1}$ и предложения $s = 2p + 3,5$, где p — цена товара. Тогда равновесный объем «спрос-предложение» ($q = s$) равен...	1) 5,5 ☐ 2) 16,5 ☐ 3) 1 ☐ 4) 10 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
28.14. Дана функция спроса $q = \dfrac{p+8}{p+1}$ и предложения $s = 2p + 2{,}5$, где p — цена товара. Тогда равновесный объем «спрос-предложение» ($q = s$) равен...	1) 4,5 ☐ 2) 1 ☐ 3) 8 ☐ 4) 13,5 ☐
28.15. Дана функция спроса $q = \dfrac{p+6}{p+1}$ и предложения $s = 2p + 1{,}5$, где p — цена товара. Тогда равновесная цена равна...	1) 3,5 ☐ 2) 4,5 ☐ 3) 1 ☐ 4) 2,25 ☐
28.16. Дана функция спроса $q = \dfrac{p+9}{p+1}$ и предложения $s = 2p + 3$, где p — цена товара. Тогда равновесный объем «спрос-предложение» ($q = s$) равен...	1) 15 ☐ 2) 5 ☐ 3) 1 ☐ 4) 9 ☐
28.17. Дана функция спроса $q = \dfrac{2p+8}{p}$ и предложения $s = p + 4$, где p — цена товара. Тогда равновесная цена товара равна...	1) 2 ☐ 2) 8 ☐ 3) 4 ☐ 4) 6 ☐
28.18. Дана функция спроса $q = \dfrac{2p+7}{p}$ и предложения $s = p + 3{,}5$, где p — цена товара. Тогда равновесная цена товара равна...	1) 3,5 ☐ 2) 7,5 ☐ 3) 2 ☐ 4) 5,5 ☐
28.19. Формула для вычисления эластичности функции имеет вид...	1) $E_x(y) = \dfrac{y}{x}y'$ ☐ 2) $E_x(y) = xyy'$ ☐ 3) $E_x(y) = \dfrac{x}{y}y'$ ☐ 4) $E_x(y) = \dfrac{y'}{xy}$ ☐
28.20. Если $y = uv$, то $E_x(y) = \ldots$	1) $E_x(u) - E_x(v)$ ☐ 2) $\dfrac{E_x(u)}{E_x(v)}$ ☐ 3) $E_x(u) + E_x(v)$ ☐ 4) $E_x(u)E_x(v)$ ☐ 5) $[E_x(u)+1][E_м(v)+1]$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
28.21. Если $y = \dfrac{u}{v}$, то $E_x(y) = \ldots$	1) $E_x(u) - E_x(v)$ ☐ 2) $\dfrac{E_x(u)}{E_x(v)}$ ☐ 3) $E_x(u) + E_x(v)$ ☐ 4) $E_x(u)E_x(v)$ ☐ 5) $[E_x(u)+1][E_x(v)+1]$ ☐
28.22. Эластичность степенной функции $y = x^\alpha$ равна...	1) $\alpha x^{\alpha-1}$ ☐ 2) α ☐ 3) $1 - \alpha$ ☐ 4) $1 + \alpha$ ☐
28.23. Эластичность линейной функции $y = kx + b$ равна...	1) $\dfrac{kx}{kx+b}$ ☐ 2) $\dfrac{kx+b}{kx}$ ☐ 3) k ☐ 4) kx ☐ 5) $kx + b$ ☐
28.24. Найти эластичность функции $y = \dfrac{x^3+2}{x+8}$ в точке $x = 2$	1) 1,8 ☐ 2) 2 ☐ 3) 2,2 ☐ 4) 2,6 ☐
28.25. Спрос на товар называется эластичным, если...	1) $\lvert E_p(q)\rvert < 1$ ☐ 2) $\lvert E_p(q)\rvert = 1$ ☐ 3) $\lvert E_p(q)\rvert = 0$ ☐ 4) $\lvert E_p(q)\rvert > 1$ ☐
28.26. Исследованиями установлено, что спрос q (изделий в сутки) на товар A в торговой фирме «Ландыш» зависит от его цены p (в рублях) по формуле $q = 2592 - 2p^2 + 18p$. При какой цене неэластичный спрос переходит в эластичный?	1) 15 ☐ 2) 16 ☐ 3) 18 ☐ 4) 20 ☐ 5) 24 ☐
28.27. Исследованиями установлено, что спрос q (изделий в сутки) на товар A в торговой фирме «Ландыш» зависит от его цены p (в рублях) по формуле $q = 432 - p^2 + 15p$. При какой цене неэластичный спрос переходит в эластичный?	1) 15 ☐ 2) 16 ☐ 3) 18 ☐ 4) 20 ☐ 5) 24 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
28.28. Уравнение $$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп}} - \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial I}\right) x_i^*$$ называется уравнением...	1) Харрода – Домара ☐ 2) Слуцкого ☐ 3) Солоу ☐ 4) Леонтьева ☐ 5) Кобба – Дугласа ☐
28.29. Линия уровня производственной функции называется...	1) изокванта ☐ 2) кривая безразличия ☐ 3) изокоста ☐ 4) изоклиналь ☐
28.30. Для мультипликативной производственной функции $Y = 2K^{0,6}L^{0,51}$ коэффициент эластичности по капиталу равен...	1) 1,11 ☐ 2) 0,6 ☐ 3) 0,51 ☐ 4) 3,11 ☐
28.31. Для мультипликативной производственной функции $Y = 2K^{0,57}L^{0,64}$ коэффициент эластичности по труду равен...	1) 0,57 ☐ 2) 3,21 ☐ 3) 0,57 ☐ 4) 0,64 ☐
28.32. Производственная функция задается как $Y = K^{0,5}L^{0,5}$, где K – капитал; L – труд. Тогда предельный продукт труда $\frac{\partial Y}{\partial L}$ при $K = 4$, $L = 25$ равен...	1) 0,4 ☐ 2) 0,2 ☐ 3) 1,25 ☐ 4) 2,5 ☐
28.33. Производственная функция задается как $Y = K^{0,5}L^{0,5}$, где K – капитал; L – труд. Тогда предельный продукт труда $\frac{\partial Y}{\partial L}$ при $K = 25$, $L = 4$ равен...	1) 10 ☐ 2) 2,5 ☐ 3) 1,25 ☐ 4) 0,2 ☐
28.34. Производственная функция задается как $Y = K^{0,5}L^{0,5}$, где K – капитал; L – труд. Тогда предельный продукт труда $\frac{\partial Y}{\partial L}$ при $K = 36$, $L = 9$ равен...	1) 18 ☐ 2) 0,25 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
28.35. Производственная функция задается как $Y = K^{0,5}L^{0,5}$, где K – капитал; L – труд. Тогда предельный продукт труда $\frac{\partial Y}{\partial L}$ при $K = 8$, $L = 50$ равен...	1) 1,25 ☐ 2) 0,2 ☐ 3) 20 ☐ 4) 0,4 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
28.36. Производственная функция Кобба — Дугласа имеет вид...	1) $Y = \dfrac{a_0K^a}{L^{1-a}}$ ☐ 2) $Y = \dfrac{a_0K^a}{L^a}$ ☐ 3) $Y = a_0\,K^aL^{1-a}$ ☐ 4) $Y = a_0\,K^aL^a$ ☐
28.37. Неоклассическая мультипликативная функция переменных K и L может иметь вид...	1) $f(K, L) = K^{0,35}L^{0,45}$ ☐ 2) $f(K, L) = 0,35K + 0,45L$ ☐ 3) $f(K, L) = K^{0,55}L^{4,5}$ ☐ 4) $f(K, L) = K^{-0,55}L^{-0,45}$ ☐
28.38. Неоклассическая мультипликативная функция переменных K и L может иметь вид...	1) $f(K, L) = K^{-0,4}L^{-0,6}$ ☐ 2) $f(K, L) = 0,4K + 0,6L$ ☐ 3) $f(K, L) = K^{0,4}L^{0,6}$ ☐ 3) $f(K, L) = K^{4}L^{0,6}$ ☐
28.39. Неоклассическая мультипликативная функция переменных K и L может иметь вид...	1) $f(K, L) = K^{-0,3}L^{-0,7}$ ☐ 2) $f(K, L) = 0,3K + 0,7L$ ☐ 3) $f(K, L) = K^{0,3}L^{0,7}$ ☐ 3) $f(K, L) = K^{3}L^{0,7}$ ☐
28.40. Мультипликативная производственная функция имеет вид $Y = K^{0,6}L^{0,3}$, где K – капитал; L – труд. Тогда увеличение объема капитала на 1% приведет к увеличению валового выпуска на...	1) 0,6% ☐ 2) 0,3% ☐ 3) 0,9% ☐ 4) 0,5% ☐
28.41. Мультипликативная производственная функция имеет вид $Y = 0,7K^{0,5}L^{0,3}$, где K — капитал; L — труд. Тогда увеличение объема труда на 1% приведет к увеличению валового выпуска на...	1) 0,5% ☐ 2) 0,8% ☐ 3) 0,7% ☐ 4) 0,3% ☐
28.42. Мультипликативная производственная функция имеет вид $Y = 0,9K^{0,2}L^{0,3}$, где K — капитал; L — труд. Тогда увеличение объема труда на 1% приведет к увеличению валового выпуска на...	1) 0,5% ☐ 2) 0,9% ☐ 3) 0,3% ☐ 4) 0,2% ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
28.43. Зависимость между издержками производства C и объемом продукции Q выражается функцией $C = 31Q - 0{,}09Q^3$. Тогда предельные издержки $\frac{dC}{dQ}$ при объеме производства Q = 10 равны...	1) 28,3 ☐ 2) 4 ☐ 3) 220 ☐ 4) 22 ☐
28.44. Межотраслевые потоки x_{ij} в трехотраслевой производственно-экономической системе представлены матрицей $\begin{pmatrix} 25 & 15 & 10 \\ 10 & 25 & 15 \\ 10 & 25 & 25 \end{pmatrix}$, а конечные продукты отраслей — столбцом $Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$. Тогда матрица коэффициентов прямых затрат имеет вид...	1) $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}25 & 0{,}15 \\ 0{,}10 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 0{,}50 & 0{,}50 & 0{,}50 \\ 0{,}20 & 0{,}83 & 0{,}75 \\ 0{,}20 & 0{,}83 & 1{,}25 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}125 & 0{,}3125 & 0{,}1875 \\ 0{,}125 & 0{,}3125 & 0{,}3125 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}1875 & 0{,}125 \\ 0{,}10 & 0{,}3125 & 0{,}1875 \\ 0{,}10 & 0{,}3125 & 0{,}3125 \end{pmatrix}$ ☐
28.45. Межотраслевые потоки x_{ij} в трехотраслевой производственно-экономической системе представлены матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 15 & 5 & 10 \\ 10 & 15 & 5 \end{pmatrix}$, а конечные продукты отраслей — столбцом $Y = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}$. Тогда матрица коэффициентов прямых затрат имеет вид...	1) $\begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}125 & 0{,}375 \\ 0{,}30 & 0{,}0625 & 0{,}25 \\ 0{,}20 & 0{,}1875 & 0{,}125 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}05 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}20 & 1{,}50 \\ 0{,}75 & 0{,}10 & 1{,}00 \\ 0{,}50 & 0{,}30 & 0{,}50 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}1875 & 0{,}0625 & 0{,}125 \\ 0{,}25 & 0{,}375 & 0{,}125 \end{pmatrix}$ ☐
28.46. Межотраслевые потоки x_{ij} в трехотраслевой производственно-экономической системе представлены матрицей $\begin{pmatrix} 10 & 5 & 15 \\ 20 & 10 & 25 \\ 30 & 5 & 35 \end{pmatrix}$, а конечные продукты отраслей — столбцом $Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$. Тогда матрица коэффициентов прямых затрат имеет вид...	1) $\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}0625 & 0{,}1875 \\ 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}3125 \\ 0{,}30 & 0{,}05 & 0{,}35 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}50 \\ 0{,}40 & 0{,}40 & 0{,}83 \\ 0{,}60 & 0{,}20 & 1{,}17 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}0625 & 0{,}15 \\ 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}25 \\ 0{,}375 & 0{,}0625 & 0{,}35 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}15 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}25 \\ 0{,}30 & 0{,}05 & 0{,}35 \end{pmatrix}$ ☐

Ответы к тестам

Правильный ответ № 1 в следующих заданиях:

1.1, 1.6, 1.12, 1.14, 1.16, 1.24, 1.27, 1.31, 1.42, 1.48, 1.57, 1.60, 1.62, 1.66, 1.77, 1.80, 1.88, 1.94, 1.101, 1.103, 1.109, 1.111, 1.117, 1.121, 1.125, 1.127;

2.7, 2.11, 2.18, 2.22, 2.23, 2.27, 2.34;

3.10, 3.12, 3.15, 3.19, 3.21, 3.25, 3.33, 3.45, 3.47, 3.51, 3.55;

4.3, 4.7, 4.9;

5.6, 5.8, 5.13, 5.16;

6.5, 6.12, 6.13, 6.16, 6.25, 6.33, 6.36, 6.39, 6.50, 6.54, 6.57, 6.61, 6.64, 6.76, 6.80, 6.82, 6.86, 6.87, 6.88, 6.91;

7.3, 7.8, 7.9, 7.11, 7.20;

8.2, 8.4, 8.6;

9.5, 9.8, 9.9, 9.12, 9.14, 9.15, 9.18, 9.26, 9.28, 9.31, 9.36, 9.40, 9.42, 9.45, 9.52, 9.53, 9.54;

10.2, 10.10, 10.13, 10.21, 10.22, 10.28, 10.30, 10.39, 10.41, 10.44, 10.48, 10.53, 10.61, 10.68, 10.72, 10.75, 10.76, 10.86;

11.4, 11.5, 11.10, 11.13, 11.16, 11.20, 11.23, 11.24, 11.30;

12.10, 12.12, 12.24, 12.27, 12.35, 12.36, 12.39, 12.43, 12.47, 12.52, 12.55, 12.63, 12.65, 12.72, 12.78, 12.84, 12.88, 12.90, 12.91;

13.2, 13.10, 13.12, 13.14, 13.21, 13.23, 13.25, 13.29, 13.30, 13.32, 13.41, 13.48, 13.50;

14.8, 14.15, 14.16, 14.19, 14.28, 14.35, 14.39, 14.41, 14.47, 14.48, 14.49, 14.54, 14.55, 14.58, 14.61, 14.66, 14.78;

15.2, 15.9, 15.10, 15.13;

16.2, 16.11, 16.14, 16.16, 16.17, 16.19, 16.20, 16.22, 16.34, 16.50, 16.53, 16.55, 16.57, 16.59, 16.66;

17.3, 17.4, 17.6, 17.11, 17.19, 17.24, 17.32, 17.37;

18.1, 18.5, 18.9, 18.14, 18.16, 18.24, 18.32;

19.4, 19.8, 19.10, 19.12, 19.13, 19.18, 19.19, 19.27, 19.34, 19.38, 19.40, 19.44, 19.51, 19.53, 19.54;

20.1, 20.7, 20.12;

21.2, 21.6, 21.9, 21.15, 21.17;

22.2, 22.4, 22.7, 22.9;

23.4, 23.7, 23.8, 23.10;

24.2, 24.4, 24.7;

25.6, 25.9, 25.12, 25.19, 25.22, 25.29, 25.33, 25.42;

26.8, 26.16, 26.19;

27.1, 27.4, 27.7, 27.11, 27.12, 27.15;

28.3, 28.6, 28.8, 28.13, 28.14, 28.17, 28.21, 28.23, 28.29, 28.37, 28.40, 28.45.

Правильный ответ № 2 в следующих заданиях:

1.2, 1.8, 1.19, 1.22, 1.23, 1.33, 1.39, 1.43, 1.47, 1.51, 1.54, 1.63, 1.69, 1.73, 1.75, 1.81, 1.93, 1.95, 1.97, 1.118, 1.122, 1.124, 1.128;

2.2, 2.4, 2.5, 2.6, 2.13, 2.15, 2.16, 2.19, 2.20, 2.28, 2.30, 2.31, 2.33;

3.3, 3.6, 3.16, 3.23, 3.24, 3.26, 3.29, 3.31, 3.32, 3.34, 3.39, 3.43, 3.49, 3.53, 3.54;
4.4, 4.8, 4.11;
5.5, 5.10, 5.14, 5.15, 5.18;
6.4, 6.6, 6.7, 6.9, 6.15, 6.19, 6.20, 6.26, 6.32, 6.34, 6.47, 6.51, 6.59, 6.66, 6.69, 6.75, 6.78, 6.81;
7.1, 7.4, 7.7, 7.12, 7.15, 7.17, 7.21;
8.1;
9.1, 9.3, 9.6, 9.7, 9.21, 9.23, 9.32, 9.41, 9.46, 9.51;
10.4, 10.5, 10.7, 10.11, 10.18, 10.20, 10.23, 10.25, 10.27, 10.29, 10.35, 10.36, 10.37, 10.42, 10.54, 10.55, 10.56, 10.59, 10.66, 10.70, 10.77, 10.81, 10.83, 10.85, 10.88;
11.2, 11.7, 11.14, 11.19, 11.25, 11.29, 11.32;
12.2, 12.5, 12.9, 12.11, 12.13, 12.17, 12.19, 12.26, 12.28, 12.31, 12.41, 12.42, 12.45, 12.50, 12.57, 12.58, 12.60, 12.64, 12.66, 12.67, 12.69, 12.71, 12.74, 12.76, 12.77;
13.1, 13.7, 13.8, 13.15, 13.17, 13.20, 13.26, 13.27, 13.28, 13.34, 13.37, 13.40;
14.1, 14.3, 14.9, 14.11, 14.22, 14.25, 14.26, 14.30, 14.33, 14.38, 14.43, 14.46, 14.52, 14.56, 14.59, 14.65, 14.71, 14.79;
15.3, 15.7, 15.12, 15.14, 15.15;
16.8, 16.10, 16.13, 16.15, 16.26, 16.27, 16.31, 16.35, 16.38, 16.41, 16.43, 16.47, 16.52, 16.54, 16.56, 16.58, 16.61, 16.63, 16.65, 16.69, 16.70;
17.1, 17.9, 17.10, 17.12, 17.17, 17.20, 17.22, 17.27, 17.30, 17.33, 17.35;
18.13, 18.15, 18.18, 18.22, 18.28, 18.29, 18.31;
19.1, 19.6, 19.7, 19.11, 19.16, 19.17, 19.33, 19.35, 19.37, 19.42, 19.45, 19.48, 19.49, 19.52;
20.2, 20.5, 20.9, 20.13;
21.7, 21.14, 21.16, 21.19;
22.6, 22.10;
23.1, 23.2;
24.1, 24.6;
25.1, 25.4, 25.10, 25.13, 25.17, 25.21, 25.30, 25.32, 25.34, 25.36, 25.38, 25.40, 25.44, 25.46;
26.3, 26.6, 26.10, 26.14, 26.18, 26.20, 27.8;
27.14;
28.1, 28.4, 28.16, 28.22, 28.28, 28.30, 28.32, 28.35, 28.43.

Правильный ответ № 3 в следующих заданиях:

1.3, 1.5, 1.9, 1.13, 1.15, 1.17, 1.25, 1.28, 1.29, 1.30, 1.34, 1.37, 1.38, 1.40, 1.44, 1.46, 1.49, 1.53, 1.56, 1.67, 1.71, 1.79, 1.83, 1.85, 1.87, 1.89, 1.90, 1.91, 1.98, 1.99, 1.105, 1.107, 1.108, 1.110, 1.113, 1.116, 1.119, 1.120, 1.123;
2.3, 2.9, 2.12, 2.17, 2.21, 2.26, 2.32;
3.1, 3.4, 3.7, 3.9, 3.14, 3.18, 3.22, 3.28, 3.35, 3.38, 3.44, 3.46, 3.48;
4.2, 4.5, 4.10;
5.2, 5.3, 5.9, 5.11;

6.2, 6.11, 6.14, 6.18, 6.22, 6.29, 6.31, 6.37, 6.40, 6.43, 6.44, 6.52, 6.55, 6.58, 6.65, 6.68, 6.71, 6.72, 6.79, 6.83, 6.90;

7.2, 7.5, 7.6, 7.10, 7.13, 7.14, 7.16, 7.18, 7.23;

8.5, 8.7, 8.9;

9.2, 9.10, 9.11, 9.13, 9.16, 9.19, 9.22, 9.25, 9.27, 9.29, 9.33, 9.35, 9.37, 9.43, 9.47, 9.48;

10.1, 10.8, 10.12, 10.16, 10.19, 10.32, 10.40, 10.45, 10.47, 10.49, 10.52, 10.63, 10.73, 10.74, 10.79, 10.80, 10.84;

11.8, 11.9, 11.17, 11.21, 11.27, 11.34;

12.1, 12.4, 12.6, 12.8, 12.15, 12.18, 12.21, 12.23, 12.30, 12.32, 12.34, 12.40, 12.49, 12.53, 12.56, 12.61, 12.62, 12.73, 12.80, 12.85, 12.87, 12.89;

13.5, 13.6, 13.11, 13.13, 13.18, 13.19, 13.22, 13.31, 13.36, 13.38, 13.39, 13.42, 13.43, 13.45, 13.46, 13.49;

14.2, 14.4, 14.5, 14.7, 14.13, 14.18, 14.21, 14.24, 14.29, 14.31, 14.36, 14.42, 14.51, 14.57, 14.60, 14.64, 14.67, 14.69, 14.70, 14.72, 14.75, 14.77;

15.5, 15.8;

16.1, 16.4, 16.6, 16.9, 16.18, 16.30, 16.33, 16.37, 16.39, 16.40, 16.44, 16.45, 16.46, 16.48, 16.51, 16.60, 16.67, 16.68;

17.2, 17.7, 17.15, 17.18, 17.23, 17.28, 17.29;

18.2, 18.4, 18.7, 18.8, 18.10, 18.12, 18.26;

19.2, 19.5, 19.14, 19.15, 19.24, 19.28, 19.41, 19.43;

20.4, 20.6, 20.15;

21.1, 21.3;

22.1;

23.6, 23.9;

24.9;

25.2, 25.5, 25.7, 25.15, 25.20, 25.24, 25.26, 25.27, 25.31, 25.35, 25.41, 25.47, 25.48;

26.1, 26.4, 26.5, 26.7, 26.11, 26.17;

27.2, 27.3, 27.5, 27.10;

28.7, 28.9, 28.10, 28.11, 28.15, 28.18, 28.19, 28.20, 28.24, 28.27, 28.33, 28.36, 28.38, 28.39, 28.42, 28.46.

Правильный ответ № 4 в следующих заданиях:

1.4, 1.7, 1.10, 1.18, 1.20, 1.21, 1.26, 1.32, 1.36, 1.41, 1.45, 1.50, 1.52, 1.55, 1.58, 1.59, 1.61, 1.64, 1.65, 1.68, 1.70, 1.72, 1.74, 1.76, 1.82, 1.92, 1.96, 1.100, 1.102, 1.106, 1.112, 1.126, 1.129;

2.1, 2.8, 2.10, 2.14, 2.24, 2.25, 2.29;

3.2, 3.5, 3.11, 3.13, 3.20, 3.30, 3.36, 3.40, 3.50, 3.52;

4.1;

5.1, 5.4, 5.7, 5.12, 5.19;

6.3, 6.10, 6.17, 6.23, 6.30, 6.35, 6.38, 6.41, 6.45, 6.46, 6.49, 6.56, 6.62, 6.63, 6.67, 6.70, 6.73, 6.74, 6.77, 6.84, 6.85, 6.89;

7.19, 7.22, 7.24;

8.3, 8.8;

9.4, 9.17, 9.20, 9.30, 9.34, 9.39, 9.44, 9.49, 9.50;

10.9, 10.14, 10.15, 10.17, 10.24, 10.26, 10.33, 10.38, 10.43, 10.46, 10.50, 10.58, 10.62, 10.64, 10.67, 10.69, 10.78, 10.82, 10.87, 10.89, 10.90;

11.3, 11.6, 11.11, 11.12, 11.15, 11.18, 11.22, 11.26, 11.31, 11.33;
12.3, 12.7, 12.14, 12.16, 12.22, 12.25, 12.29, 12.44, 12.48, 12.51, 12.54, 12.59, 12.70, 12.75, 12.79, 12.81, 12.82, 12.83, 12.86;
13.3, 13.4, 13.9, 13.33, 13.35, 13.44, 13.47, 13.51;
14.6, 14.10, 14.12, 14.14, 14.17, 14.23, 14.27, 14.32, 14.40, 14.44, 14.45, 14.50, 14.53, 14.62, 14.63, 14.68, 14.73, 14.76;
15.1, 15.6, 15.11;
16.3, 16.5, 16.7, 16.12, 16.21, 16.23, 16.25, 16.28, 16.29, 16.32, 16.36, 16.49, 16.64;
17.5, 17.8, 17.13, 17.14, 17.16, 17.21, 17.25, 17.26, 17.31, 17.34, 17.36;
18.3, 18.6, 18.11, 18.17, 18.19, 18.21, 18.23, 18.25, 18.27, 18.30;
19.3, 19.9, 19.21, 19.22, 19.25, 19.26, 19.29, 19.30, 19.31, 19.32, 19.36, 19.39, 19.46, 19.47, 19.50, 19.55;
20.8, 20.10, 20.14;
21.4, 21.8, 21.12;
22.3, 22.5, 22.8;
23.3, 23.5;
24.3, 24.8;
25.3, 25.8, 25.14, 25.18, 25.23, 25.25, 25.28, 25.37, 25.39, 25.43, 25.45, 25.49;
26.2, 26.9, 26.12, 26.15;
27.6, 27.9, 27.13;
28.2, 28.5, 28.12, 28.25, 28.31, 28.34, 28.41, 28.44.

Правильный ответ № 5 в следующих заданиях:
1.11, 1.35, 1.78, 1.84, 1.86, 1.104, 1.114, 1.115;
3.8, 3.17, 3.27, 3.37, 3.41, 3.42;
4.6;
5.17;
6.1, 6.8, 6.21, 6.24, 6.27, 6.28, 6.42, 6.48, 6.53, 6.60;
9.24, 9.38;
10.3, 10.6, 10.31, 10.51, 10.57, 10.60, 10.65, 10.71;
11.1, 11.28;
12.20, 12.33, 12.37, 12.38, 12.46, 12.68;
13.16, 13.24;
14.20, 14.34, 14.37, 14.74, 14.80;
15.4;
16.24, 16.42, 16.62;
18.20;
19.20, 19.23;
20.3, 20.11;
21.5, 21.10, 21.11, 21.13, 21.18, 21.20;
24.5;
25.11, 25.16;
26.13;
28.26.

Предметный указатель

Ответы к задачам

Глава 1

1. $x^* = (6, 2)$; $Q_{\max} = 26$.
2. $x^* = (1, 4, 5)$; $Q_{\min} = -8$.
3. $x^* = (0, 4, 4)$; $Q_{\max} = 44$.
4. $x^* = (0, 28, 26)$; $Q_{\min} = -74$.
5. $x^* = \left(\frac{44}{5}, \frac{6}{5}\right)$; $Q_{\max} = \frac{214}{5}$.
6. $x^* = \left(\frac{90}{23}, \frac{40}{23}\right)$; $Q_{\max} = \frac{6100}{23}$.
7.1. $x^* = t(2; 0) + (1 - t)(1; 2)$; множество решений, одно из них дает $Q_{\min} = 4$.
7.2. $x^* = (3, 8)$; $Q_{\min} = -12$.
7.3. $x^* = (6, 4)$; $Q_{\max} = 26$.
7.4. $x^* = (1, 2)$; $Q_{\min} = 12$.
7.5. $x^* = (5, 2)$; $Q_{\max} = 4$.
7.6. $x^* = (1, 2)$; $Q_{\max} = 4$.
7.7. $x^* = (8, 10)$; $Q_{\min} = -22$.
7.8. $x^* = (6, 2)$; $Q_{\max} = 16$.
7.9. $x^* = (6, 2)$; $Q_{\max} = 26$.
7.10. $x^* = (1, 4)$; $Q_{\min} = -6$.
7.11. $x^* = (5, \frac{70}{9})$; $Q_{\max} = \frac{295}{9}$.
7.12. $x^* = (6, 3)$; $Q_{\max} = 39$.
8. 600 лисиц и 200 песцов.

Глава 2

2.1.

Карьеры	Комбинаты		
	1	2	3
1	30	30	—
2	—	20	60

2.2.

Хранилища	Котельные				
	1	2	3	4	5
1	—	—	—	—	40
2	—	80	10	60	—
3	20	—	80	—	—

Глава 3

1. $\beta = 1$.
2. $\beta = 4$.
3. $\beta = 3$.
4. $\alpha = -2$.
5. $S_B^* = (0{,}6,\ 0{,}4)$.
6. $S_A^* = (0{,}36,\ 0{,}64)$.
7. $c = 0{,}2$.
8. B_2.

Глава 4

1. $p_0 = \frac{1}{3}$; $p_1 = \frac{4}{9}$; $p_2 = \frac{2}{9}$.
2. $Q = 0{,}2$.
3. $Q = 0{,}6$.
4. $Q = 0{,}25$; 4 канала.

Глава 8

1. $x_1^* = 5$; $x_2^* = 10$.

2. 20 ден. ед.; $x_1^* = \frac{50}{11} \approx 4{,}54$;
$x_2^* = 11$.

3. –3,5.

4. 2 ден. ед.; 30 изд./мес.

5. а) $p_0 = 13$; $q_0 = s_0 = 40$;
б) $q_{q0} = 15$; $q_{s0} = 9$; $q_0 = s_0 = 36$;
в) 3.

6. $\frac{6}{7}$.

7. $q = \frac{45}{p^2}$.

8. 42 руб./кг.

9. $0 < I < 25$;
$I > 25$.

Глава 9

1. 0,01 млн руб./раб. ч.

2. 2 287 500; 280.

3. а) 2500; б) 11 000; в) 722 500.

4. $R = 3000Y$;
$C = 36\,000 + 1200Y$; 20.

5. 500 км.

6. 320; 102 400.

7. 30; 430; 8100.

8. 4 млн руб.

9. 48 лет.

10. 4,5 тыс. руб.; 5 лет.

Литература

1. *Ашманов, С. А.* Введение в математическую экономику / С. А. Ашманов. — М. : Наука, 1984.

2. *Вентцель, Е. С.* Исследование операций / Е. С. Вентцель. — М. : Высшая школа, 2001.

3. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. — М. : ЮНИТИ, 2010.

4. *Замков, О. О.* Математические методы в экономике / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. — М. : ДИС, 1997.

5. *Замков, О. О.* Математические методы в экономике : учебник / О. О. Замков, Ю. Н. Черемных, А. В. Толстопятенко. — М. : Дело и сервис, 2005.

6. *Иванилов, Ю. П.* Математические модели в экономике / Ю. П. Иванилов, А. В. Лотов. — М. : Наука, 1979.

7. *Интриллигатор, М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор. — М. : Прогресс, 1975.

8. Исследование операций в экономике / под ред. Н. Ш. Кремера. — М. : ЮНИТИ, 2009.

9. *Карасев, А. И.* Математические методы и модели в планировании / А. И. Карасев, Н. Ш. Кремер, Т. И. Савельева. — М. : Экономика, 1987.

10. *Кейн, Э.* Экономическая статистика и эконометрия / Э. Кейн. — М. : Прогресс, 1977.

11. *Колемаев, В. А.* Математическая экономика / В. А. Колемаев. — М. : ЮНИТИ, 2009.

12. *Кузнецов, Б. Т.* Математика / Б. Т. Кузнецов. — М. : ЮНИТИ, 2009.

13. *Кузнецов, А. В.* Высшая математика. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. — Минск : Высшая школа, 2004.

14. *Ланкастер, К.* Математическая экономика / К. Ланкастер. — М. : Советское радио, 1972.

15. *Левин, М. И.* Математические модели экономического взаимодействия / М. И. Левин, В. Л. Макаров, А. М. Рубинов. — М. : Наука, 1993.

16. *Макаров, В. Л.* Математическая теория экономической динамики и равновесия / В. Л. Макаров, А. М. Рубинов. — М. : Наука, 1979.

17. *Маленво, Э.* Лекции по микроэкономическому анализу / Э. Маленво. – М. : Наука, 1985.

18. *Малыхин, В. И.* Математика в экономике / В. И. Малыхин. — М. : ИНФРА-М, 2002.

19. *Малыхин, В. И.* Финансовая математика / В. И. Малыхин. — М. : ЮНИТИ, 2010.

20. Математический аппарат экономического моделирования / под ред. Е. Г. Гольштейна. — М. : Наука, 1983.

21. *Моришима, М.* Равновесие, устойчивость, рост / М. Моришима. — М. : Наука, 1972.

22. *Никайдо, Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. — М. : Мир, 1972.

23. Общий курс высшей математики для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. — М. : ИНФРА-М, 2008.

24. *Попов, А. М.* Линейная алгебра. Высшая математика для экономистов : в 5 кн. Кн. 1 / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : ИНЭП, 2009.

25. *Попов, А. М.* Математический анализ и дифференциальные уравнения. Высшая математика для экономистов : в 5 кн. Кн. 2 / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : ИНЭП, 2009.

26. *Попов, А. М.* Теория вероятностей и математическая статистика. Высшая математика для экономистов : в 5 кн. Кн. 3 / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : ИНЭП, 2008.

27. *Попов, А. М.* Дискретная математика. Высшая математика для экономистов : в 5 кн. Кн. 4 / А. М. Попов, В. Н. Сотников, Е. И. Нагаева. — М. : ИНЭП, 2009.

28. *Попов, А. М.* Экономико-математические методы и модели. Высшая математика для экономистов : в 5 кн. Кн. 5 / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : ИНЭП, 2009.

29. *Попов, А. М.* Сборник тестов по математике / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : ИНЭП, 2009.

30. *Столерю, А.* Равновесие и экономический рост / А. Столерю. — М. : Статистика, 1974.

31. *Фомин, Г. П.* Математические методы и модели в коммерческой деятельности / Г. П. Фомин. — М. : Финансы и статистика, 2008.

32. *Шапкин, А. С.* Математические методы и модели исследования операций / А. С. Шапкин, Н. П. Мазаева. — М. : Дашков и К°, 2009.

33. *Шикин, Е. В.* Математические методы и модели в управлении / Е. В. Шикин, А. Г. Чхартишвили. — М. : Дело, 2006.

34. *Экланд, И.* Элементы математической экономики / И. Экланд. — М. : Мир, 1983.

35. Экономико-математические методы и модели / под ред. А. В. Кузнецова. — Минск : БГЭУ, 2008.

Приложение

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

Латинский алфавит

A	a	а	N	n	эн
B	b	бе	O	o	о
C	c	це	P	p	пэ
D	d	де	Q	q	ку
E	e	е	R	r	эр
F	f	эф	S	s	эс
G	g	же	T	t	еэ
H	h	аш	U	u	у
I	i	и	V	v	вэ
J	j	жи	W	w	дубль-вэ
K	k	ка	X	x	икс
L	l	эль	Y	y	игрек
M	m	эм	Z	z	зет

Греческий алфавит

Α	α	альфа	Ν	ν	ню
Β	β	бета	Ξ	ξ	кси
Γ	γ	гамма	Ο	ο	омикрон
Δ	δ	дельта	Π	π	пи
Ε	ε	эпсилон	Ρ	ρ	ро
Ζ	ζ	дзета	Σ	σ	сигма
Η	η	эта	Τ	τ	тау
Θ	θ	тета	Υ	υ	ипсилон
Ι	ι	йота	Φ	φ	фи
Κ	κ	каппа	Χ	χ	хи
Λ	λ	лямбда	Ψ	ψ	пси
Μ	μ	мю	Ω	ω	омега

Правила действий с рациональными числами (дробями)

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd};\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};$$
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd};\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

Пропорции

Два равных отношения образуют пропорцию

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\quad ad=bc.$$

Нахождение членов пропорции

$$a=\frac{bc}{d};\quad b=\frac{ad}{c};\quad c=\frac{ad}{b};\quad d=\frac{bc}{a}.$$

Пропорции, равносильные пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a};\quad \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

Производная пропорция — следствие пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ в виде

$$\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd},$$

где m, n, p, q – произвольные числа, причем p и q не равны нулю одновременно.

Алгебра

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;\ (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Свойства степени

$$a^0=1;\quad a^m a^n=a^{m+n};\quad a^m:a^n=a^{m-n};\quad (a^m)^n=a^{mn};\quad (ab)^m=a^m b^m;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m};\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n};\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m;\quad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a};\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Свойства квадратного (арифметического) корня ($a, b > 0$; k, m, n – натуральные числа)

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab};\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};\quad (\sqrt{a})^m=\sqrt{a^m};\quad \sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}};\quad \sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k};\quad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab};\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m};\quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a^m};\quad \sqrt{a^m}=(\sqrt{a})^m.$$

Уравнения и системы уравнений

Решение системы двух уравнений первой степени

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{cb_1-c_1b}{ab_1-a_1b} \\ y=\dfrac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b} \end{cases} (ab_1-a_1b\neq 0).$$

Формула корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Формула корней приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\,.$$

Формула корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом $ax^2+2kx+c=0$

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Теорема Виета

- для квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a};$$

- для приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$:

$$x_1+x_2=-p;\quad x_1\cdot x_2=q.$$

Разложение на множители квадратного трехчлена:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Выделение квадрата двучлена из квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Решение биквадратного уравнения $ax^4 + bx^2 + c = 0$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Формула действительного корня неполного кубического уравнения $y^3 + py + q = 0$

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n;$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ... = a_{k+1} + a_{n-k}; \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q};$$

$$b_1 b_n = b_2 b_{n-1} = ... = b_{k+1} b_{n-k}; \quad |b_n| = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}.$$

Если $q > 1$, то прогрессия возрастающая; если $0 < q < 1$, то прогрессия убывающая; если $q < 0$, то прогрессия знакопеременная.

Если $0 < |q| < 1$, то $S_n = \frac{b_1}{1 - q}$, при $n \to \infty$.

Логарифмы ($a > 1$; $a \neq 1$; $b > 0$)

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b; \log_e x = \ln x, \text{ где } e \approx 2{,}72.$$

$$b^{\log_b a} = a; \quad \log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a a^m = m;$$

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b; \quad \log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b;$$

$$\log_c a^k = k\log_c a;\quad \log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log_c a;\quad \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b};$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a};\quad \frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b;$$

$$\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c;\quad a^{\log_n b} = b^{\log_n a}.$$

Теория соединений

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!;\quad n! = n \cdot (n-1)!$$

Формула Стирлинга (факториалы больших чисел)

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \ldots\right);$$

$$\ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi}.$$

Комбинаторика

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1);$$

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n;\quad P_n = A_n^n.$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m};$$

$$C_n^m = C_n^{n-m};\quad C_{n+1}^{n-m} = C_n^m + C_n^{m+1};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} = 2^n.$$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n;$$

$$C_n^1 = n;\quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2};\quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Треугольник Паскаля

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

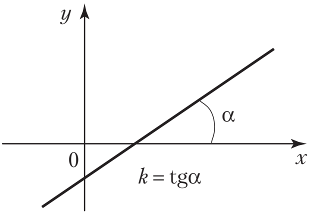
1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

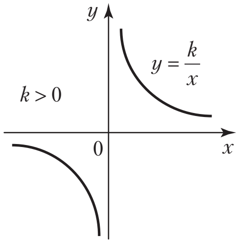
1 7 21 35 35 21 7 1

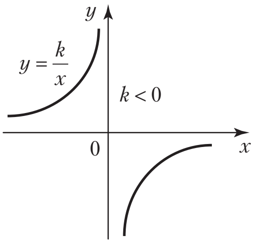
Графики элементарных функций

Линейная функция $y = kx + b$

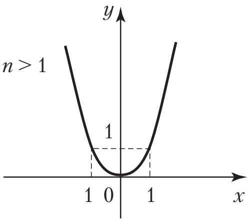


Дробно-линейная функция $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0, x \neq 0)$

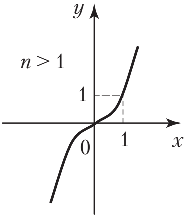




Степенная функция $y = x^n$

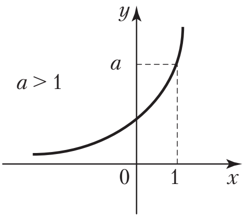


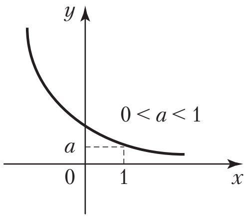
n — четное



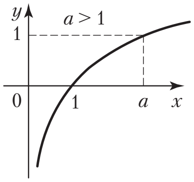
n — нечетное

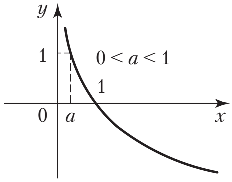
Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$





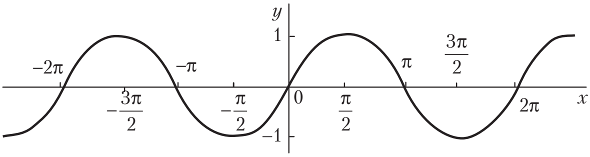
Логарифмическая функция $y = \log_{ax}$



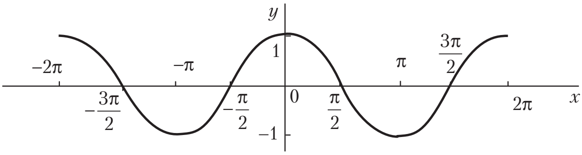


Тригонометрические функции

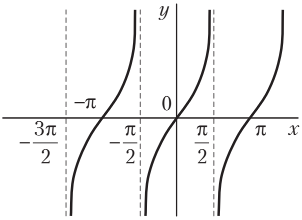
$y = \sin x$



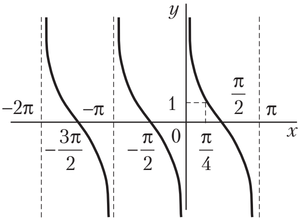
$y = \cos x$



$y = \mathrm{tg}\, x$

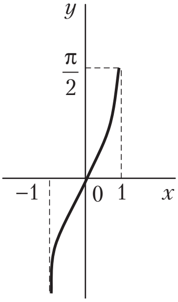


$y = \mathrm{ctg}\, x$

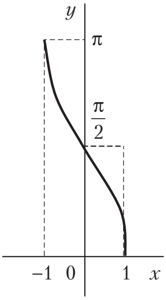


Обратные тригонометрические функции

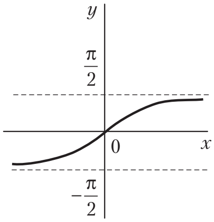
$y = \arcsin x$



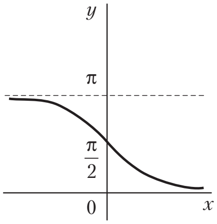
$y = \arccos x$



$y = \operatorname{arctg} x$



$y = \operatorname{arcctg} x$



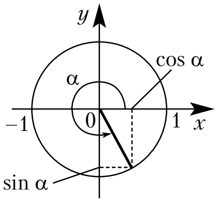
Тригонометрия

Градусная и радианная мера углов

1 радиан $= \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$.

0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Тригонометрические функции



Синус угла α — ордината точки единичной окружности, соответствующей данному углу, т.е. $\sin \alpha = y$.

Косинус угла α — абсцисса точки окружности, соответствующей данному углу, т.е. $\cos \alpha = x$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Знаки значений тригонометрических функций

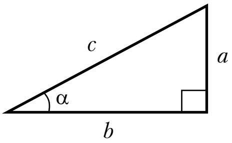
Четверть	sin α	cos α	tg α	ctg α
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	–1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	–1	0	1

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
cos α	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞	0	∞

Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике



$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\quad \cos\alpha = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Тригонометрические тождества

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;\quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha};\quad |\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Формулы сложения тригонометрических функций

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\beta}.$$

Тригонометрические функции двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};\quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Тригонометрические функции половинного угла

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Сумма и разность тригонометрических функций

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Понижение степени тригонометрических функций

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Произведение тригонометрических функций

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Соотношение между обратными тригонометрическими функциями

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Геометрия

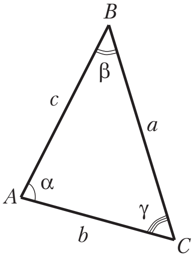
Треугольники

Формула вычисления площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Теорема косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$



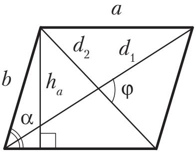
Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Четырехугольники

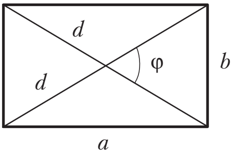
Параллелограмм

$$S = ab\sin\alpha.$$



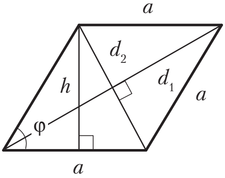
Прямоугольник

$$S = ab = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi.$$



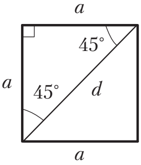
Ромб

$$S = ah = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2.$$



Квадрат

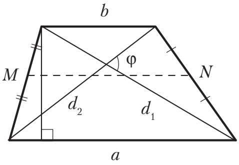
$$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2.$$



Трапеция

$$S = \frac{a+b}{2}h = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi;$$

$$MN = \frac{1}{2}(a+b) \text{ — средняя линия.}$$



Окружность и круг

Длина окружности: $C = 2\pi r = \pi d$.

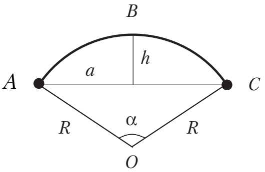
Длина дуги, равной n°: $L = \dfrac{\pi r}{180^\circ}n^\circ$.

Площадь круга: $S = \pi r^2 = \pi\dfrac{d^2}{4} = \dfrac{Cd}{4}$.

Сегмент и сектор

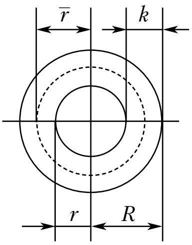
$$a = 2R\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$h = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}.$$



Площадь сектора: $S_{OABC} = \frac{1}{2}R^2\alpha.$

Площадь сегмента: $S_{ABC} = S_{OABC} - S_{OAC}.$



Площадь кругового кольца

$$a = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi\bar{r}k.$$

Основные формулы математического анализа

Производная и дифференциал

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $[x_0, f(x_0)]$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Правила нахождения производной

$$c' = 0; \quad (cu)' = cu';$$
$$(u + v)' = u' + v'; \quad (u - v)' = u' - v';$$
$$(uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Производные элементарных функций

$$c' = 0; \quad (x^n)' = nx^{n-1}; \quad x' = 1;$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x};$$
$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (e^x)' = e^x;$$
$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}; \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Определение и свойства пределов

Свойства пределов

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x) - h(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) - \lim_{x\to a} h(x);$$

$$\lim_{x\to a} [(f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x);$$

$$\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x);$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\ [\lim_{x\to a} g(x) \neq 0].$$

Замечательные пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2{,}71828...$$

Правило Лопиталя для неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если предел в правой части существует.

Неопределенный интеграл

Основные свойства неопределенного интеграла

$$d\int f(x)dx = f(x)dx;\quad [\int f(x)dx]' = f(x);$$

$$\int dF(x) = F(x) + C;\quad \int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \neq 0;$$

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx.$$

Основные методы интегрирования

Метод разложения

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx,$$

где $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Метод подстановки. Если $x = \varphi(t)$, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Метод интегрирования по частям

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Табличные интегралы некоторых функций

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m + 1} + C\ (m \neq -1);\quad \int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C\ (x \neq 0);$$

$$\int e^x dx = e^x + C;\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0,\ a \neq 1);$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C; \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1;$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C_1;$$

$$\int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| + C; \quad \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - x}{1 + x}\right| + C.$$

Определенный интеграл

Формула Ньютона — Лейбница

Если $f(x)$ непрерывна и $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt; \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0; \quad \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx;$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x); \quad \frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x).$$

Теорема о среднем

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c),$$

где $a < c < b$.

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\,[\varphi(t)dt]\varphi'(t)dt,$$

где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$.

Формула трапеций

$$\int_a^b y\,dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right),$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_0 = a$ и $x_n = b$, $y = f(x)$, $y_i = f(x_0 + ih)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Формула Симпсона

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y(a) + 4y\left(\frac{a+b}{2}\right) + y(b)\right],$$

где $h = \dfrac{1}{2}(b - a)$.

Несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$

Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения второго порядка

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \quad y = \overline{y} + z,$$

где $\overline{y}$ — общее решение соответствующего однородного уравнения; z — частное решение данного неоднородного уравнения.

Общий вид решений однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0 \text{ (} p \text{ и } q \text{ постоянны)}$$

в зависимости от корней характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$.

Характер корней k_1 и k_2 характеристического уравнения	Вид общего решения
Корни k_1 и k_2 действительные и различные	$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
Корни равные: $k_1 = k_2$	$y = (C_1 + C_2x)e^{k_1x}$
Корни комплексные: $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$,	$y = e^{ax}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

Характер частного решения z неоднородного уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x) \text{ } (p \text{ и } q \text{ постоянны})$$

в зависимости от правой части $f(x)$.

Правая часть $f(x)$	Случаи	Частное решение
$f(x) = a e^{mx}$ (a, m — постоянны)	1) $m^2 + pm + q \neq 0$ 2) $m^2 + pm + q = 0$ 3) $p^2 - 4q > 0$ 4) $p^2 - 4q = 0$	$z = Ae^{mx}$ $z = Axe^{mx}$ $z = Ax^2e^{mx}$
$f(x) = M\cos\omega x +$ $+ N\sin\omega x$ (M, N, ω — постоянны; $\omega \neq 0$)	1) $p^2 + (q - \omega^2) \neq 0$ 2) $p = 0$; $q = \omega^2$	$z = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ $z = x(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$
$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c — постоянны)	1) $q \neq 0$ 2) $q = 0$; $p \neq 0$	$z = Ax^2 + Bx + C$ $z = x(Ax^2 + Bx + C)$

Дифференциальное исчисление функций двух переменных

Полный дифференциал функции $z = f(x, y, z)$ от независимых переменных x и y

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

где $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Градиент скалярного поля $u = f(x, y, z)$ есть вектор

$$\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Модуль градиента

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Ряды

Числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} u_n.$$

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Признак Даламбера. Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n > 0)$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$.

Если $l < 1$, то ряд сходится.
Если $l > 1$, то ряд расходится.

Признак Лейбница. Если $v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \geqslant \dots \geqslant 0$ и $v_n \to 0$ при $n \to \infty$, то знакочередующийся ряд

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \dots$$

сходится.

Радиус сходимости степенного ряда

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

определяется по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}},$$

если последняя имеет смысл.

Степенные ряды

Ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$
$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n].$$

Ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Разложение в степенные ряды основных функций

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \ (|x| < 1);$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots \ (-1 < x \leqslant 1);$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \ (|x| < \infty);$$

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \dots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots; \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Основные формулы линейной алгебры

Матрицы и определители

Единичная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица (A^{-1})

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E;$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

где Δ — определитель матрицы A; A_{ij} — алгебраическое дополнение ее элемента a_{ij}.

Определители

Определитель второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Формулы Крамера для системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{22} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

где $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} \end{vmatrix}$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя.

Формулы Крамера для системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Комплексные числа

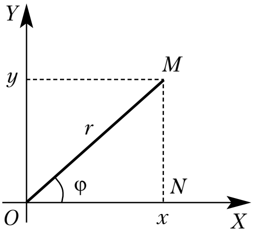
Вид комплексного числа

$$z = x + iy,$$

где x, y — действительные числа; i — мнимая единица; $i^2 = -1$.

Модуль комплексного числа

$$|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Тригонометрическая форма записи комплексного числа

$$x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Действия с комплексными числами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 - y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0).$$

Корень из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Показательная форма записи комплексных чисел

$$z = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Учебное издание

Попов Александр Михайлович
Сотников Валерий Николаевич

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Учебник для бакалавров

Редактор *В. А. Русев*
Корректор *С. И. Шишкина*
Художественное оформление *А. И. Гиренко*
Компьютерная верстка *В. М. Дубильт*

Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Гарнитура «Petersburg». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25,15. Тираж 1000 экз. Заказ №

ООО «Издательство Юрайт»
140004, Московская обл., г. Люберцы, 1-й Панковский проезд, д. 1.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru