

531(075.8)
П 691



Національний університет
"КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ"

Факультет природничих наук
Кафедра фізико-математичних наук

Навчальний посібник

Практикум з механіки

МЕТОДИЧНА СЕРІЯ



2004

Transcript 110.

531 (272.8)
17691



Національний університет
"КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ"

Факультет природничих наук
Кафедра фізико-математичних наук

Навчальний посібник

Практикум з механіки

289373

Бібліотека
університету
"Києво-Могилянська
академія"

Київ



Видавничий дім
"Києво-Могилянська академія"
2004

Навчальний посібник "Практикум з механіки" підготовлений на кафедрі фізико-математичних наук факультету природничих наук Національного університету "Кієво-Могилянська академія". У ньому описані лабораторні роботи до курсу "Загальна фізика" (розділ „Механіка”), які виконуються студентами першого року навчання природничого факультету на кафедрі фізико-математичних наук НаУКМА. Даний посібник може бути рекомендований для студентів природничих факультетів вузів, які вивчають загальний курс фізики, а також для вчителів фізики та учнів старших класів шкіл і ліцеїв.

Упорядники:

Голод П.І., доцент, кандидат фіз.-мат. наук,
Шиманська О.Т., доцент, кандидат фіз.-мат. наук,
Мельник Р.М., ст. викладач, кандидат фіз.-мат. наук,
Рудько Г.Ю., доцент, кандидат фіз.-мат. наук.

Рецензент:

Поперенко Л.В., доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри оптики фізичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка.

*Затверджено до друку Вченою радою НаУКМА
Протокол № 36 (3) від 20 червня 2004 року*

© П.І. Голод, О.Т. Шиманська,
Р.М. Мельник, Г.Ю. Рудько
упорядкування, 2004

Передмова

Цей навчальний посібник написаний викладачами кафедри фізико-математичних наук Національного університету «Києво-Могилянська академія» (НаУКМА) для забезпечення розділу «Механіка» дисципліни «Загальна фізика», що читається на першому курсі природничого факультету НаУКМА. Згідно з робочим планом лабораторним роботам в механічному практикумі відведено 8 академічних годин. Студентам пропонується чотири лабораторних роботи, які викладені нижче. Метою цих лабораторних робіт є експериментальне вивчення і перевірка закономірностей поступального, обертального та коливного рухів.

В цьому посібнику лабораторні роботи описані за єдиним планом: мета роботи, теоретичні відомості, опис установки, порядок виконання роботи і обробки експериментальних результатів. Теоретичні відомості представлені таким чином, щоб лабораторну роботу можна було виконувати студенту не залежно від того, чи вже прочитано матеріал по даній темі на лекціях, чи ні. Якщо студент після прочитання теоретичної частини не буде мати впевненості в знаннях по даній темі, йому слід звернутись до літератури, яка наводиться в кінці опису кожної лабораторної роботи, і опрацювати матеріал в більш широкому плані.

В кінці опису кожної роботи наведені контрольні запитання з теоретичних основ роботи та з техніки експериментальних вимірювань.

В постановці лабораторних робіт, окрім укладачів посібника, брав участь також співробітник кафедри старший лаборант Соколов М.І.

Рекомендації та настанови студентам щодо роботи в механічному практикумі.

Підготовка до виконання лабораторної роботи здійснюється кожним студентом як самостійна позааудиторна робота.

Для виконання лабораторних робіт в механічному практикумі студенту слід підготувати два зошити: робочий та зошит для звітів.

В робочому зошиті студент перед виконанням лабораторної роботи записує дату її виконання, назву теми лабораторної роботи, основні формули, а в процесі виконання роботи результати експериментальних досліджень. Під час лабораторних занять окрім вимірювань студент повинен провести відповідні розрахунки і оцінити похибки вимірювань. В кінці заняття студент подає ці результати викладачеві на підпис для засвідчення факту виконання роботи, і одержує тему на наступне лабораторне заняття.

В зошиті для звітів студент в позалабораторний час оформляє звіт про виконання роботи, в якому формулюється мета роботи, короткі теоретичні відомості, подаються результати експериментальних досліджень у вигляді таблиць та проводиться аналіз похибок. При аналізі похибок студенту слід звернути увагу на те, з прямими чи непрямыми вимірами він мав справу, чи відтворювані були умови досліду, чи мали місце систематичні похибки. Запис остаточного результату вимірювань фізичної величини слід подати як середнє значення з довірчим інтервалом при певній довірчій ймовірності.

Поради і вказівки по визначенню похибок фізичних вимірювань наведені в окремому методичному посібнику, який використовується при виконанні лабораторних робіт у всіх практикумах загальної фізики НаУКМА. Методику розрахунку похибок вимірювання фізичних величин студент опановує самостійно.

На початку першого і наступних занять студент подає викладачеві свої 2 зошити і формулює мету роботи, яку він буде виконувати на занятті. Не підготовлені до роботи студенти або ті, що не оформили попередньої роботи, не допускаються до виконання наступної лабораторної роботи і займаються під час заняття оформленням попередньої роботи замість виконання планової. Недопущення до роботи впливає на оцінку студента в практикумі.

Перед виконанням лабораторної роботи слід ознайомитись з експериментальною установкою на її робочому місці, налагодити установку для роботи, провести контрольний дослід і впевнитись, що установка знаходиться у робочому стані і лише потім проводити систематичні експериментальні дослідження по темі лабораторної роботи.

При розрахунках експериментальних даних студентам в ряді випадків необхідно представляти результати досліджень в графічному вигляді, щоб одержати наочне уявлення про взаємний зв'язок розглядуваних фізичних величин і закони їх зміни. Графіки слід виконувати на міліметровому папері і користуватись прямокутною системою координат з рівномірним масштабом по осях x і y . Значення аргументів слід відкладати по осі x , значення функції по осі y . Слід мати на увазі, що перетин координатних осей не обов'язково повинен співпадати з нульовими значеннями x і y . Одержані експериментальні дані наносять на графік звичайно у вигляді точок і з'єднують їх кривою. Досліджувані залежності в лабораторних роботах є неперервними, тому крива має бути плавною і проводитись так, щоб експериментальні точки знаходились по обидва боки кривої на однаковій відстані від неї.

За кожну виконану і оформлену роботу кожен студент звітує індивідуально під час занять в лабораторному практикумі або в окремий призначений викладачем час.

1. Вивчення законів кінематики та динаміки прямолінійного руху на приладі Атвуда

Мета роботи: експериментально вивчити закони кінематики прямолінійного руху, перевірити виконання другого закону Ньютона, визначити із даних дослідів величину прискорення сили земного тяжіння g .

Прилади та матеріали: лабораторна установка FPM-02.

Теоретичні відомості

Основні закономірності кінематики прямолінійного руху тіл можна представити у вигляді формул:

для рівномірного руху

$$v = \text{const}, \quad S = vt, \quad (1.1)$$

для рівноприскореного руху

$$a = \text{const}, \quad v = v_0 + at, \quad S = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (1.2)$$

де v – швидкість, S – шлях, t – час; v_0 – початкова швидкість, a – прискорення, яке може бути як додатним, так і від’ємним (якщо a від’ємне, то рух називається рівносповільненим).

В загальному випадку довільного прямолінійного руху формули для швидкостей та пройденого шляху будуть складнішими.

Прискорений рух тіла в інерційній системі відліку викликається дією сили. За другим законом Ньютона прискорення a тіла прямо пропорційне діючій силі F (або рівнодіючій декількох сил) і обернено пропорційне масі тіла m :

$$a = \frac{F}{m} \quad (1.3)$$

Опис установки та методики виконання експериментальних завдань

Для експериментальних досліджень законів кінематики та динаміки поступального руху тіл в даній роботі використовується прилад, що називається машиною Атвуда. Принципова схема приладу наведена на рис. 1.1.

Прилад складається із штативу 1 з блоком 2, через який перекинута нитка. На кінцях цієї нитки закріплено два тягарці з однаковою масою M . Ця система (два тягарці, що з'єднані ниткою) може знаходитись у стані спокою або рухатись зі сталою швидкістю. Для надання цій системі прискореного руху слід на правий тягарець M покласти наважку m .

На штативі 1 приладу нанесена міліметрова шкала і розміщені три кронштейни K_1, K_2, K_3 . На верхньому кронштейні K_1 є мітка, відносно якої встановлюється положення нижнього кінця правого тягарця M . Кронштейн K_2 має рамку з круглим отвором, через який може пройти тягарець M , але при цьому затримається наважка m . Кронштейн K_3 має платформу, на якій зупиняється тягарець M .

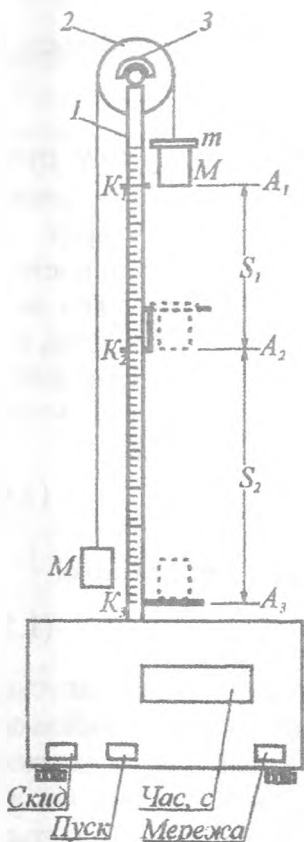


Рис. 1.1.

Біля блоку 2 знаходиться електромагніт 3, з допомогою якого натисканням клавіші "Пуск" (на передній панелі основи приладу) можна фіксувати положення системи, або звільняти систему від затискача при повторному натисканні тієї ж клавіші.

На передній панелі основи приладу розміщено також табло цифрового лічильника часу та кнопка "Скид", за допомогою якої можна здійснити занулення показів лічильника часу.

В процесі експерименту можна міняти відстань S_1 між кронштейнами K_1 і K_2 , відстань S_2 між кронштейнами K_2 і K_3 а також змінювати масу наважки m .

Експериментальне виконання роботи складається із чотирьох завдань. Розглянемо їх.

Завдання I. Вивчення законів рівномірного руху

Спочатку систему слід зафіксувати у такому положенні, щоб нижня частина правого тягарця M знаходилась на рівні A_1 . Для надання прискорення системі на правий тягарець M слід покласти наважку маси m і звільнити систему від дії магнітного затискача. Система, під дією сили земного тяжіння на наважку маси m , проходить за час t_1 рівноприскорено шлях S_1 до рівня A_2 :

$$S_1 = \frac{at_1^2}{2}. \quad (1.4)$$

Швидкість тягарця M у кінці шляху S_1 буде рівною:

$$v_1 = at_1. \quad (1.5)$$

На кронштейні K_2 міститься фотодатчик, який запускає відлік часу секундоміром у момент проходження нижньою частиною правого тягарця M рівня A_2 . У цей момент наважка m залишається на кронштейні K_2 , між краями якого проходить тягарець M . Після цього система рухається рівномірно зі швидкістю $v_2 = v_1$ і пройде шлях S_2 від рівня A_2 до рівня A_3 за час t_2 :

$$t_2 = \frac{S_2}{v_2} \quad (1.6)$$

На кронштейні K_3 є ще один фотодатчик, який реєструє значення часу t_2 .

Зберігаючи постійним значення шляху S_1 і змінюючи значення S_2 (пересуваючи кронштейни K_2 і K_1 одночасно), можна перевірити виконання закономірностей рівномірного прямолінійного руху на шляху S_2 (формула (1.1)).

Значення прискорення a , що виникло під дією певної наважки m , не залежить від вибору параметрів системи S_1 і S_2 і буде однаковим на всьому шляху S_1 , а зміниться лише при заміні наважки m .

Завдання II. Вивчення законів рівноприскореного руху

Знайдемо вираз для прискорення a системи при її русі під дією сили ваги певної наважки m на шляху S_1 , беручи до уваги співвідношення (1.4) і (1.5). З формули (1.4) випливає, що час t_1 буде рівним:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2S_1}{a}} \quad (1.7)$$

В той же час з формули (1.5) маємо:

$$t_1 = \frac{v_1}{a}. \quad (1.8)$$

Прирівнявши вирази (1.7) і (1.8) і врахувавши, що

$$v_2 = v_1 = \frac{S_2}{t_2}, \text{ одержимо:}$$

$$a = \frac{S_2^2}{2S_1 t_2^2}. \quad (1.9)$$

Отже, змінюючи значення S_1 , можна перевірити виконання закономірностей рівноприскореного прямолінійного руху (формула (1.2), в якій $v_0=0$).

Формула (1.9) є робочою формулою в даній задачі.

Завдання III. Перевірка другого закону Ньютона

Розглянемо динаміку руху системи, яка складається блоку, двох тягарців однакової маси M , що з'єднані ниткою, наважки m . Нехтуючи силою тертя вісі блока, моментом інерції блока і вважаючи нитку невагомою і нерозтяжною знайдемо прискорення a системи при її русі.

Для цього запишемо рівняння руху системи направивши вісь X вниз:

1) для правого тягарця M з наважкою m

$$(M + m)a = (M + m)g - T_2, \quad (1.10)$$

2) для лівого тягарця M :

$$-Ma = Mg - T_1, \quad (1.11)$$

тут T_1, T_2 – сили натягу нитки (згідно з попередніми припущеннями $T_1 = T_2$, g – прискорення земного тяжіння).

Розв'язавши систему цих рівнянь відносно a , одержимо:

$$a = \frac{mg}{2M + m} = \frac{F}{M^*}, \quad (1.12)$$

де $F = mg$ – сила, що є причиною рівноприскореного руху,

$M^* = 2M + m$ – маса системи. Звідси видно, що прискорення системи a

залежить від сили F та від маси всієї системи $M^* = 2M + m$.

Оскільки $g = \text{const}$, то a прямо пропорційне величині $\frac{m}{2M + m}$.

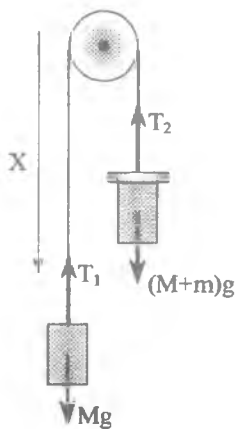


Рис. 1.2.

При побудові графіка залежності прискорення a від величини $\frac{m}{2M+m}$ маємо отримати пряму, що й буде доказом справедливості другого закону Ньютона у даному експерименті.

Завдання IV. Розрахунок значення прискорення сили земного тяжіння g

Згідно з попереднім розглядом величина g входить у формулу (1.12); з неї отримуємо:

$$g = \frac{2M+m}{m} a, \quad (1.13)$$

При вивченні законів рівноприскореного руху була одержана формула (1.9), що пов'язує прискорення a з величинами S_2 , S_1 та m , t_2 , які визначаються експериментально. Використовуючи експериментальні дані, можна розрахувати значення g за формулою:

$$g = \frac{2M+m}{m} a = \frac{2M+m}{m} \frac{S_2^2}{2S_1 t_2^2} \quad (1.14)$$

Порядок виконання роботи

1) За допомогою установчих гвинтів на ніжках приладу відрегулюйте положення приладу FPM-02 так, щоб нитка і штатив знаходились у вертикальному положенні, а правий тягарець M проходив вільно між краями кронштейна K_2 і між краями фотодатчиків на кронштейнах K_2 і K_3 (рис.1.1).

2) Виконайте перше завдання: дослідіть закономірності рівномірного руху, який здійснюється на шляху S_2 , перевірте експериментально формулу $S_2 = v_2 t_2$. Для

цього слід змінювати значення S_2 , залишаючи значення S_1 сталим (приблизно $14 \div 15$ см). Оскільки кронштейн K_3 нерухомим, відстань S_2 можна змінювати, рухаючи дві верхніх кронштейни (K_1 і K_2), так, щоб відстань між ними (шлях S_1) залишалася однаковою. При певному значенні маси наважки m_1 (приблизно 6 г) виміряйте t_2 при п'яти значеннях S_2 (S_2 змінювати кроком 2 см, починаючи з $S_2=15$ см). Результати вимірювань занесіть у таблицю 1.1. Подібні вимірювання проведіть також для іншої маси наважки m_2 (наприклад 8 г).

Таблиця 1.1 ($S_1 = 14 \div 15$ см)

№	$m_1=6$ г			$m_2=8$ г		
	$S_2, \text{см}$	$t_2, \text{с}$	$v_2 = \frac{S_2}{t_2}, \text{см/с}$	$S_2, \text{см}$	$t_2, \text{с}$	$v_2 = \frac{S_2}{t_2}, \text{см/с}$
1.	15	2.77	5.41	15	2.31	6.49

(Примітка. Для спрощення виконання експериментальних вимірів можна, встановивши певні значення S_2 , робити виміри t_2 , замінюючи послідовно m_1 на m_2 .)

3) Побудуйте графіки залежностей $S_2 = S_2(t_2)$ при двох масах наважки m_1 та m_2 . Проаналізуйте ці графіки.

4) Виконайте друге завдання: вивчіть закони рівноприскореного руху, який здійснюється на шляху S_1 , експериментально перевірте формули (1.2). Для цього при $m = \text{const}$ і $S_2 = \text{const}$ слід змінювати значення S_1 і вимірювати t_2 . Це можна зробити шляхом переміщення верхнього кронштейна K_1 і залишаючи кронштейни K_2 і K_3 у фіксованих положеннях. Відстань S_2 між K_2 і K_3 встановіть приблизно рівною 25 см.

Проведіть вимірювання t_2 при п'яти значеннях S_1 , починаючи з 5-10 см кроком в 2 см. Результати вимірювань занесіть у таблицю 1.2.

Таблиця 1.2 ($m=6\text{г}$, $S_2=25\text{см}$)

№	S_1 , см	t_2 , с	$a = \frac{S_2^2}{2S_1 t_2^2}$, см/с ²	$t_1^2 = \frac{2S_1}{a}$, с ²	$t_1 = \sqrt{t_1^2}$, с	$v_1 = \frac{S_2}{t_2}$, см/с
1						

5) Побудуйте графіки залежностей: $a = a(t_1)$, $v_1 = v_1(t_1)$, $S_1 = S_1(t_1)$, $S_1 = S_1(t_1^2)$ при $m=6\text{г}$, $S_2=25\text{см}$. Проаналізуйте ці графіки.

6) Виконайте третє завдання: перевірте другий закон Ньютона у випадку дії сталої сили тяжіння. Для цього проведіть досліди при $S_1 = \text{const}$ та $S_2 = \text{const}$. Зробіть виміри часу t_2 руху тягарця на шляху S_2 при п'яти різних наважках m . Дані занесіть в таблицю 1.3.

Таблиця 1.3 ($S_1=15\text{см}$, $S_2=25\text{см}$.)

№	M , г	t_2 , с	a , см/с ²	$\frac{m}{2M+m}$	g , см/с ²	Δg , см/с ²
1	4,10	0,977	21,96	0,03	981,55	66,2

7) Розрахуйте значення прискорення a системи та величини $\frac{m}{2M+m}$. Занесіть їх в таблицю 1.3. Побудуйте

графік залежності $a = a\left(\frac{m}{2M+m}\right)$ та проаналізуйте його.

8) Виконайте четверте завдання: визначте величину прискорення сили земного тяжіння g , користуючись даними таблиці 1.3. Для цього в формулу (1.14) підставте експериментальні значення m , t_2 та значення постійних величин M , S_2 , S_1 . Розрахуйте значення прискорення сили земного тяжіння g . Дані занесіть у таблицю 1.3.

9) Розрахуйте випадкову похибку вимірювання g , врахувавши невідтворюваність умов експерименту (різні m і

t_2) та задавши певну довірчу ймовірність. Оцініть систематичну похибку. Результат запишіть у вигляді: $g = \langle g \rangle \pm \Delta g$. Порівняйте одержані значення g з табличним значенням для Києва. Визначте відносну похибку для g .

Примітка. Маса кожного з тягарців становить $M=60$ г; маса наважок m вигравірувана на них. Прискорення сили земного тяжіння на широті Києва рівне $g = 9,81066 \text{ м/с}^2 \approx 9,81 \text{ м/с}^2$.

Контрольні запитання

1. Які експериментальні дослідження на машині Атвуда треба провести, щоб перевірити: а) виконання законів прямолінійного рівномірного руху; б) виконання законів прямолінійного рівноприскореного руху; в) виконання законів Ньютона для прямолінійного руху.
2. Чи повинні спостерігатися залежності $g(S)$, $g(m)$ взагалі та в конкретних умовах Вашого досліду?
3. Чи попадає табличне значення g для Києва у визначений вами довірчий інтервал Δg ?
4. Яка відносна похибка вимірювання g в даній роботі?
5. Розгляньте дію сил на систему, що складається з двох зв'язаних тягарців M та наважки m , виведіть формулу для величини прискорення руху цієї системи $a = \frac{mg}{2M + m}$.

Література

1. Сивухин Д.В. Общій курс фізики. – Т.1. Механика. – М., 1989. – С.28-33, 63-83, 191-192.
2. Савельев И.В. Курс фізики. – Т.1. – М., 1989. – С.20-31, 46-65, 71-72.
3. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики / За ред. Кучерука І.М. – Т.1. – К.:Техніка, 1999. – С.7-28, 32-55.
4. Загальна фізика: Лабораторний практикум.: Навч. посібник / За заг. ред. Горбачука І.Т. – К.:Вища шк., 1992. – С.64 -67.

2. Вивчення законів динаміки обертального руху за допомогою маятника Обербека

Мета роботи: вивчити закони динаміки обертального руху, експериментально визначити момент інерції I маятника Обербека, оцінити вплив тертя на похибки експериментальних вимірів моменту інерції маятника, експериментально перевірити рівняння основного закону обертального руху.

Прилади та матеріали: прилад FPM-06, штангенциркуль, наважки.

Теоретичні відомості

Твердим тілом в механіці називають систему матеріальних точок, жорстко зв'язаних між собою. Тобто мають на увазі, таку ідеалізовану систему, при будь-яких рухах якої відстані між матеріальними точками залишаються незмінними. Кількість матеріальних точок у твердому тілі може бути скінченною або нескінченною. У лабораторному експерименті досліджується рух твердого тіла, яке є суцільним, тобто матеріальні точки розташовані неперервно з густиною ρ .

Основними кінематичними характеристиками обертального руху є *кутова швидкість* $\vec{\omega}$ та *кутове прискорення* $\vec{\beta}$. У будь-який момент часу обертання твердого тіла є обертанням навколо певної осі \vec{l} ; її називають миттєвою віссю обертання, вказуючи на те, що мова йде про обертання у фіксований момент часу. Вектор кутової швидкості лежить на осі обертання; його величина рівна похідній за часом від кута повороту твердого тіла:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.1)$$

Напрямок вектора $\vec{\omega}$ вибирається таким, щоб обертання здійснювалось проти годинникової стрілки, якщо дивитись з кінця вектора $\vec{\omega}$.

У випадку нерівномірного обертання можна означити вектор *кутового прискорення*

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad \beta = |\vec{\beta}| = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2.2)$$

Оскільки всі точки твердого тіла жорстко зв'язані між собою і обертаються як єдине ціле, то всі вони мають однакову кутову швидкість і однакове кутове прискорення. Лінійна швидкість \vec{v} будь-якої точки твердого тіла визначається формулою

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \quad v = \omega r \sin(\vec{\omega} \wedge \vec{r}), \quad (2.3)$$

де \vec{r} - радіус-вектор цієї точки, $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$ - кут між векторами $\vec{\omega}$ та \vec{r} . З цієї формули видно, що величина лінійної швидкості різна для різних точок твердого тіла; вона зростає прямо пропорційно відстані до осі обертання.

Важливою динамічною характеристикою твердого тіла є *момент кількості руху (кутовий момент) \vec{L}* . Він визначається як векторна сума моментів кількості руху матеріальних точок, що складають тверде тіло:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \Delta m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i]. \quad (2.4)$$

Основне рівняння, яке описує обертальний рух твердого тіла, має вигляд:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (2.5)$$

де $\vec{M} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$ - сумарний момент сил, який діє на тверде тіло як сукупність матеріальних точок. Рівняння (2.5)

називають *рівнянням моментів*; воно впливає з рівняння Ньютона, якщо його застосувати до матеріальних точок, що складають тверде тіло.

Якщо сумарний момент сил рівний нулю ($\vec{M} = 0$), то, як впливає з рівняння (2.5), $\vec{L} = \text{const}$, тобто кутовий момент \vec{L} залишається незмінним за величиною та напрямком. Цей висновок аналогічний закону збереження кількості руху при поступальному русі системи матеріальних точок.

Інерційні властивості твердого тіла щодо обертання навколо певної осі характеризуються *моментом інерції* стосовно цієї осі. Саму вісь у цьому випадку називають віссю інерції. З твердим тілом пов'язують три *головні осі інерції*; вони проходять через *центр мас* твердого тіла і узгоджуються з його симетрією. Позначимо їх через Ox , Oy , Oz . Відповідні моменти інерції позначатимемо I_x , I_y , I_z :

$$I_x = \sum_{i=1}^N \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2). \quad (2.6)$$

У формулі (2.6) $y_i^2 + z_i^2 = d_{iz}^2$ - квадрат відстані до осі обертання Ox матеріальної точки, яка має масу Δm_i та радіус-вектор \vec{r}_i . Аналогічні формули мають місце для моментів інерції відносно інших головних осей:

$$I_y = \sum_{i=1}^N \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad I_z = \sum_{i=1}^N \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (2.7)$$

Якщо тверде тіло є неперервним, то суми у формулах (2.6), (2.7) слід замінити інтегралами по об'єму твердого тіла. Наприклад

$$I_x = \iiint_V \rho(x, y, z) (y^2 + z^2) dx dy dz. \quad (2.8)$$

Якщо тверде тіло має вісь симетрії (наприклад тверде тіло циліндричної форми), то моменти інерції відносно осей, які можна сумістити перетвореннями симетрії, рівні між

собою. У випадку суцільного циліндра масою m , висотою l та радіусом основи R момент інерції відносно осі симетрії (нехай це буде вісь Oz) виражається формулою $I_z = \frac{1}{2}mR^2$.

З міркувань симетрії очевидно, що $I_x = I_y$.

Обрахунок за формулою (2.8) дає $I_x = I_y = \frac{1}{12}ml^2$.

Якщо необхідно вирахувати момент інерції відносно осі, що не проходить через центр мас, то послуговуються *теоремою Гюйгенса-Штайнера*: якщо I_0 - момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас, то момент інерції I відносно будь-якої паралельної до неї осі можна обчислити за формулою:

$$I = I_0 + md^2,$$

де m - маса твердого тіла, d - відстань між осями.

Моменти інерції дозволяють пов'язати між собою вектори кутового моменту та кутової швидкості. У системі координат, яка жорстко зв'язана з твердим тілом, і осі Ox , Oy , Oz збігаються з головними осями інерції, цей зв'язок має вигляд:

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z. \quad (2.9)$$

де L_x , L_y , L_z - декартові координати вектора \vec{L} у вибраній (головній) системі координат. Те саме стосується вектора $\vec{\omega}$.

Якщо тверде тіло обертається навколо однієї з головних осей (наприклад Ox), то координатну рівність векторів (2.9) можна замінити векторною: $\vec{L} = I_x \vec{\omega}$. Слід мати на увазі, що у випадку довільного обертання вектори \vec{L} та $\vec{\omega}$ не є паралельними.

Співвідношення (2.9) дозволяють інтерпретувати рівняння (2.5) як рівняння для визначення кутової швидкості або кутового прискорення. Справді, підставивши

співвідношення (2.9) у (2.5) матимемо три рівняння, які є проєкціями векторного рівняння (2.5) на три головних осі інерції

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} = M_x, \quad I_y \frac{d\omega_y}{dt} = M_y, \quad I_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_z.$$

Як показують наведені вище формули, математичні форми запису основних закономірностей поступального та обертального рухів багато у чому подібні. Підсумуємо ці аналогії у вигляді таблиці.

Для поступального руху		Для обертального руху	
s	Шлях	φ	Кут повороту
\vec{v}	Лінійна швидкість	$\vec{\omega}$	Кутова швидкість
$\vec{a} = d\vec{v}/dt$	Лінійне прискорення	$\vec{\beta} = d\vec{\omega}/dt$	Кутове прискорення
m	Маса	I_x, I_y, I_z	Моменти інерції відносно головних осей
$\vec{p} = m\vec{v}$	Кількість руху	$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$	Момент кількості руху
\vec{F}	Сила	$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$	Момент сили
$W_K = mv^2/2 = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$	Кінетична енергія	$W_K = \frac{m}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2)$	Кінетична енергія
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	Другий закон Ньютона	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$	Рівняння моментів
$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = const$	Закон збереження кількості руху	$\vec{L} = \sum_i \Delta m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i] = const$	Закон збереження моменту кількості руху

Опис установки

Маятник Обербека являє собою маховик хрестовидної форми, що може обертатися навколо горизонтальної осі.

Принципова схема маятника Обербека представлена на рис.2.1. На чотирьох взаємно перпендикулярних стержнях можна пересувати чотири однакових тягарці масою m_0 кожний. На осі обертання також закріплений диск з намотаною на ньому легкою ниткою, до кінця якої кріпиться

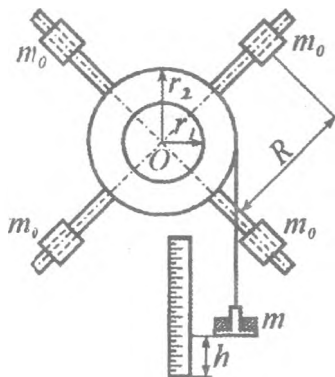


Рис.2.1.

платформа відомої маси. На платформу можна класти наважки масою m . На штативі приладу закріплена міліметрова лінійка, по якій можна вимірювати довжину шляху h руху платформи з наважками. На тому ж штативі кріпляться два фотодатчика для вимірювання часу t руху платформи та магнітний затискач, за допомогою якого можна фіксувати всю систему

нерухомому стані.

Розглянемо обертальний рух маятника Обербека. За відсутності наважок на платформі маятник знаходиться в стані спокою. Якщо на платформу покласти наважку m , то вона почне рухатися, а маятник обертатися. При русі на наважку діє сила тяжіння $\vec{P} = m\vec{g}$ та сила натягу нитки \vec{F}_H . Рівнодійна цих сил зумовлює прискорення \vec{a} тягарця. Рівняння руху наважки має вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{F}_H. \quad (2.10)$$

Звідси ми можемо визначити силу натягу нитки \vec{F}_H :

$$\vec{F}_H = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a}). \quad (2.11)$$

За 3-м законом Ньютона така ж сила діє на блок з радіусом \vec{r} (на рис.2.1 $r=r_2$), створюючи обертальний момент:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}_H] = m[\vec{r}, (\vec{g} - \vec{a})]. \quad (2.12)$$

де \vec{r} - радіус-вектор точки прикладення сили \vec{F}_H .

З розташування векторів \vec{r} і \vec{F}_H очевидно, що вектор \vec{M} лежить на осі обертання. Оскільки ця вісь фіксована, то замість векторного співвідношення достатньо розглянути його проекцію на вісь обертання: $M = mr(g - a)$.

З іншого боку проекція рівняння руху на вісь обертання дає співвідношення:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\beta = M,$$

звідки знайдемо момент інерції відносно осі обертання, який позначимо літерою I :

$$I = \frac{M}{\beta} = \frac{mr(g - a)}{\beta} \quad (2.13)$$

Величину a можна визначити експериментально, вимірюючи час t руху наважки m між двома фотодатчиками. Якщо позначити відстань між фотодатчиками h , то прискорення тягарця a буде рівним

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (2.14)$$

Для визначення величини кутового прискорення β блоку врахуємо, що при прискореному русі платформи з наважкою m лінійне прискорення точок на поверхні блоку з радіусом r теж дорівнює a (за умови, що нитка розмотується з блоку маятника без ковзання). Величину кутового прискорення β можна визначити за формулою:

$$\beta = \frac{a}{r} = \frac{2h}{rt^2} \quad (2.15)$$

Таким чином, вираз для моменту інерції відносно осі обертання матиме вигляд:

$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (2.16)$$

Вимірюючи значення h і t (при певній масі наважки m і певному значенні r) і підставляючи їх в (2.16), одержимо експериментальне значення моменту інерції I маятника Обербека.

Вище ми розглянули обертання маятника навколо осі, яка є певною уявною лінією. В реальній установці віссю обертання є циліндричний стержень радіусом r_0 , що закріплюється у втулці, всередині якої цей стержень повертається. При більш строгому розгляді обертального руху даного маятника слід враховувати дію сили тертя F_T між віссю і втулкою. Вісь тисне на втулку із силою, що рівна сумарній вазі маятника і наважки. Відповідно, сила тертя F_T дорівнює:

$$\vec{F}_T = \mu \vec{N}, \quad (2.17)$$

де μ – коефіцієнт тертя, \vec{N} – сумарна сила ваги маятника і наважки, що діє на втулку. При зміні маси наважки m змінюється і сила тертя. Момент, що створюється силою тертя, рівний

$$\vec{M}_T = [\vec{r}_0, \vec{F}_T]. \quad (2.18)$$

Отже, сумарний обертальний момент при наявності сил тертя матиме вигляд:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}_H] - [\vec{r}_0, \vec{F}_T]. \quad (2.19)$$

Сила тертя діє по дотичній до осі обертання, тобто перпендикулярно до \vec{r}_0 . Тому $M = mr(g - a) - \mu(m + m_0)gr_0$, де m_0 - маса маятника.

Для моменту інерції I отримаємо уточнену формулу

$$I = \frac{mr(g - a) - \mu(m + m_0)gr_0}{\beta}. \quad (2.20)$$

Теоретичне значення моменту інерції I маятника Обербека, що навантажений чотирма тягарцями m_0 , рівне сумі моменту інерції не навантаженого маятника I_0 і моменту інерції чотирьох тягарців $I_{\text{тяг}} = 4m_0R^2$:

$$I = I_0 + 4m_0R^2, \quad (2.21)$$

де R - віддаль центра тягарця з масою m_0 на спиці від осі обертання маятника.

Момент інерції чотирьох тягарців $I_{\text{тяг}}$ відносно осі обертання буде рівним різниці $(I - I_0)$:

$$I_{\text{тяг}} = 4m_0R^2 = I - I_0 \quad (2.22)$$

Щоб оцінити величину похибки, пов'язану з нехтуванням сил тертя при експериментальному визначенні моментів інерції, слід порівняти експериментально одержане значення моменту інерції тягарців $I_{\text{тяг}} = (I - I_0)$ із теоретично розрахованим значенням $I_{\text{тяг}} = (4m_0R^2)$, і визначити відносне відхилення експериментального значення від теоретичного:

$$\eta = \frac{(I - I_0) - 4m_0R^2}{4m_0R^2} \quad (2.23)$$

Схема експериментальної установки маятника Обербека типу FPM-06 представлена на рис.2.2. На вертикальному штативі 1, який встановлений на станині 2 закріплено два кронштейни: нижній нерухомий 3 та верхній рухомий 4. Крім того, на штативі є дві нерухомі втулки: нижня 5 та верхня 6. Станина має установчі гвинти 7, які дають можливість встановити її у горизонтальному положенні. На верхній втулці 6 закріплено підшипниковий вузол диска 8 та диск 9. Через диск перекинута нитка 10. Один її кінець прикріплено до двоступінчатого диска 11, а на другому закріплено тягарець 12. На нижній втулці 5 змонтовано гальмуючий електромагніт, який після подачі напруги живлення утримує за допомогою фрикційної муфти систему хрестовини разом із вантажами в стані спокою. Рухомий кронштейн 4 можна переміщувати

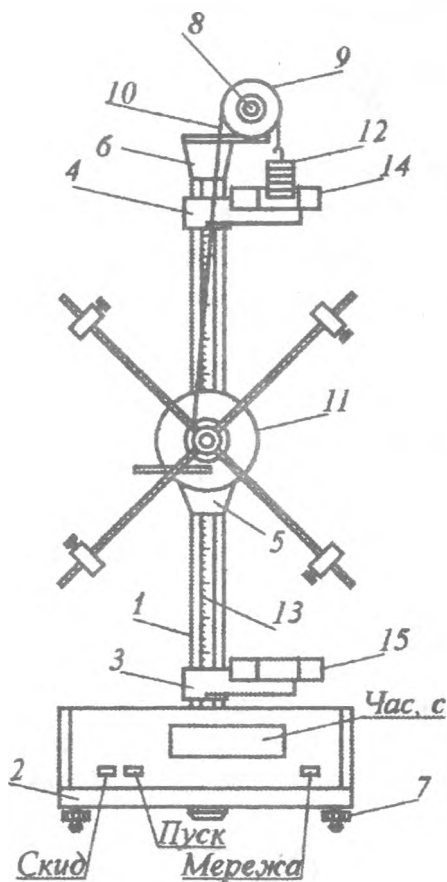


Рис.2.2.

вздовж штатива та фіксувати його в будь якому положенні, визначивши таким чином шлях руху тягарця. Для того щоб відраховувати довжину шляху, на колоні нанесено міліметрову шкалу 13. На рухомому кронштейні 4 закріплено фотоелектричний реєстратор 14. На нерухомому кронштейні

з закріплено фотоелектричний реєстратор 15, який подає електроімпульс закінчення вимірювання часу та вмикає гальмуючий електромагніт.

На передній панелі приладу розміщено шкалу мілісекундоміра та три клавіші, за допомогою яких здійснюється керування роботою приладу. При натисканні на клавішу «Мережа» на прилад подається напруга живлення (всі індикатори висвічують цифру нуль та світяться лампочки фотоелектричних реєстраторів). За допомогою клавіші «Пуск» здійснюється керування електромагнітом, а клавіші «Скид» - занулення показів секундоміра.

Порядок виконання роботи

Підготуйте прилад до вимірювань. Для цього:

- а) за допомогою регулюючих гвинтів станини приладу встановіть колону приладу у вертикальне положення;
- б) пересуньте рухомий кронштейн на обрану висоту і встановіть його так, щоб платформа з наважкою при падінні проходила через середину робочого вікна фотоелектричних реєстраторів;
- в) увімкніть прилад у мережу і, натиснувши на клавішу „Мережа”, перевірте, чи всі індикатори вимірювачів показують нуль та чи світяться індикатори фотоелектричних реєстраторів.

Послідовно виконайте три завдання: I, II, III.

1. Експериментальне визначення моменту інерції I_0 не навантаженого маятника

1. Зніміть із стрижнів маятника тягарці.

2. При $r=r_1$ і $h=const$ проведіть 5 експериментів по вивченню обертання маятника Обербека під дією ваги різних наважок m . У кожному з цих експериментів вимірювання часу проведіть тричі (t_1, t_2, t_3). Такі ж експерименти проведіть

при $r=r_2$ і різних значеннях висоти h проходження платформи з наважкою. Дані запишіть у Таблицю 2.1.

Таблиця 2.1 (для ненавантаженого маятника)

№	r , м	h , м	m , кг	t ,с				M , Н·м	a , м/с ²	β , рад/с ²	I_0 , кг·м ²	ΔI_0 , кг·м ²
				t_1	t_2	t_3	$\langle t \rangle$					
1	0,24	0,3	0,024	1,47	1,42	1,59	1,43	0,036	0,96	0,05	0,000	0,000

3. Розрахуйте за формулами (2.12, 2.14, 2.15, 2.16) значення $M, a, \beta, I_0, \Delta I_0 = \langle I_0 \rangle - I_0$ для всіх проведених дослідів і занесіть в Таблицю 2.1.

4. Оцініть похибки визначення величини моменту інерції I_0 ненавантаженого маятника.

II. Експериментальне визначення моменту інерції I навантаженого маятника

1. Насадіть на стержні маятника тягарці масою m , так, щоб всі вони знаходились на максимальній віддалі R від осі обертання. (Спершу врівноважте відносно осі обертання тягарці на двох стержнях, а потім врівноважте тягарці на двох інших стержнях на такій же відстані.)

2. Описаним в завданні I способом проведіть виміри часу падіння наважок та розрахуйте за формулами (2.12, 2.14, 2.15, 2.16) значення $M, a, \beta, I, \Delta I = \langle I \rangle - I$. Результати занесіть в Таблицю 2.2.

Таблиця 2.2 (для навантаженого маятника)

№	r , м	h , м	m , кг	t ,с				M , Н·м	a , м/с ²	β , рад/с ²	I , кг·м ²	ΔI , кг·м ²
				t_1	t_2	t_3	$\langle t \rangle$					
1	0,24	0,3	0,024					0,02		0,05	0,000	0,000

3. Оцініть похибки у визначенні величини моменту інерції I навантаженого маятника.

4. Моменти інерції чотирьох тягарців $I_{\text{тяг}}$ знайдіть як різницю моментів інерції навантаженої і не навантаженої системи:

$$I_{\text{тяг}} = I - I_0 \quad (2.24)$$

5. Порахуйте теоретичне значення $I_{\text{тяг}}$ за формулою:

$$I_{\text{тяг}} = 4m_0 R^2 \quad (2.25)$$

6. Порівняйте момент інерції чотирьох тягарців, знайдений за формулою (2.24) на основі експериментальних даних, з моментом інерції, обчисленим за формулою (2.25), яка справджується тоді, коли віддаль тягарців від осі обертання R буде значно більшою, ніж розмір самих тягарців. Розрахуйте за формулою (2.23) відносне відхилення експериментального значення від теоретичного.

7. За результатами вимірювань, представлених в Таблиці 2.1 та Таблиці 2.2, використовуючи співвідношення (2.8), перевірте основний закон динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі для двох значень моменту інерції, використовуючи співвідношення

$$\frac{M_1}{\beta_1} = \frac{M_2}{\beta_2} = \dots = \frac{M_i}{\beta_i} = \text{const}. \quad (2.26)$$

8. Перевірте експериментально залежність моменту інерції I від відстані R тягарців до осі обертання. Для цього для сталої маси наважки m визначте прискорення наважки для п'яти різних положень R тягарців на спицях. У кожному положенні R виміри часу падіння наважки повторіть 3 рази. Дані занесіть до Таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 ($m = const$)

№	r , м	h , м	R , м	t , с				M , Н·м	a , м/с ²	β , рад/с ²	I , кг·м ²	ΔI , кг·м ²
				t_1	t_2	t_3	$\langle t \rangle$					
1	0,04	0,3	0,245	4,69	4,70	4,71	4,72	0,021	0,0269	0,67	0,030	

✓ За результатами вимірів побудуйте графік залежності $I = I(R)$. Зробіть висновок про характер зміни моменту інерції.

✓ 9. Дослідіть залежність кутового прискорення β від моменту зовнішньої сили $M = mgr$ за умови, що момент інерції I залишається сталим. Використайте дані таблиці 2.2. Цю залежність можна дослідити за допомогою графіка $\beta = f(M)$, який можна одержати, відклавши на осі ординат кутове прискорення β , а на осі абсцис момент сил M . Згідно з основним законом динаміки обертального руху (формула 2.5), маємо отримати лінійну залежність кутового прискорення β від моменту зовнішньої сили M .

$$\beta = \frac{M}{I}. \quad (2.27)$$

З формул (2.20) та (2.27) видно, що кут нахилу прямої $\beta = f(M)$ буде рівним $\frac{1}{I}$, а моменту сили тертя M_0 відповідатиме точка перетину прямої з віссю абсцис.

Контрольні запитання

- ✓ 1. Напишіть основні формули для кінематики обертального руху абсолютно твердого тіла.
- ✓ 2. Напишіть основні формули для динаміки обертального руху абсолютно твердого тіла.
- ✓ 3. Сформулюйте закон збереження моменту кількості руху (моменту імпульсу). В яких випадках він виконується.

4. У чому суть динамічного методу визначення моменту інерції?
5. Як оцінити дію сил тертя при визначенні моменту інерції маятника Обербека?
6. Поясніть, яким чином в даній роботі потрібно оцінити похибки для експериментальних досліджень моменту інерції I .

Література:

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. – Т.1. Механика. – М.,1989. – С.166-189.
2. Савельев И. В. Курс физики. – Т.1. – М.,1989. – С.31-45, 122-148.
3. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики / За ред. Кучерука І.М. – Т.1: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.:Техніка, 1999. – С.7-28, 32-55.
4. Техніко-експлуатаційна документація “Маятник Обербека FPM-06”.

3. Визначення прискорення сили земного тяжіння за допомогою математичного та фізичного (оборотного) маятників.

Мета роботи: Вивчити закономірності коливного руху на прикладі математичного та фізичного маятників, виміряти за допомогою математичного і фізичного маятників прискорення сили земного тяжіння g .

Прилади та матеріали: прилад FPM-04, який поєднує в собі математичний та фізичний маятники.

Теоретичні відомості

Коливаннями називаються процеси (руху або зміни стану), які в тій чи іншій мірі повторюються з часом. Такі рухи виникають у фізичних системах, що мають *стійке* положення рівноваги. В залежності від фізичної природи коливного процесу і „механізму” його збудження розрізняють коливання механічні, електромеханічні, електромагнітні та ін. Система, що виконує коливання, називається *коливною системою*. *Вільними (власними)* коливаннями називаються коливання, які виникають внаслідок якогось початкового відхилення цієї системи від стану її стійкої рівноваги. *Вимушеними* коливаннями називаються коливання, в процесі яких на систему діє змінна з часом зовнішня сила.

Коливання називаються *періодичними*, якщо значення фізичних величин, що характеризують коливну систему, (точно або наближено) повторюються через рівні проміжки часу.

Найменший проміжок часу T , що задовольняє цю умову, називається *періодом коливань*. За період коливань система виконує одне повне коливання. *Частотою* періодичних коливань називається величина $\nu = 1/T$, яка рівна часу повних коливань за одиницю часу. *Циклічною (або круговою) частотою* періодичних коливань називається

величина $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$, яка рівна числу повних коливань, виконаних за 2π одиниць часу.

Найпростішими серед механічних коливних рухів є гармонічні коливання. Гармонічними називаються коливання, в процесі яких зміщення x системи від положення рівноваги змінюється або за законом косинуса

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_{01}), \quad (3.1)$$

або за законом синуса

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_{02}). \quad (3.2)$$

Тут A – амплітуда коливань, тобто найбільше додатне відхилення величини x від її значення в стані рівноваги, ω – циклічна частота, $(\omega t + \varphi_{01})$, $(\omega t + \varphi_{02})$ – фази коливань, які характеризують біжучі відхилення x від стану рівноваги, φ_{01} , φ_{02} – початкові фази коливань при $t = 0$.

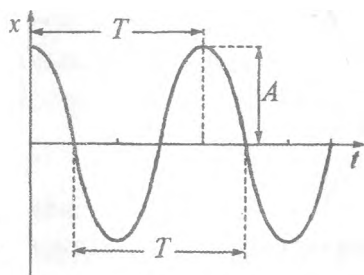


Рис. 3.1.

Характерною ознакою гармонічних коливань є те, що величини A , ω , φ_0 не змінюються в процесі коливань.

Якщо у формулі (3.1) початкова фаза $\varphi_{01} = 0$, то рівняння (3.1) набирає вигляду:

$$x = A \cos \omega t. \quad (3.3)$$

Графічне зображення функції (3.3) представлено на рис. 3.1. Воно дає основну інформацію про загальний характер коливань.

Одним з найпростіших прикладів гармонічного коливання є коливний рух математичного маятника.

Математичним маятником називається коливна система, що складається із матеріальної точки, прикріпленої до кінця нерозтяжної і невагомої нитки, другий кінець якої закріплений нерухомо.

Математичний маятник – це абстракція. Реальною системою, близькою до математичного маятника, є важка кулька, підвішена на довгій тонкій нитці, довжина якої l (рис.3.2). Коли ця система перебуває у стані спокою, то сила тяжіння $\vec{P} = m\vec{g}$, що діє на кульку, зрівноважується силою натягу нитки \vec{N} . Якщо кульку відхилити від положення рівноваги на деякий кут φ і відпустити, вона почне коливатись у вертикальній площині під дією повертаючої сили \vec{F} , що є рівнодійною сил натягу нитки \vec{N} і земного

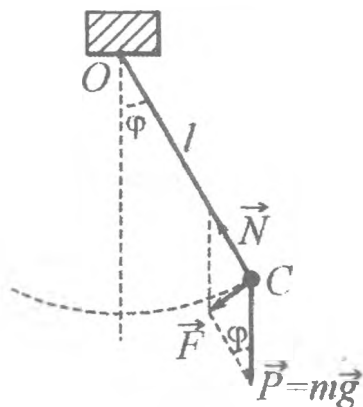


Рис. 3.2.

тяжіння \vec{P} . Значення цієї сили буде рівним:

$$F = P \sin \varphi = mg \sin \varphi \quad (3.4)$$

На основі другого закону механіки для обертального руху маємо:

$$I\beta = -Fl, \quad (3.5)$$

де I – момент інерції матеріальної точки відносно осі, яка проходить через точку підвісу O перпендикулярно площині

коливань, а β – кутове прискорення, що рівне:

$$\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (3.6)$$

Віддаль l від точки підвісу O до центра тяжіння C маятника є плечем повертаючої сили \vec{F} . Знак „мінус” в формулі (3.5)

вказує на те, що діюча сила \vec{F} направлена в бік, протилежний напрямку відхилення маятника.

Будемо розглядати коливання маятника при малих відхиленнях від положення рівноваги. При малих кутах φ $\sin \varphi \approx \varphi$ і

$$F \approx mg\varphi . \quad (3.7)$$

Підставляючи (3.6) і (3.7) у рівняння (3.5) одержимо

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + mgl\varphi = 0 . \quad (3.8)$$

Покажемо, що частковим розв'язком диференціального рівняння (3.8) є функція

$$\varphi = A \cos(\omega t) , \quad (3.9)$$

де

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}} . \quad (3.10)$$

Справді, візьмемо другу похідну від φ

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \omega t = -A \frac{mgl}{I} \cos \omega t = -\frac{mgl}{I} \varphi . \quad (3.11)$$

Підставляючи (3.9) і (3.11) в (3.8) , можна впевнитись, що рівняння (3.8) задовольняється тотожно, отже, (3.9) дійсно є розв'язком рівняння (3.8).

Знаючи частоту коливань ω (див.(3.10)) можна визначити період коливань математичного маятника.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} . \quad (3.12)$$

З формули (3.12) випливає, що період T коливань маятника T збільшується із збільшенням моменту інерції I .

Момент інерції математичного маятника відносно точки підвісу O рівний $I = ml^2$. Підставивши I в (3.12) одержимо вираз для періоду коливань математичного маятника у вигляді:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3.13)$$

З формули (3.13) видно, що період коливань математичного маятника не залежить від його маси m .

Формулу (3.13) можна використати для визначення прискорення сили земного тяжіння g :

$$g = 4l \left(\frac{\pi}{T} \right)^2. \quad (3.14)$$

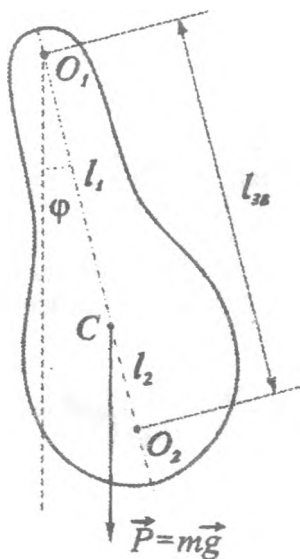


Рис. 3.3.

якщо експериментально виміряти значення довжини математичного маятника l та період його коливань T .

Окрім законів руху математичного маятника у даній лабораторній роботі вивчаються також закони руху фізичного маятника.

Фізичним маятником називають тверде тіло, здатне здійснювати коливання навколо нерухомої горизонтальної осі, яку не проходить через центр мас цього тіла C (рис. 3.3).

У стані стійкої рівноваги центр мас C фізичного маятника знаходиться на одній вертикалі з точкою підвісу O_1 , але нижче за неї. При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут φ виникає обертальний момент M сили тяжіння mg , який намагається повернути маятник у положення рівноваги.

Для малих відхилень основне рівняння руху фізичного маятника має такий самий вигляд, як і рівняння (3.8) для математичного маятника: $I_1 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m_\phi g l_1 \varphi$, але в ньому I_1 - момент інерції фізичного маятника відносно горизонтальної осі, що проходить через точку підвісу O_1 , m_ϕ - маса фізичного маятника, l_1 - віддаль від центра ваги маятника C до точки підвісу. Розв'язки цього рівняння описуються формулою:

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (3.15)$$

$$\text{де } \omega = \sqrt{\frac{m_\phi g l_1}{I_1}} = \frac{2\pi}{T}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{m_\phi g l_1}}.$$

Порівнюючи формулу (3.15) для фізичного маятника з формулою (3.13) для математичного маятника, бачимо, що формулу (3.15) можна переписати у вигляді

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{**}}{g}},$$

якщо ввести позначення

$$l_{**} = \frac{I_1}{m_\phi l_1}. \quad (3.16)$$

Величина l_{**} має розмірність довжини і називається *зведеною довжиною фізичного маятника*. Фізичний зміст поняття зведена довжина l_{**} : це довжина такого

математичного маятника, період коливань якого рівний періоду коливань фізичного маятника.

Покажемо, що $l_{\text{зв}} > l_1$. За теоремою Гюйгенса – Штейнера момент інерції фізичного маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу O_1 , дорівнює:

$$I_1 = I_0 + m_{\phi} l_1^2, \quad (3.17)$$

де I_0 - момент інерції маятника відносно осі, що проходить через центр мас, і є паралельною осі, яка проходить через точку підвісу. Підставляючи (3.17) в (3.16) маємо

$$l_{\text{зв}} = \frac{I_0 + m_{\phi} l_1^2}{m_{\phi} l_1} = \frac{I_0}{m_{\phi} l_1} + l_1, \quad (3.18)$$

тобто $l_{\text{зв}} > l_1$. Точку O_2 , що міститься на лінії O_1C на відстані $l_{\text{зв}}$ від точки підвісу O_1 , називають *точкою коливань або центром коливань фізичного маятника*. Якщо фізичний маятник підвісити не в точці O_1 , а в точці O_2 , то період його коливань не зміниться, тобто $T_2 = T_1$.

Дійсно, якщо O_2 – точка підвісу маятника, то його нова зведена довжина $l'_{\text{зв}}$ рівна

$$l'_{\text{зв}} = \frac{I_2}{m_{\phi} l_2} = \frac{I_0 + m_{\phi} (L - l_1)^2}{m_{\phi} (L - l_1)}. \quad (3.19)$$

Оскільки із (3.18) $l_{\text{зв}} - l_1 = \frac{I_0}{m_{\phi} l_1}$, то з (3.17) маємо,

що $l_{\text{зв}} = l'_{\text{зв}}$. Отже, точка підвісу O_1 фізичного маятника і його центр коливань O_2 є *спряженими точками*.

Ця властивість використовується в оборотних маятниках, які застосовуються для визначення з великою точністю прискорення вільного падіння g у різних точках Землі.

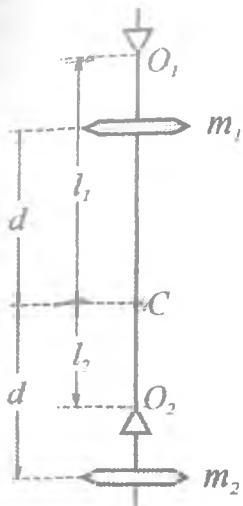


Рис. 3.4.

У даній лабораторній роботі використовується саме оборотний маятник, принципова схема якого показана на рис. 3.4. Він складається із стержня, на якому закріплені два диски великої маси m_1 , m_2 і двох “ножів”, на яких маятник підвішується для коливання. Маса стержня і ножів нехтовно малі в порівнянні з масою дисків, тому центр мас такого маятника знаходиться на половині віддалі між дисками у точці C . Віддаль між дисками рівна $2d$. Положення ножа O_1 під час дослідів залишається незмінним відносно стержня і знаходиться вище диска m_1 на відстані $O_1C=l_1$. У цьому випадку період

коливань маятника рівний T_1 . Положення ножа O_2 можна змінювати зміщуючи ніж між диском m_2 і центром мас C . Для визначення зведеної довжини $l_{зв}$ треба перевернути маятник, підвісити його на другий ніж і знайти положення точки O_2 , при підвісі у якій період коливань $T_2=T_1$. Ця точка буде на віддалі $O_2C=l_2$. Таким чином зведена довжина даного оборотного маятника буде рівною $l_{зв}=l_1+l_2$.

Для оборотного маятника виконується рівність:

$$d^2 = l_1 \cdot l_2 \quad (3.20)$$

Ця рівність використовується для перевірки точності експериментального знаходження точки коливань O_2 .

Рівність (3.20) можна одержати виходячи із рівності періодів коливань $T_1=T_2$ при закріпленні оборотного маятника в точках O_1 і O_2 . Згідно з (3.15)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{(m_1 + m_2)gl_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{(m_1 + m_2)gl_2}}$$

Прирівнявши ці два вирази, одержимо

$$I_1 l_2 = I_2 l_1.$$

Розпишемо значення моментів інерції I_1 та I_2 для оборотного маятника, застосувавши теорему Штайнера (3.17)

$$[(m_1 + m_2)d^2 + (m_1 + m_2)l_1^2]l_2 = [(m_1 + m_2)d^2 + (m_1 + m_2)l_2^2]l_1$$

звідки
$$d^2 l_2 + l_1^2 l_2 = d^2 l_1 + l_2^2 l_1,$$

а значить
$$d^2 = l_1 l_2.$$

У даній роботі стоїть завдання визначити прискорення сили земного тяжіння g за допомогою обох маятників (математичного і оборотного), шляхом вимірювання періоду коливань і довжини математичного маятника та періоду і зведеної довжини оборотного маятника. Формула (3.1) виконується при відхиленнях, що не перевищують 8° .

В роботі застосовується прилад FPM-04.

Опис приладу FPM-04

Універсальний прилад FPM-04 поєднує у собі математичний і фізичний маятники. Він складається з основи 1, на якій кріпиться штатив 2 та корпус 3 з мілісекундоміром 4, лічильником 5 кількості періодів коливань n та кнопками: „Пуск”, „Скид”, „Стоп”. Знизу до основи кріпляться регульовальні ніжки 6. На штативі закріплено обидва маятники: з однієї сторони математичний 7, а з іншої - фізичний 8. При коливаннях математичний маятник 7 або фізичний маятник 8 повинен проходити між випромінювачем та приймачем фотоелектронного датчика 9 (як зображено на рис.3.5 для фізичного маятника 8).

Звільнивши затискач 10 можна повернути кронштейн 11 так, щоб маятник 7 чи 8 знаходились біля фотодатчика 9. Кронштейн 12 з датчиком 9 можна зміщувати вздовж штатива 3.

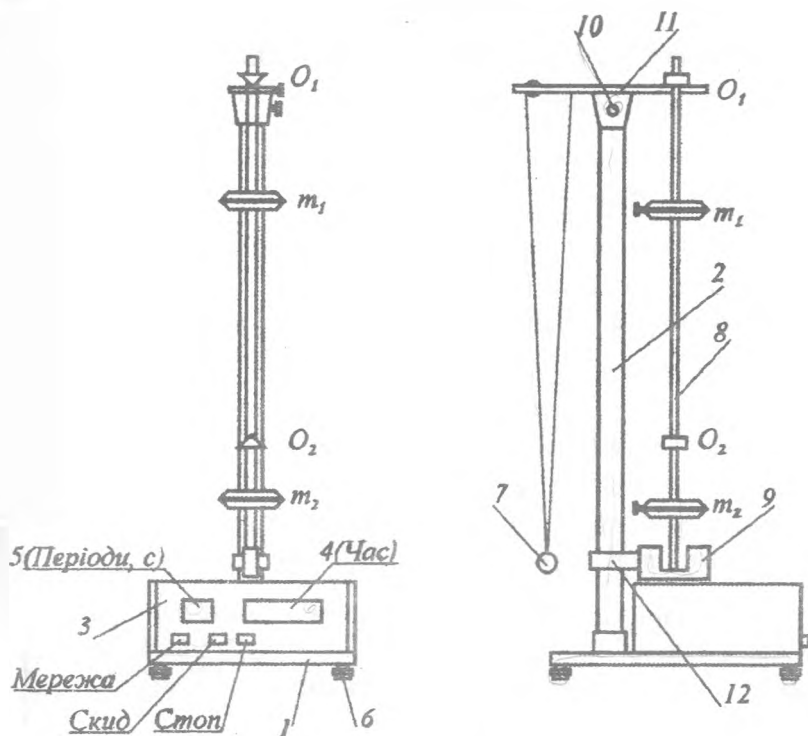


Рис. 3.5.

Стержень фізичного маятника має нарізи через кожні 10 мм, тому всі відстані можна визначити по позначках на стержні. На стержні зафіксовано два повернуті один до другого ножі, вістря яких визначають осі коливань. На стержні розміщують дві диски з рівними масами, що вказані на них: один диск розміщений між двома ножами, інший – поза ними (рис.3.4).

Універсальний мілісекундомір 2 фіксує час коливань t на індикаторі "Час" і кількість періодів n на індикаторі "Періоди".

* Порядок виконання роботи

I. Визначення прискорення сили тяжіння за допомогою математичного маятника.

+ 1 Відрегулюйте за допомогою гвинтів, що вмонтовані в ніжки 6, вертикальне положення штативу приладу FPM-04.

+ 2. Встановіть кульку математичного маятника навпроти фотодатчика. Довжина математичного маятника повинна бути не меншою, ніж 30 см.

+ 3. Відхиліть кульку від положення рівноваги на $4 - 5^\circ$ і відпустіть. Натисніть клавішу "Скид", що знаходиться на передній панелі приладу. Датчик "Періоди" буде показувати кількість коливань, а датчик "Час" показуватиме час t коливань маятника. Після того, як маятник здійснить певну кількість коливань ($n > 9$), натисніть клавішу "Стоп".

+ 4. Визначте період коливань математичного маятника за формулою $T = t/n$. Визначте довжину математичного маятника l за допомогою лінійки, яка знаходиться на штативі приладу.

+ 5. Визначте прискорення g за формулою (3.14). Проаналізуйте похибки фізичних вимірювань.

II. Визначення прискорення сили тяжіння за допомогою оборотного маятника.

1. Замініть у приладі FPM-04 математичний маятник на оборотний. Для цього треба звільнити затискач і повернути

кронштейн так, щоб нижній кінець стержня оборотного маятника знаходився біля фотодатчика, а ніж O_1 був зверху.

2. Встановіть диски на стержні оборотного маятника на відстані 30-40 см, розмістивши між ними ніж O_2 лезом у бік центра мас ближче до диска m_2 , згідно з рис. 3.4. Ніж O_1 розмістіть за диском m_1 лезом до цього диска. Виміряйте відстань між дисками $2d$ і відстань l_1 між точкою O_1 і точкою С (центром мас) по поділках на стержні. Ціна поділки становить 1 см.

3. Відхиліть стержень оборотного маятника від положення рівноваги на $4 - 5^\circ$ і відпустіть його. Натисніть клавішу "Скид" і після того, як маятник здійснить декілька коливань ($n > 9$) натисніть клавішу "Смон". Запишіть покази секундоміра t_1 і лічильника кількості коливань n_1 .

4. Визначте період коливань оборотного маятника за формулою $T_1 = t_1/n_1$. Повторіть вимірювання періоду коливань не менше 3 разів і знайдіть середнє значення $\langle T_1 \rangle$.

5. Переверніть маятник і встановіть його на ножі O_2 так, щоб нижній кінець стержня був навпроти фотодатчика.

6. Визначте період коливань $T_2 = t_2/n_2$, аналогічно тому, як це робилось у пп. 3, 4. Якщо періоди T_1 і T_2 не співпадають, змініть положення точки коливання O_2 , пересунувши ніж. Якщо $T_2 > T_1$, змістіть ніж так, щоб відстань l_2 від ножа до центру мас С збільшилась. Якщо $T_2 < T_1$, то l_2 зменшіть. При співпаданні T_2 з T_1 в межах похибки $\pm 0,5\%$ виміряйте значення l_2 за лінійкою, яка знаходиться на стержні.

7. Перевірте, чи виконується співвідношення (3.20). Визначте зведену довжину маятника $l_{\text{зд}} = l_1 + l_2$.

8. Визначте прискорення вільного падіння g за формулою $g = 4l_{\text{зд}} (\pi/T)^2$.

9. Всі одержані дані представте у вигляді таблиць, проаналізуйте похибки вимірювань.

III. Порівняйте значення g , визначені за допомогою математичного та оборотного маятників, між собою та з табличним значенням.

Прискорення сили земного тяжіння g є однаковим при вільному падінні для всіх тіл в безповітряному просторі (вакуумі), незалежно від їх маси та геометричних параметрів. У той же час величина g не є фундаментальною константою, а залежить від географічної широти місцевості та висоти над рівнем моря. Встановлено, що її можна розрахувати за формулою:

$$g = 9.78049 \cdot (1 - 0.0052884 \cdot \sin^2 \varphi - 0.000059 \cdot \sin^2 2\varphi) - 0.0000308 \cdot h,$$

де φ – географічна широта, виражена в радіанах, а висота h – в метрах. При значному віддаленні від поверхні Землі користуються наближенням

$$g = g_0 \cdot \left(\frac{R_0}{R_0 + h} \right)^2, \quad (3.21)$$

де R_0 – радіус Землі, а g_0 – прискорення біля земної поверхні. Для Києва

$$g = 9.81066 \text{ м/с}^2 \approx 9.81 \text{ м/с}^2 \quad (3.22)$$

Нанесіть всі одержані значення g на графік $g=g(N)$, де N – номер вимірювання. Проаналізуйте розкид даних відносно своїх середніх значень $\langle g \rangle$ і табличного значення g (формула (3.22)).

Контрольні запитання

1. Які процеси називаються коливними?
2. Які коливання називаються гармонічними?

3. Що таке період, частота, кругова частота, фаза і амплітуда коливань?
4. Чому рівна початкова фаза коливань маятника, якщо для відліку часу секундомір запустили у момент максимального відхилення від положення рівноваги? У момент проходження маятником положення рівноваги?
5. Якому значенню φ_0 відповідає коливання, яке зображене на рис.3.1?
6. Яким диференціальним рівнянням описуються гармонійні процеси?
7. Від яких величин залежать періоди коливань фізичного і математичного маятників? Чи залежить період коливань від маси?
8. Виведіть співвідношення $d^2 = l_1 l_2$.
9. Виведіть співвідношення, що визначає залежність g від широти місцевості.

Література

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. – Т.1. Механика. – М., 1989. – С.204-213, 347-353.
2. Савельев И. В. Курс физики. – Т.1. – М.,1989. – С.31-45, 122-148.
3. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики / За ред. Кучерука І.М. – Т.1: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.:Техніка, 1999. – С.209-220.
4. Физический практикум. Под ред. проф. И.В.Ивероновой. – М.,1967. – с.54-62.
5. Техніко-експлуатаційна документація “Універсальний маятник FPM – 04”.

4. Вивчення роботи гіроскопа

Мета роботи: вивчити особливості руху гіроскопа під дією зовнішніх сил, перевірити виконання закону збереження моменту кількості руху та визначити значення кутової швидкості прецесії гіроскопа в залежності від моменту діючої сили і моменту кількості руху.

Прилади: лабораторна установка FPM-10.

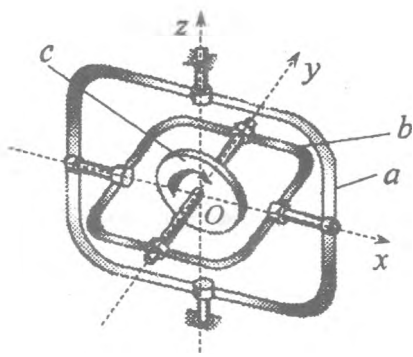


Рис. 4.1

Теоретичні відомості

Гіроскоп – це тверде тіло, що має вісь симетрії і швидко обертається навколо цієї осі; сама вісь може довільно змінювати свій напрям у просторі. Найпростіший гіроскоп – це масивний диск (циліндр), насаджений на вал, що є віссю симетрії.

Щоб вісь гіроскопа могла вільно обертатися у будь-якому напрямку, її встановлюють на кардановому підвісі (рис.4.1). Карданів підвіс складається із двох рамок: зовнішньої a і внутрішньої b . Зовнішня рамка a рухомо закріплена зверху і знизу та може вільно обертатися навколо осі Oz . Перпендикулярно цій осі на зовнішній рамці аналогічно кріпиться внутрішня рамка b з віссю обертання Ox . У внутрішній рамці b кріпиться ротор c . Ротор є симетричним відносно осі обертання Oy . Напрямок обертання ротора вказаний на рис.4.1 стрілочкою. Осі Ox , Oy , Oz є головними осями інерції гіроскопа (див. теоретичні відомості у роботі 2).

При виготовленні гіроскопа дотримуються таких вимог: ротор має бути якомога масивнішим, осі Oz , Oy , Ox повинні строго перетинатись в точці O , яка є центром інерції самого ротора; тертя у вузлах кріплення має бути мінімальним. Дотримання цих вимог дає можливість здійснювати обертання ротора гіроскопа навколо осі симетрії з великою кутовою швидкістю, що значно перевищує за модулем кутову швидкість обертання самої осі симетрії. В сучасних гіроскопічних приладах кутова швидкість ω власного обертання ротора навколо осі досягає іноді 40000-50000 об/хв, а кутова швидкість обертання самої осі (кутова швидкість прецесії) рівна одному оберту за декілька хвилин. Отже, з достатньою для практики точністю можна вважати, що напрям вектора кількості руху гіроскопа збігається з напрямом осі гіроскопа. На цьому припущенні базується наближена теорія гіроскопів.

Великий момент інерції I ротора (момент інерції відносно осі симетрії) та кутова швидкість обертання $\vec{\omega}$ задають великий *власний момент кількості руху* ротора \vec{L} . Якщо вісь обертання залишається незмінною ($\vec{\omega} = (0, \omega, 0)$), то

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (4.1)$$

Цей вектор \vec{L} направлений вздовж осі обертання Oy у напрямку вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$.

Теорія гіроскопа будується на основі рівняння обертального руху твердого тіла (рівнянні моментів):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (4.2)$$

Згідно з (4.2) вектор зміни моменту кількості руху $d\vec{L}$ направлений у той самий бік, що і момент зовнішньої сили

\vec{M} . Момент кількості руху \vec{L} і момент сили \vec{M} визначаються відносно нерухомої точки гіроскопа O .

Якщо момент зовнішніх сил $\vec{M} = 0$, то гіроскоп називається *вільним*. Для вільного гіроскопа, який обертається навколо осі симетрії, маємо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{і} \quad \vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}. \quad (4.2a)$$

Останнє рівняння виражає закон збереження моменту кількості руху (або моменту імпульсу) гіроскопа. З нього випливає, що при обертанні вільного гіроскопа довжина векторів $\vec{\omega}$ і \vec{L} та їх напрямки з часом не змінюються.

Отже, якщо гіроскопу, закріпленому строго в центрі мас, надати певну кутову швидкість $\vec{\omega}$ навколо власної осі обертання (Oy), то вона буде зберігати своє положення в просторі. Завдяки цій властивості вільний гіроскоп можна використовувати як показчик незмінного напрямку при русі суден, літаків і т. ін.

Гіроскоп при дії на нього зовнішніх сил з ненульовим моментом здійснює складний рух, який на перший погляд виглядає незрозумілим, але він повністю пояснюється рівняння (4.2). Особливості руху гіроскопа з великою власною частотою у полі зовнішніх сил мають назву *гіроскопічних ефектів*. Серед них явище *вимушеної прецесії*.

Нехай на вісь гіроскопа діє сила \vec{F} (див. рис. 4.2). Якщо вона не є великою, то після незначного (непомітного) відхилення від горизонталі, вісь гіроскопа почне обертатись в горизонтальній площині навколо осі $O\vec{z}$ з деякою сталою кутовою швидкістю ω_{np} . Це обертання і називається *вимушеною прецесією*.

Спробуємо теоретично описати вимушену прецесію спираючись на основне рівняння динаміки твердого тіла

(4.2). Момент сили \vec{F} (яку вважатимемо силою тяжіння) обраховується за стандартною формулою

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (4.3)$$

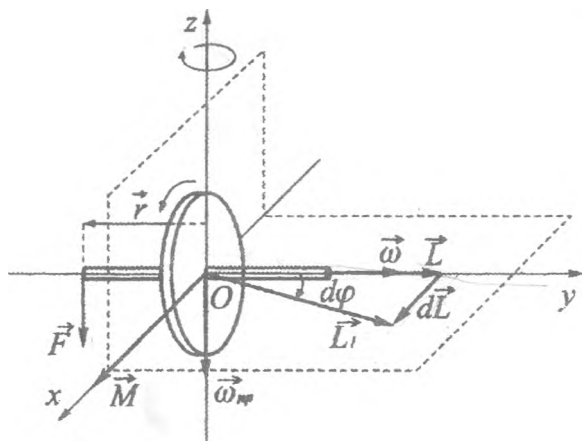


Рис. 4.2.

За напрямком вектор \vec{M} перпендикулярний до \vec{r} і до \vec{F} , отже спрямований у напрямку осі Ox .

Згідно з рівнянням (4.2) вектор $d\vec{L}$ - приріст моменту кількості руху, - паралельний вектору \vec{M} , отже перпендикулярний до осі власного обертання Oy і спрямований у напрямку осі Ox .

Позначимо через θ кут нахилу осі власного обертання відносно горизонталі під дією сили \vec{F} (θ - кут нутації). Будемо вважати його малим, тоді площина, у якій лежать осі Ox і Oy залишається приблизно горизонтальною. Як видно з рис.4.2, приріст моменту кількості руху, викликаний дією моменту сил, буде

$$dL = L \cdot \text{tg}(d\varphi). \quad (4.4)$$

Оскільки кут $d\varphi$ нескінченно малий, то $\operatorname{tg}(d\varphi) \approx d\varphi$, і $dL = Ld\varphi$, або з урахуванням рівняння (4.2):

$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{Mdt}{L},$$

звідки отримуємо формулу для кутової швидкості вимушеної прецесії

$$\omega_{np} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{rmg}{I\omega}. \quad (4.5)$$

Формула (4.5) визначає лише величину кутової швидкості вимушеної прецесії. Її напрям такий, як зображено на малюнку.

Для проведення відповідного векторного аналізу зауважимо, що вектор \vec{r} , \vec{M} та \vec{L} - це рухомі вектори відносно лабораторної системи координат. Якщо припустити, що у початковий момент часу осі Ox та Oy збігаються з відповідними осями лабораторної системи координат, то у всі наступні моменти часу для вектора $\vec{r}(t)$ будемо мати:

$$\vec{r} = -r(\sin\theta \sin\omega_{np}t, \sin\theta \cos\omega_{np}t, \cos\theta).$$

Координати вектора \vec{M} у лабораторній системі можна обчислити за формулою (4.3); взявши до уваги, що $\vec{F} = (0, 0, -mg)$:

$$\vec{M} = rgm(-\cos\theta \cos\omega_{np}t, -\cos\theta \sin\omega_{np}t, 0).$$

Вектор \vec{L} у лабораторній системі відліку має вигляд

$$\vec{L} = \omega l(\sin\theta \sin\omega_{np}t, \sin\theta \cos\omega_{np}t, \sin\theta). \quad (4.6)$$

Легко переконатися, що рівняння (4.2) буде виконуватися, якщо $\omega_{np} = \frac{rmg}{I\omega}$, тобто ми знову отримаємо формулу (4.5).

Зазначимо, що формула (4.5) залишається справедливою лише при малих і сталих кутах θ . Цієї умови слід дотримуватися у лабораторному експерименті, інакше буде одержано невірний результат.

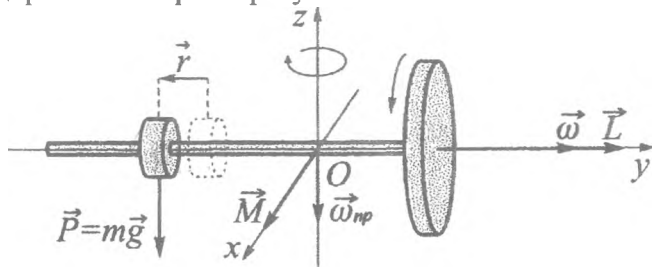


Рис. 4.3.

Опис лабораторної установки FPM-10

Схема лабораторної установки FPM-10 представлена на рис.4.4. На основі 1 з штативом 2 міститься кронштейн 3 з обертовим з'єднувачем 4 і платформою 5. На платформі 5 є рівень у вигляді закритої круглої порожнини з водою, в якій плаває бульбашка повітря. Ніжки платформи 1 треба відрегулювати так, щоб бульбашка рівня знаходилась в центрі рівня (в кружку). Для цього, не включаючи приладу в мережу, за допомогою гвинтів ніжок зрівноважують рівень, потім повертають платформу 5 навколо її осі на 90° і знову зрівноважують рівень. Так роблять до тих пір, поки бульбашка повітря при повороті приладу не перестане виходити за межі кружка. Саме при цьому можна бути впевненим, що платформа 5 буде вільно обертатись навколо вертикальної осі Oz.

Швидкість обертання платформи навколо осі вимірюється фотодатчиком 6 (ФД4) і висвічується на табло, що знаходиться на панелі 7. Верхній (менший) індикатор показує кут повороту φ через кожні 10 градусів, а нижній показує час t (в секундах), за який платформа здійснила цей поворот. При рівномірній швидкості обертання виконується

$$\text{рівність } \omega_{\text{пр}} = \frac{\varphi}{t}.$$

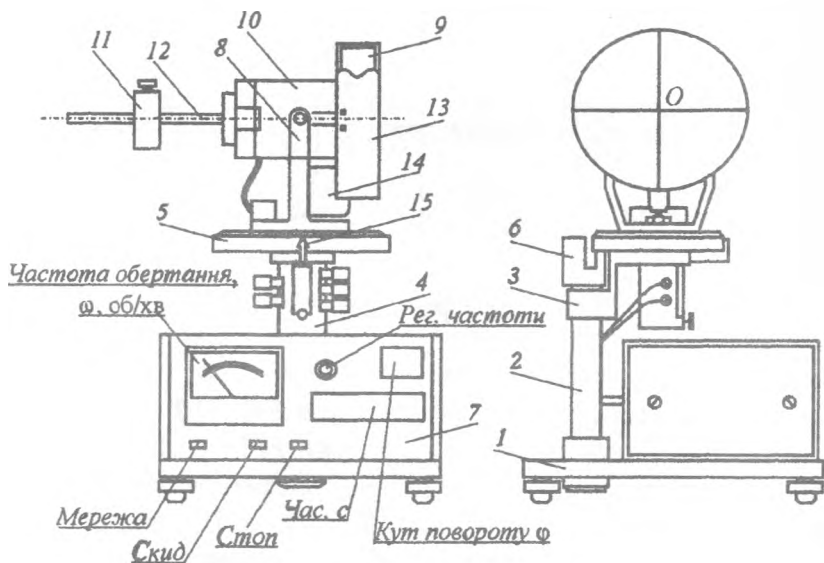


Рис. 4.4.

На платформі 5 жорстко закріплений кронштейн 8, через який проходять осі Ox та Oy . Дана конструкція є однією із модифікацій карданового підвісу, зображеного на рис.4.1, а саме кронштейн 3 (на рис.4.4) – це велике кільце a (рис.4.1), кронштейн 8 (рис.4.4) – мале кільце b (рис.4.1). На осі Oy кронштейна 8 кріпиться ротор c . Обертається навколо осі Oy не весь ротор, а тільки його частина – маховик 9, який приводиться в рух електромотором 10. Тобто ротор в даній установці складається з рухомої і нерухомої частин. Головне,

щоб маховик створював своїм обертанням момент кількості руху \bar{L} , і вся конструкція, яка закріплена на осі Oy , була зрівноважена відносно осей обертання (так щоб осі перетинались в точці O (рис.4.3)).

У даному приладі положення центра мас можна регулювати за допомогою тягарця 11 , який встановлюється на важелі 12 так, щоб вісь Ox була у горизонтальному положенні. Для дотримання техніки безпеки і збереження приладу, маховик розміщено в захисному кожусі 13 з оргскла, оскільки швидкість обертання маховика може досягати 10000 обертів на хвилину. Кутову швидкість ω маховика 9 вимірює фотодатчик 14 (ФДб). Значення кутової швидкості ω реєструються стрілочним приладом на панелі 7 в тисячах обертів за хвилину. При обчисленнях значення ω потрібно підставляти в градусах на секунду. Перехід від обертів за хвилину до градусів за секунду виконується за формулою:

$$\omega (\text{град}/\text{с}) = \omega (\text{об}/\text{хв}) \frac{360 \text{ град}}{60 \text{ с}}.$$

Порядок виконання роботи

1. Підготуйте прилад до роботи: встановіть основу приладу 1 горизонтально за допомогою гвинтів в ніжках приладу та розміщеного на платформі 5 водяного рівня. Переконайтеся, що гіроскоп може легко обертатися навколо горизонтальної і вертикальної осей. Для цього, не вмикаючи двигуна:

а) покрутіть маховик рукою, потім переконайтеся у тому, що гіроскоп може обертатися разом з опорною вилкою навколо вертикальної осі.

б) збалансуйте гіроскоп шляхом переміщення тягарця 11 уздовж важеля 12. Коли гіроскоп збалансовано, то при легкому постукуванні по важелю 12 він не повинен обертатися у вертикальній площині. На важелі міститься лінійка з міліметровими поділками, за допомогою якої можна виміряти зміщення тягарця. Положення тягарця, при якому гіроскоп збалансований, потрібно занотувати в своєму робочому зошиті, оскільки саме від цього положення відраховується величина r .

в) установіть швидкість обертання ротора гіроскопа рівною $\omega = 2 \cdot 10^3$ об/хв і ознайомтесь з гіроскопом у динаміці. Спробуйте повертати важіль вліво і вправо, і прослідкуйте, як при цьому поводить ся гіроскоп. Змістіть тягарець від положення рівноваги на 5 см і встановіть важіль горизонтально. Поспостерігайте, як при цьому відбувається прецесія. Установіть більшу кутову швидкість маховика ($\omega = 3 \cdot 10^3$ об/хв) і прослідкуйте, як зміниться кутова швидкість прецесії ω_{np} . Керуючись правилом свердлика перевірте, чи направлені встановлені момент сили \vec{M} , момент кількості руху \vec{L} і вектор кутової швидкості прецесії $\vec{\omega}_{np}$ згідно з векторним добутком $\vec{M} = [\vec{\omega}_{np}, \vec{L}]$. Зверніть увагу на те, чи має місце при проведенні дослідів нутація – кругові коливання кінця важеля в момент, коли його встановили горизонтально і відпустили.

2. Дослідіть залежність кутової швидкості (частоти) прецесії $\vec{\omega}_{np}$ від моменту діючої сили \vec{M} . Для цього при сталому значенні ω (наприклад, $\omega = 2000$ об/хв) виміряйте залежність $\vec{\omega}_{np} = \vec{\omega}_{np}(r)$, при значеннях $r = 2-7$ см. Для кожного нового значення r п'ять разів вимірюйте кут повороту φ гіроскопа та час t , за який гіроскоп повернувся на кут φ , розрахуйте значення частоти прецесії $\vec{\omega}_{np}$ та визначте

середнє значення $\langle \bar{\omega}_{np} \rangle$. Для кожного значення r розрахуйте момент сили $M=mgr$. Результати занесіть у Таблицю 3.1.

Таблиця 3.1. $\omega = 2000$ об/хв.

$r, \text{ м}$		0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
$\omega_{np,i} = \frac{\varphi}{t}$, град/с	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
$\langle \omega_{np} \rangle$, град/с							
$M = mgr$, Н·м							

(Тут $\omega_{np,i}$ – значення ω_{np} i -го виміру (максимум $i=5$))

3. Відповідно до отриманих даних побудуйте графік залежності $\bar{\omega}_{np}$ від моменту сили $M=mgr$ та проаналізуйте цю залежність $\left(\omega_{np} = \frac{1}{I\omega} M \right)$.

4. Дослідіть залежність частоти прецесії ω_{np} від власної частоти обертання гіроскопа ω : $\omega_{np} = \omega_{np}(\omega)$ при постійному значенні моменту діючої сили ($M=mgr$). Для цього змістіть тягарець 12 на величину $r=5\text{ см}$ ($r=0,05\text{ м}$) від положення рівноваги і проведіть вимірювання ω_{np} .

Змінюючи частоту обертання маховика ω в інтервалі частот $\omega = (2 \div 7) \cdot 10^3$ об/хв з кроком $1 \cdot 10^3$ об/хв виміряйте кут повороту гіроскопу φ та час t , за який цей поворот було здійснено. Для кожного ω виконайте 5 вимірів кута φ та розрахуйте відповідні п'ять значень ω_{np} ($\omega_{np} = \frac{d\varphi}{dt}$),

знайдіть середнє значення частоти прецесії $\langle \omega_{np} \rangle$ та момент сили $M=mgr$. Результати занесіть у Табл. 3.2. (Не забувайте при кожному новому дослідженні виставляти важіль в горизонтальне положення.)

Таблиця 3.2. $r=0,05\text{м}$

ω , об/хв..	2000	3000	4000	5000	6000	7000
ω , град/с	12000	18000	24000	30000	36000	42000
$\omega_{np,i} = \frac{\varphi}{t}$, град/с	1					
	2					
	3					
	4					
	5					
$\langle \omega_{np} \rangle$, град/с						
I , кг·м ²						
$\langle I \rangle$, кг·м ²						
$M = mgr$, Н·м						

(Тут $\omega_{np,i}$ – значення ω_{np} i -го виміру (максимум $i=5$))

5. Побудуйте графік залежності швидкості прецесії ω_{np} від кутової швидкості обертання гіроскопа ω в координатах $\langle \omega_{np} \rangle$, ω . Проаналізуйте цю залежність, порівняйте з

формулою $\omega_{np} = \frac{M}{I} \cdot \frac{1}{\omega}$.

6. Обчисліть момент інерції маховика I за формулою $I = \frac{1}{\omega \langle \omega_{np} \rangle} M$ для кожного значення $\langle \omega_{np} \rangle$, занесіть в

Таблицю 3.2 і знайдіть середнє значення $\langle I \rangle$, оцініть похибку у визначенні моменту інерції I .

Контрольні запитання

1. Сформулюйте основний закон динаміки обертального руху твердого тіла.
2. Напишіть формули векторного добутку для моменту кількості руху та моменту сили, укажіть розміщення цих векторів в просторі.
3. Що таке гіроскоп? Области застосування гіроскопа.

4. Що таке гіроскопічний ефект? Що таке прецесія гіроскопа?
5. Проаналізуйте напрям векторів кутової швидкості маховика $\vec{\omega}$, моменту кількості руху \vec{L} , моменту сили \vec{M} , кутової швидкості прецесії гіроскопа $\vec{\omega}_{пр}$.
6. Сформулюйте закони збереження для обертального руху.
7. Що називається моментом інерції? Виведіть формулу для моменту інерції ротора.
8. Як себе поводить гіроскоп при прикладенні до нього зовнішнього моменту сил?
9. Проведіть аналогію між величинами і формулами, що описують поступальний і обертальний рух.
10. Як визначити напрямок моменту сили відносно осі обертання тіла?

Література

1. Физическая энциклопедия /Гл.ред. А.М.Прохоров/: – Т.І. – М.:Большая Российская энциклопедия, 1998. – С.484-489.
2. Кучерук І.М. та ін. Загальний курс фізики / За ред. Кучерука І.М. – Т.1: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.:Техніка, 1999. – С.103-110.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. – Т.1. Механика. – М., 1989. – С.172-182, 230-301.
4. Савельев И. В. Курс физики. – Т.1. – М.,1989. – С.134-148, 162-173.

Додаток

1. Основні одиниці механічної системи одиниць.

1. В нашій країні встановлено застосування Міжнародної системи одиниць, що позначається СІ (в латинському написанні SI) (ГОСТ 9867 – 61, що затверджений Комітетом стандартів, мір і вимірювальних приладів 18 вересня 1961 р.)

2. У механіці, крім СІ, допускається застосування систем: СГС (CGS), або фізичної, і МКГСС (МкGS), або технічної. В СІ і системі СГС основними одиницями є довжина, маса, час, у системі МКГСС – довжина, сила і час.

3. В системі СІ за одиницю довжини взято *метр* (*м*), який до 1960 р. визначався як відстань між двома штрихами, нанесеними на еталоні метра. Для того, щоб метр можна було поновити на випадок його втрати, XI Генеральна конференція з питань мір і ваги прийняла нове *визначення метра*: метр є довжина, що дорівнює 1650763,73 довжини хвилі у вакуумі випромінювання, яке відповідає переходу між рівнями $2p_{10}$ і $5d_5$ атома криптона 86.

Метр є також одиницею довжини в системі МКГСС. В системі одиниць СГС одиницею довжини є *сантиметр* (*см*), який дорівнює сотій частині метра.

4. За одиницю маси в системі одиниць СІ взято *кілограм* (*кг*), який дорівнює масі міжнародного прототипу кілограма (платиноїридієвій гирі, що зберігається в Міжнародному бюро мір і ваги). В системі СГС за одиницю маси взято *грам* (*г*), який дорівнює тисячній частині кілограма

5. В системі МКГСС другою основною одиницею є *кілограм-сила* ($\kappa\Gamma$). За кілограм-силу ($\kappa\Gamma$), взято силу, яка надає тілу масою 1 $\kappa\text{г}$ прискорення $a=g_n=9,80665 \text{ м/с}^2$.

6. За одиницю часу в усіх системах одиниць взято *секунду* (s), що визначалася до 1956 р. як $1/86400$ ч середньої сонячної доби. У зв'язку з тим, що обертання Землі навколо своєї осі зазнає нерегулярних змін, Міжнародний комітет мір і ваги прийняв у 1956 р. визначення секунди як $1/31556925,9747$ частину тропічного року⁽¹⁾ для 1900 р. січня 0 о 12 годині ефемеридного часу⁽²⁾.

⁽¹⁾Тропічний рік – це час між двома послідовними проходженнями Сонця через точку весняного рівнодення, він зменшується за століття на $0,5 \text{ с}$, у зв'язку з чим дано вказівку на який саме рік.

⁽²⁾Нерівномірність обертання Землі, що остаточно була встановлена у 30-х роках ХХ сторіччя, дала змогу пояснити давно помічені неузгодженості між теоретичними і спостережуваними значеннями координат Місяця і планет. Поправки, які ґрунтуються на цьому, дали змогу ввести *всесвітній час*, який протікає рівномірно і який називається *ефемеридним часом*.

2. Додаткові одиниці СІ

1. Одиницею плоского кута є *радіан*. Радіан рівний куту між двома радіусами кола, довжина дуги між якими рівна радіусу.

2. Одиницею тілесного кута є *стерадіан*. Стерадіан рівний тілесному куту з вершиною в центрі сфери, який вирізає на поверхні сфери площу, що рівна площі квадрату зі стороною, рівною радіусу сфери.

3. Похідні одиниці вимірювання

Кожна похідна одиниця системи встановлюється за допомогою фізичної формули, яка виражає зв'язок числового значення вимірюваної величини з числовими значеннями інших, вже відомих величин, при чому коефіцієнт пропорційності беруть таким, що дорівнює одиниці. Наведемо кілька прикладів.

1. **Швидкість** (v). У випадку рівномірного прямолінійного руху $v=s/t$, тому за одиницю швидкості взято швидкість такого прямолінійного рівномірного руху, при якому за одиницю часу тіло проходить шлях, що дорівнює одиниці довжини.

2. **Прискорення** (a). У випадку прямолінійного рівнозмінного руху $a=(v_2-v_1)/t$, тому за одиницю прискорення взято прискорення такого рівнозмінного прямолінійного руху, при якому зміна швидкості за одиницю часу дорівнює одиниці швидкості.

3. **Сила** (F). За другим законом Ньютона $F=ma$, тому за одиницю сили взято силу, яка надає тілу одиничної маси прискорення, що дорівнює одиниці прискорення.

4. Одиниця маси (m) в системі МКГСС є похідною і визначається з рівняння $m=F/a$.

За *технічну одиницю маси (т.о.м.)* взято масу тіла, яке під дією сталої сили, що дорівнює 1 кГ , набуває прискорення 1 м/с^2 .

ТАБЛИЦЯ 1. МІЖНАРОДНА СИСТЕМА ОДИНИЦЬ (СІ).

Величина	Одиниця вимірювання	Скорочені позначення одиниць		Розмірність похідних одиниць
		українські	латинські або грецькі	
Основні одиниці				
Довжина	Метр	<i>м</i>	<i>m</i>	-
Маса	Кілограм	<i>кг</i>	<i>kg</i>	-
Час	Секунда	<i>с</i>	<i>s</i>	-
Сила електр. Струму	Ампер	<i>А</i>	<i>A</i>	-
Термодинамічна температура	Градус Кельвіна	<i>К</i>	<i>K</i>	-
Сила світла	Свічка	<i>св</i>	<i>cd</i>	-
Додаткові одиниці				
Плоский кут	Радіан	<i>рад</i>	<i>rad</i>	-
Тілесний кут	Стерадіан	<i>стер</i>	<i>sr</i>	-
Похідні одиниці				
Площа	Квадратний метр	<i>м²</i>	<i>m²</i>	<i>1м²</i>
Об'єм	Кубічний метр	<i>м³</i>	<i>m³</i>	<i>1м³</i>
Частота	Герц	<i>Гц</i>	<i>Hz</i>	<i>1/1с</i>
Густина	Кілограм на куб. метр	<i>кг/м³</i>	<i>kg/m³</i>	<i>1кг/1м³</i>
Швидкість	Метр за секунду	<i>м/с</i>	<i>m/s</i>	<i>1м/1с</i>
Кутова швидкість	Радіан за секунду	<i>рад/с</i>	<i>rad/s</i>	<i>1рад/1с</i>
Прискорення	Метр на секунду в квадраті	<i>м/с²</i>	<i>m/s²</i>	<i>1м/1с²</i>
Кутове прискорення	Радіан на секунду в квадраті	<i>рад/с²</i>	<i>rad/s²</i>	<i>1рад/1с²</i>
Сила	Ньютон	<i>Н</i>	<i>N</i>	<i>1кг 1м/1с²</i>

Продовження

Величина	Одиниця вимірювання	Скорочені позначення одиниць		Розмірність похідних одиниць
		українські	латинські або грецькі	
Тиск(механічна Напряга)	Ньютон на квадр. метр	H/m^2	N/m^2	$1H/1m^2$
Динамічна в'язкість	Ньютон-сек. на квадр. метр	$H\ c/m^2$	$N\cdot s/m^2$	$1H\cdot 1c/1m^2$
Кінематична в'язкість	Квадр. метр на секунду	m^2/c	m^2/s	$1m^2/1c$
Робота, енергія, кількість теплоти	Джоуль	$Дж$	J	$1H\cdot 1m$
Потужність	Ватт	$Вт$	W	$1Дж/1c$
Кількість електрики, електр. Заряд	Кулон	$Кл$	C	$1A\cdot 1c$
Електр. напруга, різниця електр. потенціалів, ЕРС	Вольт	V	V	$1B$
Напруженість електр. Поля	Вольт на метр	B/m	V/m	$1B/1m$
Електр. Опір	Ом	$Ом$	Ω	$1B/1A$
Електр. Ємність	Фарада	Φ	F	$1Кл/1B$
Потік магнітної індукції	Вебер	$Bб$	Wb	$1Кл/1Ом$
Індуктивність	Генрі	$Гн$	H	$1Bб/1A$
Магнітна індукція	Тесла	Tc	T	$1Bб/1m^2$
Напруженість магнітного поля	Ампер на метр	A/m	A/m	$1A/1m$
Світовий потік	Люмен	$лм$	lm	$1cв\cdot 1cстер$
Яскравість	Свічка на квадратний метр або ніт	$св/m^2$ або $нт$	cd/m^2 або nt	$1cв/1m^2$
Освітленість	Люкс	$лк$	lx	$1лм/1m^2$

4. Співвідношення між одиницями механічних величин в різних системах одиниць

Довжина.	$1\text{ м} = 100\text{ см}$
Маса.	$1\text{ кг} = 10^3\text{ г} = 0,102\text{ т.о.м.}$ (т.о.м.-технічна одиниця маси)
Площа	$1\text{ м}^2 = 10^4\text{ см}^2$
Об'єм	$1\text{ м}^3 = 10^6\text{ см}^3$
Густина	$1\text{ кг/м}^3 = 10^3\text{ г/см}^3 = 0,102\text{ т.о.м./м}^3$
Швидкість	$1\text{ м/с} = 100\text{ см./с}$
Прискорення	$1\text{ м/с}^2 = 100\text{ см/с}^2$
Сила	$1\text{ н} = 10^5\text{ дин} = 0,102\text{ кГ}$
Питома вага	$1\text{ н/м}^3 = 0,1\text{ дин/см}^3 = 0,102\text{ кГ/м}^3$
Імпульс	$1\text{ кг.м/с} = 10^5\text{ г.см/с} = 0,102\text{ т.о.м..м/с}$
Робота і енергія	$1\text{ дж} = 10^7\text{ ерг} = 0,102\text{ кГм}$ (кГм- кілограмометр)
Потужність	$1\text{ вт} = 10^7\text{ ерг/с} = 0,102\text{ кГм/с}$
Момент сили	$1\text{ н.м} = 10^7\text{ дин.см} = 0,102\text{ кГ.м}$
Момент інерції	$1\text{ кг.м}^2 = 10^7\text{ г.см}^2 = 0,102\text{ т.о.м..м}^2$
Момент імпульса	$1\text{ кг.м}^2/\text{с} = 10^7\text{ г.см}^2/\text{с} = 0,102\text{ т.о.м..м}^2/\text{с}$
Тиск	$1\text{ н/м}^2 = \text{дин/см}^2 = 0,102\text{ кГ/м}^2$, Позасистемна: $1\text{ бар} = 10^5\text{ н/м}^2$

Хрещак

ТАБЛИЦА 2. ЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ СТЬЮДЕНТА $t_{\alpha, n}$ ДЛЯ РІЗНИХ ЗНАЧЕНЬ ДОВІРЧОЇ ІМОВІРНОСТІ α ТА ЧИСЛА ВИМІРІВ n (РОЗПОДІЛ СТЬЮДЕНТА)

$\alpha \backslash n$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
2	1,00	1,376	1,963	3,08	6,31	12,71	31,8	63,7
3	0,82	1,061	1,336	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92
4	0,76	0,978	1,250	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84
5	0,74	0,941	1,190	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60
6	0,727	0,920	1,156	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03
7	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,45	3,14	4,71
8	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50
9	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36
10	0,703	0,883	1,110	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25
11	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17
12	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11
13	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06
14	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01
15	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98
16	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95
17	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92
18	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90
19	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88
20	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86
∞	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,33	2,58

Зміст

Передмова.....	3
Лабораторні роботи.....	6
1. Вивчення законів кінематики та динаміки прямолінійного руху на приладі Атвуда.....	6
2. Вивчення законів динаміки обертального руху за допомогою маятника Обербека.....	16
3. Визначення прискорення сили земного тяжіння за допомогою математичного та фізичного (оборотного) маятників.....	30
4. Вивчення роботи гіроскопа.....	45
Додаток.....	58
1. Основні одиниці механічної системи одиниць.....	58
2. Додаткові одиниці СІ.....	59
3. Похідні одиниці вимірювання.....	60
Таблиця 1. Міжнародна система одиниць (СІ).....	61
4. Співвідношення між одиницями механічних величин в різних системах одиниць	63
Таблиця 2. Значення коефіцієнтів Стьюдента $t_{\alpha, n}$ для різних значень довірчої імовірності α та числа вимірів n (розподіл Стьюдента).....	64

289373

Віддруковано у друкарні
Видавничого дому “Києво-Могилянська академія”
04070, Київ, Конtrakтова пл., 4
Тел./факс (044) 416-60-92, 238-28-26.
Наклад 200 прим. Зам. 4-19.

9.90

9

472/04

96863

LIKMA Library * Book



0301917

