І.Ю. ІВЧЕНКО

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Київ – 2007

УДК 519.85(075.8)
ББК 22.18я73
І-17

Гриф надано
Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1.4/18–Г–547 від 13.04.2007 р.)

Рецензенти:

Альохін О. Б. – доктор економічних наук, професор кафедри «Інформаційні системи у менеджменті» Одеського національного політехнічного університету;

Андрієнко В. О. – доктор фізико-математичних наук, професор Інституту математики, економіки і механіки Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова;

Продіус І. П. – доктор економічних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України, академік інженерної академії України, завідувач кафедри «Менеджмент» Одеського національного політехнічного університету.

Івченко І.Ю.
І-17 **Математичне програмування**: Навчальний посібник. — К.: Центр учбової літератури, 2007 — 232 с.

ISBN 978-966-364-491-2

У навчальному посібнику «Математичне програмування» розглядаються питання, які традиційно включаються в курс «Математичне програмування», що викладається у вузах фінансово-економічного профілю. Навчальний посібник орієнтований на розв'язання практичних задач, які можна описати за допомогою математичних моделей. Передбачено вивчення основних класів моделей і залежностей, вживаних в економіці, у описані основи теорії лінійного і цілочисельного програмування, методи розв'язання задач лінійного програмування (графічний метод, симплекс-метод, метод штучних змінних, метод потенціалів для розв'язання транспортних задач), метод гілок і границь, основи динамічного програмування. В кінці кожного розділу наводиться набір комплексних задач, пов'язаних з висвітленою темою, які значно поглиблюють і розширюють її.

Книга буде корисна широкому колу читачів: студентам, аспірантам і викладачам вищих навчальних закладів, економістам, інженерам, розробникам програмного забезпечення і т. д.

ISBN 978-966-364-491-2

Зміст

Передмова

Важливе значення для підготовки фахівців з автоматизації керування і планування виробництва здобувають теоретичні дисципліни, у яких вивчаються наукові основи керування виробництвом і розробляються методи підвищення ефективності керування економічними системами.

Особливе місце серед цих дисциплін займає математичне програмування. Ця дисципліна охоплює багато сфер цілеспрямованої людської діяльності і належить зараз до числа найбільше інтенсивно використовуваних дисциплін прикладної математики.

Розроблений із ціллю придбання теоретичних та практичних знань навчальний посібник «Математичне програмування» дозволяє сформувати у студентів знання правил побудови математичних моделей економіко-математичних задач, озброїти їх універсальним інструментарієм для прийняття обґрунтованих рішень щодо здійснення суто індивідуального вибору за обмежених засобів і наявності альтернативних можливостей.

Навчальний посібник «Математичне програмування» дає знання для розробці і практичного застосування методів найбільш ефективного або оптимального керування організаційними системами.

Задачі, які описані у навчальному посібнику «Математичне програмування» полягають у перебуванні найкращих (оптимальних) керуючих впливів на систему при заданих обмеженнях на ці впливи. Задачі такого характеру зводяться до задач математичного програмування, що складають основу задач досліджень операцій.

У залежності від структури цільової функції і умов-обмежень розглянута класифікація задач математичного програмування. Найбільш вивченими серед таких задач є задачі лінійного програмування.

Матеріал навчального посібника охоплює усі концептуальні питання курсу, та основні базові теми, передбачені програмою курсу «Математичне програмування».

Сформульовані наприкінці кожній теми теоретичні питання дозволяють перевірити досконалість оволодіння принципами побудови економіко-математичних моделей, механізмів формалізації та рішення економічних задач з метою підвищення ефективної організації.

Задачі та практичні приклади спрямовані на придбання навичок за рішенням задач побудови оптимізаційних математичних моделей, прийняттю оптимізаційних рішень економіко-математичних задач лінійного програмування.

Частина 1

ВВЕДЕННЯ В МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ТЕМА 1

ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1. Основні поняття

Важливого значення для підготовки фахівців з автоматизації керування і планування виробництва набувають теоретичні дисципліни, що дають наукові основи керування виробництвом і озброюють методами підвищення ефективності керування економічними системами.

Нині математика і її апарат проник в найрізноманітніші ділянки досліджень. Складні завдання управління народним господарством, задачі планування економіки і військові операції, крім вивчення якісних закономірностей явищ, вимагають ретельного вивчення їх кількісних характеристик.

Дослідження операцій, математичне програмування, так само як і теорія ймовірності, математична логіка, теорія алгоритмів, інформації — це апарат для управління складними економічними системами.

Дослідження операцій як наука виникла в сорокових роках XX століття у сфері завдань керування бойовими операціями. Ця нова дисципліна швидко охопила багато сфер цілеспрямованої людської діяльності і належить тепер до числа найбільш інтенсивно використовуваних дисциплін прикладної математики. Дослідження операцій — це наука, що займається розробкою і практичним застосуванням методів найбільш ефективного (або оптимального) керування організаційними системами. Завдання дослідження операцій полягають у перебуванні найкращих (оптимальних) керуючих впливів на систему при заданих обмеженнях на ці впливи.

Розділ науки про дослідження операцій, який охоплює широкий клас завдань управління, математичними моделями яких є екстремальні завдання, називається математичним програмуванням. Задачі математичного програмування знаходять застосування в різних сферах людської діяльності, де необхідний вибір одного з можливих образів дій, наприклад, при вирішенні численних проблем управління і планування виробничих процесів, в задачах проектування і перспективного планування.

Назва «математичне програмування» пов'язане з тим, що метою розв'язання задач є вибір програми дій. Математичне програмування — математична дисципліна, присвячена теорії і методам розв'язання задач про знаходження екстремумів функцій на множинах, визначуваних лінійними і нелінійними обмеженнями (рівністю і рівняннями).

Ця наука сформувалася в 40—70-х роках XX століття. Це обумовлено, головним чином, розвитком електронних обчислювальних машин, а отже, можливістю проводити математичну обробку великих потоків інформації і на цій основі вирішувати завдання управління і планування, де застосування математичних методів пов'язане, в першу чергу, з побудовою математичних моделей і відповідних їм екстремальних задач, зокрема задач математичного програмування.

Великий внесок у її розвиток внесли учені: економіст А. Н. Толстой (задача по складанню оптимального плану перевезень); угорський математик Б. Егерварі, який розглянув ЗЛП, що має назву «проблема вибору» і розробив так званий «угорський метод»; Л. В. Канторович і М. К. Гавурін в 1949 р. для розв'язання транспортних задач розробили метод потенціалів; Данциг (симплекс-метод).

Подальший розвиток методи ЛП і НЛП одержали в роботах Форда, Фалкерсона, Куна, Лемке, Белмана та ін. Дана дисципліна математична.

Опис будь-якої задачі математичного програмування включає завдання компонентів (чинників) розв'язання (які можна розуміти як його безпосередні наслідки; звичайно, хоча і необов'язково, компоненти розв'язку є чисельними змінними), обмежень, що накладаються на них (ресурсів, що відображають обмеженість) і системи цілей. Будь-яка система компонент розв'язку, задовольняючих усім обмеженням, називається допустимим рішенням. Кожній з цілей відповідає цільова функція, задана на безлічі допустимих рішень, значення якої виражають міру здійснення мети. Суть розв'язку задачі полягає в знаходженні найдоцільніших, оптимальних розв'язань і вирішується в науці «Дослідження операцій». Задачі дослідження операцій звичайно називаються оптимізаційними.

2. Класифікація задач математичного програмування

Задачі математичного програмування діляться на задачі лінійного і нелінійного програмування. При цьому якщо всі функції лінійні, то відповідна задача є задачею лінійного програмування. Якщо ж хоча б одна з зазначених функцій нелінійна, то відповідна задача є задачею нелінійного програмування.

Найбільш вивченим розділом є лінійне програмування. Для розв'язання задач лінійного програмування розроблений цілий ряд ефективних методів, алгоритмів і програм.

Серед задач нелінійного програмування найглибше вивчені задачі випуклого програмування. Це задачі, в результаті розв'язання яких визначається мінімум або максимум випуклої (увігнутої) функції, заданої на випуклій замкнутій множині.

У свою чергу, серед задач випуклого програмування детальніше досліджені задачі квадратичного програмування. В результаті розв'язання таких задач вимагається в загальному випадку знайти максимум (або мінімум) квадратичної функції за умови, що її змінні задовольняють деякій системі лінійних нерівностей або лінійних рівнянь або деякій системі, що містить як лінійні нерівності, так і лінійні рівняння.

Окремими класами задач математичного програмування є задачі цілочисельного, параметричного і дробово-лінійного програмування.

У задачах цілочисельного програмування невідомі можуть приймати лише цілочисельні значення.

У задачах параметричного програмування цільова функція або функції, що визначають ділянку можливих змін змінних, або те й інше, залежать від деяких параметрів.

У задачах дробово-лінійного програмування цільова функція є відношенням двох лінійних функцій, а функції, що визначають ділянку можливих змін змінних, також є лінійними.

Виділяють окремі класи задач стохастичного і динамічного програмування.

Якщо в цільовій функції або у функціях, що визначають ділянку можливих змін змінних, містяться випадкові величини, то така задача відноситься до задачі стохастичного програмування.

Задача, процес знаходження розв'язання якої є багатоетапним, належить до задачі динамічного програмування.

3. Екстремальні задачі

У загальному вигляді математична постановка екстремальної задачі полягає у визначенні найбільшого або якнайменшого значення цільової функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за умов $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i$, де f та g_i і — задані функції, b_i деякі дійсні числа.

Під **загальною** задачею математичного програмування будемо розуміти задачу максимізації скалярної функції

$$Z = \max f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

за умов

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ &g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ \text{і }\ &X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \end{aligned}$$

Залежно від структури f і g_i задачі математичного програмування поділяються на задачі лінійного програмування (f і g_i лінійні), параметричного (хоча б одна з функцій f або q_i залежить від деякого параметра), стохастичного (хоча б одна з функцій f або g_i містить як коефіцієнти випадкові числа). Ділянка Д — деяка ділянка n-мірного евклідового простору R^n (найчастіше це позитивний ортант). Якщо ця ділянка складає деяку підмножину натуральних чисел, то задачі математичного програмування розглядаються як дискретні задачі. Найбільш вивченими серед таких задач є задачі лінійного програмування.

4. Етапи розв'язання екстремальних задач математичного програмування

Формалізація задачі — необхідний етап для перекладу кожної прикладної задачі на мову математичних машин.

Задачі управління і планування звичайно зводяться до вибору деяких систем параметрів або системи функцій. Але будь-яка система має у своєму розпорядженні обмежені можливості, тому необхідно з'ясувати умови роботи системи і обмеження, яким повинні відповідати системи параметрів або функцій.

Розв'язання екстремальних економічних задач можна розбити на три етапи:

1. Побудова ЕММ;
2. Знаходження оптимального розв'язання одним з математичних методів;
3. Практичне впровадження в народне господарство.

Економіко-математична модель — це математична задача, яка відображає в абстрактному вигляді кількісні закономірності процесу з певною метою.

Побудова ЕММ полягає у створенні спрощеної економічної моделі, в якій в схематичній формі відображена суть процесу, що вивчається. При цьому особлива увага повинна надаватисяч віддзеркаленню в моделі всіх істотних особливостей задачі і обліку всіх обмежувальних умов, які можуть вплинути на результат. Потім визначають мету розв'язання, вибирають критерій оптимальності і дають математичне формулювання задачі.

Звичайно мета виражена у вигляді цільової функції, а умови і закономірності — у вигляді математичних співвідношень (умов-обмежень).

Оскільки всі засоби і закономірності передбачити неможливо, то відображають найважливіші. Вибір математичної моделі повинен ґрунтуватися на аналізі чинників, показників взаємозв'язку між ними, виходячи з поставлених завдань (цілей). Математичні моделі одного процесу можуть бути різними залежно від вимог, які ставить перед собою дослідник. Чим більше показників, чинників і взаємозв'язків враховується, тим повніше модель відображає економічний процес і тим складнішим він стає. Тому на практиці розглядаються, як правило, декілька спрощених моделей, які дають задовільні результати.

Т. ч., етапи побудови ЕММ:

1. Сформулювати економічну інтерпретацію задачі.
2. Формалізувати задачу.
3. Побудувати ЕММ, тобто цільову функцію і умови-обмеження.

Для формального розв'язання задачі проектування необхідно мати формалізований опис проектованого об'єкта, тобто опис за допомогою взаємозв'язаної послідовності математичних формул зв'язку конструктивних параметрів задачі з можливими конструктивно-компонувальними розв'язками.

ВИСНОВКИ

Математичне програмування — науковий метод вироблення кількісно обґрунтованих рекомендацій щодо прийняття рішень. Важливість кількісного фактора в математичному програмуванні і цілеспрямованість рекомендацій, що виробляються, дозволяють визначити цю дисципліну як теорію прийняття оптимальних розв'язків.

Математичне програмування сприяє перетворенню мистецтва ухвалення рішень в наукову і притому математичну дисципліну.

Математичне програмування займається вивченням екстремальних задач і розробкою методів їх розв'язання. Екстремальні задачі — це задачі, пов'язані із знаходженням якнайкращих (оптимальних) управляючих дій на систему при заданих обмеженнях на ці дії.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Які класи задач математичного програмування вам відомі?

2. Сформулюйте математичну постановку екстремальної задачі у загальному вигляді.

3. Перечисліть етапи побудови ЕММ.

4. Яка задача називається загальною задачею математичного програмування?

ТЕМА 2

ПРИКЛАДИ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1. МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Лінійне програмування (ЛП) — математична дисципліна, присвячена теорії і методам розв'язання задач про екстремуми лінійних функцій на множинах, що задаються системами лінійних рівнянь.

Типовим представником задач ЛП є наступна:

Знайти максимум лінійної функції:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \max, \tag{2.1}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots m), \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots n), \tag{2.3}$$

де c_j, a_{ij} і b_i — задані величини.

Задачі ЛП є математичними моделями численних задач техніко-економічного змісту.

Розглянемо як приклад такі задачі.

2. ЗАДАЧА ПРО ВИКОРИСТОВУВАННЯ СИРОВИНИ

На деякому підприємстві виробляється продукція двох видів $П_1$ і $П_2$, при цьому використовується 4 види сировини S_1, S_2, S_3, S_4 Запаси обмежені і складають відповідно b_1, b_2, b_3, b_4 умовних одиниць. Витрата сировини на кожній одиниці продукції задана в таблиці 1.

Вимагається скласти такий план випуску продукції $П_1$ і $П_2$, при якому дохід підприємства від реалізації всієї продукції буде максимальним.

Таблиця 1

ВИХІДНІ ДАНІ

Види сировини	Види продукції		Запаси
	$П_1$	$П_2$	
S_1 S_2 S_3 S_4	a_{11} a_{21} a_{31} a_{41}	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42}	b_1 b_2 b_3 b_4
Дохід	c_1	c_2	

Формалізуємо задачу:

Нехай випускається продукція видів — $П_j$

Запаси сировини — S_i і рівні відповідно — b_i,

a_{ij} — норми витрати *i*-го сировини на одиницю *j*-го виробу.

c_j — дохід підприємства від виготовлення одиниці продукції $П_j$.

Вимагається визначити кількість продукції, що випускається, x_j одиниць.

Побудуємо ЕММ:

Дохід підприємства від реалізації цієї продукції складе

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$$

Тобто
$$F(x)=\sum_j c_j x_j \rightarrow \max \qquad (2.4)$$

Оскільки запаси сировини S_i обмежені на підприємстві і рівні відповідно b_{i}, то витрата кожної сировини повинна відповідати наступним рівнянням:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 <= b_1$ (сировина виду S_1)

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 <= b_2$ (сировина виду S_2)

$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 <= b_3$ (сировина виду S_3)

$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 <= b_4$ (сировина виду S_4)

або
$$\sum_j a_{ij}x_j <= b_i,\ i = 1,n \qquad (2.5)$$

Нерівності з’являються через можливість наявності надлишку сировини даного вигляду. Очевидно, що $x_1 >= 0$ та $x_2 >= 0$, або $x_j >= 0$ (2.6)

Пояснимо математичне формулювання даної задачі:

Дана система нерівностей (2.5)—(2.6) і лінійна форма (2.4). Вимагається максимізувати лінійну форму F (2.4) при обмеженнях (2.5)—(2.6).

Тобто потрібно серед заперечливих розв’язків x_1, x_2 системи нерівностей (2.5)—(2.6), вибрати таке, щоб цільова функція (2.4) приймала найбільше значення (max).

У загальному випадку задача обчислення екстремуму лінійного показника якості (цільової функції) з умови, що визначувані змінні задовольняють лінійним обмеженням, складають предмет ЛП. Актуальність подібних задач в економіці, з одного боку, і обчислювальні труднощі, пов’язані, з дослідженням цих задач з другого боку, викликали велику кількість робіт, присвячених дослідженню і розв’язанню подібних задач.

У 1938 р. Канторовичем була поставлена загальна задача ЛП і обґрунтований метод розв’язання цієї задачі. У 1948 р. Данциг обґрунтував симплекс-метод. Особливо бурхливий потік статей і робіт з питань ЛП викликав розвиток обчислювальної техніки.

3. Задача про дієту

Постановка задачі:

Хай є «n» різних продуктів $П_1, П_2,..., П_n$. Для нормальної життєдіяльності живому організму необхідні певні запаси живильних речовин і мікроелементів — білків, жирів, вуглеводів, клітковини, заліза, вітамінів і т. д. Усі ці речовини або деякі з них у різних частках входять у кожний з продуктів $П_j$. Скласти дієту, що дозволяє раціонально використовувати продукти харчування.

Формалізуємо задачу:

Позначимо через x_j добове споживання j-го продукту $П_j$. Дієта характеризується т. ч. системою чисел $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Позначимо через a_{ij} — вміст i-ї поживної речовини в одиниці j-го продукту. Тоді загальна кількість i-ї речовини буде:

$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 +... + a_{in}\, x_n, \text{ де } i = 1, m,$$

поживної: $$b_i < = a_{i1}\, x_1+a_{i2}\, x_2 +... + a_{in}\, x_n,\ i = 1, m \qquad (2.7)$$

Але оскільки запаси кожного продукту обмежені, то $0< = x_j < = a_j, j = 1, n$.

Хай c_j — вартість од. продукту $П_j$, тоді вартість всієї дієти

$$L(x) = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + ... + c_n\, x_n. \qquad (2.8)$$

Оптимальною дієтою слід визнати таку, яка звертає в min $L(x)$ при дотриманні обмежень (2.7).

Іноді надмірне споживання продукту деякого типу небажане, тоді слідує замість обмежень (2.7) розглянути наступні:

$$b_i <= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n <= b_i,\ i = 1, m. \qquad (2.9)$$

4. Задача про суміші

У багатьох галузях промисловості (хімічній, металургійній, харчовій, нафтопереробній і ін.) готова продукція виходить шляхом змішування різноманітних вихідних ресурсів.

Якість готової продукції повинна відповідати технічним умовам на виготовлення цієї продукції.

У зв'язку з цим виникає проблема оптимального з'єднання вихідних ресурсів, при якому досягався б максимальний економічний ефект. Оптимізація складу вихідних інгредієнтів для одержання готової продукції являє собою економіко-математичну задачу, названу «Задачею про суміші», що в загальному вигляді формулюється в такий спосіб:

a) якість готової продукції визначається утриманням в ній m видів визначених елементів, утримання i-го елемента в одиниці продукції лімітується розміром a_1. При цьому для k перших таких елементів задається верхня границя, перевищення якої погіршує якість продукту (1-а група), а для $m - k$ нижня границя за тих же причин (друга група).

b) для виробництва готової продукції використано n видів компонентів, ресурси яких обмежені розміром $b_{j,\ j} = 1, \ldots, n$.

c) i-й елемент міститься в одиниці j-го ресурсу в кількості a_{ij}.

d) собівартість переробки одиниці j-го ресурсу при виготовленні готової продукції a_{ij}.

e) план випуску готової продукції — M.

Потрібно скласти суміш із вихідних інгредієнтів (ресурсів), щоб готова продукція відповідала б необхідним якостям, а витрати на її виробництво були б мінімальними [5].

Розв'язання:

Позначимо через x — кількість j-го інгредієнта (ресурсу) включеного в суміш.

Цільова функція:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \min . \qquad (2.10)$$

Обмеження:
по утриманню потрібних елементів у готовій продукції (перша група):

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \le a_i M \quad i = (1,...,k) \qquad (2.11)$$

і 2-га група:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \le a_i M \quad i = (k+1,...,m) \qquad (2.12)$$

за планом виробництва:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M \qquad (2.13)$$

по запасах інгредієнтів:

$$0 \le x_j \le b_j, \ (j = 1, \ldots, n) \qquad (2.14)$$

$$x_J \ge 0 \ \ (j = 1, \ldots, n), \qquad (2.15)$$

До цього класу задач (лінійного програмування) слід віднести «Задачу формування раціональних комерційних зв'язків», «Транспортну задачу», «Задачу оптимізації навантаження виробничих потужностей», математичні моделі яких аналогічні задачі (2.1)—(2.3).

ВИСНОВКИ

Для побудови ЕММ потрібно формалізувати задачу, побудувати цільову функцію і умови-обмеження. Типовим представником задач ЛП є наступна:

Лінійна функція: $L(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \to \max$.

Обмеження: $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \le b_i$, $(i = 1,...n)$.

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,...m)$$

де c_j, a_{ij} та b_i — задані величини.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

1. Задача про раціональне використання сировини

Економічна інтерпретація задачі:

Для виготовлення двох видів продукції P_1 і P_2 використовують три види сировини: A_1, A_2, A_3. Відомо, що на виготовлення одиниці P_j виду продукції йде a_{ij} виду сировини. Тобто на виготовлення одиниці P_1 виду продукції йде відповідно 3, 2, 0 од. сировини. А на виготовлення одиниці P_2 виду продукції йде відповідно 1, 2, 3 од. сировини.

Таким чином відома матриця a_{ij} витрати A_i виду сировини на P_j виріб.

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Підприємство має у своєму розпорядженні запаси сировини в кількості

$b = 21$,

$b = 30$,

$b = 10$ од. відповідно.

Відомий дохід, одержуваний від реалізації одиниці кожного виду виробу: $c_j = (3, 2)$ грн.

Таким чином, від продажу одного виробу P_1 дохід складає 3 грн., а від продажу одного виробу P_2 дохід складає 2 грн.

Скласти такий план випуску продукції, при якому дохід підприємства від реалізації всієї продукції був би максимальний.

Розв'язання:

Для розв'язання запишемо дані в таблицю 2.

Таблиця 2

ВИХІДНІ ДАНІ

Вид сировини	Запас сировини	Витрата сировини	
		Виріб P_1	Виріб P_2
A_1	21	3	1
A_2	30	2	2
A_3	16	0	3
Прибуток		3	2

Для побудови математичної моделі формалізуємо задачу:

По-перше, необхідно правильно визначити змінну.

x_1 — кількість виробів виду P_1

x_2 — кількість виробів виду P_2, що може випускати підприємство, тоді x_j — кількість виробів P_j виду.

Знаючи витрати сировини кожного виду на виготовлення однієї одиниці виробу і запаси сировини, можемо скласти систему обмежень, що визначає ділянку можливих значень x_1 і x_2.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 21 \\ 2x_1 + x_2 \le 30 \\ x_2 \le 16 \end{cases} \text{— обмеження по запасах.}$$

У такий спосіб кількість сировини, що витрачається на виготовлення усіх виробів, не може перевищити наявних на підприємстві запасів.

Виходячи з фізичного змісту, на змінні накладаються додаткові обмеження:

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$, ($x_j = 0$, якщо j-і виріб не випускається).

Тоді цільова функція, тобто дохід, отриманий підприємством від реалізації x_1 виробів P_1 і x_2 виробів P_2 складе:

$$F(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

У загальному вигляді: Знайти вектор X, максимізуючий функцію

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max.$$

При обмеженнях: $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \ge b_i$, де :

$$i = (1,...n)\,,\ x_j \ge 0\,.\ [4]$$

2. Задача про завантаження обладнання

Для виготовлення трьох видів виробів A, B і С використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів обладнання вказані в таблиці. У ній же вказаний загальний фонд робочого часу кожного з типів використовуваного обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду (див. табл. 3).

Таблиця 3

ВИХІДНІ ДАНІ

Тип обладнання	Витрати часу (станко — год.) на обробку одного виробу			Загальний фонд робочого часу обладнання (год.)
	A	*B*	*C*	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток (грн)	10	14	12	

Вимагається визначити, скільки і яких виробів потрібно виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальним. Скласти математичну модель задачі.

Розв'язок:

Припустимо, що буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду *A*, x_2 одиниць виду *B* і x_3 одиниць виду *C*. Тоді для виробництва такої кількості виробів потрібно буде витратити $2x_1 + 4x_2 + 5x_3$ станко-годин фрезерного устаткування.
Оскільки загальний фонд робочого часу верстатів даного типу не може перевищувати 120, то повинна виконуватися нерівність

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120 .$$

Аналогічні міркування щодо можливого використовування токарного, зварювального і шліфувального устаткування приведуть до наступних нерівностей:

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280,$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240,$$
$$4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360.$$

При цьому, оскільки кількість виробів, що виготовляються, не може бути негативною, то $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$. (2.17)

Далі якщо буде виготовлено x_1 одиниць виробів виду *A*, x_2 одиниць виду В і x_3 одиниць виду *C*, то прибуток від реалізації складе

$$10x_1 + 14x_2 + 12x_3 = x_2 .$$

Таким чином, підходимо до наступної математичної задачі: дана система

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 360 \end{cases} \tag{2.18}$$

чотирьох лінійних нерівностей з трьома невідомими і лінійна функція щодо цих же змінних $F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$; (2.19)

Потрібно серед усіх ненегативних рішень системи нерівностей (2.18) знайти таке, при якому функція (2.19) набуває максимальне значення.

Лінійна функція (2.19), максимум якої потрібно визначити, разом з системою нерівностей (2.18) і умовою позитивності змінних (2.17) утворюють математичну модель початкової задачі.

Оскільки функція (2.19) лінійна, а система (2.18) містить тільки лінійні нерівності, то задача (2.17)—(2.19) є задачею лінійного програмування.

3. Задача складання виробничої програми

Продукцією міського молочного заводу є молоко, кефір і сметана, розфасовані в пляшки. На виробництво 1 т молока, кефіру і сметани потрібно відповідно 1010, 1010 і 9450 кг молока. При цьому витрати робочого часу при розливанні 1 т молока і кефіру складають 0,18 і 0,19 машино-годин. на розфасуванні 1 т сметани зайняті спеціальні автомати протягом 3,25 год. Всього для виробництва незбираної молочної продукції завод може використовувати 13 600 кг молока.

Основне устаткування може бути зайняте протягом 21,4 машино-год., а автомати по розфасуванню сметани — протягом 16,25 год. прибуток від реалізації 1 т молока, кефіру і сметани відповідно дорівнює 30, 22 і 136 крб. завод повинен щодня виробляти не менше 100 т молока, розфасованого в пляшки. На виробництво іншої продукції немає ніяких обмежень.

Вимагається визначити, яку продукцію і в якій кількості слід щодня виготовляти заводу, щоб прибуток від її реалізації був максимальним. Скласти математичну модель задачі.

Розв'язок:

Припустимо, що молочний завод щодня вироблятиме x_1 тонн молока, x_2 тонн кефіру і x_3 тонн сметани. Тоді йому для виготовлення цієї продукції необхідно $1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3$ тонн молока.

Оскільки завод може використовувати щодня не більше 13 600 кг молока, то повинна виконуватися нерівність

$$1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \le 13\,600 .$$

Аналогічні міркування, проведені щодо можливого використовування ліній розливу незбираної молочної продукції і автоматів по розфасуванню сметани, дозволяють записати наступні нерівності:

$$0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4$$

$$3{,}25x_2 \le 16{,}25 .$$

Оскільки щодня має вироблятися не менше 100 т молока, то $x_1 \le 100$. Далі за своїм економічним значенням змінні можуть приймати тільки ненегативні значення: Загальний прибуток від реалізації x_1 тонн молока, x_2 тонн кефіру і x_3 тонн сметани рівна $30x_1 + 22x_2 + 136x_3$ грн. Таким чином, підходимо до наступної математичної задачі:
дана система

$$\begin{cases} 1010x_1 + 1010x_2 + 9450x_3 \le 13\,600, \\ 0{,}18x_1 + 0{,}19x_2 \le 21{,}4, \\ 3{,}25x_3 \le 16{,}25, \\ x_1 \ge 100 \end{cases} \qquad (2.20)$$

чотирьох лінійних нерівностей з трьома невідомими, x_1, x_2, x_3, і лінійна функція щодо цих же змінних

$$F = 30x_1 + 22x_2 + 136x_3; \qquad (2.21)$$

потрібно серед усіх ненегативних розв'язків системи нерівностей (*2.20*) *знайти такий, при якому функція* (*2.21*) *набуває максимальне значення. Оскільки система* (*2.20*) *є сукупністю лінійних нерівностей і функція* (*2.20*) *лінійна, то початкова задача є задачею лінійного програмування.*

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте постановку задачі і економіко-математичну модель задачі про дієту.

2. Сформулюйте постановку задачі і економіко-математичну модель задачі про суміші.

3. Розгляньте загальні риси і відзнаки цих моделей.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Скласти економіко-математичну модель:

1. Задача

Металургійний завод має у своєму розпорядженні ресурси сировини, робочу силу й устаткування, необхідні для виробництва кожного з чотирьох видів виробів.

Витрати ресурсів на виготовлення одиниці даного виду виробів:

35	52	28	48
22	44	68	30
23	10	14	16

Прибуток:

370	125	256	348

Запаси ресурсів:

160	455	198

За цими вихідними даними розв'язати такі задачі:

А. Знайти оптимальний розподіл виробів, щоб прибуток був максимальний.

В. Визначити оптимальний асортимент, якщо 1-го товару потрібно випустити не більше 55 од.,2-го — не менше 88 од., а 3 і 4-го — у відношенні 4: 3.

2. Задача

Знайти оптимальний розподіл чотирьох видів товарів.

Підприємство має у своєму розпорядженні ресурси сировини, робочу силу й устаткування, необхідні для виробництва кожного з чотирьох видів вироблених товарів. Витрати ресурсів на виготовлення одиниці даного виду товару:

3	5	2	4.
22	14	18	30.
10	14	8	16.

Прибуток:

30	25	56	48.

Запаси ресурсів:

60	400	128.

За цими вихідними даними розв'язати такі задачі:

А. Який асортимент товару треба випускати, щоб прибуток був максимальним.

В. Визначити оптимальний асортимент при додатковій умові: *1-го товару випустити не більше 5 од.*, *2-го — не менше 8 од.*, *а 3 і 4-го у відношенні 1*:*2.*

3. Задача

Підприємство вготовляє вироби P_1, P_2, P_3 із планом випуску до 10, 20, 30 од. відповідно. На виготовлення виробів іде 4 види сировини. На P_1 — 1, 4, 2, 5 одиниць, на P_2 — 5, 7, 3, 2, на P_3 — 3, 1, 4, 1 од. Запаси обмежені — 14, 15, 29, 9 відповідно. Умови попиту обмежують кількість виготовлених одиниць кожного типу: *не більше 15, 25, 35 одиниць. Прибуток від реалізації 4, 7, 2 ум. од. Потрібно оптимально спланувати виробництво.*

4. Задача

Підприємство має у своєму розпорядженні ресурси сировини, робочу силу й устаткування, необхідне для виробництва чотирьох видів товарів. Витрати ресурсів на виготовлення одиниці даного виду товарів задані в таблиці.

Таблиця 4

ВИХІДНІ ДАНІ

Товар / *Ресурси*	*1*	*2*	*3*	*4*
Сировина, кг.	*3*	*5*	*2*	*4*
Робоча сила, ч.	*22*	*14*	*18*	*30*
Обладнання, станко-год.	*10*	*14*	*8*	*16*

Прибуток на од. товару відповідно: *30, 25, 56, 48 грн.*

Запаси ресурсів: *60, 400, 128.*

За цими початковими даними розв'язати наступні задачі:

1. Який асортимент товару треба випускати, щоб прибуток був максимальним, якщо виробничі витрати на од. кожного виробу: *6, 9, 12, 3. А сумарні виробничі витрати не повинні перевищувати 96 грн.*

2. Визначити оптимальний асортимент за умови: *1-го товару випустити не більше 5 од., 2-го не менше 8 од., 3 і 4-го — відповідно 1*:*2.*

3. Визначити оптимальний асортимент. Що максимізує нормативну вартість обробки, якщо нормативна вартість обробки одиниці кожного виду товарів задані числами 17, 35, 20, 15.

5. Задача

Меблева фабрика випускає столи, стільці, бюро і книжкові шафи.

Для цього використовуються два типи дошок. Причому, є в наявності 1500 м дошок 1-го типу і 1000 м дошок 2-го типу. Крім того, задані трудові ресурси в кількості 800 люд.-год.

У таблиці наведені нормативи витрат ресурсів на виготовлення од. виробу. Прибуток на од. товару відповідно: 30, 25, 56, 48 грн.

Запаси ресурсів: 60, 400, 128.

Таблиця 5

Вироби / **Ресурси**	*Столи*	*Стільці*	*Бюро*	*Шафи*
Дошки 1-го типу, м.	5	1	9	12
Дошки 2-го типу, м.	2	3	4	1
Трудові ресурси, грн/шт.	3	2	5	10

Прибуток на одиницю виробу: 12, 5, 15, 10 грн. відповідно.

За цими початковими даними розв'язати наступні задачі:

1. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток. При цьому, обмеження за планом: не менше 40, 130, 30 і 10 од. відповідно.

2. На асортимент накладаються умови виробництва не менше: столів 130, стільців 130, бюро 30, шаф не більше 10.

3. Умови комплектності: кількість столів відноситься до кількості стільців, як 1:6.

4. Задані додаткові ціни: 32, 12, 15, 80 грн за од. виробу відповідно. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує товарну продукцію при єдиному обмеженні на асортимент — умові комплектності столів і стільців 1:6.

6. Задача

Тканина трьох артикулів виробляється на ткацьких верстатах двох типів з різною продуктивністю. Для виготовлення тканини використовуються пряжа і фарбники.

У таблиці вказані продуктивність (м/год) і норми витрати пряжі і фарби (кг. на 1000 м.).

Таблиця 6

Тканина / ***Ресурси***	*1*	*2*	*3*
Верстати 1-го типу, тис. верстато-год	*20*	*10*	*3*
Верстати 2-го типу, тис. верстато-год	*8*	*20*	*10*
Пряжа, тис. кг.	*120*	*180*	*210*
Фарбники, тис. кг.	*10*	*5*	*8*

Ціна за 1 м. Тканини 15, 15, 20 грн.

Об'єм ресурсів 30, 45, 30, 1 відповідно.

За цими початковими даними розв'язати наступні задачі:

1. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує товарну продукцію фабрики.

2. Прийнявши умову, що кількість тканин трьох артикулів повинна бути відносно 2:1:3, визначити, яку максимальну кількість комплектів тканини може випустити фабрика.

3. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток, якщо собівартість 1 м тканини складає відповідно 8, 5 і 15 грн.

4. Розв'язати задачу за умови, що верстати першого типу тканини 1-го артикула не виробляють.

5. Визначити оцінки всіх чотирьох видів ресурсів щодо оптимального асортименту, знайденого в задачі 1.

ТЕМА 3

ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛП

1. ЗАДАЧА РОЗМІЩЕННЯ СИРОВИНИ ПО ПУНКТАХ ВИРОБНИЦТВА

Близько до розглянутої вище задачі прилягає така оптимізаційна задача (її можна розглядати як модель загальної задачі лінійного програмування):

Економічна інтерпретація задачі:

Нехай потрібно скласти план виробництва будь-якої продукції (один вид). При цьому відомі пункти, у яких ця продукція повинна бути вироблена, і обсяги виробництва цієї продукції у кожнім пункті. Продукція може бути виготовлена з альтернативних видів сировини (i). Відома витрата кожної сировини по пунктах на виготовлення одиниці продукції.

Потрібно скласти такий план виробництва, виходячи із заданих ресурсів сировини, що забезпечить задані обсяги виробництва в кожнім пункті при мінімумі загальної собівартості виробництва.

Формалізуємо цю задачу:

i — види сировини, $i = 1,\ldots,n$;

A_i — ресурси сировини i-го виду;

j — пункти виробництва продукції (міста, підприємства, засоби виробництва);

b_j — задані обсяги виробництва продукції (потреба) у j-му пункті;

a_{ij} — витрата i-го виду сировини на виготовлення продукції у j-му пункті;

c_{ij} — собівартість виробництва одиниці продукції із сировини i-го виду в j-м пункті.

Усі вище перелічені дані відомі.

Розв'язок

Необхідно визначити x_{ij} — кількість продукції, виготовленої з i-го виду сировини в j-му пункті виробництва так, щоб були задоволені потреби (тобто виробництво продукції в обсязі B_j, ($j = 1, \ldots, m$) при загальній мінімальній собівартості продукції.

Математична модель:

Цільова функція

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\to\min . \qquad (3.1)$$

При обмеженнях на:

а) ресурси

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x\ \le A_i\ (i=1,\ \dots,\ n); \qquad (3.2)$$

б) обсяг виробництва

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_i\ (j=1,\ \dots,\ m); \qquad (3.3)$$

в) кількість продукції

$$x_{ij}\ge 0\ (i=1,\ \dots,\ n;\ j=1,\ \dots,\ m), \qquad (3.4)$$

До цього класу задач (лінійного програмування) слід віднести «Задачу формування раціональних комерційних зв'язків», «Транспортну задачу», «Задачу оптимізації навантаження виробничих потужностей», математичні моделі яких аналогічні задачі (3.1)—(3.4).

2. Транспортна задача

Транспортні задачі складають клас задач ЛП, специфіка математичної моделі яких дозволяє застосовувати для їх розв'язання поряд із загальними методами ЛП спеціальні методи, що значно скорочують процес обчислень. Найпростіша постановка транспортної задачі за критерієм вартості наступна.

У m пунктах виробництва A_1, A_2,…, A_n маються запаси якогось однорідного продукту в кількостях a_1, a_2,..., a_n одиниць. Необхідність у цьому продукті в пунктах споживання B_1, B_2,…, B_m виражається відповідно величинами b_1, b_2,..., b_m. З кожного пункту виробництва можливе транспортування продукту в будь-який пункт споживання. Транспортні витрати на перевезення одиниці продукції (вантажу) із пункту A_i у B_j завдані і складають $C = //c_{ij}//$; $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., m$.

Завдання полягає у відшуканні такого плану перевезень, при якому весь продукт із пунктів виробництва буде вивезений, запити виробників цілком задоволені й сумарні транспортні витрати мінімальні.

Формалізуємо задачу, для чого умови *T*-задачі подамо:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nm} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ a_n \end{bmatrix}$$

B = $(b_1,\dots, b_j,\dots, b_m)$

Для складання математичної моделі задачі введемо змінні $x_{ij} \geq 0$, $i = 1,\dots, n$, $j = 1,\dots, m$, які позначають кількість вантажу, перевезеного з i-го пункту виробництва в j-й пункт споживання.

Розв'язок:

Потрібно знайти безліч змінних $x_{ij}> = 0$, мінімізуючих функцію

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{3.5}$$

І задовольняючих умовам:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \ \ (i = 1,\dots, n), \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \ \ (j = 1,\dots, n), \tag{3.7}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \ (i = 1, \dots,m; j = 1, \dots, n), \tag{3.8}$$

Т-задача являє собою задачу ЛП із числом змінних $m \cdot n$ і числом обмежень-рівностей $m + n$.

Набір змінних x_{ij}, що задовольняють умовам (3.6)—(3.8), записують у вигляді матриці

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix},$$

Матрицю X називають *планом перевезень* Т-задачі, а змінні x_{ij} — *перевезеннями*. План $X_{\text{опт}}$, при якому значення цільової функції мінімальне, називається *оптимальним*. Матриця $C = [c_{ij}]$,

$i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$ називається *матрицею транспортних витрат*.

Умова (3.6) гарантує повне вивезення продукту з усіх пунктів виробництва, а умова (3.7) означає повне задоволення попиту.

На практиці існують як задачі, де виконується рівність між сумарними ресурсами і сумарними потребами (умови балансу)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \tag{3.9}$$

так і задачі, де:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \neq \sum_{j=1}^{m} b_j \; . \tag{3.10}$$

3. Закрита та відкрита моделі транспортних задач

Задача (3.5)—(3.8) за умови (3.9) називається *закритою моделлю*, а за умови (3.10) — *відкритою моделлю*. Рівність (3.9) є необхідною і достатньою умовою спільності системи рівнянь (3.6) і (3.7) у ділянці припустимих розв'язків, і, отже, можливості розв'язання задачі. Якщо задача являє собою відкриту модель, то вона повинна бути зведена до закритої транспортної моделі.

При $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$ необхідно ввести додатковий пункт споживання, у якому потреба

$$b_{n+1} = \Sigma a_i - \Sigma b_j, \tag{3.11}$$

а якщо $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$, вводиться додатковий пункт виробництва. Після цього можна приступати до розв'язання задачі [4].

Існують ручні й машинні методи розв'язання *T*-задачі. До ручного відносяться розподільний метод, метод потенціалів. До машинних — угорський метод, метод диференціальних рент.

Розв'язок *T*-задачі за допомогою ручних методів складається з таких основних етапів:

— визначення вихідного опорного плану задачі;

— оцінка цього плану;

— перехід до наступного, кращого плану шляхом заміни однієї з базисних змінних на вільну.

До цього класу задач ЛП керування матеріальними ресурсами слід також віднести «Задачу оптимізації виробничих потужностей», математична модель якої аналогічна задачі (1.1)—(1.3) і за деяких умов може бути зведена до транспортної задачі [4].

ВИСНОВКИ

Математична модель загальної задачі ЛП:

Цільова функція

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min .$$

При обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x \ \le A_i \ \ (i = 1, \ldots, n);$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_i \ \ (j = 1, \ldots, m);$$

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m).$$

До цього класу задач (лінійного програмування) керування матеріальними ресурсами слід також віднести «Задачу формування раціональних комерційних зв’язків», «Транспортну задачу», «Задачу оптимізації навантаження виробничих потужностей».

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. До якого класу задач слід віднести «Задачу формування раціональних комерційних зв’язків», «Транспортну задачу», «Задачу оптимізації навантаження виробничих потужностей»? Напишіть їх математичні моделі.

2. Чим відрізняються закрита та відкрита моделі транспортних задач?

3. Побудуйте ЕММ транспортної задачі.

ТЕМА 4

ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ВЗАЄМОЗАМІННИХ РЕСУРСІВ

1. Розподільні задачі

Задачі оптимального розподілу взаємозамінних ресурсів одержали назву *розподільних задач*.

Постановка задачі:

Знайти оптимальний розподіл n різних взаємозамінних ресурсів, що маються в кількості $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для задоволення m різних потреб у кількостях $b_1, b_2, \ldots, b_m$ при заданих матрицях c_{ij} і λ_{ij}, де c_{ij} — оцінки використання одиниці i-го ресурсу на задоволення j-х потреб і λ_{ij} — кількість одиниць j-х потреб, що задовольняються одиницею i-го ресурсу.

Розв'язок:

Уведемо змінні x_{ij} — кількість одиниць i-х ресурсів, використовуваних для задоволення j-х потреб.

Завдання полягає у визначенні $k = mn$ величин x_{ij}, що задовольняють обмежувальним умовам

$$x_{ij} \geq 0 \ \ (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m); \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i \ \ (i = 1, \ldots, n); \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\lambda_{ij} \geq b_j \ (j = 1, \ldots, m) \tag{4.3}$$

і максимізуючих (мінімізуючих) функцію

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \, . \tag{4.4}$$

Залежно від конкретного характеру задачі може варіюватися конкретний зміст, а так само розмірність вихідних величин a_i, b_j, c_{ij}, λ_{ij}, що, у свою чергу приведе до деякої модифікації моделі.

Так, наприклад, λ_{ij} може виражати число одиниць i-х ресурсів, затрачуваних на одиницю j-х потреб.

Тоді обмеження (4.2), (4.3) заміняться на $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i$ і $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{ij}}{\lambda_{ij}} \geq b_j$.

Якщо при цьому c_{ij} означають оцінки одиниці j-го виробу в грн/шт., то зміниться і вираз для цільової функції $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\frac{c_{ij}}{\lambda_{ij}}x_{ij}$ і т. д.

Функція Z може максимізуватися, якщо c_{ij} означають прибуток, вартість і т. ін., чи мінімізуватися, якщо ці оцінки вимірюють витрати, собівартість і т. ін.

Форма моделі так само залежатиме від вибору змінних x_{ij}. Поза залежністю від цих конкретних модифікацій моделі (4.1)—(4.4), вона має деяку подібність до транспортної.

Однак наявність в одній із груп обмежень множників λ_{ij} (через що виникла назва «λ-модель»), приводить і до відомих ускладнень при аналізі цих моделей. Розподільні задачі зважуються за допомогою спеціальних обчислювальних методів, що являють собою модифікацію методів розв'язання транспортних задач.

При деяких спеціальних властивостях матриці λ_{ij} виникають приватні види розподільних задач, що можуть привести до моделей звичайних транспортних задач. Такими приватними видами задач є:

— прості розподільні задачі (усі λ_{ij} = const при будь-яких i і j);

— задачі з однорідними ресурсами (усі рядки матриці λ_{ij} однакові, тобто $\lambda_{ij} = \lambda_{1j}$;

— при різних i);

задачі з пропорційними ресурсами ($\lambda_{ij} = \alpha_i\lambda_{ij}$ при різних i).

2. Розподільні задачі з однорідними ресурсами

Ресурси a_1, ..., $a_г$, ..., a_n — однорідні і цілком взаємозамінні, потреби b_1, ..., b_j, ..., b_m — різнорідні (вимірювані в різних одиницях). Числа $\lambda_{ij} = \lambda_j$ (j = 1, ..., m) указують кількість одиниць k-х потреб, що можуть бути задоволені одиницею будь-якого ресурсу. Числа c_{ij}, як завжди, характеризують ефективність одиниці i-го ресурсу при задоволенні ним j-х потреб.

Нехай x_{ij} змінні, що позначають кількість одиниць i-х ресурсів, що направляються на задоволення j-х потреб.

Задача приводиться до обмежень (4.1)—(4.4), у якій лише спростяться обмеження (4.3), що приймають у даному випадку вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\lambda_{ij} \geq b_j \quad (j = 1, \ldots, m).$$

До подібних же моделей приводяться задачі з різнорідними, але взаємозамінними ресурсами, і однорідними потребами. У цьому випадку задаються величини λ_i, що характеризують кількість одиниць потреб, які можуть бути задоволені одиницею i-го ресурсу.

3. Розподільні задачі з пропорційними ресурсами

Ресурси $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ і потреби $b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_m$ — неоднорідні, але в матриці λ_{ij}, елементи якої встановлюють зв'язок між одиницями ресурсів і потреб, рядки пропорційні, тобто $\lambda_{ij} = \alpha_i \lambda_{ij}$ ($j = 1, \ldots, m$), де α_i називаються індексами i-х ресурсів. Числа c_{ij} по колишньому характеризують ефективність одиниці i-го ресурсу при задоволенні ним j-х потреб, x_{ij} — змінні, що позначають кількість одиниць i-х ресурсів, що направляються на задоволення j-х потреб.

При іншій інтерпретації чисел c_{ij} і λ_{ij}, зміниться форма моделі (4.1)—(4.3).

Загальна модель задач (4.1)—(4.4), названа (λ-моделлю), виходить при довільному характері матриці λ.

Для розв'язання використовується або спеціальний метод, що являє собою видозміни методу потенціалів, або загальні методи (наприклад, симплексний). В останньому випадку це приводить до деякого ускладнення обчислень [5].

ВИСНОВКИ

Розподільні задачі — задачі оптимального розподілу взаємозамінних ресурсів.

Форма моделі залежить від вибору змінних x_{ij} (кількість одиниць i-х ресурсів, використовуваних для задоволення j-х потреб).

Залежно від конкретного характеру задачі може варіюватися конкретний зміст, а так само розмірність вихідних величин a_i, b_j, c_{ij}, λ_{ij}.

При деяких спеціальних властивостях матриці λ_{ij} виникають приватні види розподільних задач, що можуть привести до моделей звичайних транспортних задач. Такими приватними видами задач є:

— прості розподільні задачі;

— задачі з однорідними;

— задачі з пропорційними ресурсами.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що розуміють під розподільними задачами?

2. Яке економічне значення мають змінні x_{ij}, а також вихідні величини a_i, b_j, c_{ij}, λ_{ij} у розподільних задачах.

3. Від чого залежить форма λ-моделі?

4. Побудуйте моделі:

— простої розподільної задачі;

— задачі з однорідними ресурсами;

— задачі з пропорційними ресурсами.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Побудуйте моделі задач за заданими умовами.

1. Задача

Три механізми A, B, C можуть виконувати три види робіт 1, 2, 3.

Ресурси робочого часу кожного механізму відповідно ($м^3$/год):

8	6	9
4	6	8
9	8	3

Вартість однієї години роботи механізму (коп/год):

2	4	4
4	2	6
5	3	7

Ресурс часу:

540, 430, 150 (год.).

A. Визначити оптимальне завантаження устаткування, що забезпечує максимальний обсяг робіт при дотриманні умови комплектності

$$a : в : c = 1 : 2 : 3.$$

B. Знайти оптимальне завантаження устаткування, мінімізувати сумарні витрати, при обсягах робіт $a = 60$, $в = 50$, $c = 80$ $м^3$.

2. Задача

Механічний завод при виготовленні трьох різних деталей 1, 2, 3 використовує токарські, фрезерні і стругальні верстати.

При цьому обробку деталей можна вести трьома різними способами T_1, T_2, T_3. Норми часу при обробці деталей на відповідному верстаті кожним способом:

1 спосіб:

4	9	5
8	8	3
—	7	5

2 спосіб:

2	5	—
9	4	3
7	—	3

3 спосіб:

4	—	—
5	8	—
3	6	—

Ресурс часу верстатів 200, 400, 300. Прибуток від продажу виробів 22, 18, 30 грн.

А. Скласти оптимальний план завантаження виробничих потужностей з максимальним прибутком.

В. Вважаючи, що між кількістю деталей, що випускаються, має виконуватися співвідношення комплектності 1 : 2 : 1, визначити виробничу програму, що забезпечує максимальне число комплектів.

3. Задача

Механізми А, В, С можуть виконувати три види робіт 1, 2, 3. Вартість однієї години роботи механізму (коп/год):

12	24	34
63	32	56
35	53	67

Нормативи робочого часу кожного механізму відповідно ($м^3$/*год*):

55	66	77
45	36	89
39	68	53

Ресурс часу: *640*, *330*, *128* (*год*).

А. Визначити оптимальне завантаження механізмів при максимальному сумарному обсязі виконаних робіт.

В. Визначити оптимальне завантаження устаткування, що забезпечує максимальний обсяг робіт при дотриманні умови комплектності а : в : с = 1 : 2 : 3.

4. Задача

Три механізми 1, 2, 3 можуть виконувати три види грабарств A, B, C. Ресурси робочого часу кожного механізму відповідно ($м^3$/год):

30	20	40
31	30	50
32	40	20

Вартість однієї години роботи механізму (грн/год.):

2	4	3
3	2	5
5	3	6

Ресурс часу: 400, 300, 280 (год).

A. Визначити оптимальне завантаження механізмів при максимальному сумарному обсязі виконаних робіт.

B. Визначити оптимальне завантаження устаткування, що забезпечує максимальний обсяг робіт при дотриманні умови комплектності а : в : с = 1 : 2 : 3.

C. Знайти оптимальне завантаження устаткування, мінімізуючи сумарні витрати, при обсягах робіт а = 6000, в = 50 000, с = 8000 $м^3$.

ТЕМА 5
ВІДОМОСТІ З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1. ВЕКТОРИ, МАТРИЦІ, ВИЗНАЧНИКИ

Упорядкована сукупність *n* дійсних чисел $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ називається *n*-мірним вектором — рядком. Числа a_i ($i=\overline{1,n}$) називаються компонентами вектора.

$$A=(a_1,a_2,...,a_n),\qquad X=(x_1,x_2,...,x_n). \tag{5.1}$$

Два вектори A і B рівні, якщо рівні їхні відповідні компоненти: $a_i = b_i$, $i=\overline{1,n}$.

Сумою (різницею) двох векторів A і B називається третій вектор C, компоненти якого c_i дорівнюють сумі (різниці) відповідних компонентів векторів A і B:

$$c_i=a_i+b_i,\ i=\overline{1,n}$$

Добутком числа α на вектор A є вектор $\alpha_A = (\alpha_{a1}, \alpha_{a2}, \dots, \alpha_{an})$.

Лінійною комбінацією векторів

$$\begin{aligned} X_1 &= (x_{11},x_{12},...,x_{1n}),\\ X_2 &= (x_{21},x_{22},...,x_{2n}),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ X_k &= (x_{k1},x_{k2},...,x_{kn}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

називається вектор

$$Y=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\ldots+\alpha_kX_k, \tag{5.3}$$

де $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ — числа.

Вектор з нульовими компонентами називається нуль-вектором

$$0=(0,0,...,0).$$

Система векторів (5.2) називається лінійно — залежною, якщо виконується рівність

$$\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\ldots+\alpha_kX_k=0, \tag{5.4}$$

причому не всі числа α_i дорівнюють нулю (де 0 є нуль-вектор).

Система векторів (5.2) називається лінійно-незалежною, якщо рівність (5.4) виконується тоді, і тільки тоді, коли всі α_i дорівнюють нулю [12]. Для лінійної залежності системи векторів (5.2) необхідно і достатньо, щоб один з векторів цієї системи був лінійною комбінацією інших векторів цієї системи [4]. Максимальне число лінійно-незалежних векторів у системі називається рангом системи векторів.

Сукупність усіх *n*-мірних векторів утворять лінійний простір [13]. Ранг лінійного простору — це розмірність простору. Розмірність лінійного простору *n*-мірних векторів дорівнює *n* [12].

Будь-яка сукупність *n* лінійно-незалежних векторів *n*-мірного простору називається базисом цього простору.

2. Базис *n*-мірного простору

Система векторів

$$\begin{aligned} &A_1 = (a,0,...,0),\\ &A_2 = (0,a,...,0),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ &A_n = (0,0,...,a) \end{aligned} \tag{5.5}$$

є базисом *n*-мірного простору, де *a* — будь-яке відмінне від нуля число. Для доказу цього твердження складемо лінійну комбінацію:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_n A_n = 0. \tag{5.6}$$

Виконавши зазначені в (5.6) операції множення і додавання, одержуємо

$$(\alpha_1 a,\ \alpha_2 a,\ \ldots,\ \alpha_n a) = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

Звідкіля, через рівність векторів і умови $a \neq 0$ матимемо:

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0.$$

Таким чином, рівність (5.6) можлива тільки при всіх $\alpha_i = 0$, ($i = \overline{1,n}$).

З розглянутого прикладу випливає, що в *n*-мірному просторі існує нескінченна безліч базисів. Будь-який вектор лінійного простору єдиним способом може бути поданий у вигляді лінійної комбінації векторів якогось (фіксованого) базису цього простору

[12]. У лінійному просторі можна ввести операцію множення двох векторів A і B, наприклад, у такий спосіб [13]. Якщо

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n) \text{ і } B = (b_1, b_2, ..., b_n),$$

то добутком цих векторів буде число, позначене як (A, B) (читати випливає так: вектор A скалярне помножений на вектор B) і обчислюється за формулою:

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ . \tag{5.7}$$

Упорядкована сукупність n чисел $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$ називається n-мірним вектором — стовпцем. Усі наведені вище визначення без змін чинні і для векторів-стовпців.

3. Системи лінійних рівнянь

Запис вигляду

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{10}, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{20}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = a_{m0} \end{aligned} \tag{5.8}$$

називається системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

Рівняння системи називаються лінійно-незалежними, якщо вектори $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, складені з коефіцієнтів при невідомих, у цих рівняннях лінійно-незалежні.

Рангом системи рівнянь називається максимальне число лінійно-незалежних рівнянь системи. Ранг системи векторів дорівнює рангу матриці коефіцієнтів системи.

Вектор

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \cdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

називається розв'язком системи (5.8), якщо заміна невідомих x_j числами $x_j^{(0)} (j = \overline{1, n})$ перетворює всі рівняння системи (5.8) у тотожності (у цьому випадку говорять, що вектор $X^{(0)}$ задовольняє системі рівнянь).

Розв'язати систему рівнянь означає знайти вектор $X^{(0)}$, що задовольняє цю систему.

Для розв'язання систем рівнянь існують різні методи. Один з них — метод Жордана-Гаусса [11], застосовується при розв'язанні задач лінійного програмування.

ВИСНОВКИ

Розглянуті операції лінійної алгебри над вектор-стовпцем, вектор-рядком, матрицями, системи лінійних рівнянь:

— сума (різниця) двох векторів;
— добуток числа α на вектор A;
— множення двох векторів A і B.

Основні поняття лінійної алгебри:

— лінійно — залежна система векторів;
— лінійно-незалежна система векторів;
— ранг лінійного простору;
— базис n-мірного простору.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Яка система векторів називається лінійно-незалежною?
2. Що таке базис n-мірного простору?
3. Що означає розв'язати систему рівнянь?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Визначити, чи є системи векторів лінійно-незалежними.

$$\{(1,0),(3,0)\},$$
$$\{(1,2,4),(2,2,8),(1,0,4)\},$$
$$\{(2,3,0),(6,1,0),(0,2,4)\},$$
$$\{(2,3,1),(1,0,4),(2,4,1),(0,3,2)\},$$
$$\{(1,3),(2,2)\}$$

2. Чи утворять наступні системи векторів базис для простору $\boldsymbol{E}^3$*?*

$$a)\ (3.0,2),\ (7,0,9),\ (4,1,2),$$
$$в)\ (1,1,0),\ (3,0,1),\ (5,2,1),$$
$$c)\ (1,5,7),\ (4,0,6),\ (1,0,0).$$

3. Розкласти вектори $\boldsymbol{b_i}$ *по базису* (a_1, a_2, a_3):

$$a_1 = (2,6,3), a_2 = (9,1,0), a_3 = (1,2,7),$$
$$b_1 = (4,1,2),$$
$$b_2 = (3,7,9),$$
$$b_3 = (3,0,2),$$
$$b_4 = (1,1,1),$$
$$b_5 = (3,3,3),$$
$$b_6 = (3,7,1),$$
$$b_7 = (9,1,4),$$
$$b_8 = (-2,-2,-2).$$

ТЕМА 6

МЕТОД ЖОРДАНА-ГАУССА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1. АЛГОРИТМ МЕТОДУ ЖОРДАНА-ГАУССА

Алгоритм методу наступний:

1. Переписати в табл. 7 коефіцієнти системи:

Таблиця 7

ТАБЛИЦЯ Жордана-Гаусса

	X_1		X_j	…	X_p	…	X_n	a_{i0}	a_{in+1}
I	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1p}	…	a_{1n}	a_{10}	a_{1n+1}
—	—	—	—	—	—	…	…	…	…
i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{ip}	…	a_{in}	a_{i0}	a_{in+1}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
q	a_{q1}	…	a_{qj}	…	a_{qp}	…	a_{qn}	a_{q0}	a_{qn+1}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mp}	…	a_{mn}	a_{m0}	a_{mn+1}

Існує взаємно-однозначна відповідність між рядками таблиці і рівняннями системи.

2. Доповнити таблицю стовпцем a_{in+1}, елементи якого a_{in+1} дорівнюють сумі елементів у рядку $a_{in+1} = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$. (6.1)

Цей стовпець використовується при контролі обчислень.

3. Вибрати серед коефіцієнтів при невідомих елементах розв'язуваний елемент $a_{qp} \neq 0$ (p-й стовпець і $q - w$ рядок таблиці називаються розв'язуваними).

4. У наступну таблицю записати q-й рядок, елементи якого обчислюються за правилом

$$a'_{qj} = \frac{a_{qi}}{a_{qp}}, \ j = \overline{0, n+1} \tag{6.2}$$

5. Зробити контроль обчислень, для чого обчислити суму елементів $\sum_{j=0}^{n} a'_{qj}$ і порівняти отриманий результат з елементом a'_{qn+1} з

контрольного стовпця. Якщо зазначені дві величини збігаються, то обчислення проведені правильно, у протилежному разі повторити пункт 4.

6. Перетворити порядково елементи таблиці, що залишилися, за формулах

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{qi}a_{ip}}{a_{qp}}, \; i = \overline{1,m}, \; i \neq q, \; j = \overline{0, n+1}. \qquad (6.3)$$

7. Після перетворення елементів рядка здійснювати контроль, аналогічний контролю з пункту 5. Пункти 3—7 утворять одну ітерацію методу.

8. Після проведення нескладних ітерацій може реалізуватися один з випадків:

а) у k-му рядку таблиці у всіх стовпцях отримані нулі;

б) у k-му рядку таблиці в стовпцях з 1-го по n-ий отримані нулі, у стовпці «a_{i0}» отриманий елемент $a_{k0} \neq 0$.

Випадок «*а*» може настати в тому разі, якщо k-те рівняння системи є лінійною комбінацією інших рівнянь системи. Розв’язання системи слід продовжувати.

Випадок «*б*» може настати у разі несумісності системи рівнянь, тому що k-му рядку (з останньої таблиці) відповідає рівняння

$$0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = \overline{a}_{k0} \neq 0, \qquad (6.4)$$

яке не має розв’язання ні за яких значень X_i, $i = \overline{1,n}$.

Розв’язання системи рівнянь закінчити.

9. На початку l-й ітерації (l = 2, 3,...) слід вибрати $a_{q_l p_l} \neq 0$ з рядка, що до цього не був розв’язуваним, тобто

$$q_l \neq q_1, ..., q_l \neq q_{l-1}$$

10. Повторювати пункти 3—9 доти, поки можна буде вибирати розв’язуваний елемент $a_{q_l p_l} \neq 0$, з обліком правила вибору з п. 9. Очевидно, що максимальне число ітерацій дорівнює m (числу рівнянь), але якщо реалізувався випадок 8, то число ітерацій буде менше m.

11. Після проведення всіх ітерацій виписати систему рівнянь, що відповідають останній таблиці. Змінні x_j, що утримуються тільки в одному рівнянні отриманої системи, називаються базисними, інші — вільними (якщо такі є, що можливо при $m < n$).

Загальним розв’язком системи (для систем, у яких ранг менше n) називається таке розв’язання, з якого може бути отримане кожне (частка) розв’язання системи.

Для того щоб записати загальне розв’язання системи, необхідно вільні змінні перенести в праві частини всіх рівнянь отриманої системи.

ВИСНОВКИ

Метод Жордана-Гаусса [11], застосовується при розв’язанні задач лінійного програмування. Він дозволяє розв’язати систему рівнянь та знайти вектор X, що задовольняє цю систему.

Виконавши ще одну ітерацію за методом Гаусса, тобто, змінивши базис простору, можна одержати подібні розкладання по новому базису.

Після проведення всіх ітерацій виписується система рівнянь, що відповідає останній таблиці. Змінні x_j, що утримуються тільки в одному рівнянні отриманої системи, називаються базисними. При знаходженні часткового розв’язання їм привласнюються відповідні значення вільних членів, інші — вільними (якщо такі є, що можливо при $m < n$), їх значення прирівнюються до нуля.

Для того щоб записати загальне розв’язання системи, необхідно вільні змінні перенести в праві частини всіх рівнянь отриманої системи.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

1. Приклад

Нехай задана система векторів

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Оскільки простір, у якому задані вектори, тривимірний, то система свідомо лінійно-залежна. Виділимо підсистему з 3-х векторів, що утворять базис, і розкладемо інші вектори по векторах базису. Нехай як базисні вибрані A_1, A_2, A_3. Тоді

$A_4 = A_1x_1' + A_2x_2' + A_3x_3'$ аналогічно $A_5 = A_1x_1'' + A_2x_2'' + A_3x_3''$ (див. табл. 8).

Таблиця 8

ТАБЛИЦЯ Гауса

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\sum$
1	2	–1	2	3	7
–2	–1	2	1	–6	–6
3	–2	4	–3	2	4
1	2	–1	2	3	7
0	3	0	5	0	8
0	–8	7	–9	–7	17
1	0	–1	–4/3	3	5/3
0	1	0	5/3	0	8/3
0	0	7	13/3	–7	13/3
1	0	0	–5/7	2	16/7
0	1	0	5/3	0	8/3
0	0	1	13/21	–1	13/21

У стовпцях A_4, A_5 отримані коефіцієнти розкладання цих векторів по базису A_1, A_2, A_3

$$A_4 = -5/7A_1 + 5/3A_2 + 13/2A_3,$$
$$A_5 = 2A_1 + 0A_2 - A_3.$$

Виконавши ще одну ітерацію за методом Гаусса, тобто, змінивши базис простору, можна одержати подібні розкладання по новому базису. Наприклад, введемо в базис вектор A_4 замість A_1. Виберемо як розв'язуваний елемент –5/7, одержимо:

–7/5	0	0	1	–14/5
7/3	1	0	0	14/3
13/15	0	1	0	11/15

$$A_1 = 7/3A_2 + 13/15A_3 - 7/5A_4,$$
$$A_5 = 14/3A_2 + 11/15A_3 - 14/5A_4.$$

2. Приклад

Випадок $n > r$ (одержання загального розв'язку):

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1,$$
$$2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2.$$

Таблиця 9

ТАБЛИЦЯ Гаусса

№	A_1	A_2	A_3	A_4	A_0	Σ
0	5	2	3	3	1	14
	2	–2	5	2	4	11
	3	4	2	2	–2	9
1	1	2/5	3/5	3/5	1/5	14/5
	0	–14/5	19/5	4/5	18/5	27/5
	0	14/5	1/5	1/5	–13/5	3/5
2	1	0	8/7	5/7	5/7	25/7
	0	1	19/7	–2/7	–9/7	15/7
	0	0	4	1	1	6
3	1	0	0	3/7	3/7	17/7
	0	1	0	–1/56	–53/56	2/56
	0	0	1	1/4	1/4	6/4

Загальне розв'язання системи можна записати у вигляді:

$$x_1 \ +3/7x_4 = 3/7,$$
$$x_2 \ -1/56x_4 = -53/56 \ ,$$
$$x_3 + 1/4x_4 = 1/4$$

Базисне розв'язання

$$\mathrm{X} = (3/7; -53/56; 1/4; 0).$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Опишіть алгоритм методу Жордана-Гаусса.
2. Що називається загальним розв'язанням системи?

3. Як знайти власне розв'язання системи?
4. Яке розв'язання називається базисним?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Розв'язати методом Жордана-Гаусса:
а)
$2x_1 - 2x_2 = 1$
$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4$
$x_2 + x_3 - x_4 = 0$
$x_1 - x_2 + 2x_5 = 3$
$x_1, \ldots, x_5 > = 0$
базис: x_2, x_3, x_4, x_5
б)
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$
$7x_1 - + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 120$
$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 100$
$x_1, \ldots, x_5 > = 0$
базис: x_2, x_3, x_4
в)
$2x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 4x_4 = 4$
$x_1 + 6x_2 + 12x_3 + 8x_4 = 8$
$x_1, \ldots, x_5 > = 0$
базис: x_3, x_4 *і базис*: x_2, x_3.

2. Знайти всі базисні розв'язання систем лінійних рівнянь

1. $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5. \end{array}$

2. $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3. \end{array}$

3. $\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 10, \\ x_1 + 9x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 7. \end{array}$

4. $\begin{array}{l} x_1 + 3x_3 = 6, \\ x_2 + 6x_3 = 8. \end{array}$

5. $\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4. \end{array}$

6. $\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9. \end{array}$

7. $\begin{aligned} &x_1+3x_2+x_3+2x_4=5, \\ &2x_1 \qquad -x_3+\ x_4=1. \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} &-6x_1+9x_2+3x_3 \qquad -2x_5-x_6+x_7 \qquad =12, \\ &\qquad 4x_2+3x_3-3x_4+x_5-x_6 \qquad +x_8=5, \\ &2x_1+8x_2-5x_3+6x_4-8x_5+4x_6 \qquad +x_9=20, \\ &5x_1+\ \ x_2+2x_3+4x_4+9x_5+5x_6 \qquad +x_{10}=24. \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} &5x_1-2x_2-6x_3=5, \\ &x_1-x_2-5x_3=3 \\ &4x_1+5x_2-x_3=6. \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} &3x_1+x_2+2x_3=4, \\ &4x_1-4x_2-2x_3=3 \\ &3x_1+2x_2+3x_3=4. \end{aligned}$

11. . $\begin{aligned} &2x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ &x_1+2x_2+2x_3+5x_4=12, \\ &4x_1+2x_2-3x_3+x_4=3. \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} &3x_1-3x_3-5x_3=5, \\ &2x_2+3x_3+x_3=4 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} &x_1-5x_2-5x_3+x_4=3, \\ &x_1+2x_2+3x_3-x_4=5. \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} &2x_1+3x_2-4x_3+x_4=1, \\ &x_1+7x_2+8x_3+2x_4=9 \\ &x_1+4x_2+4x_3+x_4=5, \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} &4x_1-4x_2-x_3=5, \\ &x_1+3x_2+x_3=5, \\ &2x_1-x_2+\ \ x_3=4. \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} &6x_1+9x_2+3x_3 \qquad -2x_5 \qquad =12, \\ &\qquad 4x_2+3x_3-3x_4+x_5=5, \\ &2x_1+8x_2-5x_3+6x_4-8x_5=20, \\ &5x_1+\ \ x_2+2x_3+4x_4=24. \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} &4x_1-5x_2+x_3=7, \\ &4x_1+2x_2+5x_3=5 \\ &.x_1+2x_2-x_3-x_4=2, \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} &x_1+2x_2+x_3+4x_4=2, \\ &x_1+x_2+2x_3-5x_4=5 \\ &x_1+2x_2+3x_3-x_4=2 \\ &x_1+4x_2+4x_3+x_4=5,. \end{aligned}$

19. $$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2, \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 2. \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 9. \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 3, \end{aligned}$$

ЛАБОРАТОРНІ ЗАНЯТТЯ

Написати програму будь-якою мовою програмування (наприклад, С++), яка розв'язує систему рівнянь методом Жордана-Гаусса.

***Варіанти завдань*:**

1. Написати програму для знаходження всіх базисних розв'язок систем лінійних рівнянь.

2. Написати програму, яка знаходить всі базисні розв'язки, коли номери базисних змінних вводять з клавіатури.

3. Написати програму, де базисними змінними треба вибрати перші n-змінних (n рівне кількості рівнянь у системі).

ТЕМА 7

РІЗНІ ФОРМИ ЗАПИСУ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1. Класифікація задач ЛП

Загальною задачею ЛП називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{7.1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, k) \tag{7.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = k+1, m) \tag{7.3}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, l, l \le n), \tag{7.4}$$

де a_{ij}, b_i, c_j де задані постійні величини і $k \le m$.

Функція (7.1) називається цільовою функцією (або лінійною формою, або критерієм якості) задачі (7.1)—(7.4), а умови (7.2)—(7.4) — обмеженнями даної задачі (або системою умов задачі).

Стандартною (або симетричною) задачею ЛП називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (2.8) при виконанні умов (7.2) і (7.4), де $k = m$ і $l = n$.

Канонічною (або основною) задачею ЛП називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення функції (7.1) при виконанні умов (7.3) і (7.4), де $k = 0$ і $l = n$.

Сукупність чисел, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ що задовольняють умовам (7.1)—(7.4), називається допустимим розв’язанням (або планом, або ділянкою визначення ЗЛП).

Матрицю $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m_i 1} & a_{m_i 2} & \dots & a_{m_i n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ складену з коефіцієнтів умов (7.2)—(7.3) називають матрицею умов задачі.

Позначимо через A_j — стовпці матриці умов

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ .... \\ a_{m_1 j} \\ ..... \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ .... \\ b_{m1} \\ .... \\ b_m \end{pmatrix}$$ — вектор-стовпець обмежень.

A_j — j-й вектор-стовпець умов, тоді (7.2)—(7.3) можна записати у вигляді

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_n x_n \leq = B$$

Знак «=» відноситься до перших m_1 компонентів, знак «$\leq$» — до решти $m - m_1$ компонентів.

Набір чисел $x = (x_1, ..., x_n)$ задовольняючий системі умов (7.2)—(7.4) зветься планом розглянутої задачі. Числа x_i, що становлять плану x, називаються компонентами x.

Будь-якому плану задачі відповідає певне значення лінійної форми (7.1). І чим більше значення лінійної форми (якщо йдеться про max L), тим «краще» план.

План $X^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$, якому відповідає максимально можливе значення лінійної форми L, називається оптимальним планом задачі або розв'язкам задачі.

Іншими словами, для X^* має виконуватися умова, де

$X^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ — оптимальний план,

а $X = (x_1, ..., x_n)$ — будь-який інший план даної задачі.

Якщо йдеться про min L, то оптимальним планом буде план, що задовольняє умові

$$F(X^*) \leq F(X).$$

Задача, що володіє хоча б одним планом, називається дозволеною.

При аналізі системи умов (7.2)—(7.4) можуть статися три наступні випадки:

1. Умови (7.2)—(7.4) суперечливі, тобто не існує таких x_1, x_2, ..., x_n задовольняючих всім умовам (7.2)—(7.4), у задачі не існує жодного плану.

2. Умови (7.2)—(7.4) несуперечливі, а ділянка визначення задачі не обмежена, тобто існують плани зі скільки завгодно великими окремими компонентами.

3. Система умов (7.2)—(7.4) сумісна, і ділянка визначення задачі обмежена.

2. Перехід з однієї форми запису задач ЛП в іншу

На практиці доводиться зустрічатися з найрізноманітнішими формами запису задач ЛП. Так, шукані змінні, компоненти оптимального плану, можуть залежати від одного індексу (x_i) і від 2-х (x_{ij}). У систему умов задачі можуть уходити тільки рівняння або тільки нерівності, або і рівняння і нерівності. Іноді доводиться визначити max або min лінійної форми, а іноді і maxmin або minmax.

Така різноманітність задач ЛП вимагає різних методів для розв'язання різних класів задач ЛП. Тому є сенс розробити методи зведення всіх задач ЛП до найпростішої і зручнішої для дослідження форми.

Зазначені раніше три форми (загальна, стандартна і канонічна) задачі ЛП еквівалентні в тому значенні, що кожна з них за допомогою нескладних перетворень може бути записана у формі іншої задачі. Це означає, що якщо є спосіб знаходження розв'язання однієї із вказаних задач, то тим самим може бути визначений оптимальний план будь-якої з трьох задач.

Щоб перейти від однієї форми запису задачі ЛП до іншої, потрібно в загальному випадку уміти, по-перше, зводити задачу мінімізації функції до задачі максимізації, по-друге, переходити від обмежень-нерівностей до обмежень-рівності і, навпаки, по-третє, замінювати змінні, що не узгоджені, з умовами позитивності.

Як це здійснити?

1. У тому разі коли вимагається знайти мінімум функції, можна перейти до знаходження максимуму функції, помноживши на (–1) цільову функцію: $F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, оскільки min F = –max (–F).

2. Обмеження-нерівність початкової задачі ЛП, що має вигляд «$\leq$», можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової ненегативної змінної, а обмеження-нерівність вигляду «$\geq$» — в обмеження-рівність відніманням з його лівої частини додаткової ненегативної змінної. Таким чином, обмеження-нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i$$

перетвориться в обмеження — рівність $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... +$
$+ a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$ $(x_{n+1} \geq 0)$, (7.5)
а обмеження-нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i$$

в обмеження-рівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geq 0). \tag{7.6}$$

У той же час кожне рівняння системи обмежень

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$$

можна записати у вигляді нерівностей:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \leq b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - ... - a_{in}x_n \leq -b_i \end{cases} \tag{7.7}$$

Число додаткових ненегативних змінних, що вводяться, при перетворенні обмежень-нерівностей в обмеження-рівність дорівнює числу перетворюваних нерівностей.

Додаткові змінні, що вводяться, мають цілком певний економічний сенс. Так, якщо в обмеженнях початкової задачі ЛП відображається витрата і наявність виробничих ресурсів, то числове значення додаткової змінної в плані задачі, записаної у формі основної, рівне об'єму невживаного відповідного ресурсу.

3. Для заміни змінних x_k, не відповідних умові позитивності використовують два способи:

1-й спосіб. Її слід замінити двома ненегативними змінними u_k і v_k, прийнявши $x_k = u_k - v_k$. (що веде до збільшення числа змінних).

2-й спосіб. Якщо ж не піклуватися про скорочення структури матриці умов, то можна скористатися способом заміни змінних, при якому загальне число змінних навіть зменшується.

При цьому поступають таким чином. З лінійних рівнянь умови задачі виражаємо змінну, не зв'язану умовою невід'ємності через всі інші, а потім одержаний вираз підставляємо у всю решту рівнянь, які не використовувалися в обчисленнях, і в лінійну форму.

ВИСНОВКИ

Були розглянуті різноманітні форми запису задач ЛП (загальна, стандартна, канонічна).

1. Шукані змінні, компоненти оптимального плану можуть залежати від одного індексу (x_i) і від 2-х (x_{ij}).

2. Не всі змінні відповідають умові позитивності.

3. У систему умов задачі може входити тільки рівняння або тільки нерівності, або і рівняння і нерівності.

4. Іноді доводиться визначити max або min лінійної форми, а іноді і maxmin або minmax.

Кожна з форм за допомогою нескладних перетворень може бути записана у формі іншої задачі.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

1. Приклад

Записати у формі основної задачі ЛП наступну задачу: знайти максимум функції $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$

за умов $\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$

Розв'язок:

У даній задачі вимагається знайти максимум функції, а система обмежень містить чотири нерівності. Отже, щоб записати її у формі основної задачі, потрібно перейти від обмежень — нерівностей до обмежень — рівності. Оскільки число нерівностей, що входять в систему обмежень задачі, рівне чотирьом, то цей перехід може бути здійснений введенням чотирьох додаткових ненегативних змінних. У результаті обмеження набувають вигляду

рівнянь: $\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8 \\ x_1, x_2, ..., x_9 \ge 0 \end{cases}$.

Отже, дана задача може бути записана у формі основної задачі таким чином: максимізувати функцію $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$

за умов: $\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8 \\ x_1, x_2, ..., x_9 \ge 0 \end{cases}$.

2. Приклад

Записати у формі основної задачі ЛП наступну задачу: $F = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_2 + 23{,}5x_4 - 5x_5 \rightarrow \max$

за умов $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12 \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$

Розв'язок. Методом послідовного виключення невідомих зведемо дану задачу до наступної: знайти максимум функції

$$F = 6{,}5x_1 - 7{,}5x_2 + 23{,}5x_4 - 5x_5$$

за умов $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 26 \\ x_1 + x_3 - 11x_4 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$.

Остання задача записана у формі для основної задачі, що полягає в знаходженні максимального значення функції $F = x_3 + 2x_4$ $\rightarrow \max$

за умов $\begin{cases} x_3 + x_4 \leq 6 \\ 3x_3 + 10x_4 \leq 26 \\ x_3 + 11x_4 \leq 20 \\ x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$.

Цільова функція задачі перетворена за допомогою підстановки замість x_1 і x_5 їх значень відповідно до рівнянь системи обмежень задачі.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Чим відрізняються канонічна, загальна і стандартна ЗЛП?
2. Назвіть основні принципи переходу з однієї форми запису задач ЛП в іншу.
3. Для яких цілей здійснюються такі перетворення моделей?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Записати у формі основної (канонічної) та стандартної (симетричної) задачі ЛП наступні задачі:

$1.\ F = x_1 + x_2 \rightarrow min$
$3x_1 + x_2 > = 8$
$x_1 + 2x_2 > = 6$
$x_1 - x_2 < = 3$
$3x_1 - 2x_2 = 6$
$x_1, x_2 > = 0$

$2.\ F = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow min$
$3x_1 + 2x_2 > = 6$
$2x_1 - 3x_2 - > = -6$
$x_1 - x_2 = 4$
$4x_1 + 7x_2 < = 8$
$x_1 > = 0$

$3.\ F = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$
$x_1 - x_2 \geq 4$
$x_1 + x_2 \geq 10$
$4x_1 - x_2 \leq 12$
$7x_1 + x_2 \leq 7$
$x_1, x_2 \geq 0$

$4.\ F = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow max$
$8x_1 - 5x_2 \leq 16$
$x_1 + 3x_2 \geq 2$
$2x_1 + 7x_2 \leq 9$
$x_1, x_2 \geq 0$

$5.\ F = 7x_1 - x_2 \rightarrow min$
$x_1 + x_2 \geq 3$
$5x_1 + x_2 \geq 5$
$x_1 + 5x_2 \geq 5$
$0 \leq x_1 \leq 4$

$6.\ F = x_1 + x_2 \rightarrow min$
$3x_1 + x_2 \geq 7$
$-x_1 + 2x_2 \geq 2$
$x_1 + 2x_2 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$

$7.\ F = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$
$x_1 - x_2 \geq 4$
$x_1 + x_2 \geq 10$

$4x_1 - x_2 \le 12$
$7x_1 + x_2 \le 7$
$x_1, x_2 \ge 0$

8. $F = 2x_1 - 4x_2 \to max$
$8x_1 - 5x_2 \le 16$
$x_1 + 3x_2 \ge 2$
$2x_1 + 7x_2 \le 9$
$x_1, x_2 \ge 0$

9. $F = 7x_1 - x_2 \to min$
$x_1 + x_2 \ge 3$
$5x_1 + x_2 \ge 5$
$x_1 + 5x_2 \ge 5$
$0 \le x_1 \le 4$
$x_1, x_2 >= 0$
10. $F = x_1 + x_2 \to min$
$3x_1 + x_2 \ge 8$
$x_1 + 2x_2 \ge 6$
$x_1 - x_2 \le 3$
$x_1, x_2 \ge 0$

11. $F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to min$
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 \le 5$
$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 7x_5 \ge 8$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 \le 6$
$x_1, x_2, x_3 >= 0$

12. $F = 10x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \to max$
$x_1 - 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 12$
$2x_1 - 8x_2 + 7x_3 + x_4 \le 8$
$3x_1 + x_2 + 44x_3 - 2x_4 \le 8$
$x_3, x_4, >= 0$

13. $F = x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 \to max$
$2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 \ge 12$
$8x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le 8$
$x_1, x_2, x_3 >= 0$
$8x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 3$

14. $F = 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 8x_4 \to max$
$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \le 30$

$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 \geq 8$
$-x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 5$
$x_1, x_2, x_3 > = 0$

15. $F = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to min$
$x_1 + 2\ x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 5$
$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 7x_5 \geq 8$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leq 6$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > = 0$

16. $F = 10x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \to max$
$x_1 - 4x_2 - 5x_3 + x_4 \leq 2$
$2x_1 - 8x_2 + 7x_3 + x_4 \geq 8$
$3x_1 + x_2 + 44x_3 - 2x_4 \geq 4$
$x_1, x_2, x_3, x_4 > = 0$

17. $F - = 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 \to max$
$2x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 5$
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 6$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 7$
$x_1, x_2, x_3, x_4 > = 0$

18. $F = 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 \to max$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 7$
$-3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8$
$x_1, x_2, x_3, x_4 > = 0$

19. $F = 4x_{1\,-}\,2x_{2\,-}\,8x_3 + 3x_4 \to min$
$x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4 \geq 7$
$8x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 9$
$x_1, x_2, x_3, x_4, > = 0$

20. $F = 2x_2 + 8x_3 + 8x_4 \to max$
$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3$
$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq 4$
$-x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$
$x_1, x_2 > = 0$

ЛАБОРАТОРНІ ЗАВДАННЯ

Написати програму (наприклад на C++) перекладу запису задачі ЛП з однієї форми в іншу.

Варіанти завдань

1. Написати програму перекладу моделі із загальної форми запису задачі ЛП в канонічну форму задачі ЛП.

2. Написати програму перекладу моделі із загальної форми запису задачі ЛП в симетричну.

3. Написати програму перекладу моделі із будь-якої форми запису задачі ЛП в канонічну форму.

Частина 2

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛП

ТЕМА 8

ГЕОМЕТРИЧНЕ ТЛУМАЧЕННЯ ЗАДАЧІ ЛП

1. Властивості канонічної ЗЛП

Непуста нескінченність планів основної задачі ЛП утворює опуклий багатогранник. Кожна вершина цього багатогранника визначає опорний план. У одній з вершин багатогранника розв'язок значення цільової функції є максимальним (за умови, що функція обмежена зверху на безлічі планів), якщо максимальне значення функція приймає більше ніж в одній точці, що є опуклою лінійною комбінацією даних вершин.

Вершину багатогранника розв'язань, в якій цільова функція приймає максимальне значення, знайти порівняно просто, якщо задача, записана у формі стандартної, містить не більше ніж дві змінні або задача, записана у формі основної, містить не більше ніж дві вільні змінні, — ранг матриці, складеної з коефіцієнтів у системі обмежень задачі.

Знайдемо розв'язок задачі, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{8.1}$$

за умовах $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \quad \left(i = \overline{1,k}\right),$ (8.2)

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = 1{,}2\right). \tag{8.3}$$

Кожна з нерівностей (8.2), (8.3) системи обмежень задачі геометрично визначає плоскість відповідно з граничними прямими $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ $\left(i = \overline{1,k}\right)$, $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. У тому разі, якщо система нерівностей (8.2), (8.3) сумісна, ділянкою її розв'язків є безліч точок, що належать всім вказаним плоскості. Оскільки безліч точок перетину даних плоскості випукла, то ділянкою допустимих розв'язань задачі (8.1)—(8.3) є випукла множина, яка називається багатокутником розв'язків. Сторони цього багатокутника лежать на прямих, рівняння яких виходять з початкової системи обмежень заміною знаків нерівностей на знаки точної рівності.

Таким чином, початкова задача ЛП полягає в знаходженні такої точки багатокутника розв'язань, в якій цільова функція приймає максимальне значення. Ця точка існує тоді, коли багатокутник розв'язань не пустий і на ньому цільова функція обмежена зверху. За вказаних умов в одній з вершин багатокутника розв'язань цільова функція приймає максимальне значення. Для визначення даної вершини побудуємо лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (де h — деяка постійна), яка проходить через багатокутник розв'язань та перпендикулярна вектору c, і пересуватимемо її у напрямі вектора $\vec{C} = (c_1, c_2)$ до тих пір, поки вона не пройде через останню її загальну точку з багатокутником розв'язань. Координати вказаної точки і визначають оптимальний план даної задачі.

Знаходження мінімального значення лінійної функції при даній системі обмежень відрізняється від знаходження її максимального значення при тих же обмеженнях лише тим, що лінія рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ пересувається не у напрямі вектора $\vec{C} = (c_1, c_2)$, а в протилежному напрямі.

Ділянка допустимих розв'язань системи може бути порожньою, якщо система обмежень несумісна (рис. 1 (а)), однією точкою (рис. 1 (б)), опуклим багатогранником (рис. 1 (в)) і необмеженою опуклою багатогранною ділянкою (рис. (г)).

Для варіантів, поданих на рисунках обмеженою ділянкою допустимих розв'язань, можуть зустрітися два випадки:

максимум цільової функції досягається в єдиній точці (рис. 1 (д));

максимальне значення цільової функції матиме місце в двох вершинах A і B і, отже, в будь-якій точці відрізка AB (рис. 1 (ж)).

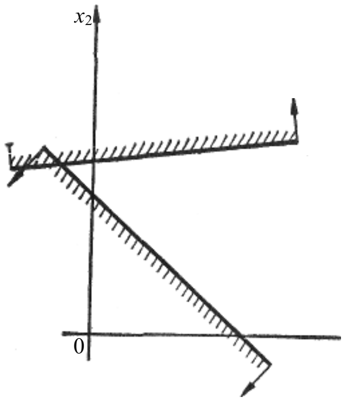

Рис. (а)

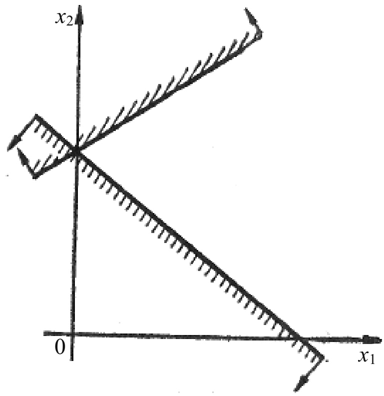

Рис. (б)

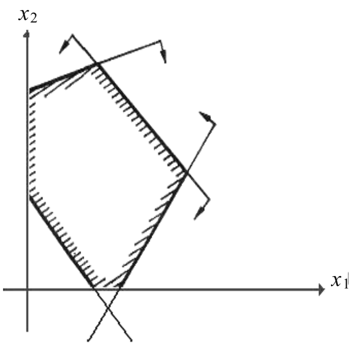

Рис. (в)

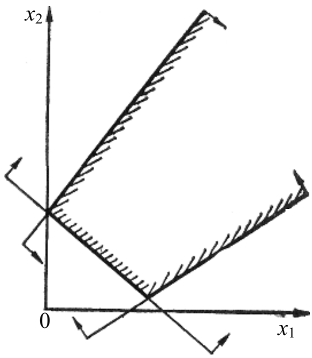

Рис. (г)

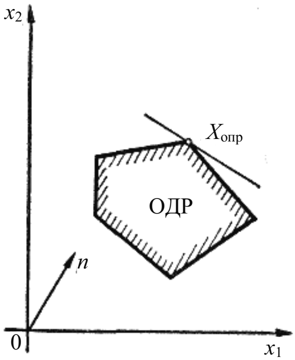

Рис. (д)

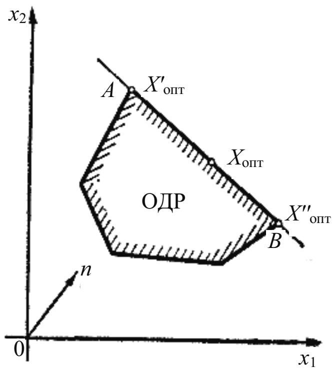

Рис. (ж)

У разі коли ділянка допустимих розв'язань є необмеженою, можуть зустрітися варіанти:

цільова функція має екстремум (рис. 1 (з));

функція необмежена зверху і знизу, $F_{\max} = \infty$, $F_{\min} = -\infty$ рис. 1 (и));

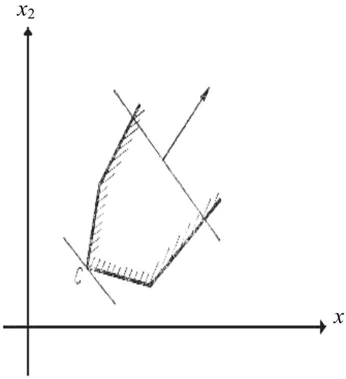

Рис. (з)

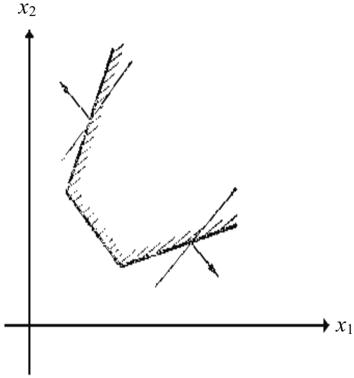

Рис. (и)

2. Алгоритм розв'язання ЗЛП графічним методом

Отже, знаходження розв'язання задачі ЛП (8.1)—(8.3) на основі її геометричної інтерпретації включає такі етапи:

1. Будують прямі, рівняння яких виходять в результаті заміни в обмеженнях (8.2) і (8.3) знаків нерівностей на знаки точної рівності.
2. Знаходять плоскості, визначувані кожним з обмежень задачі.
3. Знаходять багатокутник розв'язань.
4. Будують вектор $\vec{C} = (c_1, c_2)$.
5. Будують пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, що проходить через багатокутник розв'язань.
6. Пересувають пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ у напрямі вектора $\vec{C}$, внаслідок чого або знаходять точку (точки), в якій цільова функція приймає максимальне значення, або встановлюють необмеженість зверху функції на безлічі планів.
7. Визначають координати точки максимуму функції і обчислюють значення цільової функції в цій точці.

ВИСНОВКИ

Вершину багатогранника розв'язань, в якій цільова функція приймає максимальне значення, знайти порівняно просто, якщо задача, записана у формі стандартної, містить не більше ніж дві змінні або задача, записана у формі основної, містить не більше ніж дві вільні змінні.

Ділянкою допустимих розв'язань задачі є випукла множина, яка називається багатокутником розв'язань.

Задача полягає в знаходженні такої точки багатокутника розв'язків, в якій цільова функція приймає максимальне значення.

Координати останньої загальної точки багатокутника розв'язків і визначає оптимальний план даної задачі.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Задача

Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види сировини. Норми витрати сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені в таблиці. У ній же вказані прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальна кількість сировини даного виду, яка може бути використана підприємством (див. табл. 10).

Таблиця 10

ВИХІДНІ ДАНІ

Вид сировини	Норми витрати сировини (кг) на один виріб		Загальна кількість сировини (кг)
	A	B	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу (грн)	30	40	

Враховуючи, що вироби А і В можуть вироблятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), вимагається скласти такий план їх випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів є максимальним.

Розв'язок. Припустимо, що підприємство виготовить x_1 виробів вигляду А і x_2 виробів виду В. Оскільки виробництво продукції обмежене сировиною кожного виду, що є у розпорядженні підприємства, і кількість виробів, що виготовляється, не може бути негативним, мають виконуватися нерівності:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120 \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Загальний прибуток від реалізації x_1 виробів виду A і x_2 виробів вигляду B складе $F = 30x_1 + 40x_2$.

Таким чином, ми приходимо до наступної математичної задачі: серед усіх ненегативних розв'язків даної системи лінійних нерівностей вимагається знайти таке, при якому функція F приймає максимальне значення. Знайдемо розв'язок сформульованої задачі, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Спочатку визначимо багатокутник розв'язань. Для цього в нерівностях системи обмежень і умовах позитивності змінних знаки нерівностей замінимо на знаки точної рівності і знайдемо відповідні прямі:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300 & \\ 4x_1 + 4x_2 = 120 & (1) \\ 3x_1 + 12x_2 = 252\ . & (2) \\ x_1 = 0(4) & (3) \\ x_2 = 0(5) & \end{cases}$$

Кожна з побудованих прямих ділить площину на дві напівплощини. Координати точок однієї напівплощини задовольняють початковій нерівності, а іншої — ні. Щоб визначити шукану напівплощину, потрібно взяти яку-небудь точку, що належить одній з напівплощин, і перевірити, чи задовольняють її координати даній нерівності. Якщо координати узятої точки задовольняють даній нерівності, то шуканою є та напівплощина, якій належить ця точка, інакше — інша напівплощина (див. рис. 2).

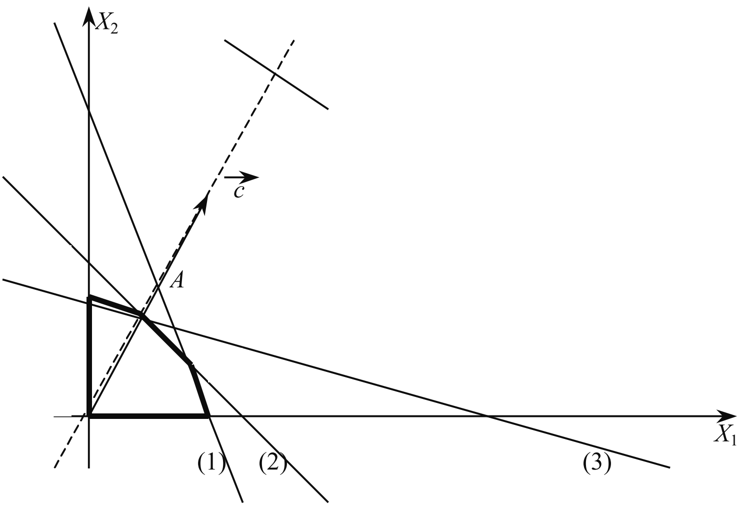

Рис. 2. Графічний метод

Знайдемо, наприклад, напівплощину, визначувану нерівністю $12x_1 + 4x_2 \le 300$. Для цього, побудувавши пряму $12x_1 + 4x_2 = 300$, візьмемо яку-небудь точки, що належить одній з двох одержаних напівплощин, наприклад, т. ч. (0;0). Координати цієї точки задовольняють нерівності 12 · 0 + 4 · 0 < 300; значить, напівплощина, якій належить т. О (0; 0), визначається нерівністю $12x_1 + 4x_2 \le 300$.

Перетин одержаних напівплощин і визначає багатокутник розв'язків даної задачі. Багатокутником розв'язань є п'ятикутник OABCD. Координати будь-якої точки, що належить цьому п'ятикутнику, задовольняють даній системі нерівностей і умові позитивності змінних. Тому сформульована задача буде розв'язана, якщо ми зможемо знайти точку, що належить п'ятикутнику OABCD, в якому функція F приймає максимальне значення. Щоб знайти вказану точку, що належить п'ятикутнику OABCD, в якому функція F приймає максимальне значення, побудуємо вектор $\vec{C} = (30;40)$ і пряму, яка перпендикулярна вектору c.

Переміщаючи побудовану пряму $30x_1 + 40x_2 = 480$ у напрямі вектора $\vec{C}$, бачимо, що останньою загальною точкою її з багатокутником розв'язків задачі служить точка B. Координати цієї точки і визначають план випуску виробів A і B, при якому прибуток від їх реалізації є максимальним.

Знайдемо координати точки В як точки перетину прямих (2) і (3). Отже, її координати задовольняють рівнянням цих прямих $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 \end{cases}$.

Розв'язавши цю систему рівнянь, одержимо, $x_1^* = 12$, $x_2^* = 18$. Отже, якщо підприємство виготує 12 виробів виду A і 18 виробів виду B, то воно одержить максимальний прибуток, рівний $F_{\max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$ грн.

Приклад

Розв'язати графічно.

$$F = 3x_1 + 3x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 \le 4$$
$$-x_1 + x_2 \le 7$$
$$x_1 + x_2 \ge 2$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

1. Побудуємо на площині в декартовій прямокутній системі координат $x_1 0 x_2$ ділянку припустимих розв'язань задачі.

2. Нерівності $x_1 \ge 0$ і $x_2 \ge 0$ означають, що ділянку розв'язку буде розташована праворуч від осі ординат і над віссю абсцис.

3. Для кожної нерівності побудуємо на графіку відповідну пряму (замінивши попередньо нерівність на рівність).

4. Знайдемо ділянку розв'язків на площині для кожної нерівності за знаками нерівностей.

5. Ділянка перетинань буде ділянкою припустимих розв'язків.

6. Крайні точки отриманої опуклої багатогранної ділянки будуть відповідати базисним розв'язанням задачі. Значення цільової функції можна визначити в будь-якій точці $X = (x_1, x_2)$ ділянки припустимих розв'язків.

7. Побудуємо вектор нормалі $\vec{c}$, що виходить з початку координат, і як координати другої точки використовуємо коефіцієнти при змінних у цільовій функції.

8. Пряма лінія, перпендикулярна вектору $\vec{c}$, буде геометричним місцем точок $X = (x_1, x_2)$, у яких цільова функція приймає однакові фіксовані значення.

9. Вектор $\vec{c}$ показує напрямок рівнобіжного переміщення прямої, що відповідає збільшенню цільової функції.

10. Максимального значення цільова функція досягне у вищій, крайній точці багатогранника. Координати цієї точки будуть оптимальним розв'язком задачі і можуть бути знайдені при розв'язанні рівнянь, на перетині яких вийшла ця точка.

Для кожної прямої побудуємо точки:

1) (0;–1); (4;0)

2) (0,7); (–7;0)

3) (0;1); (2;0)

4) (0;3); (2;0).

Координати вектора нормалі: $\vec{c} = (3; 3)$ (див. рис. 3).

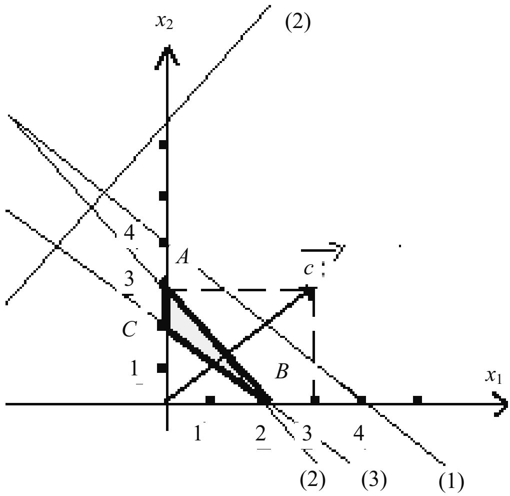

Рис. 3. Графічний метод

АВС — ділянка допустимих розв'язків.

Функція приймає оптимальне значення в точці A.

$X_{\text{опт}} = (0; 3)$

$F = 9$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що зветься ділянкою допустимих розв'язків задачі?

2. Розкажіть, у чому полягає алгоритм розв'язання ЗЛП графічним методом.

3. Як знайти оптимальне значення цільової функції?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Приклад

Розв'язати графічно:

$$\begin{cases} F = x_1 + 2x_2 \to max \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 14 \\ x_1, \ldots, x_5 >= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2.\ F = x_1 + x_2 \to min \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, \ldots, x_5 >= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3.\ F = 5x_1 - 3x_2 \to min \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_4 = -6 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 4 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_6 = 8 \\ x_1, \ldots, x_5 >= 0 \end{cases}$$

4. Приклад

Використовуючи геометричну інтерпретацію, *знайдіть розв'язок задачі*:

$$\max \quad jx_1 + x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} &(2 + j)x_1 + x_2 \le 13 \\ &-jx_1 + x_2 \ge -(j+1), \end{aligned}$$

де j — *довільна цифра* (*наприклад*, *остання цифра +1 в заліковій книжці студента*).

ТЕМА 9

МЕТОД ПОСЛІДОВНОГО ПОЛІПШЕННЯ ПЛАНУ

1. ОЗНАКА ОПТИМАЛЬНОСТІ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНОГО ПОЛІПШЕННЯ ПЛАНУ

Методи розв'язання задач ЛП діляться на кінцеві і ітераційні.

Кінцеві — це точні методи, ітераційні — наближені.

Серед кінцевих методів слід виділити:

1. Метод послідовного поліпшення плану (симплекс-метод).
2. Метод уточнення оцінок.
3. Метод скорочення непогодженостей.

Існують деякі їх модифікації.

За допомогою ітеративних методів не можна вказати точного розв'язання ЗЛП. Але будь-яка точність у визначенні розв'язання може бути досягнута після кінцевого числа кроків.

Зупинимося на розгляді методу послідовного поліпшення плану. Цей кінцевий метод на практиці зустрічається частіше за інші. Основи методу були сформульовані Данцигом в 1947 р.

Ідея методу містить три істотні моменти:

1. Указується спосіб обчислення опорного плану.
2. Встановлюється ознака, що дозволяє перевірити, чи є опорний план оптимальним.
3. Указується спосіб переходу від неоптимального плану до іншого опорного плану, ближчого до оптимального.

Алгоритм методу дозволяє визначити розв'язувану ЗЛП, тобто в процесі реалізації методу вдається встановити, чи не виявилися умови задачі суперечливими і чи забезпечують вони обмеженість лінійної функції.

У методі П.П.П. оперуватимемо тільки з опорними планами. Наведемо ознаку оптимальності опорного плану (він є достатнім тільки умовою оптимальності).

$$\max \to L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{9.1}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B \ (j = \overrightarrow{1, m}\ ), \tag{9.2}$$

де $A_0 = B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ — вектор обмежень задачі

$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ ... \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ — вектор умов задачі, тому що $i = \overrightarrow{1,m}$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overrightarrow{1,n}). \tag{9.3}$$

Припускатимемо, що m < n, і що система умов (9.2) ЛНЗ, тобто ранг матриці умов її рівний m.

Нагадаємо визначення опорного плану і його базису.

План $X = (x_1, \ldots, x_n)$ ЗЛП (9.1)—(9.3) (записаної в канонічній формі) називається опорним, якщо система векторів умов A_j, відповідна його позитивним компонентам ($x_j > 0$), ЛНЗ.

Тут і далі припускатимемо, що ранг системи рівний числу рівнянь у цій системі (m).

Базисом опорного плану назвемо систему m ЛНЗ векторів-умов, яка включає всі вектори A_j, що відповідають позитивним складовим опорного плану.

Компоненти опорного плану, що відповідають базисним векторам, назвемо базисними, інші позабазисними або вільними.

Якщо всі базисні компоненти опорного плану більші за нуль, то план називається невиродженим, інакше — виродженим.

2. Задачі лінійного програмування

Нагадаємо основні положення лінійного програмування та принципи переходу з однієї форми запису задач ЛП в іншу.

Загальна задача ЛП [5] формулюється в такий спосіб. Потрібно знайти максимум (або мінімум) лінійної функції n змінних $(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$L(x) = L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ : \tag{9.4}$$

при обмеженнях, накладених на змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ виду:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ , \quad i = \overline{1, m_1} \ , \tag{9.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{m_1+1, m}, \tag{9.6}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n_1}, (n_1 \leq n,) \tag{9.7}$$

Лінійну функцію (9.4) — критерій якості вибраних змінних — прийнято називати лінійною формою задачі, безліч векторів $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняють умовам (9.5)—(9.7) — ділянкою визначення задачі.

Матрицю $A = (a_{ij})$, складену з коефіцієнтів задачі, називають матрицею умов задачі.

Вектор-стовпець

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

складений з коефіцієнтів a_{ij}, що стоять при змінній x_j у (9.5)—(9.6), назвемо вектором умов задачі (9.4)—(9.7).

Вектор стовпець

$$A_0 = B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

назвемо вектором обмежень розглянутої задачі.

Вектор-рядок

$$C = (c_1, c_2, ..., c_n)$$

назвемо вектором вартостей задачі (9.4)—(9.7).

Вектор-рядок $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняє умовам (9.5)—(9.7), називається планом задачі лінійного програмування.

У прийнятих позначеннях задачу (9.4)—(9.7) можна записати у векторному вигляді.

$$\max \to L(x) = (c, x), \tag{9.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j \overset{=}{\leq} B, \tag{9.9}$$

$$X \geq 0, \tag{9.10}$$

де знаки $\overset{=}{\leq}$ означають, що знак «=» відноситься до перших m_1 компонент, а знак «≤» — до інших $m - m_1$, що складає вектори з (9.9), або в матричному вигляді:

$$\max \to \alpha(x) = (c, x)\,, \tag{9.11}$$

$$Ax \overset{=}{\leq} B\,, \tag{9.12}$$

$$x \geq 0\,. \tag{9.13}$$

План задачі $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ при якому досягається максимально можливе значення лінійної форми задачі (9.4)—(9.7), називається оптимальним планом або розв'язком задачі (якщо потрібно максимізувати форму (9.4)). Для оптимального плану X^* і для будь-якого плану X задачі справедливе співвідношення

$$\alpha(x^*) \geq L(x) \tag{9.14}$$

У цьому випадку $\alpha(x^*)$ називається оптимальним значенням лінійної форми.

Якщо існує константа M така, що $\max L(x) < M$, для будь-якого X з ділянки визначення $L(X)$, то говорять, що функція $L(X)$ обмежена зверху.

Якщо задача має вигляд:

$$\max \to L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\,, \tag{9.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}\,, \tag{9.16}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}\,, \tag{9.17}$$

то така задача називається канонічною [1].

Задача (9.15)—(9.17) є часткою випадку задачі (9.4)—(9.7), Задачу (9.4)—(9.7) можна звести до вигляду (9.15)—(9.17) [1], додавши в (9.6) балансуючі змінні $x_{n+l} \geq 0$ $(l = \overline{1, m - m_1})$, виключивши x_j $(j = \overline{n_1 + 1, n})$, з (9.4)—(9.6), або замінивши їх різностями $x'_j - x''_j$, де $x'_j, x''_j \geq 0$ $(j = \overline{n_1 + 1, n})$.

Якщо потрібно знайти мінімум (9.4), то таку задачу можна звести до максимізації, якщо замість $L(X)$ розглянути $L(X)$. Можливість такого переходу добре видно на рисунку 4.

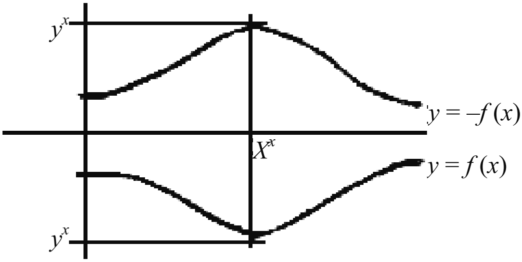

Рис. 4. Перехід від максимізації до мінімізації лінійної форми

$$\min L(x) = -\max(-L(x)). \qquad (9.18)$$

Таким чином, загальна задача лінійного програмування може бути зведена до канонічної форми запису. Причому якщо відоме розв'язання канонічної задачі, нехай це буде вектор $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, x_{n+1}^*, ..., x_{n+m-m_1}^*)$, то розв'язком вихідної задачі (9.4)—(9.7) буде вектор $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ [1]. Останнє твердження дозволяє розглядати тільки канонічні задачі лінійного програмування.

План $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається опорним планом задачі (9.15)—(9.17), якщо його позитивним компонентам $(x_{si} > 0)$ відповідають лінійно-незалежні вектори умови A_{si}.

Оскільки вектори A_j є векторами m-мірного простору, то серед компонентів опорного плану існує не більше m позитивних компонентів.

Тут і далі будемо припускати, що ранг системи (9.16) дорівнює m, тобто числу рівнянь у цій системі.

Систему m лінійно-незалежних векторів умов, що включає всі ті A_{si}, для яких $x_{si} > 0$, прийнято називати базисом опорного плану X. Компоненти x_{si}, зв'язані з векторами базису, називають базисними компонентами плану. Якщо всі базисні компоненти опорного плану більші за 0, то такий план називається невиродженим, у протилежному разі — виродженим.

Теорема. Якщо система (9.16) має хоча б один опорний план, а $\alpha(x)$ обмежена зверху, то лінійна форма $L(X)$ задачі. (9.15)—(9.17) досягає свого оптимального значення на одному з опорних планів задачі [1].

Ця теорема дозволяє шукати оптимальний план серед опорних планів задачі, число яких у задачі не більше C_n^m.

Симплексний метод (метод розв'язання задач ЛП) заснований на зазначеній властивості задач ЛП.

3. Ознака оптимальності опорного плану

Розглянемо задачу ЛП, записану в канонічній формі

$$\max \to L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{9.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{9.20}$$

$$x_j \ge 0 \tag{9.21}$$

Будемо припускати, що рівняння системи (9.20) лінійно-незалежні і що $m > n$.

Нехай вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ невироджений опорний план задачі (9.19)—(9.21) з базисними компонентами $x_{si} > 0,\ i = \overline{1,m}$. Систему (9.20) перепишемо у векторному вигляді

$$\sum_{j=1}^{n} A_j x_j = B \tag{9.22}$$

Тоді вектори $A_{si},\ i = \overline{1,m}$ утворять базис опорного плану X. Через I_x позначимо безліч індексів базисних компонентів плану X, тобто

$$I_x = \{s_1, s_2, ..., s_m\} \tag{9.23}$$

З визначення опорного плану

$$x_j = 0 \text{, якщо } j \overline{\in} I_x .$$

Співвідношення (9.22) може бути переписане так:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{si} = B \tag{9.24}$$

Уведемо позначення

$$x_{si} = x_{i0}, \ A_0 = B_0 . \tag{9.25}$$

Тоді (9.24) приймає вигляд

$$A_0 = \sum_{i=1}^{m} A_{si} x_{i0} \,. \qquad (9.26)$$

Співвідношення (9.26) можна розглядати як розкладання вектора a_0 по базисних векторах A_{si}. Оскільки вектори

$$\{A_{si}\}_{i=1}^{m} = \{A_{s1}, A_{s2}, ..., A_{sm}\} \qquad (9.27)$$

утворять базис *m-мірного* простору, то вектори-умови A_j можуть бути подані у вигляді:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} A_{si} x_{ij}, \quad j = \overline{1,n}\,, \qquad (9.28)$$

де $x_{ij}\,(i = \overline{1,m})$ коефіцієнти розкладання вектора A_j по базисних векторах $A_{si}\,(i = \overline{1,m})$.

Поєднуючи (9.26) і (9.28), одержимо співвідношення

$$A_j = \sum_{j=1}^{m} A_{si} x_{ij}; \quad j = \overline{0,n}\,, \qquad (9.29)$$

які в координатній формі мають вигляд:

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ksi} x_{ij}, \quad k = \overline{1,m}\,,\ j = \overline{0,n}\,. \qquad (9.30)$$

Введемо в розгляд параметри:

$$\mathrm{Z}_j = \sum_{i=1}^{m} c_{si} x_{ij}, \quad j = \overline{1,n}\,, \qquad (9.31)$$

$$\Delta_j = Z_j - c_j, \quad j = \overline{1,n}\,, \qquad (9.32)$$

де c_{si} — коефіцієнти лінійної форми (9.19) при базисних компонентах X. Параметри Z_j і Δ_j визначаються однозначно, як тільки будуть відомі опорний план задачі X і його базис $\{A_{si}\}_{i=1}^{m}$.

Теорема (ознака оптимальності опорного плану)

Опорний план X є розв'язком задачі (9.19)—(9.21), якщо $\Delta_j \geq 0$ для усіх $j = \overline{1,n}$ [5].

Наслідок

Якщо потрібно знайти мінімум лінійної форми, то опорний план X буде оптимальним при $\Delta_j \leq 0, \quad j = \overline{1,n}$. Якщо параметри

Δ_j обчислюються по (9.32), говорять, що ознака оптимальності використовується в першій формі.

Визначимо вектор $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ з умов:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ksi}\lambda_k = c_{si} \ i = \overline{1,m}. \qquad (9.33)$$

Тоді можна записати

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{si}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{m} a_{ksi}\lambda_k)x_{ij} = \sum_{k=1}^{m}(\sum_{i=1}^{m} a_{ksi}x_{ij})\lambda_k = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\lambda_k\ , \qquad (9.34)$$

або

$$Z_j = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\lambda_k\ , \quad j = \overline{1,n}. \qquad (9.35)$$

Якщо Z_j обчислюється по (9.35), то говорять, що ознака оптимальності використовується в другій формі.

Співвідношення (9.34) доводить еквівалентність двох форм ознаки оптимальності. Таким чином, якщо відомо опорний план X, то за допомогою останньої теореми можна перевірити його оптимальність.

Параметри Δ_j називаються оцінками векторів умов A_j. Якщо план виявився неоптимальним, то перейти до нового опорного плану можна за допомогою симплексного методу.

Зауваження 1

З (9.29) випливає, що коефіцієнти розкладання x_{is_l} (при $j = S_l$) базисного вектора A_{s_l} по векторах цього базису обчислюються за формулами:

$$x_{is_l} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = l \\ 0, & \text{якщо } i \neq l,\ i = \overline{1,m} \end{cases}. \qquad (9.36)$$

Зауваження 2

З (9.31), (9.32) і (9.36) випливає, що при $j \in I_x$ $\Delta_j = 0$, тобто оцінки базисних векторів $\Delta_{si} = 0$.

У перевірці опорного плану на оптимальність може зустрітися один з трьох випадків:

1. $\Delta_j \geq 0$ для $j \in J_x$ $\begin{cases} A_j = \sum A_{si} x_{ij}, \text{ нехай } j = s_i \Rightarrow A_{si} = A_{si} \cdot 1; \\ \Delta_j = \sum c_{si} x_{ij} - c_j = c_{si} = \Delta_{si} = c_{si} \cdot 1 - c_{si} = 0. \end{cases}$

При $j \in J_x$, $\Delta_j = 0$.

2. $\Delta_j < 0$ для деякого j, і всі величини, що відповідають цьому індексу

$$X_{ij} \leq 0, (i = \overrightarrow{1, m}).$$

3. $\Delta_j < 0$ для деяких індексів j_i і для кожного такого j як найменше одне з чисел x_{ij} невід'ємне.

У випадку 1, як це виходить з ознаки оптимальності, план є оптимальним.

ВИСНОВКИ

Алгоритм методу ППП дозволяє визначити розв'язувану ЗЛП, тобто в процесі реалізації методу вдається встановити, чи не виявилися умови задачі суперечливими і чи забезпечують вони обмеженість лінійної функції. Основні моменти методу ППП:

1. Указується спосіб обчислення опорного плану.
2. Встановлюється ознака, що дозволяє перевірити, чи є опорний план оптимальним.
3. Указується спосіб переходу від неоптимального плану до іншого опорного плану, ближчого до оптимального.

Загальна задача ЛП [5] формулюється в такий спосіб. Потрібно знайти максимум (або мінімум) лінійної функції n змінних $(x_1, x_2, ..., x_n)$:

$$L(x) = L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при обмеженнях, накладених на змінні $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m_1},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n_1}, (n_1 \leq n,).$$

По векторах базису можна розкласти будь-який вектор *m*-мірного простору, зокрема і всі вектори-умови за формулою

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} A_{si} x_{ij}, (j = \overrightarrow{1,n})$$

Опорний план X є розв'язком задачі (9.19)—(9.21), якщо $\Delta_j \geq 0$ для усіх $j = \overline{1,n}$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Дайте визначення опорного плану і його базису.
2. Згадайте основні принципи переходу з однієї форми запису задач ЛП в іншу.
3. Сформулюйте загальну задачу ЛП.
4. Які ознаки оптимальності опорного плану ви знаєте?

ТЕМА 10

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

1. Основні положення симплексного методу

Одним з основних методів розв'язання задач ЛП є симплексний метод. Геометрично його ідея полягає в наступному. Допустима множина (9.6)—(9.7) є опуклою багатогранною множиною (якщо вона обмежена, то багатовимірний опуклий багатогранник). Якщо задача ЛП має розв'язок, то існує вершина x^* багатогранної множини, що є оптимальним планом. Симплексний метод полягає в такому направленому переборі вершин, при якому значення цільової функції зростає від вершини до вершини. Кожній вершині відповідає система рівнянь, вибирана спеціальним чином із системи нерівностей (9.6) — (9.7), тому обчислювальна процедура симплексного методу полягає в послідовному розв'язанні систем лінійних рівнянь алгебри. Простота алгоритму робить цей метод зручним для його реалізації на ЕОМ.

При відомому опорному плані $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ алгоритм дозволяє:

а) перевірити оптимальність опорного плану X (оптимальність плану X установлюється за допомогою ознаки оптимальності);

б) здійснити перехід від опорного плану $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ до нового опорного плану $X' = (x_1', x_2', ..., x_n')$, для якого $L(x') \geq L(x)$ і від базису $\{A_{si}\}_{si} \in I_x$ плану X до базису $\{A_{si}\}_{si} \in I_{x'}$, де $I_{x'}$ — безліч індексів базисних компонентів нового опорного плану X';

в) обчислити параметри $x_{ij}', \Delta_j', L(x')$, що відповідають X', по відомих $x_{ij}, \Delta_j, L(x)$ для плану X з мінімальною кількістю обчислень;

г) установити нерозв'язність задачі ЛП.

При перевірці опорного плану на оптимальність можливі такі випадки:

д) $\Delta_j \geq 0$ для $j = \overline{1, n}$ (у цьому випадку план оптимальний);

е) існує $\Delta_{j_0} < 0$, для якого всі $X_{ij_0} < 0,\ i = \overline{1, m}$, (у цьому випадку задача ЛП недозволена через необмеженість лінійної форми $L(X)$);

ж) для усіх $\Delta_j < 0$ існують $X_{ij} > 0$ (у цьому випадку можна перейти до нового опорного плану, що доставляє більше значення $L(X)$);

2. Алгоритм симплексного методу

Алгоритм методу, при відомому опорному плані X, складається з таких етапів [*I*]

1. За компонентами плану X визначити базис $\{A_{si}\}_{i=1}^{m}$,

$$I_x = \{S_1, S_2, ..., S_m\} .$$

2. Обчислити параметри X_{ij} за формулами (9.29). Для цього необхідно розв'язати (n – m) систем лінійних рівнянь (для усіх $j \in \overline{I_x}$, для $j \in I_x$).

3. Звести в симплекси-таблиці (див. табл. 11) коефіцієнти і параметри задачі.

Таблиця 11

СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЯ

№		C_j A_{si}	$C_0 = 0$	C_1	…	C_j	…	C_k	…	C_n	
	C_{si}	A_{si}	A_0	A_1	…	A_j	…	A_k	…	A_n	θ
I	c_{s1}	A_{s1}	X_{10}	X_{11}	…	X_{1j}	…	X_{1k}	…	X_{1n}	θ_1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	c_{si}	A_{si}	X_{i0}	X_{i1}	…	X_{ij}	…	X_{ik}	…	X_{in}	θ_i
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
r	c_{sr}	A_{sr}	X_{r0}	X_{r1}	…	X_{rj}	…	X_{rk}	…	X_{rn}	θ_r
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	c_{sm}	A_{sm}	X_{m0}	X_{m1}	…	X_{mj}	…	X_{mk}	…	X_{mn}	θ_m
$m+1$	Δ_j	$\Delta = L(x)$		Δ_1	…	Δ_j	…	Δ_k	…	Δ_n	

Примітка

Слід особливо підкреслити, що в стовпці A_0 і A_j $(j = \overline{1,n})$ заносяться не коефіцієнти цих векторів, тобто не b_i і a_{ij}

($i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$), а коефіцієнти розкладання X_{i0} і X_{ij} ($i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$) цих векторів по базисних векторах $\{A_{si}\}_{i=1}$.

4. Обчислити оцінки Δ_j за формулами:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{si}x_{ij} - c_j, \ (j=\overline{0,n}, c_0 = 0) \tag{10.1}$$

і записати їх у (m + 1) рядок таблиці.

5. Перевірити опорний план X на оптимальність за допомогою оцінок Δ_j:

а) якщо всі $\Delta_j \geq 0$, то план, базисні компоненти якого розташовуються в стовпці A_0, оптимальний, розв'язання задачі закінчити і перейти до п. 13.

б) якщо існує $\Delta_{j_0} < 0$, таке, що для усіх X_{ij_0} (що розташовуються над Δ_{j_0} у таблиці) виконується умова $X_{ij_0} \leq 0$, то задача ЛП не дозволена через необмеженість $L(X)$, розв'язання задачі закінчити;

в) якщо для кожного $\Delta_j < 0$ існує , $X_{ij} > 0$ то розв'язання задачі продовжити.

6. Серед оцінок $\Delta_j < 0$ вибрати максимальну за абсолютною величиною Δ_k:

$$|\Delta_k| = \max_{\Delta_j < 0} |\Delta_j| \tag{10.2}$$

7. Для $X_{ik} > 0$ скласти відношення

$$\theta_i = \frac{X_{i0}}{X_{ik}}, \tag{10.3}$$

серед яких вибрати мінімальне:

$$\theta = \min_{x_{ik} > 0} \frac{X_{i0}}{X_{ik}} = \frac{X_{r0}}{X_{rk}}. \tag{10.4}$$

8. Індекс «k» з (10.2) указує, вектор A_k якої ввійде в базис на наступній ітерації, індекс «r» з (10.3) — вектор A_{sr}, що буде виведений зі складу базисних. Індекси «k» і «r» визначають розрішуючий стовпець (A_k); рядок (A_{sr}) і елемент X_{rk} для перетворення Гаусса:

$$x'_{ij} = \begin{cases} \dfrac{x_{rj}}{x_{rk}}, \text{ для } \quad i = r, \quad j = \overline{0,n} \\ x_{ij} - \dfrac{x_{rj}}{x_{rk}} x_{ik}, \text{ для } \quad i = \overline{1, m+1} \;\; i = r, \quad j = \overline{0,n}, \end{cases} \tag{10.5}$$

де $X_{m+1,0} = \Delta_0 = L(x),\ X_{m+1,j} = \Delta_j;\ X'_{m+1} = \Delta'_j$ *И* $X'_{m+1,0} = \Delta'_0 = L(X') =$ $= L(X) - \theta\Delta_k$.

9. Заповнити стовпці «C_{si}» і «A_{si}» наступної симплекс-таблиці, для чого переписати елементи цих стовпців без зміни за винятком *r-й* рядка, куди слід занести C_k і A_k відповідно.

10. Перетворити елементи таблиці по (10.5)

11. Так як Δ_j можуть обчислюватися двома способами: по (10.5) при $i = m + 1$, $j = \overline{1,n}$ і по (10.1), то це дає можливість здійснювати контроль ходу обчислень. Контроль слід здійснювати через кілька ітерацій.

12. Перейти до п. 5.

13. Виписати з таблиці оптимальний план задачі $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$:

$$X_j^* = \begin{cases} X_{10}, \text{ при } & j = S_i, \\ 0, \quad \text{при} & j \in \bar{I}_x \end{cases}$$

і значення $L(X^*)$:

$$L(X^*) = \Delta_0 = X_{m+1}; 0$$

3. Економічна інтерпретація симплекс-методу

Для виготовлення різних виробів *A*, *B і C* підприємство використовує три різні види сировини. Норми витрати сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу *A*, *B* і *C*, а так само загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, наведені в табл. 12.

Складти план виробництва виробів, при якому загальна вартість усієї виробничої підприємством продукції є максимальною.

Таблиця 12

ВИХІДНІ ДАНІ

Вид сировини	Норми витрат сировини			Загальна кількість сировини
	A	*B*	*C*	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Ціна одного виробу	9	10	16	

Розв'язання:

Складемо математичну модель задачі.

Випуск виробів *A* позначимо через x_1, виробів *B* — через x_2, виробів *C* — через x_3. Оскільки є обмеження на виділений підприємству фонд сировини кожного виду, змінні x_1, x_2, x_3 повинні задовольняти наступній системі нерівностей:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{cases}$$

Загальна вартість виробленої підприємством продукції складає $F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 .$$

Запишемо цю задачу у формі основної задачі ЛП. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей.

Введемо три додаткові змінні, внаслідок чого обмеження запишуться у вигляді системи рівнянь: $\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180. \end{cases}$

Ці додаткові змінні за економічним значенням означають не використовувану при даному плані виробництва кількість сировини того або іншого виду. Наприклад, x_4 — це невживана кількість сировини 1 виду.

Перетворену систему рівнянь запишемо у векторній формі:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0 ,$$

де $P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$; $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}$.

Оскільки серед векторів $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ є три одиничні вектори, для даної задачі можна безпосередньо записати опорний план. Таким є план $X = (0; 0; 0; 360; 192; 180)$, визначуваний системою тривимірних одиничних векторів P_4, P_5, P_6, які утворюють базис тривимірного векторного простору.

Складаємо симплексну таблицю для 1 ітерації (табл. 13), підраховуємо значення $F_0, z_j - c_j$ і перевіряємо початковий опорний план на оптимальність:

$$F_0 = (C, P_0) = 0;\ z_1 = (C, P_1) = 0;\ z_2 = (C, P_2) = 0;\ z_3 = (C, P_3) = 0;$$
$$z_1 - c_1 = 0 - 9 = -9;\ z_2 - c_2 = 0 - 10 = -10;\ z_3 - c_3 = -16.$$

Для векторів базису $z_j - c_j = 0$.

Таблиця 13

СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЯ

I	Базис	C_σ	P_0	9	10	16	0	0	0	
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	Q
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0	360/12
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0	192/8
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1	180/3
4			0	–9	–10	–16	0	0	0	

Як видно з таблиці 13, значення всіх основних змінних x_1, x_2, x_3 дорівнюють нулю, а додаткові змінні приймають свої значення відповідно до обмежень задачі. Ці значення змінних відповідають такому «плану», при якому нічого не виробляється, сировина не використовується і значення цільової функції рівне нулю (тобто вартість виробленої продукції відсутня). Це видно з 4-го рядка таблиці, оскільки в ній є три негативні числа: $z_1 - c_1 = -9$; $z_3 - c_3 = -16$. Негативні числа не тільки свідчать про можливість збільшення загальної вартості вироблюваної продукції, але і показують, наскільки збільшиться ця сума при введенні в план одиниці того або іншого виду продукції.

Так, число –9 означає, що при включенні в план виробництва одного виробу *А* забезпечується збільшення випуску продукції на 9 грн, якщо включити в план виробництва по одному виробу *В* і *С*, то загальна вартість продукції, що виготовляється, зросте відповідно на 10 і 16 грн. Тому з економічної точки зору найдоцільнішим є включення в план виробництва виробів *С*. Це ж необхідно зробити і на підставі формальної ознаки симплексного методу, оскільки максимальне за абсолютною величиною негативне число Δ_j стоїть в 4-му рядку стовпця вектора P_3. Отже, в базис введемо вектор P_3. Визначаємо вектор, що підлягає виключенню з базису. Для цього знаходимо $\Theta_0 = \min(b_i / a_{i3})$ для $a_{i3} > 0$, тобто $\Theta_0 = \min(360/12; 192/8; 180/3) = 192/8$.

Знайшовши число 192 / 8 = 24, ми тим самим з економічної точки зору визначили, яку кількість виробів С підприємство може виготовляти з урахуванням норм витрати і наявних об'ємів сировини кожного виду. Оскільки сировини даного виду відповідно є 360, 192 і 180 кг, а на один виріб С вимагається витратити сировини кожного вигляду відповідно 12, 8 і 3 кг, то максимальне число виробів С, яке може бути виготовлене підприємством, рівне $\min(360/12; 192/8; 180/3) = 192/8 = 24$, тобто обмежуючим чинником для виробництва виробів С є наявний об'єм сировини 2-х видів. З урахуванням його наявності підприємство може виготовити 24 вироби С. При цій сировині 2 види буде повністю використано.

Отже, вектор P_5 підлягає виключенню з базису. Стовпець вектора P_3 і 2-й рядок є направляючими. Складаємо таблицю для 2 ітерації (табл. 14).

Спочатку заповнюємо рядок вектора, знову введеного в базис, тобто рядок, номер якого збігається з номером направляючого рядка. Тут направляючим рядком є 2-й рядок.

Таблиця 14

СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЯ

I	Базис	C_σ	P_0	9	10	16	0	0	0	Q
				P_1	P_2	P_3	P_5	P_5	P_6	
1	P_4	0	72	9	9	0	1	–3/2	0	72/3
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0	24/ 1/2
3	P_6	0	108	11/ 4	3/2	0	0	–3/8	1	108/3/2
4			384	3	–2	0	0	2	0	

Елементи цього рядка табл. 14 виходять з відповідних елементів табл. 13 розподілом їх на розрішуючий елемент (тобто на 8). При цьому в стовпці C_σ записуємо коефіцієнт $C_3 = 16$, що стоїть в стовпці вектора, який вводиться в базис P_3. Потім заповнюємо елементи стовпців для векторів, що входять в новий базис. У цих стовпцях на перетині рядків і стовпців одноймениих векторів проставляємо одиниці, а всю решту елементів вважаємо рівною нулю.

Для визначення решти елементів табл. 14 застосовуємо правило трикутника. Ці елементи можуть бути обчислені і безпосередньо за рекурентними формулами.

Обчислимо елементи табл. 14, що стоять у стовпці вектора P_0. Перший з них знаходиться в 1-му рядку цього стовпця. Для його обчислення знаходимо три числа:

1) число, що стоїть у табл. 13 на перетині стовпця вектора P_0 і 1-го рядка (360);

2) число, що стоїть у табл. 13 на перетині стовпця вектора P_3 і 1-го рядка (12);

3) число, що стоїть у табл. 14 на перетині стовпця вектора P_0 і 2-го рядка (24).

Віднімаючи з першого числа множину двох інших, знаходимо шуканий елемент: 360 – 12 · 24 = 72; записуємо його в першому рядку вектора P_0 табл. 14.

Другий елемент стовпця вектора P_0 табл. 14 був уже обчислений раніше. Для обчислення третього елемента стовпця вектора P_0 також знаходимо три числа. Перше з них (180) знаходиться на перетині 3-го рядка і стовпця вектора P_0 табл. 13, друге (3) — на перетині 3-го рядка і стовпця вектора P_3, третє (24) — на перетині 2-го рядка і стовпця вектора P_0 табл. 13. Отже, вказаний елемент є 180 – 24 · 3=108. Число 108 записуємо в 3-му рядку вектора P_0 табл. 14.

Значення F_0 у 4-му рядку стовпця цього ж вектора можна знайти двома способами:

1) за формулою $F_0 = (C, P_0)$, т. ч. $F_0 = 0 \cdot 72 + 16 \cdot 24 + 0 \cdot 108 = 384$;

2) за правилом трикутника; в даному випадку трикутник утворений числами 0, –16, 24. цей спосіб приводить до того ж результату: 0 – (–16) · 24 = 384.

При визначенні за правилом трикутника елементів стовпця P_0 третє число, що стоїть в нижній вершині трикутника, весь час залишалося незмінним і мінялися лише перші два числа. Врахуємо це при знаходженні елементів стовпця вектора P_1 табл. 13. Для обчислення вказаних елементів перші два числа беремо із стовпців векторів P_1 і P_3 табл. 13, а третє число — з табл. 14. Це число стоїть на перетині 2-го рядка і стовпця вектора P_1 останньої таблиці. У результаті набуваємо значення шуканих елементів: 18 – – 12 · (3 / 4) = 9; 5 – 3 · (3 / 4) = 11 / 4.

Число $z_1 - c_1$ в 4-му рядку стовпця вектора P_1 табл. 14 можна знайти двома способами:

1) за формулою $z_1 - c_1 = (C, P_1) - c_1$ маємо 0 · 9 + 16 · (3 / 4) + 0 (11 / / 4) – 9 = 3;

2) за правилом трикутника одержимо 9 – (–16) · (3 / 4) = 3.

Аналогічно знаходимо елементи стовпця вектора P_2. Елементи стовпця вектора P_5 обчислюємо за правилом трикутника. Проте побудовані для визначення цих елементів трикутники бачать інакше.

При обчисленні елемента 1-го рядка вказаного стовпця виходить трикутник, утворений числами 0, 12 і 1/8. Отже, шуканий елемент рівний 0 – 12 · (1 / 8) = –3/2. Елемент, що стоїть в 3-му рядку даного стовпця, рівний 0 – 3 · (1 / 8) = –3/8.

Після закінчення розрахунку всіх елементів табл. 14 в ній одержані новий опорний план і коефіцієнти розкладання векторів $P(j = 1,6)$ через базисні вектори P_4, P_3, P_6 і значення Δ_j' і F_0'. Як видно з цієї таблиці, новим опорним планом задачі є план $X = (0; 0; 24; 72; 0; 108)$. При даному плані виробництва виготовляється 24 вироби 3-го виду і залишаються невикористаними 72 кг сировини 1-го виду і 108 кг сировини 3-го виду. Вартість усієї вироблюваної при цьому плані продукції рівна 384 грн. Вказані числа записані в стовпці вектора P_0 табл. 14. Як видно, дані цього стовпця є параметри даної задачі, хоча вони зазнали значних змін. Змінилися дані й інших стовпців, а їх економічний зміст став складнішим.

Так, наприклад, візьмемо дані стовпця вектора P_2. Число ½ у другому рядку цього стовпця показує, на скільки слід зменшити виготовлення виробів С, якщо запланувати випуск одного виробу В. Числа 9 і 3/2 в 1-му і 3-му рядках вектора P_2 показують відповідно, скільки потрібно сировини 1 і 2 виду при включенні в план виробництва одного виробу В, а число 2 в 4-му рядку показує, що якщо буде запланований випуск одного виробу В, то це забезпечить збільшення випуску продукції у вартісному виразі на 2 грн. Іншими словами, якщо включити в план виробництва продукції один виріб В, то це зажадає зменшення випуску виробу З на 1/2 од. і зажадає додаткових витрат 9 кг сировини 1-го виду і 3/2 кг сировини 3-го виду, а загальна вартість продукції відповідно до нового, оптимального плану зросте на 2 грн.

Таким чином, числа 9 і 3/2 виступають ні би новими «нормами» витрат сировини 1-го і 3-го виду на виготовлення одного виробу В (як видно з табл. 13, раніше вони були рівні 15 і 3), що пояснюється зменшенням випуску виробів С.

Такий же економічний сенс мають і дані стовпця вектора P_1 табл. 14.

Дещо інший економічний зміст мають числа, записані в стовпці вектора P_5. Число 1/8 в 2-му рядку цього стовпця показує, що збільшення об'ємів сировини 2-го виду на 1 кг дозволило б збільшити випуск виробів С на 1/8 од. Одночасно потрібно б додатково 3/2 кг сировини 1-го виду і 3/8 кг сировини 3-го виду. Збільшення випуску виробів С на 1/8 од. приведе до зростання випуску продукції на 2 грн.

З викладеного вище економічного змісту даних табл. 14 виходить, що знайдений на 2-й ітерації план задачі не є оптимальним. Це видно і з 4-го рядка табл. 14, оскільки в стовпці вектора P_2 цього рядка стоїть негативне число -2. значить, в базис слід ввести вектор P_2, тобто в новому плані слід передбачити випуск виробів В. При визначенні можливого числа виготовлення виробів В слід враховувати наявну кількість сировини кожного виду, а саме: можливий випуск виробів В визначається $\min\left(b_i' / a_{i2}'\right)$ для $a_{i2} > 0$, тобто знаходимо $\Theta_0 = \min\left(\frac{72}{9}; \frac{24 \cdot 2}{1}; \frac{108 \cdot 2}{3}\right) = \frac{72}{9} = 8$.

Отже, виключенню з базису P_4 підлягає вектор, іншими словами, випуск виробів В обмежений сировиною 1-го виду, що є у розпорядженні підприємства. З урахуванням наявних об’ємів цієї сировини підприємству слід виготовити 8 виробів В. Число 9 є елементом, що дозволяється, а стовпець вектора P_2 і 1-й рядок табл. 14 є прямуючими.

Складаємо таблицю для 3-ї ітерації (табл. 15).

Таблиця 15

СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЯ

I	Базис	C_σ	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_5	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	–1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	–1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	–1/6	–1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

У табл. 15 спочатку заповнюємо елементи 1-го рядка, який є рядком вектора, що знову вводиться в базис P_2. Елементи цього рядка одержуємо з елементів 1-го рядка табл. 14 розподілом останніх на дозволяючий елемент (тобто на 9). При цьому в стовпці C_σ даного рядка записуємо $C_2 = 10$.

Потім заповнюємо елементи стовпців векторів базису і за правилом трикутника обчислюємо елементи решти стовпців. У результаті в табл. 15 одержуємо новий опорний план $X = (0; 8; 20; 0; 0; 96)$ та коефіцієнти розкладання векторів P_j $\left(j = \overline{1,6}\right)$ через базисні вектори P_2, P_3, P_6 і відповідні значення Δ_j'' і F_0''.

Перевіряємо, чи є даний опорний план оптимальним, чи ні. Для цього розглянемо 4-й рядок табл. 15. У цьому рядку серед чисел Δ_j'' немає негативних. Це означає, що знайдений опорний план є оптимальним і $F_{\max} = 400$.

Отже, план випуску продукції, що включає виготовлення 8 виробів В і 20 виробів С, є оптимальним.

При даному плані випуску виробів повністю використовується сировина 1-го і 2-го видів і залишаються невикористаними 96 кг сировини 3-го виду, а вартість вироблюваної продукції рівна 400 грн.

Оптимальним планом виробництва продукції не передбачається виготовлення виробів А. Введення в план випуску продукції виробів вигляду А привело б до зменшення вказаної загальної вартості. Це видно з 4-й рядки стовпця вектора P_1, де число 5 показує, що при даному плані включення в нього випуску одиниці виробу А приводить лише до зменшення загальної вартості на 5 грн.

Рішення даного прикладу симплексним методом можна було б проводити, використовуючи лише одну таблицю (табл. 16).

У цій таблиці послідовно записана одна за одною всі три ітерації обчислювального процесу.

Таблиця 16

СИМПЛЕКС-МЕТОД

I	Базис	C_σ	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_5	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	–9	–10	–16	0	0	0
1	P_4	0	72	9	9	0	1	–3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	–3/8	1
4			384	3	–2	0	0	2	0
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	–1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	–1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	–1/6	–1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

ВИСНОВКИ

Симплексний метод полягає в такому направленому переборі вершин, при якому значення цільової функції зростає від вершини до вершини. Кожній вершині відповідає система рівнянь, вибирана спеціальним чином із системи нерівностей (9.6)—(9.7), тому обчислювальна процедура симплексного методу полягає в послідовному розв'язанні систем лінійних рівнянь алгебри.

При відомому опорному плані $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ алгоритм дозволяє:

а) перевірити оптимальність опорного плану X (оптимальність плану X установлюється за допомогою ознаки оптимальності);

б) здійснити переходи опорного плану $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ до нового опорного плану $X'=(x_1',x_2',...,x_n')$, для якого $L(x')\geq L(x)$ і від базису $\{A_{si}\}_{si}\in I_x$ плану X до базису $\{A_{si}\}_{si}\in I_{x'}$, де $I_{x'}$ — безліч індексів базисних компонентів нового опорного плану X';

в) обчислити параметри $x_{ij}',\Delta_j',L(x')$, що відповідають X', за відомими $x_{ij},\Delta_j,L(x)$ для плану X з мінімальною кількістю обчислень;

г) установити нерозв'язність задачі ЛП.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Приклад 1

Потрібно перетворити в максимум лінійну форму

$L(x) = X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 2X_4$

за умов

$2X_1 + X_2 + 3X_3 - X4 \leq 4,$

$X_1 + 3X_2 + X_3 + X_4 \leq 2,$

$X_{ij} \geq 0\ j = \overline{1,4}$

Щоб привести задачу до канонічної форми, уведемо два додаткових ненегативних змінних X_5, X_6:

$2X_1 + X_2 + 3X_3 - X_4 + X_5 = 4,$

$X1 + 3X_2 + X_3 + X_4 + X_6 = 2.$

Природно, вибрати одиничні вектори A_5, A_6 як вихідний базис.
Весь процес розв'язання наведений у табл. 17:

Таблиця 17

СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЯ

C	—	—	—	—	1	2	3	2	0	0		№ ітер.
	№	C_x	$Б_x$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ	
	1	0	A_5	4	2	1	3	–1	1	0	4/3	
	2	0	A_6	2	1	3	1	1	0	1	2	0
	3			0	–1	–2	–3	–3	0	0	–	
	1	3	A_3	4/3	2/3	1/3	1	–1/3	–1/3	0		
	2	0	A_6	4/3	1/3	8/3	0	4/3	–1/3	1	1	1
	3			4	1	–1	0	–3	1	0		
	1	3	A_3	5/3	3/4	7/3	1	0	1/4	1/4		
	2	2	A_4	1	1/4	2	0	1	–1/4	3/4		2
	3			7	7/4	5	0	0	1/4	9/4		

Таблиця складається з частин, що відповідають окремим ітераціям методу. Головну частину таблиці 17 (крім її верхнього й останнього рядка) заповнюють складові вектора обмежень (A_0) і векторів умов (A_1, A_2 A_3, A_4, A_5, A_6), тому що базисні вектори A_5 і A_6 одиничні, то $X_{ij} = a_{ij}$.

У таблиці другої ітерації всі $\Delta_j \geq 0$, а це означає, що вектор $X^* = (0, 0, 5/3, 1)$ є розв'язанням задачі.

Приклад 2

Розв'язання задачі лінійного програмування

$4X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X4 + 0X_5 \to max$,

$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 18$,

$2X_1 - X_2 + X_4 = 10$,

$-X_1 + 3X_2 + X_5 = 9$,

$X_j \geq 0, j = \overline{1{,}5}$

Таблиця 18

СИМПЛЕКС-ТАБЛИЦЯ

Базис	C_{si}	C_j	4	2	0	0	0	
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_3	0	18	2	3	1	0	0	9
A_4	0	10	2	–1	0	1	0	5
A_5	0	9	–1	3	0	0	1	
		0	–4	–2	0	0	0	
A_3	0	8	0	4	1	1	0	2
A_1	4	5	1	–1/2	0	1/2	0	
A_5	0	14	0	5/2	0	1/2	1	28/5
		20	0	–4	0	2	0	
A_2	2	2	0	1	1/4	–1/4	0	
A_1	4	6	1	0	1/8	3/8	0	
A_5	0	9	0	0	–5/8	9/8	1	
		28	0	0	1	1	0	

Одержано план з базисними компонентами X_1, X_2, X_5.
Розв'язання задачі:
$X^* = (6, 2, 0, 0, 9)$, $L(X) = 28$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте основні положення симплексного методу.
2. Які випадки можливі при перевірці опорного плану на оптимальність?
3. Охарактеризуйте алгоритм симплексного методу.
4. Опишіть правила заповнення початкової симплекс-таблиці.
5. У чому полягає критерій оптимальності симплекс-методу?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Приклад
Розв'яжіть симплекс-методом:
$F = x_1 + 3x_2 \to max$

$-x_1 + x_2 \leq 3$
$4x_1 + 3x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \geq 0$

2. Приклад
Розв'яжіть симплекс-методом:
$F = 2x_1 + x_2 \rightarrow min$
$x_1 - x_2 \leq 4$
$x_1 + x_2 \leq 10$
$4x_1 - x_2 \leq 12$
$7x_1 + x_2 \leq 7$
$x_1, x_2 \geq 0$

ЛАБОРАТОРНІ ЗАВДАННЯ

Написати програму (наприклад, на C++) для обчислення цільової функції і початкового опорного плану X первинної задачі.

Варіанти завдань:
1. Написати програму для обчислення цільової функції і початкового опорного плану X первинної задачі, яка подана в загальному вигляді.
2. Написати програму для обчислення цільової функції і початкового опорного плану X первинної задачі, яка подана в канонічному вигляді.

ТЕМА 11

М-МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛП

1. Алгоритм М-методу

М-метод призначено для розв'язання задач (9.8)—(9.10) минаючи стадію побудови початкового опорного плану [1] у випадках, коли невідомий початковий опорний план.

При використанні **М-методу** для розв'язання задачі ЛП формується **М-задача**:

$$\max \to \overline{L}(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} X_{n+i}\ ; \tag{11.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i; \quad i = \overline{1,m}\ ; \tag{11.2}$$

$$X_j \ge 0, \quad j = \overline{1, m+n}\ , \tag{11.3}$$

де $M > 0$ деяке досить велике число, а $b_j \ge 0$, як і раніше.

Для цієї задачі вектор

$$\overline{X}^0 = (\underbrace{0,...,0,}_{n} b_1,...,b_m)$$

може служити початковим опорним планом, для якого базисними є вектори

$$A_{n+i} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\end{matrix}}\right\} i \qquad i = \overline{1,m}$$

Задача **(11.1)—(11.3)** може бути розв'язана симплекс-методом.

При цьому справедлива **теорема**:

1. Якщо в розвв'язку **М-задачі**

$$\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, x_{n+1}, ..., x_{n+m}^*) \tag{11.4}$$

для усіх $i = \overline{1,m}$ $X_{n+i}^* = 0$, то вектор $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ є розв'язанням вихідної задачі.

2. Якщо в оптимальному плані (11.4) **М-задачі** хоча б одна з $X_{n+i} \ne 0 \ (1 \le i \le m)$, то вихідна (9.15)—(9.17) задача не має розв'язку через несумісність умов обмеженості (9.13)—(9.14);

3. Якщо **М-задача** виявилася нерозв'язною то і вихідній задачі немає розв'язків [1]. Оскільки M не входить у A_j, отже, параметри X_{ij} не залежать від M, а серед коефіцієнтів лінійної форми (11.1) є рівні M, то оцінки

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_{si} x_{ij} - c_j$$

можна подати у вигляді

$$\Delta_j = \Delta'_j + \Delta''_j M \,, \tag{11.5}$$

де Δ'_j і Δ''_j не залежать від M. Так як $M > 0$ досить велике число, то при визначенні знака Δ_j слід в першу чергу звертати увагу на знак Δ''_j.

Алгоритм симплексного методу для розв'язання **М-задачі** залишається в цілому без зміни, за винятком (m + 1)-й рядка (рядка оцінок Δj), що з обліком (11.5) подається у вигляді двох рядків (див. табл. 19):

Таблиця 19

РЯДОК ОЦІНОК

$m+1$		Δ'_j	Δ'_o	Δ'_1	…	Δ'_n
$m+2$	M	Δ''_j	Δ''_o	Δ''_1	…	Δ''_n

ВИСНОВКИ

М-метод ще називається методом штучних змінних.

При використанні **М-методу** для розв'язання задачі ЛП формується **М-задача**.

Тому в ліву частину рівнянь системи обмежень задачі додамо змінні-штучні базиси і розглянемо розширену задачу, що полягає в максимізації нової функції, в якій ці штучні базиси віднімаються з дуже великими коефіцієнтами M.

Алгоритм симплексного методу для розв'язання **М-задачі** залишається в цілому без зміни, за винятком (m + 1)-й рядка (рядка оцінок Δj).

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

1. Приклад

Розв'язання M-задачі.

Нехай необхідно розв'язати задачу пошуку оптимального плану лінійної моделі

$L(X) = 5X_1 + 3X_2 + 4X_3 - X_4 \rightarrow \max,$
$X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 2X_4 = 3,$
$2X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 = 3,$
$X_j \geq 0, j = \overline{1,4}$.

Будуємо розширену модель задачі

Введемо додаткові штучні базисні змінні X_5 і X_6 в умови-обмеження.

У цільовій функції віднімемо ці змінні з дуже великими коефіцієнтами «$-M$».

Розширена модель початкової задачі:
$L(X) = 5X_1 + 3X_2 + 4X_3 - X_4 - MX_5 - MX_6,$
$X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 2X_4 + X_5 = 3,$
$2X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 + X_6 = 3,$
$X_j \geq 0, j = \overline{1,6}$.

Таблиця 20

СИМПЛЕКС-МЕТОД

Базис	C_{si}	A_0	5	3	4	–1	$-M$	$-M$	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	θ
X_5	$-M$	3	1	3	2	2	1	0	1
X_6	$-M$	3	2	2	1	1	0	1	3/2
$m + 1$		–	–5	–3	–4	1	0	0	
$m + 2$		–6	–3	–5	–3	–3	0	0	
X_2	3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	3
X_6	$-M$	1	4/3	0	–1/3	–1/3	–2/3	1	3/4
$m + 1$		3	–4	0	–2	3	1	0	
$m + 2$		–1	–4/3	0	1/3	1/3	5/3	0	
X_2	3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	–1/4	1
X_1	5	3/4	1	0	–1/4	–1/4	–1/2	3/4	–
$m + 1$		6	0	0	–3	2	–1	3	
X_3	4	1	0	4/3	1	1			
X_1	5	1	1	1/3	0	0			
$m + 1$		9	0	4	0	5			

$X^* = (1, 0, 1, 0), L(X^*) = 9.$

2. Приклад

Знайти мінімум функції $F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$.

Розв'язання. Запишемо дану задачу у формі основної задачі: знайти максимум функції $F_1 = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, (j = \overline{1,6})$.

У системі рівнянь останньої задачі розглянемо вектори з коефіцієнтів при невідомих: $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Серед векторів P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 і P_6 є лише два одиничні вектори (P_4 і P_5). Тому в ліву частину третього рівняння системи обмежень задачі додамо змінну x_7 і розглянемо розширену задачу, що полягає в максимізації функції $F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7$

за умов $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10, \end{cases}$

$x_j \ge 0, (j = \overline{1,7})$.

Розширена задача має опорний план $X = (0; 0; 0; 24; 22; 0; 10)$, визначуваний системою трьох одиничних векторів: P_4, P_5 і P_7.

Таблиця 21

М-метод

i	Базис	C_σ	P_0	2	–3	6	1	0	0	$-M$	Q
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
1	P_4	1	24	2	1	–2	1	0	0	0	—
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0	22/4
3	P_7	–M	10	1	–1	2	0	0	–1	1	10/2
4			24	0	4	–8	0	0	0	0	
5			–10	–1	1	–2	0	0	1	0	

Складаємо таблицю першої ітерації (табл. 21), що містить п'ять рядків. Для заповнення 4-го і 5-го рядків знаходимо F_0 і значення різниць: $z_j - c_j, (j=\overline{1,7})$: $F_0 = 24 - 10M$; $z_1 - c_1 = 0 - M$; $z_2 - c_2 = 4 + M$; $z_3 - c_3 = -8 - 2M$; $z_4 - c_4 = 0$; $z_5 - c_5 = 0$; $z_6 - c_6 = 0 + M$; $z_7 - c_7 = 0$.

Значення F_0 і $z_j - c_j$ складаються з двох доданків, один з яких містить M, а другий — не містить. Для зручності ітераційного процесу число при M записуємо в 5-му рядку, а доданок, який не містить M, — в 4-му рядку.

У 5-му рядку табл. 21 в стовпцях векторів $P_j, (j=\overline{1,7})$ є два негативні числа (–1 і –2). Наявність цих чисел говорить про те, що даний опорний план розширеної задачі не є оптимальним. Переходимо до нового опорного плану розширеної задачі. У базис вводимо вектор P_3. Щоб визначити вектор, що виключається з базису, знаходимо $\Theta = \min(22/4; 10/2) = 10/2$. Отже, вектор P_7 виключаємо з базису. Цей вектор немає сенсу вводити в жодне з подальших базисів, тому надалі стовпець даного вектора не заповнюється (табл. 22 і 23).

Складаємо таблицю другої ітерації (табл. 22). Вона містить тільки чотири рядки, оскільки штучний вектор з базису виключений.

Таблиця 22

М-метод

i	Базис	C_σ	P_0	2	–3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	–1
2	P_5	0	2	–1	4	0	0	1	2
3	P_3	6	5	1/2	–1/2	1	0	0	–1/2
4			64	4	0	0	0	0	–4

Як видно з табл. 22, для початкової задачі опорним планом є $X=(0;0;5;34;2)$. Перевіримо його оптимальність. Для цього розглянемо елементи 4-го рядка. У цьому рядку в стовпці вектора P_6 є негативне число (–4). Отже, даний опорний план не є оптимальним і може бути поліпшений завдяки введенню в базис вектора P_6. З базису виключаємо вектор P_5. Складаємо таблицю третьої ітерації.

Таблиця 23

М-метод

i	Базис	C_σ	P_0	2	–3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0
2	P_6	0	1	–1/2	2	0	0	1/2	1
3	P_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0
4			68	2	8	0	0	2	0

У 4-му рядку табл. 23 серед чисел Δ_j немає негативних. Це означає, що знайдений новий опорний план початкової задачі $X^*=(0;0;11/2;35;0;1)$ є оптимальним. При цьому плані значення лінійної форми $F_{\max}=68$. Розв’язання даної задачі можна було б проводити, використовуючи одну таблицю (табл. 24), в якій послідовно записані всі три ітерації.

Таблиця 24

М-метод

i	Базис	C_σ	P_0	2	–3	6	1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	–2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	$-M$	10	1	–1	2	0	0	–1	1
4			24	0	4	–8	0	0	0	0
5			–10	–1	1	–2	0	0	1	0
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	–1	
2	P_5	0	2	–1	4	0	0	1	2	
3	P_3	6	5	1/2	–1/2	1	0	0	–1/2	
4			64	4	0	0	0	0	–4	
1	P_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0	
2	P_6	0	1	–1/2	2	0	0	1/2	1	
3	P_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0	
4			68	2	8	0	0	2	0	

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Алгоритм М-методу.
2. Як привести задачу до канонічного вигляду?
3. У якому випадку М-задача не матиме розв'язку?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Варіанти для розв'язання симплекс-задач методом «штучних змінних»:

1. $F = 7x_1 + 6x_2 \to max$
$2x_1 + 5x_2 \geq 10$

2. $F = 3x_1 - 2x_2 \to max$
$2x_1 + x_2 \leq 11$

$5x_1 + 2x_2 \geq 10$
$x_2 \leq 6$
$x_2 \leq 5$
$x_1,$

$-3x_1 + 2x_2 \leq 10$
$3x_1 + 4x_2 \geq 20$
$x_1, x_2 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

3. $F = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow min$
$3x_1 + 2x_2]\geq 6$
$2x_1 - 3x_2 \geq - 6$
$x_1 - x_2 \leq 4$
$4x_1 + 7x_2 \leq 28$
$x_1,$

4. $F = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$
$-3x_1 + 2x_2 \leq 9$
$3x_1 + 4x_2 \geq 27$
$2x_1 + x_2 \leq 14$
$x_1, x_2 \geq 0$
$x_2 \geq 0$

5. $F = 7x_1 — 2x_2 \rightarrow max$
$5x_1 - 2x_2 \leq 3$
$x_1 + x_2 \geq 1$
$-3x_1 + x_2 \leq 3$
$2x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

6. $F = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$
$x_1 - 2x_2 \geq 4$
$5x_1 + 2x_2 \geq 10$
$4x_1 - 3x_2 \leq 12$
$7x_1 + 4x_2 \leq 28$
$x_1, x_2 \geq 0$

7. $F = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow max$
$3x_1 - 2x_2 \geq -6$
$x_1 + x_2 \geq 3$
$x_1 \leq 3$
$x_2 \geq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

8. $F = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow max$
$8x_1 - 5x_2 \leq 16$
$x_1 + 3x_2 \leq 2$
$2x_1 + 7x_2 \geq 9$
$x_1, x_2 \geq 0$

9. $F = x_1 + 2x_2 \rightarrow max$
$5x_1 - 2x_2 \leq 4$
$x_1 - 2x_2 \geq -4$
$x_1 + x_2 \geq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

10. $F = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow max$
$x_1 - 4x_2 \leq 4$
$-x_1 + x_2 \leq 7$
$x_1 + 2x_2 \geq 2$
$3x_1 + 2x_2 \leq 6$
$x_1, x_2 \geq 0$

11. $F = 2x_1 - x_2 \rightarrow max$
$x_1 - x_2 \geq -3$
$6x_1 + 7x_2 \leq 42$
$2x_1 - 3x_2 \leq 6$
$x_1 + x_2 \geq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

12. $F = 5x_1 + x_2 \rightarrow min$
$x_1 + 7x_2 \geq 7$
$-2x_1 + x_2 \leq 6$
$2x_1 + 5x_2 \geq 10$
$7x_1 + x_2 \geq 7$
$5x_1 + 2x_2 \geq 10$
$x_1 \leq 6$
$x_2 \leq 7$
$x_1, x_2 \geq 0$

13. $F = x_1 - x_2 \to max$
$-x_1 + x_2 \geq 8$
$8x_1 + 5x_2 \leq 80$
$x_1 - 2x_2 \leq 2$
$x_1 + 4x_2 \geq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

14. $F = 7x_1 + x_2 \to max$
$x_1 + x_2 \leq 14$
$3x_1 - 5x_2 \leq 15$
$5x_1 + 3x_2 \geq 21$
$x_1, x_2 \geq 0$

15. $F = 7x_1 - x_2 \to min$
$x_1 + x_2 \geq 3$
$5x_1 + x_2 \geq 5$
$x_1 + 5x_2 \geq 5$
$0 \leq x_1 \leq 4$
$0 \leq x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

16. $F = x_1 + x_2 \to min$
$3x_1 + x_2 \geq 8$
$x_1 + 2x_2 \geq 6$
$x_1 - x_2 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$

17. $F = x_1 + 3x_2 \to max$
$-x_1 + x_2 \leq 3$
$4x_1 + 3x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \geq 0$

18. $F = 2x_1 + x_2 \to max$
$x_1 - x_2 \geq 4$
$x_1 + x_2 \geq 10$
$4x_1 - x_2 \leq 12$
$7x_1 + x_2 \leq 7$
$x_1, x_2 \geq 0$

19. $F = 2x_1 + 2x_2 \to max$
$3x_1 + 2x_2 \geq -6$
$x_1 + x_2 \geq 3$
$x_1 \leq 3$
$x_2 \leq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

20. $F = 2x_1 - 4x_2 \to max$
$8x_1 - 5x_2 \leq 16$
$x_1 + 3x_2 \geq 2$
$2x_1 + 7x_2 \leq 9$
$x_1, x_2 \geq 0$

ЛАБОРАТОРНІ ЗАВДАННЯ

Написати програму (переважно на С++) для обчислення цільової функції і початкового опорного плану X первинної задачі.

Варіанти завдань:

1. Написати програму (наприклад на С++) переходу від початкової задачі ЛП в М-задачу.

2. Написати програму для обчислення цільової функції і початкового опорного плану М-задачі.

ТЕМА 12
ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

1. ПОБУДОВА ПОЧАТКОВИХ ОПОРНИХ ПЛАНІВ ТЗ

Важливою частинок загальної задачі ЛП є транспортна задача (ТЗ), суть якої полягає в наступному.

Розглядається система, у яку входить Р підприємств A_i ($i = \overline{1, P}$) постачальників деякого однорідного продукту з обсягами виробництва a_i ($i = \overline{1, P}$) умовних одиниць продукту і q споживачів B_j ($j = \overline{1, q}$) цього продукту з обсягом споживання b_j ($j = \overline{1, q}$) Передбачається, що продукт може бути доставлений кожному з B_j від будь-якого A_i, при цьому транспортні витрати на доставку одиниці продукту від A_i до B_j складають c_{ij} грошових одиниць. Потрібно скласти план перевезень таким чином, щоб максимально задовольнити потреби B_j, при мінімальних сумарних транспортних витратах.

Якщо через x_{ij} позначити обсяги продукту, що доставляються з A_i ($i = \overline{1, P}$) у B_j ($j = \overline{1, q}$), то математична модель ТЗ має вигляд:

$$\min \to L(x) = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} c_{ij} x_{ij} \tag{12.1}$$

$$\sum_{j=1}^{q} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1, P} \tag{12.2}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1, q} \tag{12.3}$$

$$X_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1, P},\ j = \overline{1, q}, \tag{12.4}$$

за умови
$$\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{j=1}^{q} b_j. \tag{12.5}$$

При виконанні умови (12.5) говорять, що ТЗ має закритий вигляд (обсяг виробленого в системі продукту $\sum a_i$ споживається цілком у межах системи, обсяг споживання системи $\sum b_j$). Якщо рівність (12.5) порушується, то ТЗ називається відкритою. Відкриту ТЗ легко привести до вигляду (12.1)—(12.5), якщо увести фіктивне підприємство з обсягом споживання $\sum_{\forall i} a_i - \sum_{\forall j} b_j$ (при $\sum_{\forall i} a_i \rangle \sum_{\forall j} b_j$) або обсягом виробництва $\sum_{\forall j} b_j - \sum_{\forall i} a_i$ при ($\sum_{\forall i} a_i \langle \sum_{\forall j} b_j$) [1].

Задача (12.1)—(12.5) може бути розв’язання за допомогою симплексного методу, але особливості цієї задачі дозволяють одержати більш простий варіант алгоритму для її розв’язання. Умова $\sum_{\forall i} a_i = \sum_{\forall j} b_j$ є необхідною і достатньою умовою можливості розв’язання ТЗ (12.1)—(12.5).

Ранг матриці системи обмежень (12.2)—(12.3) дорівнює ($p + q$ – – 1) [1]. Отже, опорні плани ТЗ містять не більше ($p + q - 1$) компонент, $x_{ij} > 0$.

2. Правило північно-західного кута

ТЗ зручно розв’язувати за допомогою розподільної табл. 25.

Таблиця 25

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

A_i	B_j	B_1	B_2	...	B_q	Залишок
	b_j a_i	b_1	b_2	...	b_q	a', 0
A_1	a_1	c_{11} X_{11}	c_{12} X_{12}	...	c_{1q} X_{1q}	0
A_2	a_2	c_{21} X_{21}	c_{22} X_{22}	...	c_{2q} X_{2q}	0
...	...	...	...	...	...	...
A_i	a_p	c_{p1} X_{P1}	c_{p2} X_{P2}	...	c_{pq} X_{pq}	
Залишок		0	B'_2, b''_2, 0			

При побудові опорного плану ТЗ у табл. 25 може бути заповнено не більше ($p + q - 1$) кліток, що відповідають базисним компонентам плану $x_{ij} > 0$.

Побудова опорного плану починається з верхньої лівої (північно-західної) клітинки таблиці, тобто з визначення x_{11}. Міркуємо в такий спосіб: обсяг споживання B_1 дорівнює b_1, обсяг виробництва A_1 дорівнює a_1. Нехай для визначеності $a_1 > b_1$, тоді $x_{11} = b_1$ і потреби B_1 задоволені цілком (стовпець B закривається для подальших записів, убік «Залишок» у стовпці B_1 міститься «0»).

Залишок $a_1' = a_1 - b_1$ міститься в стовпець «Залишок» у рядок A_1. Далі за рахунок залишку a_1' можуть бути задоволені цілком (якщо $a_1' > b_2$) або частково (якщо $a_1' < b_2$) потреби B_2. Нехай $a_1' < b_2$, тоді $x_{12} = a_1'$. У цьому випадку a_1 вичерпаний (тобто продукт із A_1 вивезений цілком, рядок закривається для записів, у стовпці «Залишок» рядка A міститься «0»). Потреби B_2 не задоволені на $b_2 - a_1'$ одиницю. Величину $b_2' = b_2 - a_1'$ поміщаємо в рядку «Залишок» у стовпці B_2. Потреба B_2 може бути задоволена за рахунок підприємства A_2 цілком (якщо $a_2 > b_2'$) або частково (якщо $a_2 < b_2'$). Нехай $a_2 > b_2'$, тоді $x_{22} = a_2$, величина $b_2'' = b_2' - a_2$ міститься поруч з b_2' і побудова опорного плану продовжується до визначення x_{pq}. У найбільш простому випадку на кожному кроці закривається один рядок або один стовпець у таблиці і тільки на останньому кроці (при визначенні x_{pq} закриється одночасно рядок і стовпець, тобто буде визначене $p + q - 1$ елементів x_{ij} таблиці). Виявляється, що побудований план є опорним [1].

3. Правило мінімального елемента

При реалізації правила північно-західного кута заповнення табл. 25 починається завжди з визначення x_{11}, при цьому і надалі при визначенні інших x_{ij}, зовсім не враховується значення транспортних витрат c_{ij}. Правило мінімального елемента побудовано з урахуванням значення c_{ij}. Тут заповнення таблиці починається з клітинки, для якої c_{ij} має найменше значення, тобто для прикладу 2 першим буде обчислюватися $x_{14} = 2$ ($a_1 = 4$, $b_4 = 2$) $a_1' = a_1 - b_4 = 2$, тому що $c_{14} = \min\limits_{i,j} c_{ij} = 1$ (призначення пунктирної лінії буде пояснено пізніше). Другим слід заповнити одну з клітинок рядка A_1 (тому що $c_{12} = c_{13} = \min\limits_{j} c_{1j} = (3,2,2) = 2$ з залишених використаних у рядку A_1 клітинок).

Примітка

Може виявитися, що при побудові опорного плану як за правилом північно-західного кута, так і за правилом мінімального елемента на проміжному кроці закриється одночасно рядок і стовпець у таблиці. Тоді кількість зайнятих клітинок буде меншою, ніж $p + q - 1$, що надалі не дозволить продовжити розв'язання задачі. Тому для збереження постійної кількості зайнятих клітинок уводяться «базисні нулі», що проставляються в таблиці в клітинки, що є продовженням вибраного алгоритму (байдуже, як продовжувати побудову опорного плану по рядку або стовпцю).

1. Приклад

При побудові плану за правилом мінімального елемента.

Таблиця 26

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

B_j A_i		B_1	B_2	B_3	Залишок
	b_j a_i	2	3	6	
A_1	5	2 2	1 3	3	$a_1' = 2$ $a_1'' = 0$
A_2	2	4	3	5 2	$a_2' = 0$
A_3	4	3 0	6	4 4	$a_3' = 4$ $a_3'' = 0$
Залишок		$b_1' = 0$	$b_2' = 0$	$b_3' = 2$ $b_3'' = 0$	

елемента $x_{31} = 0$, тому що після визначення $x_{12} = 2$, закривається стовпець B_1 і рядок A_1 і $c_{31} = \min_i c_{i3}$, можна було б замість x_{31} на цьому кроці визначити $x_{13} = 0$. Отриманий при цьому план виявляється опорним.

4. Метод подвійної переваги

У кожному стовпці налічають знаком *V* клітинку з min вартістю. Потім те ж роблять у кожному рядку. У результаті деякі клітинки мають *VV*. У них і здійснюють первісний розподіл, а потім у клітинках V. Після заповнення помічених клітинок відсутні базисні клітинки, що залишилися, заповнюються за правилом мінімального елемента. Деякі з полічених клітинок можуть виявитися незаповненими.

5. ПЕРЕХІД ВІД ОДНОГО ОПОРНОГО ПЛАНУ ДО ІНШОГО ОПОРНОГО ПЛАНУ

Розглянемо табл. 26 (побудова плану за правилом мінімального елемента).

Нехай після побудови опорного плану було вирішено спланувати перевезення $x_{24} = \theta > 0$ (тому що $c_{24} = 1$ менше багатьох c_{ij} зайнятих клітинок). Але при цьому порушується баланс у стовпці B_4 і в рядку A_2. Для відновлення балансу по стовпцю віднімемо θ з $x_{14} = 2$, але при цьому порушується баланс у рядку A_1, тому додамо до $x_{12} = 2$ число θ. Через порушення балансу в стовпці B_2 віднімемо θ з $x_{32} = 3$. Для відновлення балансу в рядку A_3 додамо до $x_{33} = 1$ число θ. І на останньому кроці, віднімаючи θ з $x_{23} = 2$, відновлюємо баланс у стовпці B_3, порушений на передостанньому кроці, і в рядку A_2, порушений на першому кроці (див. табл. 25 стрілка), для того, щоб x_{ij} (компоненти нового плану) відповідали умові задачі, θ повинно бути не більше, ніж мінімальне з x_{ij}, з яких θ віднімалося. Пронумеруємо вершини отриманого циклу (цифри в кружечках). Тоді θ повинно вибиратися з умови:

$$\theta \le \min_{\text{ч.к}} x_{ij};$$

де min обчислюється по парних клітинках циклу. Оскільки у план уведений компонент $x_{24} = \theta$, те для того, щоб число клітинок збереглося рівним $p + q - 1$, одна з клітинок таблиці повинна звільнитися. Це можна зробити, якщо

$$\theta = \min_{\text{ч.к}} x_{ij}. \tag{12.6}$$

Виявляється, що новий план буде опорним. Спосіб побудови нового опорного плану називається зсувом числа θ по циклу.

6. МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ

У симплексному методі оптимальність опорного плану перевірялася за допомогою оцінок Δ_j, що відповідно до другої форми ознаки оптимальності обчислюється через формули як

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ij} \cdot \lambda_k - c_j \,,\, j=\overline{1,n}\,, \tag{12.7}$$

де λ_k — визначається із системи:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ksi} * \lambda_k = C_{si}\,,\; i=\overline{1,m}\,. \tag{12.8}$$

Системи (12.7) і (12.8) можуть бути записані в матричному вигляді:

$$\Delta_j = \Lambda \cdot A_j - C_j,\, j = \overline{1,n}\,. \tag{12.9}$$

$$\Lambda\, A_{si} = c_{si},\; i=\overline{1,m}\,.$$

тут

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\;\; A_{si} = \begin{pmatrix} a_{1si} \\ a_{2si} \\ \ldots \\ a_{msi} \end{pmatrix},\; \Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m).$$

A_j — вектори умови задачі (9.15)—(9.17), складені з коефіцієнтів при x_j.

A_{si} — вектори-умови задачі, що утворять базис деякого опорного плану задачі. Аналогічно можуть бути введені вектори-умови A_{ij} для задачі (12.1)—(12.4), складені з коефіцієнтів при x_{ij} через особливості ТЗ, вони мають вигляд

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ i \end{array}\right\} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} P + j \tag{12.10}$$

Через I_x позначимо пари чисел (i, j), що визначають зайняття клітинки табл. 25, тобто це індекси $x_{ij} > 0$.

$$I_x = \{(i, j), x_{ij} > 0\} \qquad (12.11)$$

Уведемо вектор $W = \Lambda$ з компонентами

$$W = (U_1, U_2, \ldots, U_p, -\upsilon_1, -\upsilon_2, \ldots, -\upsilon_q)... \qquad (12.12)$$

Через Δ_{ij} позначимо оцінки векторів A_{ij} (за аналогією з Δ_j для A_j), тоді (12.9) має вигляд:

$$\Delta_{ij} = WA_{ij} - c_{ij} = U_i - \upsilon_j - c_{ij}. \qquad (12.13)$$

Одержуємо систему рівнянь для обчислення U_i і υ_j — координат вектора W

$$WA_{ij} = U_i - \upsilon_j = c_{ij}, (i, j) \in I_x \qquad (12.14)$$

Система (12.14) містить $p + q - 1$ рівняння з $p + q$ невідомими U_i і υ_j. Вектори A_{ij} вхідні в (12.14), лінійно-незалежні як базисні. Отже, система має єдине розв'язання, якщо одному з невідомих додати фіксоване значення (наприклад, $U_1 = 0$).

Після визначення U_i і $-\upsilon_j$ по (12.13) можна обчислити оцінки Δ_{ij} кліток таблиці.

Теорема. Ознака оптимальності опорного плану ТЗ.

Опорний план X ТЗ оптимальний, якщо всі $\Delta_{ij} \le 0$ ($i = \overline{1,p}$; $j = \overline{1,q}$). Система рівнянь (12.13) має простий вигляд і дозволяє, не вдаючись до складних методів, легко визначити її розв'язання.

Як приклад розглянемо опорний план з табл. 26. Випишемо пари чисел, що визначають базисні клітинки табл. 26.

Це: (1,1), (1,2), (2,2), (3,2), (3,3), (3.4).

Складемо систему (12.14):

$U_1 - \upsilon_1 = c_{11} = 3,\quad U_3 - \upsilon_2 = c_{32} = 2,$
$U_1 - \upsilon_2 = c_{12} = 2,\quad U_3 - \upsilon_3 = c_{33} = 3,$
$U_2 - \upsilon_2 = c_{22} = 4,\quad U_3 - \upsilon_4 = c_{34} = 2.$

Отримано шість рівнянь із сьома невідомими. Думаємо $U_1 = 0$, тоді

$$-\upsilon_1 = 3, -\upsilon_2 = 2, U_2 = 2, U_3 = 0, -\upsilon_3 = 3, -\upsilon_4 = 2.$$

Для обчислення U_i і $-\upsilon_j$ зручно користуватися наступним алгоритмом:

а) виписати матрицю транспортних витрат

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} C_{12} \cdots C_{1q} \\ C_{21} C_{22} \cdots C_{2q} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_{p1} C_{p2} \cdots C_{pq} \end{pmatrix};$$

б) доповнити матрицю стовпцем «U_i» і рядком «-υ_j»

$$\begin{array}{c|c} C = \begin{pmatrix} \underline{C_{11}C_{12}}\cdots C_{1q} \\ C_{21}\underline{C_{22}}\cdots C_{2q} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{p1}C_{p2}\cdots C_{pq} \end{pmatrix} & \begin{matrix} U_i \\ 0; \end{matrix} \\ \hline -\upsilon_j & \end{array}$$

в) підкреслити в матриці C елементи, що відповідають зайнятим клітинкам;

г) U_1 додати значення 0 і записати в перший рядок стовпця U_i;

д) по відомому U_i ($U_1 = 0$) і підкреслених елементах $c_{ij}(c_{1j})$ для першого кроку підібрати $-\upsilon_j$ так, щоб виконувалися рівності (12.14), записати знайдені $-\upsilon_j$ у рядок «$-\upsilon_j$»;

е) розглянути ті стовпці, у яких є підкреслені c_{ij} і визначені $-\upsilon_j$; тепер для цих елементів підібрати U_i за умови (12.14);

ж) повторювати п. п.;

д) і е) до визначення всіх U_i і $-\upsilon_j$.

7. Алгоритм методу потенціалів

1. Звести в розподільну таблицю зведення про ТЗ.
2. Побудувати початковий опорний план X, обчислити значення $L(X)$.
3. Виписати матрицю C, підкреслити в ній елементи, що відповідають зайнятим клітинкам.
4. Обчислити потенціали U_i і $-\upsilon_j$.
5. Обчислити матрицю оцінок $C^`$.
6. Перевірити план на оптимальність. Якщо всі $\Delta_{ij} \le 0$, то опорний план оптимальний. Розв'язання задачі закінчити. Якщо є $\Delta_{ij} \ge 0$, то розв'язання задачі продовжити.
7. Серед $\Delta_{ij} \ge 0$ вибирати максимальну $\Delta_{st} = \max\Delta_{ij}$.
8. Для Δ_{st} побудувати цикл зсуву θ.
9. Обчислити θ, $\theta = \min\limits_{r,k} X_{ij}$,

де мінімум визначається по x_{ij}, що розташовуються в парних клітинках (ч. к.) циклу.

10. Побудувати новий опорний план $X^`$, зміщаючи θ по циклу, обчислити значення $L(X^`)$

$$L(X^`) = L(X) - \theta\Delta_{st}.$$

ВИСНОВКИ

Транспортна задача (ТЗ) є важливою частиною випадку загальної задачі ЛП. Математична модель ТЗ має вигляд:

$$\min \to L(x) = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{q} x_{ij} = a_i\,,\ i = \overline{1,P}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ij} = b_j\,,\ j = \overline{1,q}$$

$$X_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,P}\,,\ j = \overline{1,q}\ ,$$

за умови $\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{j=1}^{q} b_j$.

При розв'язанні ТЗ:

1. Будується початковий опорний план X.
2. Обчислюється матриця оцінок C`.
3. Перевіряється план на оптимальність.
4. Якщо всі Δ_{ij} ≤0, то опорний план оптимальний. Розв'язання задачі закінчити. Якщо є Δ_{ij} ≥0, то розв'язання задачі продовжити.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

1. Приклад

Правило північно-західного кута

Перевіримо умову можливості розв'язання задачі

$$\sum_{\forall i} a_i = \sum_{\forall j} b_j = 12.$$

Таблиця 27

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

B_j A_i	b_j a_i	B_1 2	B_2 5	B_3 3	B_4 2	Залишок
A_1	4	3 2	2 2	2	1	= 2 = 0
A_2	2	2	4 2	3	1	= 0
A_3	6	2	2 1	3 3	2 2	= 5 = 2 = 0
Залишок		$b_1' = 0$	$b_2' = 3$ $b_2'' = 1$ $b_2''' = 0$	$b_3' = 0$	$b_4' = 0$	

$L(X) = 33.$

2. Приклад

Правило мінімального елемента

Таблиця 28

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

B_j A_i	b_j a_i	B_1 2	B_2 5	B_3 3	B_4 2	Залишок
A_1	4	3	2 2 3	2 2	1 2 $\boxed{2}$	$a_1' = 2$ $a_1'' = 0$
A_2	2	2 2	4	3 2 6	1 θ 1	$a_2' = 0$
A_3	6	2 2	2 3 4	3 1 5	2 2	$a_3' = 3$ $a_3'' = 1$ $a_3''' = 0$
Залишок		$b_1' = 0$	$b_2' = 3$ $b_2'' = 0$	$b_3' = 2$ $b_3'' = 0$	$b_4' = 0$	

Нехай $x_{12} = 2$ (тому що $b_2=5> a_1' = 2$). Далі, тому що $C_{32}= \min\limits_i c_{i2} = \min(4,2) = 2 - x_{32} = 3$, $a_3' = a_3 - b_2' = 6 - 3 = 3$ і т. д. Виявляється, що план, побудований за правилом мінімального елемента, також опорний.

3. Приклад

Метод подвійної переваги

Таблиця 29

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

B_j A		B_1	B_2	B_3	B_4	Залишок
	b_j a_i	2	5	3	2	
A_1	4	3	V 2	V 2 2	VV 1 2	2,0
A_2	2	2	4 1	3 1	V 1	1,0
A_3	6	VV 2 2	2 4	3	2	4,0
Залишок		0	1,0	0	0	

$L(X) = 21$

Ознака оптимальності опорного плану ТЗ.

Опорний план X ТЗ оптимальний, якщо всі $\Delta_{ij} \le 0$ ($i = \overline{1,p}$; $j = \overline{1,q}$).

4. Приклад

Метод потенціалів

а) випишемо матрицю C з табл. 25;

б) підкреслимо c_{ij}, що відповідають зайнятим клітинкам таблиці;

в) припишемо «U_i» і «$-\upsilon_j$»;

$$\begin{array}{cc} & U_i \\ C = \begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{2} & 2 & 1 \\ 2 & \underline{4} & 3 & 1 \\ 2 & \underline{2} & \underline{3} & \underline{2} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ 0 \\ \\ \end{matrix} \\ -\upsilon_j & \end{array}$$

г) U_1 надаємо значення нуль ($U_1 = 0$);

д) у першому рядку матриці два підкреслених елементи: $c_{11} = 3$ і $c_{12} = 2$, розглянемо рівняння (12.14):

$$U_1 - \upsilon_1 = 3 \rightarrow 0 - \upsilon_1 = 3 \rightarrow -\upsilon_1 = 3.$$

Іншими словами, до відомого U_1 необхідно підібрати $-\upsilon_1$, щоб у сумі вони дорівнювали б c_{11} аналогічно $-\upsilon_2 = 2$;

$$\begin{array}{cc} & U_i \\ C = \begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{2} & 2 & 1 \\ 2 & \underline{4} & 3 & 1 \\ 2 & \underline{2} & \underline{3} & \underline{2} \end{pmatrix} & 0 \end{array}$$

$-\upsilon_j$ 3 2;

е) після визначення $-\upsilon_2$ і $-\upsilon_1$ у першому рядку немає підкреслених елементів c_{ij} але в другому стовпці є підкреслені елементи $c_{22} = 4$, $c_{32} = 2$ і відомо значення $-\upsilon_2 = 2$, тобто можна розв'язати рівняння

$U_2 - \upsilon_2 = 4 \rightarrow U_2 = 2$,

$U_3 - \upsilon_2 = 2 \rightarrow U_3 = 0$;

$$\begin{array}{cc} & U_i \\ C = \begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{2} & 2 & 1 \\ 2 & \underline{4} & 3 & 1 \\ 2 & \underline{2} & \underline{3} & \underline{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$-\upsilon_j$ 3 2;

ж) після визначення $U_2 = 2$ і $U_3 = 0$, переходимо до визначення $-\upsilon_3$ і $-\upsilon_4$:

$U_3 - \upsilon_3 = c_{33} = 3 \rightarrow -\upsilon_3 = 3$,

$U_3 - \upsilon_4 = 2 \rightarrow -\upsilon_4 = 2$.

$$\begin{array}{cc} & U_i \\ C = \begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{2} & 2 & 1 \\ 2 & \underline{4} & 3 & 1 \\ 2 & \underline{2} & \underline{3} & \underline{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \end{array} \end{array}$$

$-\upsilon_j$ 3 2 3 2.

Тепер, коли визначені всі U_i і $-\upsilon_j$, важко обчислити оцінки Δ_{ij} по (12.3). Для цього від суми $U_i + (-\upsilon_j)$ необхідно відняти c_{ij} $(i = \overline{1,p})$ $(j = \overline{1,q})$ і записати результат в оцінну матрицю $C^{`}$.

$$C^{`} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$\Delta_{11} = U_1 + (-\upsilon_1) - c_{11} = 0 + 3 - 3 = 0$,

$\Delta_{12} = U_1 + (-\upsilon_2) - c_{12} = 0 + 2 - 2 = 0,$
$\Delta_{13} = U_1 + (-\upsilon_3) - c_{13} = 0 + 3 - 2 = 1,$
$\Delta_{14} = U_1 + (-\upsilon_4) - c_{14} = 0 + 2 - 1 = 1.$

Продовжуючи цей процес, далі для всіх рядків одержимо матрицю

$$C` = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Причому оцінки, що відповідають зайнятим клітинкам (базисним змінним плану або базисними векторами), дорівнюють нулю.

Тепер, коли відомі оцінки, можна перевірити план на оптимальність. Але тому що всі $\Delta_{ij} \geq 0$, то план ТЗ, записаний у табл. 25, неоптимальний. Для канонічної задачі ЛП має місце співвідношення

$$L(X`) = L(X) - \theta\Delta_k, \tag{12.15}$$

де X и $X`$ — початковий і «новий» опорні плани відповідно. Для ТЗ (12.15) має вигляд:

$$L(X`) = L(X) - \theta\Delta_{st}, \tag{12.16}$$

де θ визначається по (12.6), а Δ_{st} по (12.13). Для того щоб швидше досягти $\min(X)$, клітинку (s,t) варто вибирати таким чином, щоб величина

$$\theta\Delta_{st} = \max_{(i,j)} \theta\Delta_{ij}. \tag{12.17}$$

Але тому що обчислення $\theta\Delta_{st}$ зв'язане зі складанням великої кількості циклів для обчислення θ, то на практиці (12.17) заміняється на

$$\Delta_{st} = \max_{(i,j)} \Delta_{ij}. \tag{12.18}$$

У такий спосіб (12.18) визначає вільну клітинку таблиці, на якій слід запланувати перевезення і з якої починається побудова нового опорного плану. Потім знаходимо, що $\Delta_{st} = \Delta_{21} = \Delta_{24} = 3$ (для визначеності візьмемо $\Delta_{st} = \Delta_{24}$), а $\theta = \min(X_{22}, X_{34}) = \min(2,2) = 2$. Тому що θ досягає мінімального значення відразу в двох клітинках, то при вирахуванні дві позитивні змінні звернуться в нуль, а їхнє місце займе один $x_{24} = \theta$. У результаті буде побудований вироджений опорний план з $(p + q - 1) - 1$ позитивними компонентами, що надалі не дозволить будувати нові («кращі») плани. Тому в одну з клітинок $x`_{22}$ або $x`_{24}$ у новій таблиці слід записати базисний нуль (у ту клітинку, якій відповідають min (c_{22}, c_{24}) = min (4, 2) = 2, тобто $x_{24} = 0$).

Таким чином, після перетворень табл. 26 приймає вигляд:

Таблиця 30

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

B_j A_i b_j a_i		B_1	B_2	B_3	B_4
		2	5	3	2
A_1	4	3 2	2 2	2	1
A_2	2	2	4	3	1 2
A_3	6	2	2 3	3 3	2 0

Значення $L(X) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} C_{ij} X_{ij}$ для плану з табл. 26 дорівнює 33 (сумі добутків c_{ij} і x_{ij}, що знаходяться в одній клітинці). Значення L ($X`$) для нового плану дорівнює

$$L(X`) = L(X) - \theta\Delta_{34} = 33 - 2 \cdot 3 = 27.$$

Транспортні витрати скоротилися на величину $\theta\Delta_{34} = 6$. Для перевірки оптимальності X необхідно знову обчислити оцінну матрицю $C``$ і т. д.

5. Приклад

Оптимальний план ТЗ

Знайти оптимальний план ТЗ

Запаси: 60, 55, 40, 35.

Потреба: 70, 5, 45, 70.

Транспортні витрати:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 40 & 15 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \\ 24 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Метод «північно-західного кута»

Визначаємо елементи матриці $x_{m \cdot n}$ починаючи з верхнього лівого кута. Знаходимо величину x_{11} = min (a_1, b_1). Якщо $b_1 < a_1$, то $x_{11} = b$, і перший стовпець закритий для розрахунку решти елементів, тобто $x_{i1} = 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Якщо $b_1 > a_1$, то $x_{11} = a_{11}$ i $x_{1j} = 0$ для $j = 2, 3, \ldots, m$.

Потім обчислюємо $x_{12} = \min\,(a_1 - x_{11},\ b_2)$ при $a_1 > b_1,$ $x_{21} = \min\,(a_2,\ b_1 - x_{11})$ при $a_1 < b_1$. Цей процес продовжується до тих пір, поки на якомусь етапі не вичерпаються ресурси a_n і не задовольняться потреби b_m.

Таблиця 31

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	залишки
		70	5	45	70	
A_1	60	60				
A_2	55	10	5	40		45, 40, 0
A_3	40			5	35	35, 0
A_4	35				35	0
	залишки	10, 0	0	5, 0	35, 0	

Метод «мінімального елемента»

Це правило побудоване з урахуванням матриці витрат на перевезення.

Заповнення починається з клітинки з min c_{ij}.

Пронумеруємо елементи матриці С у порядку зростання c_{ij}.

Заповнимо матрицю аналогічно попередньому методу, але в дотримуючи нумерації.

Таблиця 32

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	залишки
		70	5	45	70	
A_1	60	*1* ***60*** 1	*2* 3	*9* 13	*7* 11	0
A_2	55	*3* ***10*** 4	*40* 16	*15* ***45*** 14	*5* 9	45,0
A_3	40	*3* 10	*40* *5* 8	*15* 12	*5* ***35*** 5	5,0
A_4	35	*24* 15	*3* 6	3 7	1 ***35*** 2	0
	залишки	10,0	0	0	35,0	

Метод «подвійної переваги»

У кожному стовпці відзначимо знаком «V» клітинку з min вартістю.

Потім у кожному рядку відзначимо знаком «V» клітинку з min вартістю.

У результаті деякі клітинки матимуть два такі знаки.

У них і здійснюють початковий розподіл.

Потім — в клітинках, де один знак «V».

Потім — за правилом мінімального елемента.

Метод потенціалів (метод знаходження оптимального опорного плану)

1. Звести в розподільну таблицю зведення про ТЗ.

2. Побудувати початковий опорний план X, обчислити значення $L(x)$.

3. Виписати матрицю C, підкреслити елементи, відповідні зайнятим клітинкам.

4. Доповнити матрицю стовпцем «u_i» і рядком «$-v_j$». Нехай $u_1 = 0$.

5. Обчислити потенціали ($u_i - v_j$), користуючись формулою $u_i - v_j = c_{ij}$ починаючи з відомого u_1 і підкреслених елементів $c_{ij.}$

6. Обчислити матрицю оцінок за формулою $\Delta_{ij} = u_i - v_j - c_{ij.}$

7. Якщо є хоча б одна $\Delta_{ij} > 0$, то план не оптимальний.

8. Знайти $\Delta_{st} = \max \Delta_{ij}$.

9. Для Δ_{st} побудувати цикл зсуву і обчислити $Q = \min x_{ij}$, де min визначається за x_{ij}, розташованих в парних клітинках циклу.

10. Побудувати новий опорний план, зміщуючи Q за циклом, обчислити $L(x')$ $L(x') = L(x) - \Theta\Delta_{st}$

11. Перейти до пункту 3.

Розв'язання:

Ітерація 1.

Таблиця 33

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	залишки
		10	40	20	60	20	
A_1	30	*2* **10** 1	**–Q** *7* **20** 3	*3* 13	*6*	*0* **+Q** 11	20, 0
A_2	70	*9* 4	**+Q** *4* **20**	*5* **20** 14	**–Q** *7* **30**	*0* 9	50, 30, 0
A_3	50	*5* 10	*7* 8	*6* 12	*2* **+Q 30**	*0* **20 –Q** 5 _	20, 0
	залишки	0	20, 0	0	30, 0	0	

$$C_{ij}=\begin{array}{|ccccc|c} \underline{2} & \underline{7} & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 9 & \underline{4} & \underline{5} & \underline{7} & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 6 & \underline{2} & \underline{0} & -8 \\ \hline 2 & 7 & 8 & 10 & 8 & \end{array} \quad \begin{array}{c} u_i \end{array} \quad \Delta_{ij}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 4 & 8 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -11 & -8 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \max\Delta_{14}=8-Q_{\min}=20$$

$L = 610$

$-v_j$: 2 7 8 10 8

Ітерація 2.

Таблиця 34

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	залишки
		10	40	20	60	20	
A_1	30	*2* **10**	*7*	*3*	*6*	*0* **20**	
A_2	70	*9*	*4* **40**	*5* **20**	*7* **10 –Q**	*0* **+Q**	
A_3	50	*5*	*7*	*6*	*2* **50 +Q**	*0* **0 –Q**	
	залишки						

$$
\begin{array}{l}
C_{ij}=\left|\begin{array}{ccccc} \underline{2} & 7 & 3 & 6 & \underline{0} \\ 9 & \underline{4} & \underline{5} & \underline{7} & 0 \\ 5 & 7 & 6 & \underline{2} & \underline{0} \end{array}\right|
\begin{array}{c} u_i \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{array}
\quad
\Delta_{ij}=\left|\begin{array}{ccccc} 0 & -8 & -3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -3 & -8 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right| \quad \max \Delta_{25}=5-Q_{\min}=0 \\
L=450 \\
-v_j \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 2 \quad 0
\end{array}
$$

Ітерація 3.

Таблиця 35

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	залишки
		10	40	20	60	20	
A_1	30	*2* **10**	*7*	*3* **+Q**	*6*	*0* **–Q 20**	
A_2	70	*9*	*4* **40**	*5* **20 –Q**	*7* **10**	*0* **+Q 0**	
A_3	50	*5*	*7*	*6*	*2* **50**	*0*	
	залишки						

$$
\begin{array}{l}
C_{ij}=\left|\begin{array}{ccccc} \underline{2} & 7 & 3 & 6 & \underline{0} \\ 9 & \underline{4} & \underline{5} & \underline{7} & \underline{0} \\ 5 & 7 & 6 & \underline{2} & 0 \end{array}\right|
\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 5 \end{array}
\quad
\Delta_{ij}=\left|\begin{array}{ccccc} 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & -6 & 0 & -5 \end{array}\right| \quad \max \Delta_{13}=2-Q_{\min}=20 \\
L=445 \\
-v_j \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 0
\end{array}
$$

Ітерація 4.

Таблиця 36

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	залишки
		10	40	20	60	20	
A_1	30	*2* **10**	*7*	*3* **20**	*6* **+Q**	*0* **–Q 0**	
A_2	70	*9*	*4* **40**	*5*	*7* **–Q 10**	*0* **+Q 20**	
A_3	50	*5*	*7*	*6*	*2* **50**	*0*	
	залишки						

$$C_{ij}=\left|\begin{matrix}\underline{2} & 7 & \underline{3} & 6 & \underline{0}\\ 9 & \underline{4} & 5 & \underline{7} & \underline{0}\\ 5 & 7 & 6 & \underline{2} & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\0\\-5\end{matrix}\quad \Delta_{ij}=\left|\begin{matrix}0 & -3 & 0 & 1 & 0\\ -7 & 0 & -2 & 0 & 0\\ -8 & -8 & -8 & 0 & -5\end{matrix}\right|$$

$$-v_j\ \ 2\quad 4\quad 3\quad 7\quad 0$$

$\max \Delta_{14}=1$ $-Q_{\min}=0$ $L=410$

Ітерація 5.

Таблиця 37

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	залишки
		10	40	20	60	20	
A_1	30	<u>2</u> ***10***	<u>7</u>	<u>3</u> ***20***	<u>6</u> ***0***	<u>0</u>	
A_2	70	<u>9</u>	<u>4</u> ***40***	<u>5</u>	<u>7</u> ***10***	<u>0</u> ***20***	
A_3	50	<u>5</u>	<u>7</u>	<u>6</u>	<u>2</u> ***50***	<u>0</u>	
	залишки						

$$C_{ij}=\left|\begin{matrix}\underline{2} & 7 & \underline{3} & \underline{6} & 0\\ 9 & \underline{4} & 5 & \underline{7} & \underline{0}\\ 5 & 7 & 6 & \underline{2} & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}u_i\\0\\1\\-4\end{matrix}\quad \Delta_{ij}=\left|\begin{matrix}0 & -4 & 0 & 0 & -1\\ -6 & 0 & -1 & 0 & 0\\ -7 & -8 & -7 & 0 & -5\end{matrix}\right|$$

$$-v_j\ \ 2\quad 3\quad 3\quad 6\quad -1$$

Всі оцінки <= 0, тому план оптимальний.
$L = 410$

Задача

Постановка задачі:

Розглядається система, в яку входить Р підприємств Ai ($i = 1, \ldots, n$) постачальників деякого однорідного продукту з об'ємами виробництва a_i ($i = 1, \ldots, n$) і об'ємами споживання b_j ($j = 1, \ldots, m$). З кожного пункту виробництва можливе транспортування продукту в будь-який пункт споживання. Транспортні витрати на перевезення одиниці продукції з пункту Ai у Bj складають матрицю c_{ij}.

Задача полягає у відшуканні такого плану перевезень, при якому весь продукт з пунктів виробництва буде вивезений, запити споживачів повністю задоволені і сумарні транспортні витрати мінімальні.

Розв'язання:

Якщо через x_{ij} позначити об'єм продукту, що доставляється з Ai в Bj, то математична модель ТЗ має вигляд:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, j = 1,\ldots,m$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\text{за умови}\_ \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

Транспортні витрати $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 2 \end{vmatrix}$: Запаси: 30, 70, 50. Потреба: 10, 40, 20, 60.

Метод
«Північно-західного кута»

Задача не збалансована.

150 > 130

Додамо споживача з потребою 20 од.

Таблиця 38

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	залишки
		10	40	20	60	20	
A_1	30	$\underline{2}$ ***10*** 1	$\underline{7}$ ***20*** 3	$\underline{3}$ 13	$\underline{6}$	$\underline{0}$ 11	20, 0
A_2	70	$\underline{9}$ 4	$\underline{4}$ ***20***	$\underline{5}$ ***20*** 14	$\underline{7}$ ***30***	$\underline{0}$ 9	50, 30, 0
A_3	50	$\underline{5}$ 10	$\underline{7}$ 8	$\underline{6}$ 12	$\underline{2}$ ***30***	$\underline{0}$ ***20*** 5	20, 0
залишки		0	20, 0	0	30, 0	0	

$$L = 10 \cdot 2 + 20 \cdot 7 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 30 \cdot 7 + 30 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 466$$

Метод «мінімального елемента»

Таблиця 39

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	залишки
		10	40	20	60	20	
A_1	30	$\underline{2}$ ***10*** 4	$\underline{7}$ — 12	$\underline{3}$ — 6	$\underline{6}$ — 10	$\underline{0}$ ***20*** 1	10, 0
A_2	70	$\underline{9}$ — 15	$\underline{4}$ ***40*** 7	$\underline{5}$ ***20*** 8	$\underline{7}$ ***10*** 13	$\underline{0}$ — 2	30, 10, 0
A_3	50	$\underline{5}$ — 9	$\underline{7}$ — 14	$\underline{6}$ — 11	$\underline{2}$ ***50*** $\underline{5}$	$\underline{0}$ — 3	0
залишки		0	0	0	10, 0	0	

$$L = 10 \cdot 2 + 40 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 10 \cdot 7 + 50 \cdot 2 + 20 \cdot 0 = 450$$

Метод «подвійної переваги»

Таблиця 40

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		10	40	20	60	20
A_1	30	<u>*2*</u> ***V*** ***10***	<u>*7*</u> — 4	<u>*3*</u> *V* —	<u>*6*</u> —	<u>*0*</u> *VV* **20**
A_2	70	<u>*9*</u> **—**	<u>*4*</u> *V* 40	<u>*5*</u> ***20*** 1	<u>*7*</u> ***10*** 5	<u>*0*</u> *VV* —
A_3	50	<u>*5*</u> **—** 2	<u>*7*</u> — 6	<u>*6*</u> **—** 3	<u>*2*</u> *V* **50**	<u>*0*</u> ***VV*** **—**

$$L = 10 \cdot 2 + 40 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 10 \cdot 7 + 50 \cdot 2 + 20 \cdot 0 = 450$$

Метод потенціалів (метод знаходження оптимального опорного плану)

Рішення:

Ітерація 1.

Таблиця 41

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		10	40	20	60	20
A_1	30	<u>*2*</u> ***10*** 1	**–Q** <u>*7*</u> ***20*** 3	<u>*3*</u> 13	<u>*6*</u>	<u>*0*</u> **+Q** 11
A_2	70	<u>*9*</u> 4	**+Q** <u>*4*</u> ***20***	<u>*5*</u> ***20*** 14	**–Q** *7* ***30***	*0* 9
A_3	50	<u>*5*</u> 10	<u>*7*</u> 8	<u>*6*</u> 12	<u>*2*</u> **+Q** ***30***	<u>*0*</u> ***20*** ***–Q*** 5 _

$$
\begin{array}{r|ccccc|l}
 & & & & & & u_i \\
 & \underline{2} & \underline{7} & 3 & 6 & 0 & 0 \\
C_{ij} = & 9 & \underline{4} & \underline{5} & \underline{7} & 0 & -3 \\
 & 5 & 7 & 6 & \underline{2} & \underline{0} & -8 \\
\hline
-v_j & 2 & 7 & 8 & 10 & 8 &
\end{array}
$$

$$
\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 4 & 8 \\ -10 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -11 & -8 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$\max \Delta_{14} = 8$
$-Q_{\min} = 20$
$L = 610.$

Ітерація 2.

Таблиця 42

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		10	40	20	60	20
A_1	30	<u>*2*</u> ***10***	<u>*7*</u>	<u>*3*</u>	<u>*6*</u>	<u>*0*</u> ***20***
A_2	70	<u>*9*</u>	<u>*4*</u> ***40***	<u>*5*</u> ***20***	<u>*7*</u> ***10 –Q***	<u>*0*</u> ***+Q***
A_3	50	<u>*5*</u>	<u>*7*</u>	<u>*6*</u>	<u>*2*</u> ***50 +Q***	<u>*0*</u> ***0 –Q***

$$
\begin{array}{r|ccccc|l}
 & & & & & & u_i \\
 & \underline{2} & 7 & 3 & 6 & \underline{0} & 0 \\
C_{ij} = & 9 & \underline{4} & \underline{5} & \underline{7} & 0 & 5 \\
 & 5 & 7 & 6 & \underline{2} & \underline{0} & 0 \\
\hline
-v_j & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 &
\end{array}
\quad
\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -3 & -8 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$\max \Delta_{25} = 5$ – $Q_{\min} = 0$ $L = 450$

Ітерація 3.

Таблиця 43

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		10	40	20	60	20
A_1	30	$\underline{2}$ ***10***	$\underline{7}$	$\underline{3}$ ***+Q***	$\underline{6}$	$\underline{0}$ ***–Q 20***
A_2	70	$\underline{9}$	$\underline{4}$ ***40***	$\underline{5}$ ***20 –Q***	$\underline{7}$ ***10***	$\underline{0}$ ***+Q 0***
A_3	50	$\underline{5}$	$\underline{7}$	$\underline{6}$	$\underline{2}$ ***50***	$\underline{0}$

$$\begin{array}{rl} & \qquad\qquad\qquad\quad u_i \\ C_{ij} = & \left|\begin{array}{ccccc|c} \underline{2} & 7 & 3 & 6 & \underline{0} & 0 \\ 9 & \underline{4} & \underline{5} & \underline{7} & \underline{0} & 0 \\ 5 & 7 & 6 & \underline{2} & 0 & 5 \end{array}\right. \\ -v_j & \;\; 2 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 0 \end{array}$$

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & -6 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$\max \Delta_{13} = 2$

$-Q_{\min} = 20$

$L = 445$

Ітерація 4.

Таблиця 44

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	залишки
		10	40	20	60	20	
A_1	30	$\underline{2}$ ***10***	$\underline{7}$	$\underline{3}$ ***20***	$\underline{6}$ ***+Q***	$\underline{0}$ ***–Q 0***	
A_2	70	$\underline{9}$	$\underline{4}$ ***40***	$\underline{5}$	$\underline{7}$ ***–Q 10***	$\underline{0}$ ***+Q 20***	
A_3	50	$\underline{5}$	$\underline{7}$	$\underline{6}$	$\underline{2}$ ***50***	$\underline{0}$	
	залишки						

$$
\begin{array}{r}
C_{ij} = \left|\begin{matrix} \underline{2} & 7 & \underline{3} & 6 & \underline{0} \\ 9 & \underline{4} & 5 & \underline{7} & \underline{0} \\ 5 & 7 & 6 & \underline{2} & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{matrix} \\
-v_j \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 7 \quad 0 \qquad
\end{array}
$$

$$
\Delta_{ij} = \left|\begin{matrix} 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & -8 & 0 & -5 \end{matrix}\right|
$$

$\max \Delta_{14} = 1$

$-Q_{\min} = 0$

$L = 410$

Ітерація 5.

Таблиця 45

РОЗПОДІЛЬНА ТАБЛИЦЯ ТЗ

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	залишки
		10	40	20	60	20	
A_1	30	2 ***10***	7	3 ***20***	6 ***0***	0	
A_2	70	9	4 ***40***	5	7 ***10***	0 ***20***	
A_3	50	5	7	6	2 ***50***	0	
	залишки						

$$
\begin{array}{r}
u_i \qquad\qquad\qquad \\
C_{ij} = \left|\begin{matrix} \underline{2} & 7 & \underline{3} & \underline{6} & 0 \\ 9 & \underline{4} & 5 & \underline{7} & \underline{0} \\ 5 & 7 & 6 & \underline{2} & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{matrix} \\
-v_j \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 6 \quad -1 \qquad
\end{array}
$$

$$
\Delta_{ij} = \left|\begin{matrix} 0 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & -8 & -7 & 0 & -5 \end{matrix}\right|
$$

Всі оцінки <= 0, значить план оптимальний, $L = 410$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте ЕММ транспортної задачі.
2. Які є правила побудови початкових опорних планів ТЗ?
3. Охарактеризуйте алгоритм методу потенціалів.
4. Який критерій оптимальності транспортної задачі ви знаєте?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Приклади
Знайти оптимальний план транспортної задачі.
Варіанти транспортних задач:

1. Запаси: 20, 20, 40, 45	*Транспортні*	*1*	*3*	*3*	*8*
	витрати:	*8*	*6*	*2*	*6*
		7	*7*	*3*	*8*
		5	*2*	*4*	*5*
Потреба: 25, 30, 40, 15					

2. Запаси: 45, 35, 70	*Транспортні*	*2*	*5*	*3*	*4*
	витрати:	*6*	*1*	*2*	*5*
		3	*4*	*3*	*8*
Потреба: 20, 60, 55, 45					

3. Запаси: 30, 70, 50	*Транспортні*	*2*	*7*	*3*	*6*
	витрати:	*9*	*4*	*5*	*7*
		5	*7*	*6*	*2*
Потреба: 10, 40, 20, 60					

4. Прибуло: 40, 30, 50	*Транспортні*	*1*	*7*	*2*	*5*
	витрати:	*3*	*8*	*4*	*1*

6 3 5 3
Відправлено: 40, 20, 60

5. Запаси: 30, 40, 70, 60	*Транспортні*	*1*	*9*	*7*	*2*
	витрати:	*3*	*1*	*5*	*5*
		6	*8*	*3*	*4*
		2	*3*	*1*	*3*
Потреба: 35, 80, 25, 70					

6. Поставки: 50, 20, 35	*Транспортні*	*1*	*3*	*3*	*8*
	витрати:	*8*	*6*	*2*	*6*
		4	*7*	*7*	*3*
Попит: 25, 30, 40, 15					

7. Запаси: *30*, *40*, *70* — *Транспортні витрати*:

1	*9*	*7*	*2*
3	*1*	*5*	*5*
6	*8*	*3*	*4*

Потреба: *35*, *40*, *25*, *70*

8. Прибуло: *30*, *5*, *45*, *70* — *Транспортні витрати*:

3	*7*	*1*	*5*	*4*
7	*5*	*8*	*6*	*3*
6	*4*	*8*	*3*	*2*
3	*1*	*7*	*4*	*2*

Відправлено: *30*, *35*, *25*, *25*, *35*

9. Запаси: *130*, *90*, *80* — *Транспортні витрати*:

4	*5*	*6*	*8*	*10*
10	*3*	*2*	*3*	*15*
4	*10*	*5*	*1*	*16*

Потреба: *110*, *30*, *50*, *30*, *90*

10. Запаси: *60*, *55*, *40*, *35* — *Транспортні витрати*:

1	*2*	*9*	*7*
3	*4*	*6*	*5*
6	*4*	*8*	*3*
4	*3*	*3*	*1*

Потреба: *70*, *5*, *45*, *70*

11. Запаси: *20*, *16*, *14*, *11* — *Транспортні витрати*:

2	*3*	*9*	*7*
3	*4*	*6*	*1*
5	*1*	*2*	*2*
4	*5*	*8*	*1*

Потреба: *16*, *18*, *12*, *15*

12. Поставки: *68*, *55*, *40* — *Транспортні витрати*:

18	*2*	*9*	*7*
30	*4*	*1*	*55*
6	*4*	*8*	*3*

Попит: *42*, *25*, *33*, *56*

13. Поставки: *130*, *90*, *100*, *140* — *Транспортні витрати*:

2	*3*	*6*	*8*
8	*1*	*2*	*3*
7	*4*	*4*	*1*
2	*8*	*5*	*1*

Попит: *110*, *50*, *90*, *60*

14. Поставки: *60*, *40*, *100*, *50* — *Транспортні витрати*:

8	*12*	*4*	*9*	*10*
7	*5*	*15*	*3*	*6*
9	*4*	*6*	*12*	*7*
5	*3*	*2*	*6*	*4*

Попит: *30*, *80*, *65*, *35*, *40*

15. Запаси: 50, 40, 20 *Транспортні витрати:*

3	2	4	1
2	3	1	5
3	2	7	4

Потреба: 30, 25, 35, 20

16. Запаси: 40, 25, 35 *Транспортні витрати:*

10	5	7	4
7	4	9	10
6	14	8	7

Потреба: 15, 40, 30, 15

17. Запаси: 60, 65, 70 *Транспортні витрати:*

2	4	3	2
3	1	2	3
5	4	1	5

Потреба: 40, 60, 70, 25

18. Запаси: 40, 30, 20 *Транспортні витрати:*

1	2	6	4
3	1	3	2
5	7	5	1

Потреба: 30, 25, 15, 20

19. Запаси: 60, 70, 20 *Транспортні витрати:*

2	4	5	1
2	3	9	4
3	4	2	5

Потреба: 40, 30, 30, 50

20. Запаси: 50, 20, 30, 20 *Транспортні витрати:*

1	3	3	4
5	2	7	5
6	4	8	2
7	1	5	7

Потреба: 40, 30, 35, 15

ЛАБОРАТОРНІ ЗАВДАННЯ

Написати програму (наприклад на C++)
Знаходження початкового опорного плану методом:
1. Північно-західного кута;
2. Мінімального елемента;
3. Подвійної переваги.

ТЕМА 13

ДЕЯКІ ВИДИ МОДЕЛЕЙ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ

1. Відкриті транспортні задачі

Дотепер розглядалася модель транспортної задачі, для якої виконується умова

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ , \tag{13.1}$$

Але при розв’язані практичних задач найчастіше зустрічаються задачі, для яких ця умова не виконується, тобто

$$\sum_i a_i > \sum_j b_j \tag{13.2}$$

або

$$\sum_i a_i < \sum_j b_j \tag{13.3}$$

Тоді у випадку (13.2) частина продукту залишиться не вивезеною з пунктів виробництва A_i, тобто

$$\sum_i a_i - \sum_j b_j \overset{def}{=} b_{q+1} \ . \tag{13.4}$$

А це значить, що обмеження повинні бути заповнені нерівністю

$$\sum_j x_{ij} \le a_i \tag{13.5}$$

Аналогічно у випадку (13.3)

$$\sum_j b_j - \sum_i a_i = a_{p+1} \tag{13.6}$$

$$\sum_i x_{ij} \le b_j \ . \tag{13.7}$$

Для приведення задачі до канонічного вигляду в першому випадку введемо *p*-балансовану змінну в (13.5)

$x_{1,q+1}, x_{2,q+1}, ..., x_{p,q+1}$, при цьому

$$\sum_{i=1}^{p} x_{i,q+1} = \sum_i a_i - \sum_i \sum_j x_{ij} = b_{q+1} \ , \tag{13.8}$$

А в другому випадку $x_{p+1,1},...,x_{p+1,q}$, при цьому

$$\sum_j x_{p+1,j} = \sum_j b_j - \sum_j \sum_i x_{ij} = \sum b_j - \sum a_i = a_{p+1} \qquad (13.9)$$

У результаті одержимо закриту транспортну задачу в канонічному вигляді і відмінну від початкової задачі введенням в розподільну таблицю додаткового постачальника (2-й випадок) або споживача (1-й випадок).

А в лінійну форму збалансована змінна входить з коефіцієнтом = 0.

2. Блокування перевезень

Часто буває необхідним ввести додаткове обмеження, згідно з яким деякі з перевезень повинні бути виключені. Це значить, що деякі клітинки повинні бути обов'язково вільними. Заборона деяких з перевезень досягається шляхом штучного збільшення C_{ij} (їм надають значення M і цим роблять їх якнайменше вигідними для заміщення в оптимальному розв'язанні).

Іноді ж доводиться не блокувати перевезення повністю, а лише обмежувати їх зверху, тобто враховувати умову

$$x_{ij} \le d_{ij} ,$$

де $d_{ij} = const$ відома.

Алгоритми розв'язання транспортної задачі і в цьому випадку можна застосовувати, якщо при виборі, окрім умови $x_{ij} \ge 0$ враховувати умову $x_{ij} \le d_{ij}$. Але в цьому випадку може зустрітися не розв'язна задача через неможливість побудови початкового опорного плану. Але якщо такий план вказаний, то задача завжди має розв'язок.

3. Перевезення неоднорідного продукту

Хай в m пунктах виробництва виробляється p видів продукції в об'ємах, a_{ik} , $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,p}$, (об'єм продукції *к*-го вигляду в *i*-му пункті виробництва).

Ця продукція використовується в n пунктах споживання в об'ємах, b_{ik} , $j = \overline{1,n}, k = \overline{1,p}$.

Відомі транспортні тарифи C_{ijk} — по перевезенню одиниці $к$-го виду продукції від i-го постачальника j-му споживачу.

Хай x_{ijk} — об'єм перевезень $к$-го продукту від i-го до j-му.

Хай, $\sum_{i=1}^{m} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}$ $k = 1, p$

$$\sum\sum\sum c_{ijk} x_{ijk} \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} = a_{ik}\,,\ i = \overline{1,m},\ \ k = \overline{1,p}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} = b_{ik},\ \ j = \overline{1,n},\ \ k = \overline{1,p}$$

$$x_{ijk} \ge 0\ \ \forall, i, j, k.$$

Це трьохіндексна транспортна задача.

Якщо врахувати ще і той факт, що для перевезення може бути використаний різний транспорт, то вийде 4-індексна транспортна задача.

Збільшення числа індексів робить неможливим розв'язання транспортної задачі простими методами (типу потенціалів). Найбільш використаний симплекс-метод. Але при великих m, n, p, …, розмірність задачі сильно збільшується і її розв'язок стає неможливим.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Які види моделей транспортних задач вам відомі?

2. Напишіть модель трьохіндексної транспортної задачі.

3. Напишіть обмеження, коли частина продукту залишиться не вивезеною з пунктів виробництва.

4. Як привести задачу до канонічного вигляду?

ТЕМА 14
ДВОЇСТА ЗАДАЧА ЛП

1. Пряма і двоїста задачі

Ідея двоїстості задач ЛП полягає в наступному.

Кожній даній задачі ЛП за певними правилами можна поставити в відповідність деяку іншу задачу ЛП, що називається двоїстою до вхідної. Така відповідність встановлюється мимовільно, але певним чином повинні бути зв'язані між собою і плани цих задач. Спільний аналіз задачі ЛП і двоїстої їй дозволяє встановити зв'язок між їхніми опорними планами і критерій оптимальності розглядуваних планів.

Нехай задача ЛП задана в канонічній формі.

Вимагається знайти план, що дасть максимальну лінійну форму.

$$\max \to L\,(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i \tag{14.1}$$

За умов:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i\,(i = 1, m) \tag{14.2}$$

$$x_j \geq 0 \tag{14.3}$$

Або у векторній формі

$$L\,(X) = (C, X)' \tag{14.1′}$$

$$AX = B \tag{14.2′}$$

$$X = \geq 0$$

(14.3′)

Двоїстою задачею для задачі (14.7)—(14.9) буде наступна:

Знайти план, що дасть мінімум лінійної форми

$$L\,(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i \to \min. \tag{14.4}$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i >= c_j\ (j = 1, n),\ x_j >= 0. \tag{14.5}$$

Або у векторній формі

$$L\,(Y) = (B, X)' \tag{14.10′}$$

При $$YA >= B. \qquad (14.11')$$

Вектор С будемо називати вектором вартості. Задачу, що має вигляд (14.4)—(14.5), Т. ч., задача, в якій вимагається визначити min L за умов нерівності і змінних, не зв'язаних умовами невід'ємності, зветься задачею ЛП, записаною у зв'язаній канонічній формі.

У задачі (14.4)—(14.5) у порівнянні з задачами ЛП (14.1)—(14.3):

1. Вектор обмежень (14.1)—(14.3) стає вектором вартості (14.4)—(14.5);
2. Вектор вартості (14.1)—(14.3) стає вектором обмежень (14.5);
3. Матриця умов задачі (14.4)—(14.5) є транспонованою матрицею умови задачі (14.1)—(14.3);
4. Задача (14.4)—(14.5) — задача min L, а (14.1)—(14.3) — max L;
5. Обмеження рівності перейшли в обмеження нерівності;
6. Змінилася вимірність багатомірної нескінченності n на m.

Задача (14.1)—(14.3) називається вхідної, а (14.4)—(14.5) — двоїстою до вхідної.

2. Задача ЛП з однорідними обмеженими змінними

Розглянемо задачу ЛП з однорідними обмеженими змінними.

Знайти план $X = (x_1, \ldots, x_n)$, що дасть max лінійної форми L:

$$L(x) = (C, X) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_j \to \max \qquad (14.6)$$

За умов
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j <= b_i \ (i=1, m) \qquad (14.7)$$

$$x_j >= 0 \qquad (14.8)$$

Для того щоб записати задачу, двоїсту до (14.6)—(14.8), останню слідує привести до канонічного вигляду. Це робиться з допомогою вступу додаткових (що балансують) змінних x_{n+i} $(i = 1, m)$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i; \ i = \overrightarrow{1, n} \qquad (14.7`)$$

$$x_j \geq 0; \ j = \overrightarrow{1, n+m} \qquad (14.8`)$$

А лінійна функція має вигляд:

$$L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_i x_j + 0^3 x_{n+i} + \ldots + 0^3 x_{n+m}$$

Двоїстої до задачі (14.6′)—(14.7′)

Буде $$L(У) = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i \to \min \quad (14.9)$$

За умов: $$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i >= c_j \ (j = \overrightarrow{1,n}) \quad (14.10)$$

$$У_i \geq 0 \ (i =) \ \overrightarrow{1,m}\,. \quad (14.11)$$

Умови обмеження (14.7′) переходять в умови (14.10), (14.11) (зважаючи на структуру матриці А = (А/Е) ~ А′ = (А′ /Е)).

Покажемо, що для задачі (14.9)—(14.11) двоїстою буде задача (14.6)—(14.8).

Введемо позначки

$$a_{ij}' = -a_{ij}$$

$$b_i' = -b_i$$

$$c_i' = -c_i$$

Тоді в нових позначках задача (14.9)—(14.11) матиме вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max \quad (14.12)$$

За умови $$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}' y_i <= c_j' \ (j = \overrightarrow{1,n}) \quad (14.13)$$

$$У_I \geq 0 \ (i = \overrightarrow{1,m}) \quad (14.14)$$

Задача (14.12)—(14.14) збігається за типом з задачею (14.6)—(14.8). Напишемо для неї двоїсту:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j' x_j' \to \min \quad (14.15)$$

За умов: $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}' x_j >= b_i' \ (i = \overrightarrow{1,m}) \quad (14.16)$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overrightarrow{1,n}). \quad (14.17)$$

Задача (14.6) — (14.8) перепишеться у вигляді

$$\sum b_i x_i \to \max \tag{14.15′}$$

За умов:
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \; (i = \overrightarrow{1,m}) \tag{14.16′}$$

$$x_j \ge 0 \; (j = \overrightarrow{1,n}). \tag{14.17′}$$

Т. ч. задачі (14.6)—(14.8) і (14.15′)—(14.17′) збігаються.

Пара задач (14.6)—(14.8) і (14.9)—(14.11) називається подвійною зв'язаною парою задач ЛП.

3. Загальна задача ЛП зі змішаними умовами

Розглянемо загальну задачу ЛП зі змішаними умовами.

Визначити
$$\max L(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{14.18}$$

За умов:
$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i ,\, (i = \overline{1, m_1}) \;\; m_1 \le m \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i ,\, (i = \overline{m_1 + 1, m}) \end{aligned}\right\} \tag{14.19}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = \overline{1, n_1}) \qquad n_1 \le n \tag{14.20}$$

За визначенням задача подвійна по відношенню до задачі (14.18)—(14.20), (зв'язана з нею), полягає в мінімізації ЛФ.

$$\overline{L}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{14.21}$$

За умов:
$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \;\, (j = \overline{1, n_1}) \; n_1 \le n \\ &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \;\, (j = \overline{n_1 + 1, n}) \end{aligned}\right\} \tag{14.22}$$

$$y_i \ge 0 \qquad (i = \overline{1, m_1}) \qquad m_1 \le m \tag{14.23}$$

Таким чином зв'язана спряжена з задачею зі змішаними умовами, будується за наступними правилами:

Якщо змінна x_j задачі (14.18)—(14.20) припускається ненегативною, та j-е умова системи (14.22) є нерівністю. Якщо ж x_j

не зв’язана умовою невід’ємності, та j-е умова системи (14.22)— рівність. Аналогічні умови є для обмеження (14.19) і умови (14.23). Як неважко перевірити, задача (14.21)—(14.23) є двоїстою по відношенню до задачі (14.18)—(14.20). Тому цю пару задач називають парою подвійних (або взаємно зв’язаних) задач.

Наведене визначення подвійної задачі не суперечить поняттю подвійності даному раніше.

Перевірити самостійно.

Будь-яку з подвійно зв’язаної пари задач можна вважати вхідною, тоді її називають прямою. Кожна з цієї пари подвійна по відношенню до іншої, тому їх називають взаємно зв’язаною парою.

4. Економічне пояснення подвійної задачі ЛП

Нехай деяке виробництво випускає n видів продукції $П_1$, $П_2$, …, $П_n$. При цьому використовуються S_1, S_2, …, S_m види сировини. На одиницю продукції виду $П_j$ витрачується a_{ij} одиниць сировини виду S_i. Запаси всіх видів сировини обмежені величинами b_1, b_2, …, b_m. Зиск від випуску одиниці продукції $П_j$ складає підприємству C_j грн. Загальний зиск підприємства складе, якщо через x_i позначити кількість одиниць, що випускаються продукції, виду $П_j$:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (14.24)$$

При цьому використання ресурсів повинно підпорядковуватися співвідношенню:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, (i = \overline{1,m}) \qquad (14.25)$$

І будемо припускати, що продукція підприємства не знищується, т. ч.,

$$x_i \ge 0 \qquad (14.26)$$

Природно, припустити, що підприємство прагне випускати вироби $П_j$ в кількості x_j, таких щоб прибуток (14.24) був максимальним, але при цьому повинні дотримуватися умови (14.25) (див. табл. 46).

Таблиця 46

ВИХІДНІ ДАНІ

<table>
<tr><td rowspan="3">Вектор оцінок</td><td rowspan="3">Прибуток</td><td colspan="4">Види продукції</td><td rowspan="3">Запаси</td><td rowspan="3">Види сировини</td></tr>
<tr><td>$П_1$</td><td>$П_2$</td><td>…</td><td>$П_n$</td></tr>
<tr><td>c_1</td><td>c_2</td><td>…</td><td>c_n</td></tr>
<tr><td>y_1</td><td></td><td>a_{11}</td><td>a_{12}</td><td>…</td><td>a_{1n}</td><td>b_1</td><td>S_1</td></tr>
<tr><td>…</td><td></td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>y_m</td><td></td><td>a_{m1}</td><td>a_{m2}</td><td>…</td><td>a_{mn}</td><td>b_m</td><td>S_m</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>…</td><td>x_n</td></tr>
<tr><td colspan="2">План виробництва</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Нехай тепер деяка організація бажає придбати у підприємства, що аналізується, сировину видів S_1, S_2, …, S_m. За якими цінами повинно відпускати це підприємство сировина, щоб виявитися не в збитку, т. ч., як оцінити вартість сировину залежно від того прибутку, який воно приносить підприємству при виготовленні продукції видів $П_j$ $(j = \overline{1,n})$. Тут йдеться не про вартість сировини при її придбанні підприємством, а про відпущену вартість сировини на підприємстві. Нас цікавить, так сказати, відносна вартість сировини з точки зору прибутку, одержуваного підприємством при переробці цієї сировини в продукцію.

Позначимо через $Y = (y_1, \dots y_m)$ — вектор оцінок сировини всіх видів, за якими буде вона проводитися. При виготовленні $П_j$ виду продукції використовуються S_i види сировини в кількості a_{ij}. Вартість всієї сировини на $П_j$ продукцію складе:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \qquad (j = \overline{1,n}) \tag{14.27}$$

Звичайно, що підприємство продаватиме сировину тільки в тому разі, якщо виторг від продажу цієї сировини буде не меншим від того прибутку, який підприємство отримає від переробки цієї сировини в продукцію. Загальна оцінка всіх запасів сировини:

$$\overline{L}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{14.28}$$

Звичайно, що в інтересах організації, що прибуває сировину, придбати цю сировину якнай дешевше, т. ч. мінімізувати (14.28).

Та зрозуміло, що вектор оцінок Y:

$$Y \geq 0, \textbf{ т. е. } y_i \geq 0 \qquad (i = \overline{1, m}). \qquad (14.29)$$

Такий є економічний сенс подвійних задач ЛП.

Подвійна задача є математичним формулюванням проблеми оцінки сировини за відпускними цінами підприємства.

5. Алгоритм побудови подвійної задачі

Кожній задачі ЛП із змішаними обмеженнями вигляду

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i a_{i0} \to \max \qquad (14.30)$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \ldots, n_1, n_1 \leq n \\
&\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i, i = n_1 + 1, n_2 + 2, \ldots, n \\
&x_j \geq 0, j = 1, \ldots, m_1, m_1 < m.
\end{aligned} \qquad (14.31)$$

можна поставити у відповідність іншу задачу, яка називається подвійною по відношенню до першої $\widetilde{F} = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i \to \min$ (14.32)

при обмеженнях

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j, j = 1, \ldots, m_1, m_1 \leq m \\
&\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i = c_j, j = m_1 + 1, m_2 + 2, \ldots, m \\
&y_i \geq 0, i = 1, \ldots, n_1, n_1 < n.
\end{aligned} \qquad (14.33)$$

Зіставляючи форми запису прямої і подвійної задач, можна встановити наступний алгоритм:

1. Якщо пряма задача є задачею мінімізації, то подвійна буде задачею мінімізації, і навпаки.

2. Якщо цільова функція прагне до максимуму, то привести всі нерівності до вигляду $\leq$, при необхідності помноживши нерівності на (–1); якщо до мінімуму, то нерівності повинні мати знак $\geq$.

3. Коефіцієнти цільової функції прямої задачі стають вільними членами обмежень подвійної задачі.

4. Вільні члени прямої задачі $b_1, b_2, \ldots, b_n$ стають коефіцієнтами цільової функції подвійної задачі.

5. Матриця обмежень подвійної задачі виходить транспонуванням обмежень прямої задачі.

6. Число змінних подвійної задачі рівне числу обмежень прямої, і число обмежень подвійної задачі рівне числу змінних прямої задачі і навпаки.

7. Взаємно однозначна відповідність між змінними початкової задачі й обмеженнями двоїстої задовольняє наступному положенню:

j-е обмеження двоїстої задачі буде нерівністю, якщо на *j*-ю змінну початкової задачі накладено вимогу позитивності; якщо ж *j*-я змінна не обмежена в знаку, *j*-е обмеження буде рівнянням.

При розгляді несиметричної пари задач за оптимальною симплексною таблицею прямої задачі можна знайти значення оптимальних змінних подвійної задачі.

Скористаємося співвідношенням $Y^{\text{опт}} = C^{\text{опт}} A_x^{-1}$

Вектор $C^{\text{опт}}$ — вектор-рядок коефіцієнтів цільової функції при базисних змінних, елементи якої розташовуються в тій же послідовності, що і базисні змінні в стовпці B_x оптимальної (останньої) симплекс-таблиці.

Матриця A_x складається із значень векторів, узятих з обмежень прямої задачі (першої симплекс-таблиці), але в тій же послідовності, що і базисні змінні в стовпці B_x оптимальної (останньої) симплекс-таблиці.

Матриця A_x^{-1} складається із значень векторів, узятих з останньої (оптимальної) симплекс-таблиці, але в тій же послідовності, що і базисні змінні в стовпці B_x початкової (першої) симплекс-таблиці.

(Інакше: матриця A_x^{-1} складається із стовпців оптимальної симплекс-таблиці, одержаних на місці одиничних стовпців початкової таблиці).

Оскільки цільова функція прагне до max, змінимо в обмеженнях знаки на «>».

ВИСНОВКИ

Кожній даній задачі ЛП за певними правилами можна поставити у відповідність деяку іншу задачу ЛП, що називається подвійної до вхідної.

Як що первинна задача:

$$\max \rightarrow L\,(x) = \sum_{i=1}^{n} \ c_i\, x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \ a_{ij}\, x_j = b_i\, (i = 1,\, m)$$

$$x_j \geq 0,$$

то подвійною задачею буде наступна:

$$L\,(y) = \sum_{i=1}^{m} \ b_i\, y_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} \ a_{ij}\, y_i >= c_j\, (j = 1,\, n)$$

$$x_j >= 0.$$

Зв’язок між моделями:

Матриця A системи обмежень початкової задачі є транспонованою матрицею в подвійній задачі. Коефіцієнти з лінійної функції початкової задачі є вільними членами обмежень подвійної задачі, а вільні члени B обмежень початкової задачі є коефіцієнтами лінійної функції подвійної задачі.

Економічне обґрунтування подвійної задачі.

Первинна задача	Подвійна задача
Скільки і якої продукції x_j необхідно виробити, щоб при заданих нормах витрати сировини на одиницю продукції a_{ij} і розмірах наявних ресурсів сировини b_i максимізувати прибуток від продукції, що випускається, якщо відомий прибуток (c_i) від реалізації одиниці продукції.	Мета задачі — дізнатися, яка повинна бути ціна кожного з ресурсів, щоб при заданих кількостях ресурсів b_i і величинах вартості одиниці продукції c_j мінімізувати загальну вартість витрат. Змінні y_i називають оцінками або неявними обліковими цінами

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Приклад

$$\begin{aligned}
&F = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \min \\
&3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
&2x_1 - 3x_2 \geq -6 \\
&-x_1 + x_2 \geq -4 \\
&-4x_1 - 7x_2 \geq -28 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Подвійна задача:

$$\widetilde{F}(y) = 6y_1 - 67y_2 - 4y_3 - 28y_4 \to \max$$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ -4 & -7 \end{vmatrix}$$

$$A^T = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -7 \end{vmatrix} \text{ тоді}$$

$$3y_1 + 2y_2 - y_3 - 4y_4 \le 5$$
$$2y_1 - 3y_2 + y_3 - 7y_4 \le -3$$
$$y_j \ge 0$$

Скористаємося співвідношенням $Y^{\text{опт}} = C^{\text{опт}} A_x^{-1}$, щоб знайти значення подвійних змінних.

Користуючись формулою $Y^{\text{опт}} = C^{\text{опт}} A_x^{-1}$ знайдемо тепер значення подвійних змінних.

$C^{\text{опт}} = (-5;\ 3;\ 0;\ 0)$

Матриця $A_x^{-1} = (A_1;\ A_4;\ A_5;\ A_6) = \begin{vmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3/13 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

У формулу $Y^{\text{опт}} = C^{\text{опт}} A_x^{-1}$ підставимо значення і знайдемо значення подвійних змінних.

$$Y^{\text{опт}} = (-5;3;0;0)\begin{vmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 3/13 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad Y^{\text{опт}} = (0{,}69;\ 1{,}46;\ 0;\ 0)\ F_{\text{опт}} = -4{,}61.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. У чому полягає ідея подвійності задач ЛП?
2. Порівняйте початкову задачу ЛП з подвійною задачею.
3. Розгляньте задачу ЛП з однорідними обмеженими змінними.
4. Розгляньте загальну задачу ЛП зі змішаними умовами.
5. Дайте економічне обґрунтування подвійної задачі.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

2. Приклад

Побудуйте подвійну задачу і розв'яжіть її симплекс-методом.
Варіанти:

1. $F = 2x_1 - x_2 \to max$
$x_1 - x_2 \geq -3$
$6x_1 + 7x_2 \leq 42$
$2x_1 - 3x_2 \leq 6$
$x_1 + x_2 \geq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

2. $F = 5x_1 + x_2 \to min$
$x_1 + 7x_2 \geq 7$
$-2x_1 + x_2 \leq 6$
$2x_1 + 5x_2 \geq 10$
$7x_1 + x_2 \geq 7$
$5x_1 + 2x_2 \geq 10$
$x_1 \leq 6$
$x_2 \leq 7$
$x_1, x_2 \geq 0$

3. $F = x_1 - x_2 \to max$
$-x_1 + x_2 \geq 8$
$8x_1 + 5x_2 \leq 6$
$x_1 - 2x_2 \leq 2$
$x_1 + 4x_2 \geq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

4. $F = 7x_1 + x_2 \to max$
$x_1 + x_2 \leq 14$
$3x_1 - 5x_2 \leq 15$
$5x_1 + 3x_2 \geq 21$
$x_1, x_2 \geq 0$

5. $F = 7x_1 - x_2 \to min$
$x_1 + x_2 \geq 3$
$5x_1 + x_2 \geq 5$
$x_1 + 5x_2 \geq 5$
$0 \leq x_1 \leq 4$
$0 \leq x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

6. $F = x_1 + x_2 \to min$
$3x_1 + x_2 \geq 8$
$x_1 + 2x_2 \geq 6$
$x_1 - x_2 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$

7. $F = x_1 + 3x_2 \to max$
$-x_1 + x_2 \leq 3$
$4x_1 + 3x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \geq 0$

8. $F = 2x_1 + x_2 \to max$
$x_1 - x_2 \geq 4$
$x_1 + x_2 \geq 10$
$4x_1 - x_2 \leq 12$
$7x_1 + x_2 \leq 7$
$x_1, x_2 \geq 0$

9. $F = 2x_1 + 2x_2 \to max$
$3x_1 + 2x_2 \geq -6$
$x_1 + x_2 \geq 3$

10. $F = 2x_1 - 4x_2 \to max$
$8x_1 - 5x_2 \leq 16$
$x_1 + 3x_2 \geq 2$

$x_1 \le 3$ $x_2 \le 5$	$2x_1 + 7x_2 \le 9$ $x_1, x_2 \ge 0$ $x_1, x_2 \ge 0$
11. $F = 5x_1 + 4x_2 \to max$ $2x_1 - 3x_2 \ge 3$ $x_1 + 4x_2 \le 8$ $x_1 + 3x_2 \le -6$ $x_1 + 3x_2 \ge -4$ $x_1, x_2 \ge 0$	12. $F = 2x_1 - x_2 \to min$ $x_1 + 7x_2 \ge 7$ $-2x_1 + x_2 \le 6$ $2x_1 + 5x_2 \ge 10$ $7x_1 + x_2 \ge 7$ $5x_1 + 2x_2 \ge 10$ $x_1, x_2 \ge 0$
13. $F = 5x_1 - 4x_2 \to min$ $-x_1 + x_2 \ge -3$ $x_1 + 5x_2 \le 1$ $x_1 - x_2 \le -2$ $x_1 + 4x_2 \ge 4$ $x_1, x_2 \ge 0$	14. $F = 5x_1 + 6x_2 \to max$ $6x_1 + 3x_2 \le 12$ $-3x_1 + 5x_2 \le 15$ $2x_1 + 3x_2 \ge -6$ $x_1, x_2 \ge 0$
15. $F = 4x_1 - x_2 \to min$ $3x_1 + x_2 \ge 8$ $5x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 + 5x_2 \ge 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	16. $F = x_1 + x_2 \to min$ $5x_1 + x_2 \ge 5$ $x_1 + 2x_2 \ge 6$ $x_1 - x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge$
17. $F = 2x_1 - 3x_2 \to max$ $x_1 - x_2 \le 3$ $-4x_1 + 3x_2 \le -10$ $5x_1 - x_2 \ge 5$ $x_1, x_2 \ge 0$	18. $F = 2x_1 + 3x_2 \to max$ $x_1 - x_2 \le 4$ $x_1 - x_2 \ge 5$ $4x_1 - x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$
19. $F = 6x_1 + 2x_2 \to min$ $4x_1 + 5x_2 \ge 6$ $x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 \le 5$ $x_2 \le -5$ $x_1, x_2 \ge 0$	20. $F = 2x_1 + x_2 \to max$ $x_1 - x_2 \le 6$ $x_1 + 3x_2 \ge 6$ $2x_1 - 3x_2 \le -9$ $x_1, x_2 \ge 0$

ЛАБОРАТОРНІ ЗАВДАННЯ

Написати програму (наприклад, на С++) для запису подвійної задачі ЛП.

Частина 3

ЦІЛОЧИСЕЛЬНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ТЕМА 15

ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Значна частина економічних задач, що відносяться до ЗЛП, вимагає цілочисельного розв'язання. До них належать задачі, у яких змінні величини означають кількість одиниць неподільної продукції, наприклад, розподіл виробничих завдань між підприємствами, розкрій матеріалів, завантаження устаткування, розподіл транспорту по рейсах, а так само задачі по виробництву неподільної продукції.

Задача цілочисельного програмування формується так само, як і задача лінійного програмування, але включається додаткова вимога, яка полягає в тому, що значення перемінних, складових оптимальних розв'язок повинні бути цілими ненегативними числами ($x_{ij} \geq 0$, x_{ij} — цілі).

Умова цілочисельності:

$x_{ij}(x_{ij} - 1) = 0$, тобто x_{ij} — ціле

Дробовою частиною $\{x\}$ числа х називається $\{x\} = x - [x]$, де $[\underline{x}]$ — ціла частина, тобто найбільше ціле число, що не перевищує x.

(якщо $x_{ij} = 1$, то $1 - (1 - 1) = 0$).

2. МОДЕЛІ ОПЕРАТИВНО-КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНУВАННЯ

Внутрішньозаводські плани враховують терміни виконання виробничої програми по випуску продукції, розподіл завдань за видами робіт, устаткування із зазначенням послідовності обробки деталей та ін.

Для складання календарних планів виробництва використовують оперативно-календарне планування, тобто моделювання виробництва в часі.

Оперативно-календарні плани мають велике значення для тих галузей промисловості, де виробляється велике число складних видів виробів і використовується багато різних верстатів.

Роздивимося задачу цілочісельного програмування.

3. Задача розподілу виробничої програми в часі

Постановка задачі:

Для оптимізації планів виконання замовлень у дрібносерійному виробництві може застосовуватися модель об'ємно-календарного планування.

Уведемо обмеження

I — номер замовлення, i – 1, ..., m;

j — номер виробничої ділянки, що складається з K груп однорідного устаткування;

k = 1,..., K (k-вид груп однорідного устаткування);

j — номер місяця, у якому починає виконуватися замовлення;

t — номер місяця, у плані якого виконується замовлення;

a_{ij}^{kt} — витрати верстатного часу k-ї групи устаткування по виконанню i-го замовлення, якщо його можна почати в j-му місяці і виконати в t-му місяці;

A^{kt} — розташовуваний фонд верстатного часу k-й групи устаткування в t-му місяці;

c_{ij} — сумарна трудомісткість (верстатний час) виконання i-го замовлення, якщо його почали виконувати в j-му місяці;

x_{ij} — цілочисельна перемінна = 1, якщо i-е замовлення почне виконуватися в j-му місяці;

E_1 — безліч номерів замовлень, які треба обов'язково включити в план.

Економіко-математична модель:

Критерій оптимальності — max завантаження виробничих потужностей [6].

Цільова функція

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} c_{ij} x_{ij} \to \max . \qquad (15.1)$$

Сумарна трудомісткість виконання замовлень:

$$c_{ji} = \sum_k \sum_t a_{ij}^{kt} \qquad (15.2)$$

Обмеження:

По фонду часу роботи верстатів

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{T} a_{ij}^{kt} x_{ij} < A^{kt}\ ,\ k = 1,\ \ldots,\ K\ t = 1,\ \ldots,\ T. \qquad (15.3)$$

По обов'язкових включеннях замовлення в план

$$\sum_{j=1}^{T} x_{ij} = 1\,,\ i \in E_1 \qquad (15.4)$$

(і-те замовлення повинне виконуватися в якомусь j-му місяці, якщо замовлення включене в план).

По необов'язкових включеннях замовлення в план

$$\sum x_{ij} \le 1\ \ i \notin E_1. \qquad (15.5)$$

За умовою цілочисельності

$$x_{ij}\,(x_{ij} - 1) = 0,\ \text{тоді}\ x_{ij} \text{ — ціле} \qquad (15.6)$$

Ще один приклад задачі цілочисельного програмування — «Задача оптимального використання устаткування», яку можна розглядати як окремий випадок «Задачі оптимального розкрою матеріалу» [7].

4. Задача про рюкзак

Задача про рюкзак змістовно означає вибір предметів з найбільшою сумарною вартістю, що вміщаються в рюкзак заданого розміру. Ця задача часто виникає при виборі оптимального управління в різних економіко-фінансових ділянках (розподіл бюджету відділу за проектами і т. п.).

Задача належить до задач цілочисельного програмування.

Постановка задачі:

Є ранець (рюкзак) заданого об'єму і необмежена кількість кожного з N різних предметів. Для кожного предмета i-го типу при $i = 1, 2, ..., N$ відомі його об'єм і цінність. У ранець можна покласти ціле число предметів різного типу. При цьому мета полягає в тому, щоб сумарна вартість усіх предметів, що знаходяться в ранці, була максимальна, а їх об'єм не перевищував величини V.

Задача про ранець може також розв'язуватися Гоморрі-методом, методами динамічного програмування та ін. До задачі про ранець може бути зведена задача максимізації використовування вантажопідйомності рухомого складу, вантажомісткості судна і т. п.

Задача має формальну постановку, подану нижче:

Відомі натуральні числа a_1, a_2, …, a_n (звані «розмірами» або «вагами» предметів), c_1, c_2, …, c_n («вартості» предметів) і B («розмір» рюкзака).

Знайти максимальне значення цільової функції $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (15.7)

з обмеженням на розмір «рюкзака»

$$\sum_{j=1}^{n} a_i x_i = B \text{ , де } \quad (i = 1, m) \qquad (15.8)$$
$$x_i \in \{0;1\}$$

5. Задача про бомбардувальник

Є m — перший вектор $B = (b_1, \ldots.., b_m)$ обмежених ресурсів, які можна використовувати при перевезенні різних за своїми характеристиками вантажів.

Кожен j-й вантаж ($j = 1, n$) характеризується такими властивостями:

1. надійність, тобто для транспортування може вибиратися будь-який вантаж в кількості x_j кратному 1;
2. корисність — c_j (вірогідність поразки);
3. витрати i-го ресурсу на перевезення одиниці j-го типу вантажу a_{ij} $i = 1, m$, j = 1, n.

Вимагається вибрати такий набір вантажу для транспортування, при якому максимізується загальна корисність рейсу:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (15.9)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \text{де}$$
$$x_j \ge 0, (j = 1, n) \qquad (15.10)$$
$$x_j - \text{ціле}$$

Задача про ранець — це окремий випадок попередньої задачі. Кожний з n предметів може або вибиратися ($x_j = 1$), або ні ($x_j = 0$). Тоді до (15.7)—(15.8) додається умова: $x_j \in \{0;1\}$ (15.11)

Це задача з нульовими змінними.

6. Задача про вибір типу суден

Пароплавство знає, що в середньому, за обслуговуваними маршрутами за сезон проїжджає постійне число людей. Ефективність використовування транспортних засобів пароплавства складається з ефективності обслуговування кожного маршруту і визначається різницею між доходами від рейсів і витратами пароплавства по обслуговуванню рейсів. (Дохід — кількість проданих квитків, витрати — зміст обслуговуючого персоналу, суден, витрата палива).

Мета: вибрати для кожного маршруту такі типи суден і в таких кількостях, які дозволили б задовольнити потреби в кількостях місць для пасажирів і максимізувати прибуток пароплавства.

Розв'язок:

Хай по j-му маршруту за сезон приїжджає b_j пасажирів ($j = 1, n$). Перевезення можна здійснювати m різними типами суден (i), для яких відомі такі характеристики:

1. a_{i1} — кількість пасажирських місць;
2. a_{i2} — обслуговуючий персонал;
3. a_{i3} — витрата пального за сезон;
4. c_{ij} — прибуток за сезон від використовування i-го виду суден на j-м маршруті;
5. b_2 — загальна чисельність обслуговуючого персоналу в пароплавстві:
6. b_3 — загальна витрата пального пароплавством за сезон.

Хай x_{ij} — кількість суден i-го типу на j-у маршруті.

Тоді функція мети:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max \tag{15.12}$$

Всі пасажири на всіх маршрутах повинні бути перевезені:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_{ij} \geq b_1 \tag{15.13}$$

обмеження на загальну чисельність обслуговуючого персоналу в пароплавстві:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_{ij} \geq b_2 \tag{15.14}$$

обмеження на витрату пального в пароплавстві: $\sum_{i=1}^{m} a_{i3}x_{ij} \geq b_3$ (15.15)

$$x_I \geq 0,\ x_i \text{ — цілі числа.}$$

7. Комбінаторна задача

Розглянемо задачу комівояжера (бродячого торгівця).

Є n пунктів P_1, P_2, ….., P_n. Хай для проїзду з P_i в P_j витрачається час t_{ij}. Задача комівояжера, що знаходиться в P_i — об'їхати всі пункти, побувавши в кожному рівно один раз, повернутися в початковий пункт і витратити на це мінімальний час.

Всього можливо $(n-1)!$ (оскільки Pi вже вибраний) варіантів.

Ототожнимо кожен варіант із системою чисел x_{ij} $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, де $x_{ij} = 1$, якщо комівояжер з P_i виїжджає в P_j і $x_{ij} = 0$ — інакше.

Тоді загальний час на реалізацію варіанта

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} \to \min \tag{15.16}$$

З кожного пункту P_i виходить одне ребро і входить одне ребро графа $x_{ij} = 1$, якщо комівояжер з P_i потрапляє в P_j (тобто якщо P_i і P_j сполучені ребра), $x_{ij} = 0$ інакше, тому з i-ої вершини виходить 1 ребро:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \tag{15.17}$$

$$j \neq i$$

І в j-ю вершину входить 1 ребро:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \tag{15.18}$$

$$i \neq j$$

Але умов (15.17)—(15.18) недостатньо для аналітичного зображення обмежень задачі, оскільки рис. 4 також задовольняє умовам (15.17)—(15.18). Тому необхідно ввести умови обмеження, що не допускають розщеплювання маршруту довжини n на маршрути меншої довжини (тобто виключення складає b) на рис. 5.

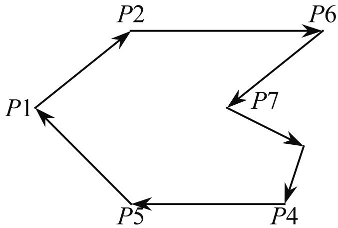

Рис. а)

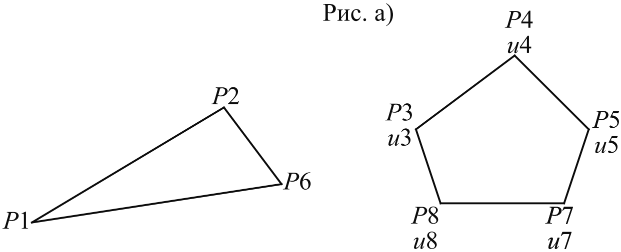

Рис. b)

де $j \neq i$.

Рис. 5. Варіанти можливих зациклень маршрутів

З кожним пунктом P_i пов'яжемо деяке невідоме число u_i ($i = 1, n - 1$) при якому будуть виконуватися умови:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \; i, \qquad j = 1, n \; i \neq j \tag{15.19}$$

Хай $\{x_{ij}\}$ відповідає деяким замкнутим маршрутам. Тоді не існує чисел ui, які б разом з $\{x_{ij}\}$ задовольняли (15.19).

Умова (15.19) забезпечує замкнутість маршруту і відсутність петель.

Таким чином, задача комівояжера звелася до min $\to T(x)$, тобто умова функції (15.16) при обмеженні (15.17), (15.18), (15.19) і обмеженні на змінні

або
$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ де } i, j = 1, n \; i \neq j \\ 1, \text{ де } i, j = 1, n \; i \neq j \end{cases} \tag{15.20}$$

$$u_i \text{ — цілі } i = 1, n - 1.$$

ВИСНОВКИ

Задача цілочисельного програмування формується так само, як і задача лінійного програмування, але включається додаткова вимога, яка полягає в тому, що значення: перемінні, складові оптимальні розв’язання повинні бути цілими ненегативними числами ($x_{ij} \geq 0$, x_{ij} — цілі).

Ця задача часто виникає при виборі оптимального управління в різних економіко-фінансових сферах (розподіл бюджету відділу за проектами і т. п.).

У загальному вигляді економіко-математична модель задачі цілочислового програмування зводиться до вигляду:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \text{ де,}$$
$$x_j \geq 0, (j = 1, n)$$
$$x_j - \text{ціле}$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Які задачі цілочислового програмування вам відомі?

2. Напишіть їх економіко-математичні моделі.

3. Розгляньте умову, що забезпечує замкнутість маршруту у комбінаторній задачі.

ТЕМА 16

МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗКРОЮ МАТЕРІАЛУ

1. ЗАДАЧА ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Формалізуємо задачу:

Існує N одиниць вихідного матеріалу (довга лозина, аркушевий прокат, дошки, тканина і т. д.) довжиною l чи площею s.

Необхідно розкроїти на m видів заготівель, довжиною l_j чи площею s_j, де $j = (1, \ldots, m)$ — номер виду заготівлі. Число заготівель j-го виду входить у план нарізки, рівної b_j.

Розкрій матеріалу може бути зроблений n способами. При цьому відомо, скільки заготівель j-го виду утвориться з кожного і-го способу розкрою. Число цих заготівель (j) у i-му розкрої дорівнює a_{ij}.

Для кожного способу розкрою відомий розмір відходів c_i ($i =$ $= 1, \ldots, n$).

Через x_i позначимо кількість вихідного матеріалу, розрізаного i-м способом (x_i — цілі).

Математична модель задачі

У загальному вигляді математична модель така.

Потрібно знайти безліч перемінних $x_I \geq 0$ ($i = 1, \ldots n$) — кількість матеріалу, розрізаного i-м способом, що задовольняють наступним умовам:

Цільова функція

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \min \qquad (16.1)$$

Обмеження на ресурс вихідного матеріалу

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq N \qquad (16.2)$$

Обмеження по числу заготівель кожного виду

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j \quad (j = 1, \ldots, n) \qquad (16.3)$$

Якщо передбачається комплектність (x) заготівель, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j x \qquad (16.4)$$

тоді

$$\frac{\sum_j a_{i1}x_i}{b_1} = \frac{\sum_j a_{ij}x_i}{b_j} = \ \dots = \frac{\sum_j a_{nj}x_i}{b_m} \qquad (16.5)$$

$$x_I \geq 0 \text{ , } x_i \text{ — цілі числа.} \qquad (16.6)$$

2. Задача про розкрій тканини

Постановка задачі:

На швейній фабриці тканина може бути розкроєна декількома способами для виготовлення потрібних деталей швейних виробів. Хай при j-му варіанті розкрою (j = 1, n) тканини виготовляється b деталей i-го виду (i = 1, m), а величина відходів при даному варіанті розкрою рівна c_j. Знаючи, що деталей i-го виду слід виготовляти B_i штук, вимагається розкроїти тканину так, щоб була одержана необхідна кількість деталей кожного виду при мінімальних загальних відходах.

Розв'язок:

Припустимо, що по j-му варіанту розкроюється x_j сотень м^2 тканини. Оскільки при розкрої тканини по j-му варіанту виходить b_{ij} деталей i-го виду, по всіх варіантах розкрою з використовуваних тканин буде одержано

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + ... + b_{in}x_n$$

деталей i-виду. Оскільки повинно бути виготовлено B_i деталей даного виду, то

$$b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + ... + b_{in}x_n = B_i \ \ (i = 1, m).$$

Загальна величина відходів по всіх варіантах розкрою тканини складе

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \, .$$

Таким чином, приходимо до наступної математичної задачі: знайти мінімум функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (16.7)$$

за умови, що її змінні задовольняють системі рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = B_j \ \ (\mathrm{i} = 1, m) \qquad (16.8)$$

і умові позитивності $x_{ij} \geq 0$ (j = 1, n).

Сформульована задача є задачею лінійного програмування, оскільки функція (16.7) лінійна, а система (16.8) містить тільки лінійні рівняння.

ВИСНОВКИ

Підприємствам або зовнішнім службам постачання часто доводиться розв’язувати задачу «Розкрою вихідного матеріалу» (наприклад, у металопрокаті — лозини, листовий або рулонний металопрокат, лісоматеріали, тканини, шкіра, папір і т. ін.).

У більшості випадків розкрій матеріалу на заготівлі виробляється в заданих пропорціях, що забезпечують одержання комплекту заготівель, необхідних для виробництва конкретних видів продукції.

Використання ПОЕМ для одержання оптимальних варіантів розкрою може дати зменшення відходів до 20 % від величини нарізаного матеріалу.

Розробка раціональних планів розкрою за допомогою ПОЕМ особливо ефективна в умовах багатономенклатурного виробництва, коли кількість варіантів розв’язання дуже велика.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

Приклад

Задача про раціональне розкроювання матеріалу

Розглянемо задачу (див. рис. 6).

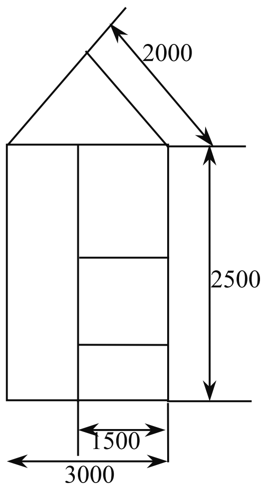

Рис. 6. Ескіз рами

Потрібно виготовити раму (див. рис. 2) з металевого кута, довжиною l = 6м (запас N = 100 шт.)

Позначимо

$i = 1$ — номер заготівлі довжиною 1500 м — 2 шт.
$i = 2$ — номер заготівлі довжиною 2000 м — 2 шт.
$i = 3$ — номер заготівлі довжиною 2500 м — 3 шт.
$i = 4$ — номер заготівлі довжиною 3500 м — 2 шт.

Варіанти розкрою кута довжиною 6 м дивись в табл. 47.

Нехай:

x_i — число прутів, розрізаних по i-му варіанту (x_i — цілі)

Таблиця 47

ВАРІАНТИ РОЗКРОЮ

N варіанта розкрою	Види заготівель				Відходи (м)
	3	2,5	2	1,5	
1 (x_1)	2	—	—	—	—
2 (x_2)	1	1	—	—	0,5
3 (x_3)	1	—	1	1	1,0
4 (x_4)	1	—	—	—	—
5 (x_5)	—	2	—	—	1,0
6 (x_6)	—	1	1	1	—
7 (x_7)	—	1	—	—	0,5
8 (x_8)	—	—	3	3	—
9 (x_9)	—	—	2	2	0,5
10 (x_{10})	—	—	1	1	1,0
11 (x_{11})	—	—	—	—	—
План нарізки	2	3	2	2	

Усього буде отримано заготівель

$N_{1\,:\,2}\, x_4 + x_6 + x_7 + x_9 + 2x_{10} + 4x_{11} = 2$
$N_2 : x_3 + x_6 + 3x_8 + 2x_9 + x_{10} = 2$
$N_3 : x_2 + 2x_3 + x_6 + x_7 = 3$
$N_{4\,:\,2}\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$

З умов комплектності

$(2x_4 + x_6 + x_7 + x_9 + 2x_{10} + 4x_{11}) / 2 = (x_3 + x_6 + 3x_8 + 2x_9 + x_{10}) / 2 = (x_2 + 2x_3 + x_6 + x_7) / 3 = (2x_1 + x_2 + x_3 + x_4) / 2$

$\sum x_j \le 100$ — запас кутів N = 100 шт.

Цільова функція
$L(x) = 0,5x_2 + x_3 + x_5 + 0,5x_7 + 0,5x_9 + x_{10} \rightarrow \min$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Напишіть економіко-математичну модель задачі «Про розкрій»
2. Напишіть цільову функцію для максимуму комплектів заготовок.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Задача

На комбінат надійшли дві партії дошок: 1-а складається з 50 шт. довжиною по 6,5 м кожна, 2-а з 200 шт. по 4 м кожна. З цих дошок треба виготовити комплекти, що складаються з 2-х заготовок по 2 м кожна і з 1-ї заготовки по 1,25 м. Треба так розпиляти дошки, щоб одержати максимальне число комплектів.

2. Задача

На підприємство надходять однотипні рулони шириною 700 см, які треба розпиляти на заготовки трьох видів: 1-й шириною 230 см, 2-й — 190 см, 3-й — 80 см. План заготовок: a_1 = = 60 шт., a_2 = 90 шт., a_3 = 80 шт. План має виконуватися з мінімальними відходами.

Визначити план розпилу, що забезпечує максимальне число комплектів.

3. Задача

Зробити розпил 5-метрових колод на бруси розмірами 1,5; 2,4; 3,2 м у відношенні 2: 3:5 так, щоб мінімізувати загальну величину відходів.

4. Задача

Для виготовлення брусів трьох розмірів 0,6; 1,5; 2,5 м у співвідношенні 2 : 1: 3 на розпил надходять колоди довжиною в 3 і 2 метри. Співвідношення між 3- і 2-метровими колодами складає 1:3.

Визначити план розпилу, що забезпечує максимальне число комплектів.

ТЕМА 17

ОПТИМАЛЬНІ ПРИЗНАЧЕННЯ АБО ПРОБЛЕМА ВИБОРУ

1. Загальні поняття

Задача про якнайкращий розподіл деякого числа робіт між таким же числом виконавців за умови взаємно однозначної відповідності між безліччю робіт і виконавців називається «задачею про призначення».

Постановка задачі:

Є n вакантних посад і m претендентів на ці місця. Ефективність i-го претендента на j-ій посаді дорівнює $V(i, j)$. Вимагається призначити претендентів так, щоб їх сумісна ефективність була максимальною.

Або ж: шкода від i-го претендента на j-ой посаді рівна $V(i, j)$. Вимагається призначити претендентів так, щоб сукупна шкода виявилася мінімальною.

Дві матриці $C = (c_{ij})$ і $D = (d_{ij})$ назвемо еквівалентними, якщо одна з них виходить з іншої шляхом перетворення:

$$d_{ij} = c_{ij} + e_i + f_j \quad j = \overline{1,n}\,, \; i = \overline{1,m} \tag{17.1}$$

Зрозуміло, що $c_{ij} = d_{ij} - e_i - f_j \quad j = \overline{1,n}\,, \; i = \overline{1,m}$.

Теорема.

Множина оптимальних призначень двох задач вибору з еквівалентними матрицями збігається.

Доказ:

Доказ проведемо від противлежного. Виконаємо перетворення C і D по (17.1):

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & \cdots & f_j & f_n & \end{array} & \\ C = & \left\{\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{array}\right\} & \begin{array}{c} e_1 \\ \cdots \\ e_i \\ \cdots \\ e_n \end{array} \sim D = (c_{ij} + e_i + f_j) \end{array}$$

(d) $\qquad d_{ij} = c_{ij} + e_i + f_j$

Нехай I_c^* — оптимальне призначення для задачі з C.

$$I_c^* = \{(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (n, j_n)\}$$

Нехай для задачі з матрицею D існує інше оптимальне призначення, краще ніж I_c^*.

$$I_D^* = \{(1, j_1^{'}), (2, j_2^{'}), \ldots, (n, j_n^{'})\}$$

Це означає, що

$$\overbrace{d_{1j_1^{'}} + d_{2j_2^{'}} + \ldots + d_{nj_n^{'}}}^{\text{для } I_D^{'*}} > \overbrace{d_{1j_1} + d_{2j_2} + \ldots + d_{nj_n}}^{\text{для } I_C^*}$$

з (d):

(*) $c_{1j_1^{'}} + e_1 + f_{j_1^{'}} + \ldots + c_{nj_n^{'}} + e_n + f_{j_n^{'}} > c_{1j_1} + e_1 + f_{j_1} + \ldots + c_{nj_n} + e_n + f_{j_n}$

$\Sigma f_{j'i} = \Sigma f_{ji}$, так як це одні і ті ж f_j тільки можуть бути взяті в іншому порядку. З (*), слідує

$$c_{1j_1^{'}} + \ldots + c_{nj_n^{'}} > c_{1j_1} + \ldots + c_{nj_n}$$

тобто отримане призначення I_D^* краще ніж оптимальне I_C^*. Суперечність доводить, що у D не може бути інше, ніж у C оптимальне призначення.

Оскільки властивість еквівалентності матриць взаємна, то так само доводиться, що будь-яке оптимальне призначення для D оптимальне і для C.

2. Задача про призначення

Нехай потрібно виконати n різних робіт і є n механізмів (машин) для їх виконання, причому кожний механізм може бути використаний на будь-якій, але одній роботі. Продуктивність i-го механізму при виконанні j-ої роботи — c_{ij}.

Потрібно так розподілити механізми по роботах, щоб сумарна продуктивність була максимальною.

Визначимо через x_{ij} — факт призначення i-го механізму на j-у роботу, при цьому $x_{ij} = 1$, якщо це призначення є і $x_{ij} = 0$ в іншому випадку.

ЕММ:

Сумарна продуктивність:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max . \qquad (17.2)$$

Кожний механізм призначається на одну роботу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = \overline{1, m} . \qquad (17.3)$$

Кожна робота виконується тільки одним механізмом:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n} \tag{17.4}$$

$$x_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix},\ \forall\ i, j. \tag{17.5}$$

Обмеження (17.5) роблять задачу дискретними $\overline{\subseteq}$ в З. Л. П. Це задача з бульовими змінними. Але у цієї моделі всі ознаки лінійної моделі (крім (79) — або навіть транспортної (якщо без (17.5)).

Більше того, внаслідок властивостей ТЗ при цілочисельних a_i і b_j x_{ij} завжди цілі.

Тому задача (17.2)—(17.4) з додатковою умовою

$$x_{ij} \geq 0,\ \forall\ i, j \tag{17.6}$$

може бути розв'язана методом потенціалів, але в розв'язку x_{ij} буде рівне 0 або 1.

Метод потенціалів простіший за симплекс-метод, а метод розв'язання задачі (17.2)—(17.5) простіший за метод потенціалів.

Розв'язок:

Нехай

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

матриця ефективності задачі про призначення.

Розв'язати задачу (17.2)—(17.5) — означає: вибрати з кожного рядка матриці C і кожного стовпця C по одному елементу c_{ij}, але так, щоб

$$\Sigma\ \Sigma\ c_{ij},$$

вибраних елементів була максимальною.

Зауваження:

Розв'язати задачу (17.2)—(17.5) з умовою максимізації (17.4) — це те ж, що й розв'язати задачу (17.2), (17.3), (17.5) з умовою:

$$L(x) = \Sigma\ \Sigma\ (-c_{ij})\ x_{ij} \to \min$$

Тепер перейдемо від задачі (17.2), (17.4), (17.5), (17.6) до задачі з еквівалентною для «$-C$» матрицею D, яка мала б тільки ненегативні елементи. І в кожному стовпці і в кожному рядку було б хоч би по одному нульовому елементу. Для цього до елементів кожного стовпця матриці «$-C$» додамо найбільший з елементів цього стовпця, але матриці C. Отримаємо матрицю C' з позитивними елементами і в кожному стовпці є хоч би по одному нулю.

Тепер з кожного рядка C' віднімемо min елемент цього рядка. Отримаємо матрицю D з $d_{ij} \geq 0$, в кожному рядку і стовпці якої є хоч би по нулю ($d_{ij} = -cij + \max c_{ij}$ — $\min c'_{ij}$ $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$). Назвемо ці дії попередніми перетвореннями.

Мінімально можливе значення суми n елементів ненегативної матриці дорівнює, очевидно, нулю. Т. ч., наша задача зводиться тепер до вибору в матриці D, або в еквівалентній їй матриці з ненегативними елементами, n нульових елементів по одному в кожному стовпці і кожному рядку.

Значення алгоритму, що розробляється, полягає в тому, щоб, послідовно переходячи від одного вибору нулів до іншого, що містить на один нуль більше, ніж попередній, побудувати повний вибір (план розподілу).

Попередні перетворення дадуть нам по одному нулю в кожному рядку і в кожному стовпці. Якби нам вдалося серед цих нулів вибрати такі n, щоб кожний з них знаходився в стовпці і рядку, які не містять інших нулів, то задача була б розв'язана. Якщо це нам зробити не вдається, то це означає, що перший вибір нулів поганий і спробуємо, замінюючи один вибраний нуль іншим невибраним, поліпшити ситуацію. Якщо, перебравши всі нулі матриці, ми не доб'ємося успіху, то потрібно перетворити матрицю так, щоб в ній з'явилося більше нулів (потенційних претендентів на включення в список вибраних). При цьому на кожному кроці необхідно перейти до вибору з більшим числом нулів.

ВИСНОВКИ

Задача про призначення має багато інтерпретацій: розподіл робіт між механізмами, розподіл цілей між вогняними засобами для максимізації математичного очікування числа уражених цілей або середнього збитку і т. д.

При її розв'язанні шукають оптимальне призначення з умови максимуму загальної продуктивності, яка рівна сумі продуктивності виконавців. Продуктивність кожного виконавця при виконанні кожної з наявних робіт задається наперед. Задача зводиться до задачі лінійного програмування.

Задача про призначення є окремим випадком транспортної задачі. Найефективнішим методом її розв'язання є угорський метод, за яким, виходячи з часткового плану перевезень, за кінцеве число ітерацій можна побудувати оптимальний план перевезень.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте постановку задачі про призначення.

2. Напишіть ЕММ задачі про призначення

ТЕМА 18

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

1. СПРОЩЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Алгоритм:

1. При знаходженні максимуму функції в кожному стовпці вибрати максимальний елемент і відняти з нього кожен елемент стовпця.

(При знаходженні мінімуму функції в кожному рядку вибрати мінімальний елемент і відняти його з кожного елемента рядка)

2. У кожному рядку вибрати мінімальний елемент і відняти його з кожного елемента рядка.

(При знаходженні мінімуму функції в кожному стовпці вибрати мінімальний і відняти його з кожного елемента стовпця).

3. Спробувати помітити нулі «*» так, щоб «*» зустрічалися тільки один раз в кожному рядку і в кожному стовпці. У цьому випадку оптимальний план знайдений.

4. Якщо «*» не розставляються, провести мінімальну кількість вертикальних і горизонтальних ліній так, щоб вони хоча б один раз перетнули кожен нульовий елемент.

5. Серед невикреслених елементів вибрати мінімальний і позначити його h.

6. Побудувати нову матрицю, в якій:

- Зі всіх незакреслених елементів відняти h;
- До елементів, закреслюваних двічі, додати h;
- Елементи, закреслювані один раз залишити без змін.

7. Повернутися до пункту 3.

2. УГОРСЬКИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Алгоритм:

1. Виконати попереднє перетворення $C \to D$.

2. Вибір «0».

2.1. Відмітити «*» будь-який «0» в 1-му стовпці матриці D.

Відмітити «*» будь-який «0» у 2-му стовпці матриці D, але не лежачий в тому рядку, що і «0» першого стовпця.

Відмітити «*» будь-який «0» в 3-му стовпці матриці D, але не лежачий в тих же рядках, що і «0» першого і другого стовпців і т. д.

2.2. Якщо «*» відмічене n «0», то задача розв'язана. Відповідні вибраним елементам матриці D ($d_{ij} = 0^*$) еквівалентні $x_{ij} = 1$. Призначення об'єктів на роботу виконано. Розв'язання задачі закінчити.

2.3. Якщо «0*» менше ніж n, то перейти до п. 3.

3. Вибір нових «0».

3.1. Відмітимо знаком «+» стовпці, в яких міститься «0*» і назвемо ці стовпці вибраними (пізніше з'являться вибрані рядки, коли будуть вибиратися нулі-претенденти — «0′»). Елементи, що стоять на перетині невибраних стовпців і невибраних рядків, називаються невибраними елементами. Інші елементи вибрані.

3.2. Якщо в матриці немає невибраних «0», то знайти мінімальний елемент серед невибраних елементів матриці і відняти його з елементів невибраних рядків, а потім додати до елементів вибраних стовпців (т. ч. збережуться значення 0*). Отримаємо еквівалентну матрицю, що містить принаймні один невибраний нуль. Помітки не знімати. Здійснюється, т. ч., мінімізація рішення по мінімально можливих приростах $L(x)$. Перейти до п. 3.3.

3.3. Якщо в матриці є невибрані нулі, то, переглядаючи невибрані стовпці зліва направо, виберемо перший нуль з непомічених «*»-й або «′» і помітимо його «′». Цей нуль — претендент. Помітити рядок «+» (праворуч) — рядок вибраний. Якщо в рядку, де вибраний «0′» немає «0*», то перейти до п. 5 (вдалося вибрати на один «0» більше). Якщо ж у цьому рядку є «0*», то перейти до п. 4 (не вдалося вибрати більше нулів, так як «0′» замінить «0*»).

4. Звільнити (зняти «+») стовпець, що містить «0*», той, що лежить в одному рядку з «0′». Перейти до п. 3.2.

5. (У рядку, де знаходиться претендент 0′, немає 0*). Починаючи з 0′ останнього претендента будуємо ланцюжок з нулів: від «0′» до «0*», у тому ж стовпці, де і «0′», від «0*» по рядку до наступному «0′», від цього «0′» до наступного «0*» по стовпцю і т. д. поки ланцюжок не обірветься на деякому 0′ (можливо, вона обірветься на першому ж 0′). У ланцюжку від число «0'» більше числа «0*», тобто на один 0 вибрано більше. Зняти «*» у 0*, що входять в ланцюжок, а «′» замінити на «*». Зняти всі помітки і перейти до п. 2.2.

Ланцюжок тут будується для того, щоб стежити за «правильним» розташуванням вибираних нулів (по 1 в рядку і стовпці).

ВИСНОВКИ

Спрощений метод розв'язання задачі про призначення та угорський метод розв'язання задачі про призначення дає можливість розподілу деякого числа робіт між таким же числом виконавців за умови взаємно-однозначної відповідності між безліччю робіт і виконавців.

Значення алгоритму, що розробляється, полягає в тому, щоб, послідовно переходячи від одного вибору нулів до іншого, що містить на один нуль більше ніж попередній, побудувати повний вибір (план розподілу).

Якщо, перебравши всі нулі матриці, ми не доб'ємося успіху, то потрібно перетворити матрицю так, щоб в ній з'явилося більше нулів (потенційних претендентів на включення в список вибраних). При цьому на кожному кроці необхідно перейти до вибору з великим числом нулів.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

1. Приклад

Розглянемо алгоритм на прикладі.

$$
\begin{array}{c}
\text{max} \\
\begin{pmatrix}
2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\
4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\
2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\
4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\
0 & 1 & 0 & 2 & 0
\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{matrix} 4 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{matrix}
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c}
\text{min} \\
\begin{pmatrix}
-2 & -3 & -3 & -5 & -4 \\
-4 & -2 & -4 & -6 & -2 \\
-2 & -2 & -2 & -4 & -3 \\
-4 & -3 & -4 & -3 & -5 \\
0 & -1 & 0 & -2 & 0
\end{pmatrix} \\
\hline
\begin{matrix} 4 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{matrix}
\end{array}
\longrightarrow
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
4 & 2 & 4 & 4 & 5
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ \\ 1 \\ \\ 2
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c}
\begin{matrix} \boxed{+} & + & \boxed{+} & & \end{matrix} \\
\begin{pmatrix}
2 & 0^* & 1 & 1 & 1 \\
0^* & 1 & 0 & 0' & 3 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0' & 0 & 0^* & 3 & 0 \\
2 & 0 & 2 & 2 & 3
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ \\ + \\ \\ + \\ \\
\end{array}
$$

Всі нулі виділені (знаходяться у виділених рядках або стовпцях).

* * *, + + +, серед невибраних. Так як закінчуємо 0^*_{43}, то до п. 3.2. по стовпцях $м' \to$ *, + [,' $\to$*+ …]. min серед незайнятих елементів $h = 1$, обчислюється з невибраних рядків і додається до вибраних стовпців $h = 1$.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & + & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & -1^* & 0 & 0 & 0 \\
0^* & 1 & 0 & 0' & 3 \\
0 & -1 & 0 & 0 & \\
0' & 0 & 0^* & 3 & 0 \\
1 & -1 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ + \\ \\ + \\ \\ \end{array}
\xrightarrow{\text{додаємо до зайнятих стовпців } h = 1}
\begin{pmatrix}
1 & 0^* & 0 & 0 & 0 \\
0^* & 2 & 0 & 0'^* & 3 \\
0'^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0' & 1 & 0^* & 3 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} \\ + \\ \\ + \\ \\ \end{array}
$$

крок: 2—3; 1—2—4; 3. Знімається все, крім «*».

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \boxed{+} & \boxed{+} & \boxed{+} & \boxed{+} & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0'^* & 0 & 0 & 0'^* \\
0 & 2 & 0' & 0^* & 3 \\
0^* & 0' & 0 & 0 & 0 \\
0' & 1 & 0^* & 3 & 0 \\
1 & 0^{*'} & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} + \\ \\ + \\ + \\ \\ \end{array}
\quad
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0^* \\
0 & 1 & 0 & 0^* & 3 \\
0^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0^* & 0 & 0 \\
1 & 0^* & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\text{ оптим.}
$$

$h = c_{52} = 0$. Матриця не міняється. Підрахуємо ефективність $L(x) = 4 + 6 + 2 + 4 + 1 = 17$.

2. Приклад

$$
\begin{array}{r}
\begin{pmatrix}
5 & 4 & \boxed{6} & 2 & 3 & 1 \\
8 & 2 & 5 & \boxed{6} & 1 & 3 \\
4 & \boxed{6} & 7 & 2 & 1 & 2 \\
\boxed{8} & 5 & 3 & 5 & 4 & 1 \\
1 & 6 & 7 & 9 & \boxed{10} & 1 \\
7 & 4 & 3 & 5 & 7 & \boxed{8}
\end{pmatrix} \\
\text{max.}\ \begin{array}{cccccc} 8 & 6 & 7 & 9 & 10 & 8 \end{array}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
1 = \min\text{, віднімаємо.} \\
\begin{pmatrix}
3 & 2 & 1 & 7 & 7 & 7 \\
0 & 4 & 2 & 3 & 9 & 5 \\
4 & 0 & 0 & 7 & 9 & 6 \\
0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 7 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

min = 3. Серед незайнятих елементів віднімаємо з незайнятих рядків і «+» до

зайнятих стовпців. Поміток ніяких не знімаємо.

$\boxed{8}$ — opt.

$$
\begin{array}{cccccc} + & + & + & \boxed{+} & & + \end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0^* & 6 & 6 & 6 \\ 0^* & 4 & 2 & 3 & 9 & 5 \\ 4 & & 0 & 7 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 0 & 0^* & 0' & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 0^* \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3^* & 3 & 3 & 3 \\ -3^* & 1 & -1 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & -3^* & -3 & 4 & 6 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 0 & 0^* & 0' & 7 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3^* \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{array}{cccccc} \boxed{+} & + & + & + & & + \end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc} + & + & + & + & + & + \end{array}
$$

$$
\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0^* & 3 & 3 & 6 \\ 0^{\boxed{*}} & 4 & 2 & 0^{*'} & 6 & 5 \\ 4 & 0^* & 0 & 4 & 6 & 6 \\ 0^{\boxed{*}} & 1 & 4 & 1 & 2 & 7 \\ 10 & 3 & 3 & 0^{\boxed{*}} & 0^{\boxed{'*}} & \\ & & & & & \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ + \\ \\ \\ + \\ \\ \end{array} \end{array}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0^* & 3 & 3 & 3 \\ 0^* & 4 & 2 & 0^* & 6 & 5 \\ 4 & 0^* & 0 & 4 & 6 & 6 \\ 0^* & 1 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 10 & 3 & 3 & 0 & 0^* & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0^* \end{pmatrix}
\begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array}
$$

opt.

$L = 6 + 6 + 6 + 8 + 10 + 8 = 44$

3. Приклад

$$
\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & \boxed{4} \\ 4 & 2 & 4 & \boxed{6} & 2 \\ \boxed{2} & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & \boxed{4} & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{array} \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \boxed{+} & + & \boxed{+} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0^* & 1 & 1 & 1 \\ 0^* & 1 & 0 & 0' & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0' & 0 & 0^* & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{c} \\ \\ + \\ \\ + \\ \\ \end{array}
$$

Всі «0» вибрані. Кожний 0' лежить в одному рядку з «0*».
Вибираємо серед невибраних елементів min = 1 = h.

Віднімаємо з невибраних рядків і додаємо до вибраних стовпців $h = 1$.

$$\begin{array}{cc}\begin{array}{ccccc}&+&&&\end{array} & \\ \begin{pmatrix}1&-1^*&0&0&0\\0^*&1&0&0'&3\\0&-1&0&0&0\\0'&0&0^*&3&0\\1&-1&1&1&2\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\\+\\ \\+\\ \\\end{array}\end{array} \sim \begin{array}{cc}\begin{array}{ccccc}&+&&&\end{array} & \\ \begin{pmatrix}1&0^*&0&0&0\\0^*&2&0&0^*&3\\0^*&0&0&0&0\\0'&1&0^*&3&0\\1&0&1&1&2\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\\+\\ \\+\\ \\\end{array}\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}\begin{array}{ccccc}\boxed{+}&\boxed{+}&+&\boxed{+}&\end{array} & \\ \begin{pmatrix}1&0^*&0&0&0^*\\0'&2&0&0^*&3\\0^*&0'&0&0&0\\0&1&0^*&3&0\\1&0&1&1&2\end{pmatrix} & \begin{array}{c}+\\+\\+\\ \\ \\\end{array}\end{array} \quad \min = 0 \quad \begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}&&\boxed{+}&&\end{array} \\ \begin{pmatrix}1&0^*&0&0&0'\\0'&2&0&0^*&3\\0^*&0'&0&0&0\\0'&1&0^*&3&0\\1&0'&1&1&2\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0^*\\0&2&0&0^*&3\\0^*&0&0&0&0\\0&1&0^*&3&0\\1&0^*&1&1&2\end{pmatrix}\begin{array}{c}+\\+\\+\\+\\ \\\end{array} \quad \text{оптим.}$$

$L = 4 + 6 + 2 + 4 + 1 = 17.$

4. Приклад

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}5&4&6&2&3&1\\8&2&5&6&1&3\\4&6&7&2&1&2\\8&5&3&5&4&1\\1&6&7&9&10&1\\7&4&3&5&7&8\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccccc}8&6&7&9&10&8\end{array}\end{array} \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}+&+&+&\boxed{+}&&+\end{array}\\ \begin{pmatrix}2&1&0^*&6&6&6\\0^*&4&2&3&9&5\\4&0^*&0&7&9&6\\0&1&4&4&5&7\\7&0&0&0^*&0'&7\\1&2&4&4&3&0^*\end{pmatrix}\end{array}$$

$\min = 3$

$$
\begin{pmatrix}
-1 & -2 & -3^* & 3 & 3 & 3\\
-3^* & 1 & -1 & 0 & 6 & 2\\
1 & -3^* & -3 & 4 & 6 & 3\\
-3 & -2 & 1 & 1 & 3 & 4\\
7 & 0 & 0 & 0^* & 0' & 7\\
-2 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3^*
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
2 & 1 & 0^* & 3 & 3 & 6\\
0^{\boxed{*}} & 4 & 2 & 0^{*'} & 6 & 5\\
4 & 0^* & 0 & 4 & 6 & 6\\
0^{*'} & 1 & 4 & 1 & 3 & 7\\
10 & 3 & 3 & 0^{\boxed{*}} & 0^* & 10\\
1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0^*
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} \\ + \\ \\ \\ + \\ \\ \end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
+ & + & + & \boxed{+} & & +
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
\boxed{+} & + & + & & & +
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & 0^* & 6 & 6 & 6\\
0^* & 4 & 2 & 3 & 9 & 5\\
4 & 0^* & 0 & 7 & 9 & 6\\
0 & 1 & 4 & 4 & 5 & 7\\
7 & 0 & 0 & 0^* & 0' & 7\\
1 & 2 & 4 & 4 & 3 & 0^*
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ + \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
2 & 1 & 0^* & 3 & 3 & 6\\
0^* & 4 & 2 & 0' & 6 & 5\\
4 & 0^* & 0 & 4 & 6 & 6\\
0' & 1 & 4 & 1 & 2 & 7\\
10 & 3 & 3 & 0^* & 0' & 10\\
1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0^*
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} \\ + \\ \\ + \\ + \\ \\ \end{array}
$$

$\min = 3$

$L_{\max} = 44$

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & \boxed{0^*} & 3 & 3 & 6\\
0 & 4 & 2 & \boxed{0^*} & 6 & 5\\
4 & \boxed{0^*} & 0 & 4 & 6 & 6\\
\boxed{0^*} & 1 & 4 & 1 & 2 & 7\\
10 & 3 & 3 & 0 & \boxed{0^*} & 10
\end{pmatrix}
$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Поясніть алгоритм спрощеного методу розв'язання задачі про призначення.

2. Поясніть алгоритм угорського методу розв'язання задачі про призначення.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Приклад

Знайти максимум і мінімум функції, використовуючи алгоритм спрощеного методу рішення задачі про призначення та угорський метод рішення задачі про призначення.

Варіанти:

1.

1	15	7	4	3	6
8	7	6	1	10	5
3	4	11	7	6	7
8	1	9	2	3	5
15	17	4	3	5	6
7	4	8	15	3	2

2.

7	4	8	15	3	2
18	17	4	3	5	6
8	1	9	2	3	5
3	4	11	7	6	7
8	7	6	1	10	5
1	15	7	4	3	6

3.

2	16	8	5	4	7
9	8	7	2	11	6
4	5	12	8	7	8
9	2	10	3	4	6
16	18	5	4	6	7
8	5	9	16	4	3

4.

1	7	2	4	3	3
5	5	6	3	7	5
3	4	5	7	6	2
8	3	9	2	3	5
7	1	4	3	5	6
2	4	8	9	6	7

5.

7	9	2	7	1	4
8	1	7	3	5	6
3	1	9	2	3	5
9	4	1	7	6	7
8	7	6	1	5	5
6	5	7	4	3	6

11.

4	15	3	2	7	8
5	14	3	6	11	7
7	1	10	5	8	6
4	7	6	7	3	11
11	2	3	5	18	9
17	3	5	6	15	4

12.

27	64	48	53	72	15
58	17	64	85	76	93
48	51	89	43	85	92
83	84	11	46	47	57
88	87	56	10	75	71
61	15	77	83	56	44

13.

42	16	48	45	74	47
19	28	37	52	11	56
64	77	12	78	47	58
19	52	10	53	64	62
16	18	15	56	46	27
38	45	59	16	84	13

14.

4	6	9	3	4	7
2	7	4	5	7	5
3	4	5	8	7	6
2	5	3	2	3	5
7	1	4	3	5	6
2	4	5	7	6	7

15.

17	14	18	15	13	12
18	27	14	23	25	26
19	21	29	12	23	25
23	14	21	27	16	17
18	22	23	11	14	15
21	25	21	14	13	16

6.

17	14	18	15	13	12
18	27	14	23	25	26
19	21	29	12	23	25
23	14	21	27	16	17
18	22	23	11	14	15
21	25	21	14	13	16

7.

9	2	10	3	4	6
4	3	5	7	8	6
4	5	12	8	7	8
9	8	7	2	11	6
5	6	7	2	1	9
8	5	9	16	4	3

8.

8	9	1	5	3	7
7	15	11	12	7	15
13	14	15	7	6	12
18	3	9	12	3	15
7	11	4	13	5	6
12	14	8	9	6	17

9.

5	4	8	7	3	9
8	1	7	3	5	6
1	3	4	9	7	5
9	4	1	7	6	7
6	3	2	1	7	4
6	5	7	4	3	6

10.

21	29	23	19	12	25
25	21	13	21	14	16
22	23	14	18	11	15
14	18	13	17	15	12
14	21	16	23	27	17
10	15	14	12	11	15

16.

15	1	7	6	4	3
7	8	6	5	1	10
4	3	11	7	7	6
1	8	9	5	2	3
17	15	4	6	3	5
4	7	8	2	15	3

17.

15	7	4	8	3	2
3	5	9	7	5	6
2	8	14	9	3	5
7	3	4	11	6	7
10	4	7	6	10	5
4	12	15	7	13	6

18.

12	16	8	5	4	7
9	8	7	22	11	6
4	15	12	8	7	8
9	22	10	13	14	6
16	18	5	14	16	17
8	5	9	16	14	13

19.

21	44	22	4	33	33
15	25	26	33	47	15
13	24	25	27	16	22
18	23	9	12	33	15
17	31	44	13	35	46
25	54	48	59	66	47

20.

2	7	4	9	1	7
7	8	6	1	5	3
7	6	6	5	3	4
1	9	7	4	6	7
6	8	5	7	5	1
9	3	5	1	3	2

Частина 4

МЕТОД ГІЛОК І ГРАНИЦЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

ТЕМА 19

МЕТОД ГІЛОК І ГРАНИЦЬ

1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ МЕТОДУ ГІЛОК І ГРАНИЦЬ

До задач цілочисельного програмування відносяться задачі комбінаторного виду, тобто такі задачі, в яких розв'язання шукається на кінцевій множині можливих значень змінних. Наприклад, задача комівояжера (кінцеве число маршрутів (n!), задача про ранець (кінцеве число предметів), задача про максимальний потік чи найкоротший шлях в мережних задачах (кінцеве число вершин графи).

Метод Гоморі розв'язання цілочисельних задач лінійного програмування не завжди дає задовільні результати через слабку подібність чи взагалі розбіжність через нагромадження помилок обчислень. Іншим методом, що не зв'язаний з нагромадженням обчислювальної погрішності, є метод галузей і границь (МГіГ). МГіГ уперше був запропонований Лендом і Дойгом у 1960 р., але одержав поширення у зв'язку з застосуванням цього методу в роботі Літтла, Мурти, Суіні і Керел у 1963 р., присвяченій задачі про комівояжера.

Ідея методу полягає в наступному.

Розглянемо задачу дискретного програмування:

потрібно $$\min \to Z = f(X) \tag{19.1}$$

за умови, що $$X \in G, \tag{19.2}$$

де G — деяка кінцева множина, а функція $f(X)$ і кінцева множина G довільного вигляду.

В основі методу лежать побудови, що дозволяють у ряді випадків значно зменшити число відбору варіантів. Уведемо позначення $G^0 = G$. Нехай нам удалося будь-яким чином знайти таке значення $\xi(G^0)$, для якого можна сказати з упевненістю, що виконується умова

$$f(x) \geq \xi(G^0), \text{ при } x \in G^0, \tag{19.3}$$

тобто яке б $x \in G^0$ ми не взяли, значення $f(x)$ завжди буде $\geq \xi(G^0)$, тобто $\xi(G^0)$ є нижньою границею для Z. Значення $\xi(G^0)$ може і не досягатися на G^0, але якщо воно досягається, тобто існує X^* такий, що $f(X^*) = \xi(G^0)$, тобто X^* — оптимального розв'язання ($f(x)$ не може бути $> \xi(G^0)$, так як це нижня границя, але якщо ми вийшли на цю нижню грань, залишаючись у G^0 то розв'язання вирішена).

Робимо розбивку G^0 на підмножини $G_i^{(1)}$ так, щоб

$$G^0 = \bigcup_{i=1}^{n} G_i^{(1)},\ G_i^{(1)} \cap G_j^{(1)} = \varnothing,\ \forall\ i, j,\ i \neq j \tag{19.4}$$

Для кожного з отриманих $G_i^{(1)}$ визначаємо нижню границю $\xi(G_i^{(1)})$. Причому, якщо $G_i^{(1)} \subseteq G^0$, то $\xi(G_i^{(1)}) \geq \xi(G0)$ нижня границю ξ на множині G^{i} установлюється більш точно, ніжна G^0.

Визначаємо:

$$\xi(G_\upsilon^{(1)}) = \min_{1 \leq i \leq n1} \xi(G_i^{(1)}). \tag{19.5}$$

Якщо існує план $X^* \in G_\nu^{(1)} \Rightarrow f(x^*) = \xi(G_\nu^{(1)})$, то X^* — оптимальний план (істотним є не тільки те, що $X^* \in G_\nu^{(1)}$, але і те, що X^* є планом (19.1)—(19.2)).

Якщо $f(X) \geq \xi(G_\nu^{(1)})$, $X \in G_\nu$, то множина $G_\nu^{(1)}$ вважається перспективною і її розбивають аналогічно G^0 (4) на підмножини $G_{\nu i}^{(1)}$ $i = \overline{1, n2}$. Переназначимо всі множини $G_i^{(1)}$ і $G_{\nu i}^{(1)}$ на $G_i^{(2)}$ $i = \overline{1, n2}$.

$$\bigcup_{i=1}^{n2} G_i^{(2)} = G^{(0)}, \qquad G_i^{(2)} \cap G_j^{(2)} = \varnothing, i \neq j \tag{19.6}$$

і переходимо до (19.5) і т. д., доти, поки не буде знайдений оптимальний план. Тут слід зазначити той факт, що в першу чергу розгалуженню піддаються тільки перспективні підмножини, при цьому до раніше не перспективного можна повернутися на одному з наступних кроків, коли їхня оцінка нижньої границі буде $\leq$ оцінки перспективної множини на цьому кроці.

2. Приклад задачі дискретного програмування

Дана мережа (див. рис. 7).

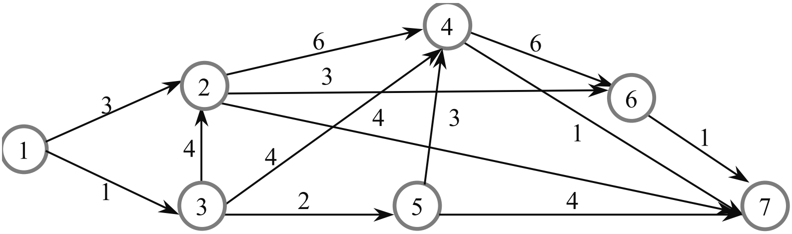

Рис. 7. Транспортна мережа

Потрібно знайти найкоротший шлях з вершини 1 у 7, що проходить через вершини 4 чи 5.

Планом задачі тут є шлях, що веде з вершини 1 через вершину 4 чи 5 у вершину 7.

Крок 1. Розбиваємо множину усіх шляхів, що ведуть з вершини 1 на 2 непересічні підмножини: G^1 — множина усіх шляхів, що минають з вершини 1 у вершину 2 і далі до вершини 7;G^2 — множина усіх шляхів, що минають з вершини 1 у вершину 3 і далі до вершини 7 (див. рис. 8).

Як оцінку ξ візьмемо довжину ребер [1,2] і [1,3], тому що це частини шляху, то довжина повного шляху завжди ≥ ξi.

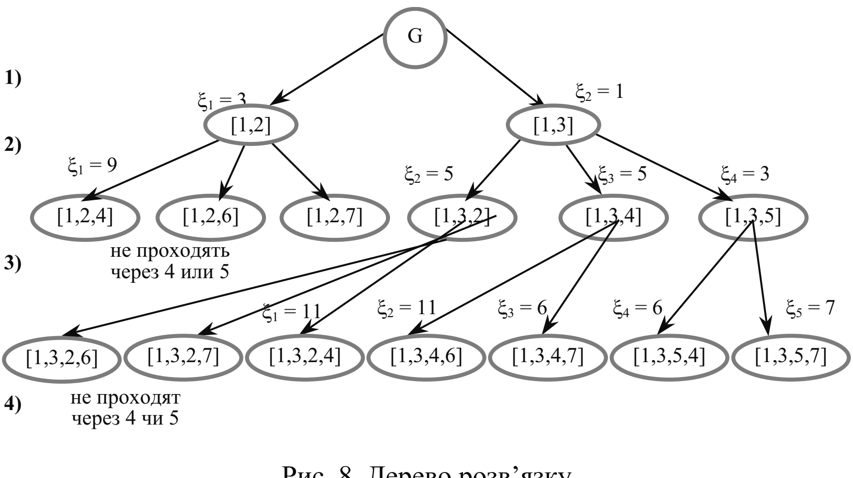

Рис. 8. Дерево розв'язку

На третьому кроці отриманий шлях [1, 3, 5, 7], що є планом, тобто що веде з початкової вершини 1 у кінцеву — 7 і минає через вершину 5, але його оцінка гірша за два інші можливі маршрути: ([1, 3, 2] = ([1, 3, 4] = 5 < f ([1, 3, 5, 7]) = 7, тому процес продовжуємо розгалуженням вершин [1, 3, 2] і [1, 3, 4].

На четвертому кроці отриманий план [1, 3, 4, 7] і $f(X)$ = 6. Так як ((G ( ) = 6 і існує план з f (X) = 6, то розв’язок знайдено.

Шляхи з усіх інших вершин можуть тільки збільшуватися, тому що ці маршрути ще не є планами.

ВИСНОВКИ

МГіГ є універсальним методом розв’язання комбінаторних задач. Складність практичного застосування методу полягає в труднощах перебування способу розгалуження множин на підмножини й обчислення відповідних оцінок, що залежать від специфіки конкретної задачі.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Які задачі належать до задач цілочисельного програмування?
2. У чому полягає ідея методу гілок і границь
3. Назвіть ознаку оптимальності методу гілок і границь

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Розв’язати задачу дискретного програмування методом гілок і границь (рис. 9).

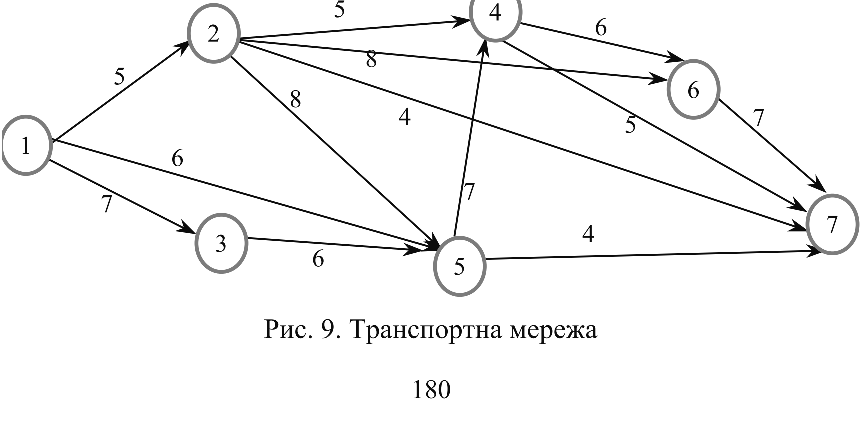

Рис. 9. Транспортна мережа

ТЕМА 20
ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА

1. Постановка задачі

Комівояжер повинне обійти n міст $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Відстані між містами відомі та задані в матриці відстаней:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & \infty & \ldots & c_{11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & \infty \end{pmatrix} \tag{20.1}$$

У загальному випадку $c_{ij} \neq c_{ji}$.

Комівояжер повинне побувати в кожнім місті по одному разу. Це означає, що він повинне увійти в кожне місто і вийти з нього рівно по одному разу. Маршрут обходу міст може починатися з будь-якого міста. Але закінчитися він повинне у тому ж місті, з якого почався. Необхідно побудувати маршрут, що проходить через усі міста найменшої довжини. Знаки «∞» у матриці C, які розташовані по діагоналі, використовуються для заборони переходу з кожного міста в це ж місто, тобто для заборони повернення.

Позначимо через t маршрут переміщення комівояжера по містах $i_1, i_2, \ldots, i_n$, надалі просто маршрут:

$$t = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

чи

$$t = \{(i_1, i_2), (i_1, i_2), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_1)\}$$

Довжину маршруту t позначимо через l:

$$l(t) = l(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \sum c_{ij} \text{ (сума по усіх } (i, j) \in t).$$

2. Складання матриці по рядках

Розглянемо відстані від першого A_1 міста до всіх інших:

$$c_{12}, c_{13}, \ldots, c_{1n} \ldots$$

Виберемо з них мінімальне:

$$h_1 = \min(c_{12}, c_{13}, \ldots, c_{1n})...$$

Про h_1 можна сказати, що ця мінімальна відстань, яку комівояжер пройде після того, як він вийшов з міста A_1 і направиться в одне з міст (природно, не A_1). Аналогічно можна для інших рядків матриці знайти такі ж h_i.

Так як маршрут має виходити з кожного міста, то величина

$$\omega' = \sum_{i=1}^{n} h_i \qquad (20.2)$$

є нижньою границею довжини маршруту, тобто менше від цієї відстані комівояжер не пройде, яким би його маршрут не був.

Віднімемо з кожного рядка матриці «своє» h_i (виконаємо складення матриці по рядках). Тоді в матриці С залишаться «перевищення» понад мінімально-необхідними відстанями h_i для переходу з якогось міста (за номером рядка) у будь-яке інше місто (за номером стовпця).

$$C' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \cdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & c'_{12} & \ldots & c'_{1n} \\ C'_{21} & \infty & \ldots & c'_{11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c'_{n1} & c'_{n2} & \ldots & \infty \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_n \end{array} \qquad (20.3)$$

Тут

$$c'_{ij} = c_{ij} - h_i \text{ чи } c_{ij} = c'_{ij} + h_i \; i = 1, n, j = 1,n.$$

У результаті складені матриці, у кожнім її рядку з'явиться хоча б один нуль.

Величина (20.2) уже може виступати як оцінка методу гілок і границь. Але оцінку можна уточнити, наблизити до реальної довжини маршруту мінімальної довжини.

Запишемо довжину маршруту з обліком (90):

$$l(t) = l(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \sum_{(i,j)\in t} c_{ij} = \sum_{(i,j)\in t} (c'_{ij} + h_i) =$$

$$= \sum_{(i,j)\in t} c'_{ij} + \sum_{i=1}^{n} h_i = \sum_{(i,j)\in t} c'_{ij} + \omega^0, \; (20.4)$$

тут сума по усіх (i, j) є t (по парах міст, що входять у маршрут), а $\omega^0 = \sum_{i=1}^{n} h_i$.

Розглянемо 1-й стовпець матриці C'. Який зміст коефіцієнтів, що стоять у цьому стовпці ? У вихідній матриці C — це відстані від усіх міст до цього міста A_1. Але через те, що ми виконали складення матриці по стовпцях, це не вихідні відстані. А, наприклад, c'_{21} — це відстань, яку необхідно пройти понад мінімального h_2, щоб, вийшовши з міста A_2, потрапити в місто A_1. Аналогічно c'_{31} — це відстань, яку необхідно пройти понад мінімального h_3, щоб, вийшовши з міста A_3, потрапити в місто A_1 і т. д. Якщо серед c'_{i1} вибрати

$$H_1 = \min\,(c'_{12}, c'_{13}, \ldots, c'_{1n}), \qquad (20.5)$$

то зрозуміло, що для того щоб потрапити в місто A_1 (з будь-якого іншого), комівояжеру необхідно додатково до ω^0 переборoти шлях не менше ніж H_1. Аналогічно по інших містах. Отже, величина ω^0 може бути уточнена на величину $\sum_{j=1}^{n} Hj$. У такому випадку

$$\omega = \omega^0 + \sum_{j=1}^{n} Hj = \sum_{i=1}^{n} h_i + \sum_{j=1}^{n} Hj\,. \qquad (20.6)$$

3. Складання матриці по стовпцях

Складемо матрицю по стовпцях шляхом вирахування H_{ji3} і стовпців матриці:

$$C'' = \begin{pmatrix} \infty & c''_{12} & \ldots & c''_{1n} \\ c''_{21} & \infty & \ldots & c''_{11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c''_{n1} & c''_{n2} & \ldots & \infty \end{pmatrix} \qquad (20.7)$$

Тут

$$c''_{ij} = c'_{ij} - H_j = c_{ij} - h_i - H_j \text{ чи } c_{ij} = c''_{ij} + h_i + H_i\; i = 1, n, j = 1, n. \qquad (20.8)$$

У результаті складення матриці по стовпцях у кожнім її стовпці з'явиться хоча б один нуль.

А довжина маршруту t тепер може бути записана у вигляді

$$l(t) = l\,(i_1, i_2, \ldots, i_n) = \sum_{(i,j)\in t} c''_{ij} + \omega\ldots \qquad (20.9)$$

З (20.8) випливає, що в маршрут необхідно включати пари міст таким чином, щоб $\sum_{(i,j)\in t} c''_{ij}$ була б мінімальною. Тільки в цьому випадку можна мінімізувати довжину маршруту. Величина ω — це величина постійна і є деякою характеристикою матриці C відстаней між містами. Якби вдалося вибрати по одному нульовому елементу з кожного рядка і кожного стовпця, то в такому разі був би визначений оптимальний маршрут довжиною ω. Але таке трапляється вкрай рідко і на це розраховувати не доводиться. У зв'язку з цим виробимо правила побудови маршруту.

4. Вибір пар міст

Навіть якщо нам не вдалося відразу побудувати розв'язку задачі, вибираючи нульові елементи матриці C'', будемо послідовно включати в маршрут саме ті пари міст (i, j), для яких $c''_{ij} = 0$. Але якому з наявних, принаймні n нулів віддати перевагу? Для цього введемо поняття «прямого» і «обхідного» шляху для пари міст (i, j).

Нехай $c''_{pq} = 0$. Безпосередній перехід з міста A_p в A_q, назвемо «прямим», а перехід з міста A_p в A_q, через якесь інше k-е місто, назвемо «обхідним». Для кожної пари (p, q), для якої $c''_{pq} = 0$, оцінимо довжину мінімального манівця:

$$\Theta(p, q) = \min_{j \neq q} c_{pj} + \min_{i \neq p} c_{iq} . \qquad (20.10)$$

Для включення в маршрут виберемо ту пару міст, для якої $c''_{k,\,m} = 0$ і

$$\Theta(_{k,\,m}) = \max \Theta\,(p, q). \qquad (20.11)$$

Таким чином, якщо уявити цю ситуацію, як гру двох супротивників, то таким вибором супротивнику приділяється гірший варіант для переходу з A_k в $A_{м}$.

Розіб'ємо множину усіх маршрутів (n!) на дві підмножини X і $У$. У X віднесемо всі ті маршрути, що містять прямий перехід з A_k в A_m, позначимо цю множину (k, m), а в $У$ — усі маршрути, що не містять прямого переходу з A_k в A_m, і позначимо його як (k, m). Тоді для множини В можна визначити оцінку, як

$$\xi(У) = \omega + \Theta(_{k,\,m}), \qquad (20.12)$$

тут ω оцінка будь-якого маршруту, але якщо маршрут з $A_к$ в $A_м$, пройде по манівці (а в У тільки такі маршрути), то маршрут збільшиться мінімум на величину $\Theta(_{k,\,m})$.

5. Побудова оцінок для множини маршрутів

Побудуємо тепер оцінку для множини маршрутів X. Для цього $c''_{m,\,k} = \infty$, тому що є перехід з A_k в A_m, то перехід з A_m в A_k забороняємо. Так як A_k включений у маршрут (з нього комівояжер більше виходити не буде), то це місто необхідно виключити з розгляду, тобто викреслимо k-ю рядок з матриці. Аналогічно виключаємо m-й стовпець матриці (місто A_m включене в маршрут і, отже, це місто не повинне більше вибиратися, як місто, у яке комівояжер ще раз буде входити). При цьому слід зберігати первісну нумерацію рядків і стовпців матриці. Після цих перетворень, у якихось рядках чи стовпцях матриці можуть зникнути нулі (за рахунок викреслених рядка чи стовпця). Знайдемо знову мінімальні елементи в кожному рядку (ці відстані необхідно пройти комівояжеру з кожного не вибраного міста після того, як у маршрут включений перехід (k, m), позначимо їх як h'_i. Приведемо матрицю по рядках — віднімемо з усіх елементів кожного i-го рядка відповідне h'_i. Після цього в кожнім j-м стовпці матриці визначимо мінімальний h'_i. H'_j і виконаємо приведення матриці по стовпцях. Визначимо величину

$$\omega' = \sum_{i=1}^{n} h_i{}' + \sum_{j=1}^{n} Hj\ , \tag{20.13}$$

про яку можна сказати, що комівояжер, у зв'язку з включенням у маршрут переходу (k, m), повинен буде додатково до мінімально необхідного шляху пройти ще відстань ω', тобто оцінка довжини всіх маршрутів, що входять у множину X, дорівнює

$$\xi(X) = \omega + \omega'. \tag{20.14}$$

6. Побудова дерева варіантів

Таким чином, дерево варіантів у цьому випадку набуде вигляду (рис. 10):

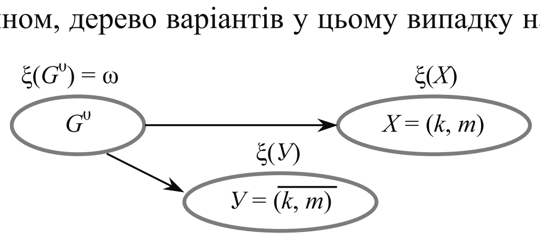

Рис. 10. Елемент дерева розв'язку

У цьому дереві дві вершини, виберемо ту з них, у якої менша оцінка. На першому кроці, імовірно, слід очікувати, що це буде вершина з множиною $X = (k, m)$. Далі виконаємо знову розгалуження вибраної множини на дві підмножини, описаної вище способом з використанням оцінок (20.10)—(20.11) для кожного нуля в матриці. Причому, вибрана пара міст не обов'язково буде продовженням уже побудованого раніше маршруту. Цей процес буде повторюватися доти, поки в матриці не залишиться два рядки і два стовпці, що і завершать побудову маршруту.

При виконанні побудов необхідно на кожнім кроці стежити за тим, щоб з вибраних пар міст не міг утворитися підцикл. Наприклад, нехай у маршрут включені такі пари міст (переходів):

(4,3), (5,4) і (6,5), тоді додавання в маршрут пари (3,5) приведе до утворення підциклу,

(5,4), (4,3) і (3,5), а включення пари (4,6) — до підциклу (6,5), (5,4) і (4,6).

Для того щоб виключити таку можливість, слід заборонити ці переходи шляхом присвоєння ∞ відповідним елементам матриці $c''_{3,5} = \infty$ і $c''_{4,6} = \infty$.

При виборі вершини для розгалуження на якомусь кроці може виявитися, що для однієї з раніше побудованих вершин оцінка буде краще, ніж для останньої вершини. Тоді слід повернутися до такої вершини і взяти для розгалуження її. Такою вершиною може, у загальному випадку, виявитися як вершина типу X, так і типу $У$. Якщо такою виявиться вершина типу X, то слід виконати розгалуження цієї вершини за відомим алгоритмом. Якщо ж такою вершиною виявиться вершина типу $B = (e, f)$, то слід повернутися до матриці, у якій був вибраний перехід (e, f), і заборонити його ($c''_{e,f} = \infty$) і повторити складення цієї матриці, а далі за алгоритмом.

ВИСНОВКИ

Комівояжер повинен обійти n міст $A_1, A_2, \ldots, A_n$, відстані між якими відомі і задані в матриці відстаней:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \infty & \cdots & c_{11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \infty \end{pmatrix}$$

Комівояжер повинен побувати в кожнім місті по одному разу. Це означає, що він повинен увійти в кожне місто і вийти з нього рівно по одному разу. Необхідно побудувати маршрут, що проходить через усі міста найменшої довжини.

Алгоритм:

1. Складемо матрицю по рядках.
2. Складемо матрицю по стовпцях.
3. Довжина маршруту буде не меншою, ніж

$$\omega = \omega^0 + \sum_{j=1}^{n} Hj = \sum_{i=1}^{n} h_i + \sum_{j=1}^{n} Hj .$$

4. Оцінимо кожен нуль у цій матриці

$$\Theta\,(p, q) = \min_{j \neq q} c_{pj} + \min_{i \neq p} c_{iq} .$$

5. Для включення в маршрут виберемо ту пару міст, для якої

$$c''_{k,\,m} = 0 \text{ і}$$
$$\Theta_{(k,\,m)} = \max \Theta\,(p, q).$$

6. Побудуємо тепер оцінку для множини маршрутів *У* та *X*.

$$\xi(У) = \omega + \Theta_{\,(k,\,m)},$$
$$\xi(X) = \omega + \omega'.$$

7. У цьому дереві виберемо ту з вершини, у якої менша оцінка.
8. Повернутися до п. 1.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

1. Приклад

Розглянемо приклад. Нехай матриця відстаней має вигляд:

$$C = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 26 & 43 & 16 & 30 & 26 \\ 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 \\ 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 0 \\ 21 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 \\ 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 \\ 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} h_i \\ 16 \\ 1 \\ 0 \\ 16 \\ 5 \\ 5 \end{array}$$

Складемо матрицю по рядках:

$$C = \begin{array}{c|ccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & h_i \\
1 & \infty & 10 & 27 & 0 & 14 & 10 \\
2 & 6 & \infty & 15 & 0 & 29 & 24 \\
3 & 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 0 \\
4 & 5 & 0 & 9 & \infty & 2 & 2 \\
5 & 7 & 41 & 22 & 43 & \infty & 0 \\
6 & 18 & 0 & 0 & 4 & 0 & \infty \\
 & H_j\,5 & & & & &
\end{array}$$

Складемо матрицю по стовпцях:

$$C = \begin{array}{c|ccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & h_i \\
1 & \infty & 10 & 27 & 010 & 14 & 10 \\
2 & 1 & \infty & 15 & 01 & 29 & 24 \\
3 & 15 & 13 & \infty & 35 & 5 & 05 \\
4 & 01 & 0^0 & 9 & \infty & 2 & 2 \\
5 & 2 & 41 & 22 & 43 & \infty & 0^2 \\
6 & 13 & 0^0 & 0^9 & 4 & 0^2 & \infty
\end{array}$$

$\omega = (16 + 1 + 0 + 16 + 5 + 5) + 5 = 48$

Отже, довжина маршруту буде не менше, ніж 48.

Оцінимо кожен нуль у цій матриці по (20.10):

$\Theta\,(1, 4) = \min\,(10, 27, 14, 10) + \min\,(0, 35, 43, 4) = 10;$
$\Theta\,(2, 4) = \min\,(1, 15, 29, 24) + \min\,(0, 35, 43, 4) = 1;$
$\Theta\,(3, 6) = \min\,(15, 13, 35, 5) + \min\,(10, 24, 2, 0) = 5;$
$\Theta\,(4, 1) = \min\,(0, 9, 2, 2) + \min\,(1, 15, 2, 13) = 1;$
$\Theta\,(4, 2) = \min\,(0, 9, 2, 2) + \min\,(10, 13, 41, 0) = 0;$
$\Theta\,(5, 6) = \min\,(2, 41, 22, 43) + \min\,(10, 24, 0, 2) = 2;$
$\Theta\,(6, 2) = \min\,(13, 0, 4, 0) + \min\,(10, 13, 0, 41) = 0;$
$\Theta\,(6, 3) = \min\,(13, 0, 4, 0) + \min\,(27, 15, 9, 22) = 9;$
$\Theta\,(6, 5) = \min\,(13, 0, 4, 0) + \min\,(14, 29, 5, 2) = 2.$

Запишемо ці оцінки у виді ступеня кожного нуля в матриці C''.

По (20.11):

$\Theta_{(k,\,m)} = \max\,(10,1, 5, 1, 0, 2,0, 9, 2) = 10 = \Theta_{(1,\,4)}.$

Таким чином, першою парою, що включається в маршрут, буде (1,4). Забороняємо перехід (4, 1) і викреслюємо з матриці 1-ю рядок і 4-й стовпець:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 5 & 6 & h_i \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \infty & 15 & 29 & 24 \\ 15 & 13 & \infty & 5 & 0 \\ \infty & 0 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 41 & 22 & \infty & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 5 & 6 & h_i \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \infty & 14 & 28 & 23 \\ 15 & 13 & \infty & 5 & 0 \\ \infty & 0 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 41 & 22 & \infty & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

Складемо матрицю по рядках:

$$\begin{array}{cc} 2 & \begin{array}{ccccc} 0^{16} & \infty & 14 & 28 & 23 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 15 & 13 & \infty & 5 & 0^{5} \\ \infty & 02 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 41 & 22 & \infty & 0^{2} \\ 13 & 0^{0} & 0^{9} & 0^{2} & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

ω' = 1.

Тепер можна зобразити графічне розв’язання (рис. 11)

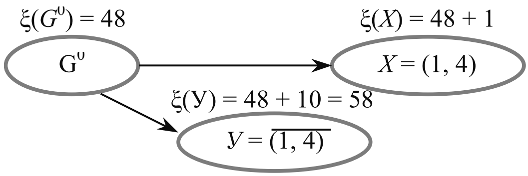

Рис. 11. Елемент дерева розв’язку

Для включення в маршрут наступної пари оцінимо нулі останньої матриці, записуючи їх оцінки у вигляді ступеня нулів.

Наступною для включення буде пара (2,1), тому що їй відповідає нуль у матриці з найбільшою оцінкою, рівною 16. Елемент (1, 2) у матриці не присутній, щоб забороняти його вибір. Викреслюємо з матриці перший стовпець і рядок з номером 2:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 5 & 6 & h_i \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 13 & \infty & 5 & 0 \\ 4 & \infty & 9 & 2 & 2 \\ 5 & 41 & 22 & \infty & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 5 & 6 & h_i \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 13 & \infty & 5 & 0 \\ 4 & \infty & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 41 & 22 & \infty & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

Складемо матрицю по рядках. Не складеним рядком є тільки рядок з номером 4 (тільки в ньому немає нулів). Константа, що приводить, $h_2 = 2$. Віднімаємо 2 з цього рядка й одержуємо матрицю, складену по рядках. Але в кожнім стовпці цієї матриці теж є нулі, тобто матриця складена і по стовпцях.

У такому випадку оцінки для нових вершин $\overline{X = (2,1)}$: $\xi(X) = 49 + 2 = 51$. А для вершини $Y = (2, 1)$: $\xi(Y) = 49 + 16 = 65$.

Графічний розв'язок набуває вигляду:

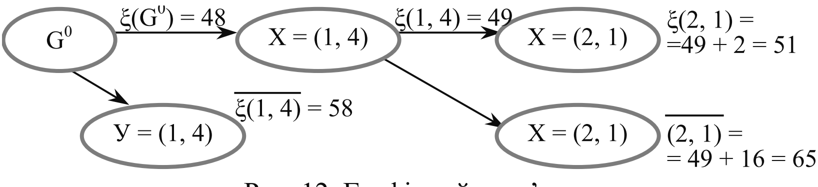

Рис. 12. Графічний розв'язок

Виберемо серед висячих вершин перспективну, для цього порівняємо їхні оцінки:

$$\min\,(\xi(1, 4), \xi(2, 1), \xi(\overline{2, 1})) = \min\,(58, 51, 65) = 51.$$

Т. ч., перспективною є вершина (2, 1). Будемо розвивати цю вершину. Знов виконаємо оцінку нулів в останній матриці:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 2 & 3 & 5 & 6 & h_i \\
3 & 13 & \infty & 5 & 05 \\
4 & \infty & 7 & 0^0 & 0^0 \\
5 & 41 & 22 & \infty & 0^{22} \\
6 & 0^{13} & 0^7 & 0^0 & \infty
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & 3 & 5 & h_i \\
3 & 13 & \infty & 5 & 5 \\
4 & \infty & 7 & 0^0 & \\
6 & 0^{13} & 0^7 & \infty &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & 3 & 5 & h_i \\
3 & 8 & \infty & 0 & \\
4 & \infty & 7 & 0 & \\
6 & 0 & 0 & \infty &
\end{array}$$

У маршрут включається пара (5,6). А пара (6,5) забороняється для вибору. Підцикл з пар: (1,4), (2,1) і (5,6) може утворитися при виборі (4,2) тому $з''_{4,2} = \infty$. Викреслимо рядок з номером 5 і стовпець 6 і приведемо отриману матрицю по рядках:

Матриця вже складена по стовпцях. Тепер графічне розв'язання набуває вигляд:

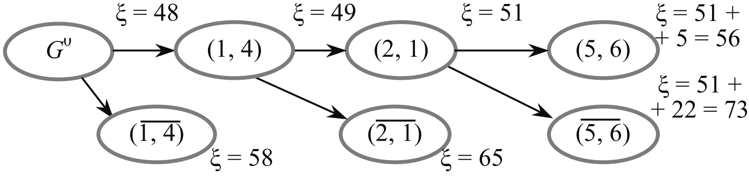

Рис. 13. Графічний розв'язок

Для продовження процесу оцінимо нулі в останній матриці:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 3 & 5 & h_i \\ \hline 3 & 8 & \infty & 0^8 & \\ 4 & \infty & 7 & 0^7 & \\ 6 & 0^8 & 0^7 & \infty & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|c} & 2 & 3 & h_i \\ \hline 4 & \infty & 7 & 7 \\ 6 & 0 & \infty & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|c} & 2 & 3 & h_i \\ \hline 4 & \infty & 0 & \\ 6 & 0 & \infty & \end{array} \qquad (26)$$

Тут два нулі з рівними оцінками 8, виберемо нуль з рядка з номером 3 і стовпці –5. Викреслимо їх з матриці, у графічне розв’язання задачі включаємо вершину (3, 5), для заборони підциклу, виключаємо перехід (6, 3): $з''_{6,3} = \infty$.

Складемо матрицю по рядках.

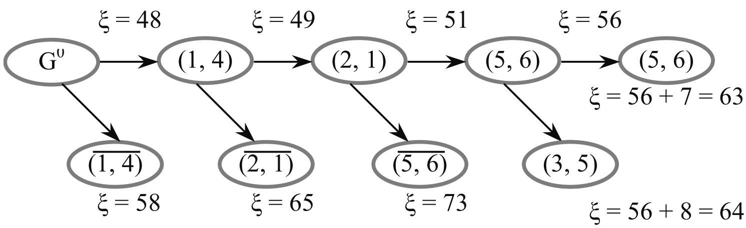

Рис. 14. Граф розв’язання

Серед висячих вершин вибираємо вершину, якій відповідає найменша оцінка:

$$\min(\xi(1, 4), \xi(2, 1), \xi(5, 6), \xi(3, 5)) = \min(58, 65, 73, 63) = 58.$$

Виявляється, що кращою є одна з вершин типу Y, побудована раніше. Повертаємося на матрицю, з якої було отримане розгалуження, що відповідає цій вершині. Це матриця, у якій була вибрана пара (1,4) для включення в маршрут.

Оскільки такий вибір привів до подібного результату, то слід заборонити вибір пари (1,4) і подивитися, як буде розвиватися процес у цьому випадку.

Отже, повертаємося до зазначеної матриці (при цьому $c''_{1,4} = \infty$).

$$C = \begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & h_i \\ \hline 1 & \infty & 26 & 43 & \infty & 30 & 26 & 26 \\ 2 & 7 & \infty & 16 & 1 & 30 & 25 & 1 \\ 3 & 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 21 & 16 & 25 & \infty & 18 & 18 & 16 \\ 5 & 12 & 46 & 27 & 48 & \infty & 5 & 5 \\ 6 & 23 & 5 & 5 & 9 & 5 & \infty & 5 \end{array}$$

Складемо матрицю по рядках і по стовпцях і оцінимо отримані нулі:

$$
C = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & h_i \\
\hline
1 & \infty & 0 & 17 & \infty & 4 & 0 & \\
2 & 6 & \infty & 15 & 0 & 29 & 24 & \\
3 & 20 & 13 & \infty & 35 & 5 & 0 & \\
4 & 5 & 0 & 9 & \infty & 2 & 2 & \\
5 & 7 & 41 & 22 & 43 & \infty & 0 & \\
6 & 18 & 0 & 0 & 4 & 0 & \infty & \\
\hline
H_j\,5 & & & & & & &
\end{array}
$$

$$
C = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & h_i \\
\hline
1 & \infty & 0^0 & 17 & \infty & 4 & 0^0 & \\
2 & 1 & \infty & 15 & 0^5 & 29 & 24 & \\
3 & 15 & 13 & \infty & 35 & 5 & 0^5 & \\
4 & 0^1 & 0^0 & 9 & \infty & 2 & 2 & \\
5 & 2 & 41 & 22 & 43 & \infty & 0^2 & \\
6 & 13 & 0^0 & 0^9 & 4 & 0^2 & \infty & \\
\end{array}
$$

$\omega = (26 + 1 + 0 + 16 + 5 + 5) + 5 = 58.$

Для включення в маршрут, вибираємо пари міст (6, 3), а пари (3, 6) виключаємо ($з''_{3,\,6} = \infty$). Викреслюємо рядок 6 і стовпець 3 з матриці і складемо отриману матрицю:

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & h_i \\
\hline
1 & \infty & 0 & \infty & 4 & 0 & & \\
2 & 1 & \infty & 0 & 29 & 24 & & \\
3 & 15 & 13 & 35 & 5 & \infty & 5 & \\
4 & 0 & 0 & \infty & 2 & 2 & & \\
5 & 2 & 41 & 43 & \infty & 0 & & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & h_i \\
\hline
1 & \infty & 0 & \infty & 4 & 0 & \\
2 & 1 & \infty & 0 & 29 & 24 & \\
3 & 15 & 13 & 35 & 5 & \infty & \\
4 & 0 & 0 & \infty & 2 & 2 & \\
5 & 2 & 41 & 43 & \infty & 0 & \\
\end{array}
$$

Тепер:

$\xi = (6, 3) = 58 + 5 = 63$ і $\xi = (6, 3) = 58 + 9 = 67$

А графічний розв’язок набуває вигляду:

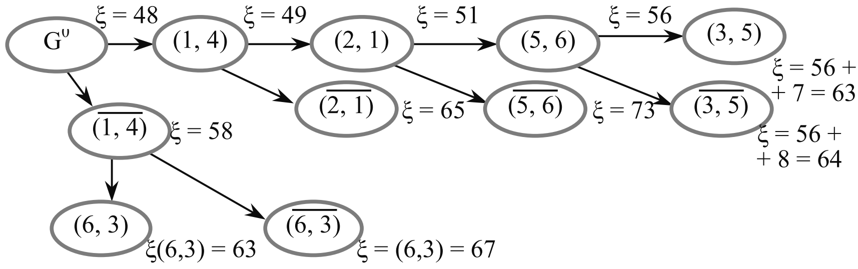

Рис. 15. Граф рішення

Серед висячих вершин є дві вершини з мінімальними оцінками

$$\xi(3, 5) = \xi(6, 3) = 63.$$

Якій з них віддати перевагу? Звичайно, тій, котрої відповідає довший маршрут, тобто (3,5). У даному випадку необхідно повернутися до матриці відповідній цій вершині (20.14). У цій матриці два рядки і два стовпці. Якщо вибрати одну пару, то в матриці залишиться один елемент — одна пара, що теж повинна ввійти в маршрут. У зв’язку з цим, якщо матриця має розмірність [2,2], то в маршрут слід включати обидві пари з цієї матриці. Таким чином, граф. розв’язок остаточно набуває вигляду:

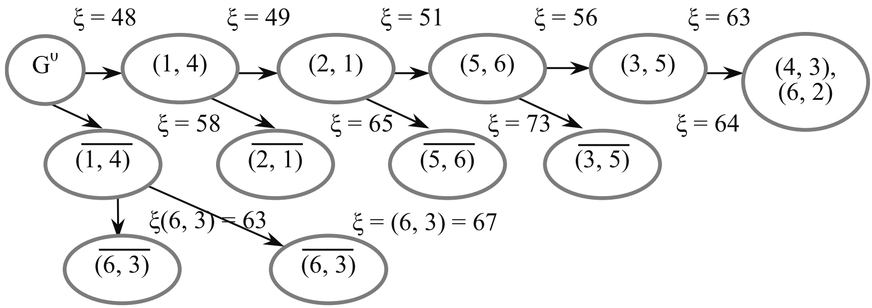

Рис. 16. Граф. розв’язку

Випишемо пари міст із побудов, у порядку включення їх у маршрут:
(1,4), (2,1), (5,6), (3,5), (4,3) і (6,2) чи у вигляді послідовності переходів по містах: $t = \{(1,4), (4,3), (3,5), (5,6), (6,2), (2,1)\}$. (20.15)

Довжина цього маршруту

$$l\,(t) = c_{1,4} + c_{4,3} + c_{3,5} + c_{5,6} + c_{6,2} + c_{2,1} =$$
$$= 16 + 25 + 5 + 5 + 5 + 7 = 63.$$

Як видно, довжина оптимального маршруту збігається з його оцінкою при побудові. Маршрут побудований і визначена його довжина. За початок обходу можна взяти будь-яке місто, тоді в (20.15) варто змістити пари по циклу, не порушуючи проходження міст у парах. Розв'язання задачі закінчене.

2. Приклад

Розв'язок задачі:

	1	2	3	4	5	6	h_i
1	—	41	60	39	46	10	10
2	31	—	59	16	1	51	1
3	29	51	—	14	42	50	14
4	32	12	52	—	16	26	12
5	16	39	15	60	—	57	15
6	15	30	38	47	36	—	15
H_j							67

	1	2	3	4	5	6	h_i	α_i
1	—	31	50	29	36	0_{43}	10	29
2	30	—	58	15	0_{19}	50	1	15
3	15	37	—	0_{30}	28	36	14	15
4	20	0_{19}	40	—	4	14	12	4
5	1	24	0_{19}	45	—	42	15	1
6	0_{16}	15	18	32	21	—	15	15
H_j	0	0	0	0	0	0	67	
β_j	1	15	18	15	4	14		

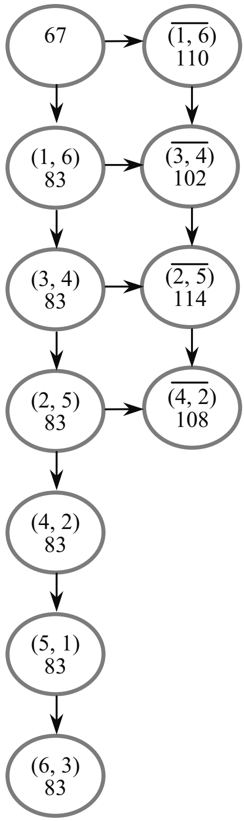

Рис. 17. Дерево розв'язку

	1	2	3	4	5	h_i	α_i
2	30	—	58	15	0	0	
3	15	37	—	0	28	0	
4	20	0	40	—	4	0	
5	1	24	0	45	—	0	
6	$\cancel{0}$	15	18	32	21	15	
H_j							
β_j							

	1	2	3	4	5	h_i	α_i
2	30	—	58	15	0	0	
3	15	37	—	0	28	0	
4	20	0	40	—	4	0	
5	1	24	0	45	—	0	
6	$\cancel{0}$	0	3	17	6	15	
	1	0	0	0	0	16	
β_j							

	1	2	3	4	5	h_i	α_i
2	29	—	58	15	0_{19}		15
3	14	37	—	$\mathbf{0_{29}}$	28		14
4	29	0_0	58	—	4		0
5	0_{14}	24	0_3	45	—		0
6	$\cancel{0}$	0_3	3	17	6		3
H_j							
β_j	14	0	3	15	4		

	1	2	3	5	h_i	α_i
2	29	—	$\cancel{58}$	$\mathbf{0_{31}}$	0	29
4	29	0_{25}	$\cancel{58}$	4	0	25
5	0_{29}	24	0_3	—	0	0
6	$\cancel{0}$	0_3	3	6	0	3
H_j	0	0	0	0	0	
β_j	29	0	3	4		

	1	2	3	h_i	α_i
4	25	$\mathbf{0_{25}}$	$\cancel{58}$	0	25
5	0_{25}	$\cancel{24}$	0_3	0	0
6	$\cancel{0}$	0_3	3	0	3
H_j	0	0	0	0	
β_j	25	0	3		

	1	3	h_i	α_i
	0	$\cancel{0}$	0	
6	$\cancel{0}$	3	0	
H_j	0	0	0	
β_j				

Відповідь:
$L = 83$
Шлях*: *1—6—3—4—2—5—1

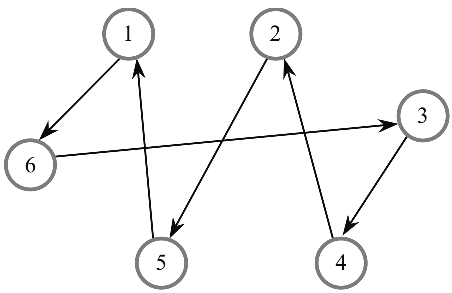

Рис. 18. Граф. маршруту

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте постановку задачі комівояжера
2. Який алгоритм складення матриці?
3. Розкажіть про принцип побудови оцінок для множини прямих маршрутів X та У.
4. Як побудувати дерево варіантів?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Приклади

Розв'яжіть задачу комівояжера.

1.

	1	2	3	4	5	6
1	—	4	10	13	4	8
2	2	—	9	7	6	7
3	8	5	—	5	5	9
4	5	8	5	—	7	10
5	6	4	4	9	—	4
6	5	1	4	8	3	—

2.

	1	2	3	4	5	6
1	—	51	21	21	24	59
2	43	—	6	10	9	15
3	54	13	—	33	21	35
4	16	37	15	—	55	43
5	19	12	26	60	—	30
6	3	44	42	46	30	—

3.

	1	2	3	4	5	6
1	—	41	60	39	46	10
2	31	—	59	16	1	51
3	29	51	—	14	42	50
4	32	12	52	—	16	26
5	16	39	15	60	—	57
6	15	30	38	47	36	—

11.

	1	2	3	4	5	6
1	—	36	45	30	52	17
2	27	—	49	31	25	27
3	42	22	—	48	16	60
4	16	40	14	—	45	31
5	55	9	16	39	—	41
6	23	12	33	30	31	—

12.

	1	2	3	4	5	6
1	—	53	9	51	5	5
2	29	—	31	43	5	24
3	58	55	—	5	31	19
4	17	39	5	—	28	9
5	5	5	46	19	—	19
6	40	12	36	5	37	—

13.

	1	2	3	4	5	6
1	—	19	15	21	17	13
2	15	—	12	10	22	10
3	17	18	—	25	30	10
4	10	15	37	—	42	12
5	13	43	13	10	—	27
6	21	35	45	10	10	—

5.

	1	2	3	4	5	6
1	—	48	4	46	0	0
2	24	—	26	38	0	19
3	53	50	—	0	26	14
4	12	34	0	—	23	4
5	0	0	41	14	—	14
6	35	7	31	0	32	—

6.

	1	2	3	4	5	6
1	—	20	28	12	39	32
2	21	—	15	9	17	27
3	30	25	—	45	29	47
4	7	52	40	—	15	1
5	60	46	11	5	—	34
6	11	45	14	21	30	—

7.

	1	2	3	4	5	6
1	—	19	40	30	15	9
2	56	—	14	57	12	8
3	42	4	—	28	33	24
4	1	12	5	—	21	16
5	21	16	38	52	—	59
6	51	1	17	22	29	—

15.

	1	2	3	4	5	6
1	—	46	16	26	19	54
2	38	—	1	5	44	10
3	49	8	—	28	16	30
4	11	32	10	—	50	38
5	14	7	21	55	—	25
6	0	39	37	41	25	—

16.

	1	2	3	4	5	6
1	—	2	8	11	2	6
2	12	13	—	20	25	5
3	6	3	—	3	3	7
4	3	6	3	—	5	8
5	4	2	2	7	—	2
6	16	30	40	5	5	—

17.

	1	2	3	4	5	6
1	—	15	20	26	32	18
2	20	—	17	15	27	15
3	22	23	—	30	35	15
4	15	20	42	—	45	17
5	18	48	18	15	—	32
6	26	41	50	15	15	—

8.

	1	2	3	4	5	6
1	—	40	100	130	40	80
2	20	—	90	70	60	70
3	80	50	—	50	50	90
4	50	80	50	—	70	100
5	60	40	40	90	—	40
6	50	10	40	80	30	—

9.

	1	2	3	4	5	6
1	—	56	26	66	29	64
2	48	—	11	15	14	20
3	59	18	—	38	26	40
4	21	42	20	—	60	48
5	24	17	31	65	—	35
6	8	49	47	51	35	—

10.

	1	2	3	4	5	6
1	—	46	65	44	51	15
25	36	—	64	21	6	55
3	34	56	—	19	47	55
4	37	17	57	—	21	31
5	21	44	20	65	—	62
6	20	35	43	52	41	—

18.

	1	2	3	4	5	6
1	12	16	8	5	4	7
2	9	8	7	22	11	6
3	4	15	12	8	7	8
4	9	22	10	13	14	6
5	16	18	5	14	16	17
6	8	5	9	16	14	13

19.

	1	2	3	4	5	6
1	—	25	46	31	50	25
2	16	—	28	31	29	13
3	21	32	—	43	21	17
4	34	51	32	—	45	38
5	17	21	15	23	—	17
6	45	34	65	50	34	—

20.

	1	2	3	4	5	6
1	—	20	34	19	34	25
2	45	—	50	34	38	29
3	36	7	—	18	23	19
4	35	12	4	—	50	20
5	43	50	60	25	—	32
6	45	56	78	60	50	—

ТЕМА 21

ЗАДАЧА ПРО ТРИ ВЕРСТАТИ — ЗАДАЧА ДЖОНСОНА

1. Алгоритм розв'язання задачі Джонсона

Необхідно обробити на трьох верстатах n деталей. У всіх деталей одна й та ж послідовність обробки: 1, 2 і 3-й верстати. Час обробки деталей на кожнім верстаті наведено в табл. 48:

Таблиця 48

ЧАСИ ОБРОБКИ ДЕТАЛЕЙ НА ВЕРСТАТАХ

Деталі / Верстати	1	2	…	n	Σ
Верстат 1	a_1	a_2	…	a_n	Σa_i
Верстат 2	b_1	b_2	…	b_n	Σb_i
Верстат 3	c_1	c_2	…	c_n	Σc_i

Потрібно скласти оптимальну послідовність обробки всіх n деталей на цих верстатах, тобто таку послідовність запуску деталей на обробку, для якої час закінчення обробки на всіх верстатах буде найменшим.

Ця задача зважується методом галузей і границь, для цього введемо ряд параметрів:

$\sigma_k = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ — довільна послідовність з k деталей;

$\sigma_{k+1} = \{\sigma_k, i_{k+1}\}$ — довільна послідовність з $k + 1$ деталей;

$A(\sigma_k)$, $B(\sigma_k)$ *і* $C(\sigma_k)$ — моменти закінчення обробки послідовності деталей σ_k на першому, другому і третьому верстатах відповідно.

Для послідовності σ_{k+1} аналогічні моменти можна обчислити за рекурентними формулами:

$$A(\sigma_{k+1}) = A(\sigma_k) + a_{k+1};$$
$$B(\sigma_{k+1}) = \max(A(\sigma_{k+1}), B(\sigma_k)) + b_{k+1}; \qquad (21.1)$$
$$C(\sigma_{k+1}) = \max(B(\sigma_{k+1}), C(\sigma_k)) + c_{k+1}.$$

$\delta_{Ak} = A(\sigma_k) + \Sigma a_i + \min(b_i + c_i)$, по всіх і не Є σ_k (по всіх деталях і не вхідних у послідовність σ_k);

$$\delta_{Bk} = B(\sigma_k) + \Sigma b_i + \min c_i, \text{ по всіх і не } \in \sigma_k; \qquad (21.2)$$
$$\delta_{Ck} = C(\sigma_k) + \Sigma c_i, \text{ по всіх і не } \in \sigma_k.$$

Величина δ_{Ak} має сенс оцінки закінчення обробки всієї послідовності деталей на всіх верстатах за умови, що на першому верстаті оброблена послідовність σ_k і момент закінчення її обробки на першому верстаті А (σ_k), а деталі, які не ввійшли в послідовність σ_k, будуть оброблятися на першому верстаті не менше ніж протягом Σa_i (і не $\in$ σ_k), а остання деталь на наступних верстатах — не менше ніж величина min ($b_i + c_i$) (при і не $\in$ σ_k). Таким чином, можна сказати, що обробка всіх деталей на трьох верстатах закінчиться не раніше ніж через $\delta_{Ak.}$

Аналогічний зміст мають і величини δ_{Bk} і δ_{Ck}, але тільки стосовно другого і третього верстатів.

Отже, якщо $C(\sigma_n)$ — це час закінчення обробки всіх деталей на третьому верстаті (а отже, і на трьох верстатах), то повинні одночасно виконуватися співвідношення:

$$\begin{aligned} C(\sigma_n) &\geq \delta_{Ak}, \\ C(\sigma_n) &\geq \delta_{Bk}, \\ C(\sigma_n) &\geq \delta_{Ck}. \end{aligned} \tag{21.3}$$

У такому випадку уведемо позначення

$$\xi = \max(\delta_{Ak}, \delta_{Bk}, \delta_{Ck}), \tag{21.4}$$

тоді $C(\sigma_n) \geq \xi$,
т. ч., величина ξ $\in$ оцінкою (нижньою границею) моменту закінчення всіх n деталей на трьох верстатах, за умови, що послідовність σ_k пройшла обробку на всіх верстатах. Очевидно, якщо взяти іншу послідовність (з інших номерів) деталей, то величина ξ може бути іншою. Та з послідовностей σ_k, для якої ξ має менше значення, є кращою для розглядання в першу чергу.

Відповідно до методу галузей і границь необхідно множину всіх можливих варіантів (n!) розбити на непересічні підмножини. Як це зробити? Можна так.

На першому кроці всю множину можливих послідовностей обробки розіб’ємо на n підмножин (по числу деталей) таким чином: до першою підмножини віднесемо всі послідовності, у яких першої буде оброблятися деталь з номером 1; до другої підмножини — усі послідовності з першою оброблюваною деталлю номер 2; і т. д. До множини n віднесемо всі послідовності, у яких першою обробляється деталь з номером n.

Використовуючи для кожної з цих множин формули (21.1)—(21.4), визначимо ті з множин, що є найбільш перспективними, тобто для яких ξ буде меншим, ніж в інших множинах. Нехай множина і — перспективна, її будемо розвивати, інші назвемо «висячими».

Розіб’ємо цю множину можливих послідовностей обробки на такі підмножини:

$$\{i, 1, \ldots\}, \{i, 2, \ldots\}, \ldots \{i, i\text{-}1, \ldots\}, \{i, i+1, \ldots\}, \ldots, \{i, n, \ldots\}\ldots \tag{21.5}$$

Тепер знову скористаємося формулами (21.1)—(21.4). Для кожної з цих підмножин визначимо ξ. Розглянемо підмножини (11) і всі висячі і серед них усіх виберемо найбільш перспективне. Для вибраної множини побудуємо підмножини, до яких знову застосовуємо (21.1)—(21.4) і т. д. Процес повторюється доти, поки не буде знайдена підмножина (послідовність), утримуюча n деталей, і для якої оцінка буде мінімальною і що саме і буде розв'язком задачі.

Нам залишилося визначити 0-й крок алгоритму, тобто крок, на який немає ще жодної операції розподілу сукупності всіх послідовностей на підмножини, тобто необхідно виконати обчислення по (21.1)—(21.4) з $\sigma_0 = \varnothing$ (порожньою множиною). Очевидно, що

$$\delta_{A0} = \delta_{B0} = \delta_{C0}.$$

Тоді

$\delta_{A0} = 0 + \Sigma a_i + \min (b_i + c_i)$, по всіх $i = \overline{1, n}$;

$\delta_{B0} = 0 + \Sigma b_i + \min c_i$, по всіх $i = \overline{1, n}$;

$\delta_{C0} = 0 + \Sigma c_i$, по всіх $i = \overline{1, n}$;

2. Зразок розв'язання задачі

Нехай умови задачі задані табл. 49:

Таблиця 49

ЧАС ОБРОБКИ ДЕТАЛЕЙ НА ВЕРСТАТАХ

Деталі / Верстати	1	2	3	4	5	Σ
Верстат 1	2	5	1	3	3	14
Верстат 2	3	2	1	4	5	15
Верстат 3	4	4	2	2	2	14

$\delta_{A0} = \delta_{B0} = \delta_{C0}$.

$\delta_{A0} = 0 + 14 + 3 = 17$;

$\delta_{B0} = 0 + 15 + 2 = 17$;

$\delta_{C0} = 0 + 14 = 14$

$\xi = \max (17, 17, 14)$, тобто раніше ніж через 17 годин обробка всіх деталей не закінчиться.

Розбиваємо всю множину послідовностей (5! = 120 можливих варіантів) на 5 підмножин:

{1, ...}, {2, ...},..., {*n*, ...}. Для прикладу побудуємо одну з таких підмножин, нехай з номером 2, тобто всі послідовності деталей цієї множини будуть починатися з деталі № 2:

{2, 1, 3, 4, 5}, {2, 1, 3, 5, 4}, {2, 1, 4, 3, 5}, {2, 1, 4, 5, 3}, {2, 1, 5, 3, 4}, {2, 1, 5, 4, 3},

{2, 3, 1, 4, 5}, {2, 3, 1, 5, 4}, {2, 3, 4, 1, 5}, {2, 3, 4, 5, 1}, {2, 3, 5, 1, 4}, {2, 3, 5, 4, 1},

{2, 4, 1, 3, 5}, {2, 4, 1, 5, 3}, {2, 4, 3, 1, 5}, {2, 4, 3, 5, 1}, {2, 4, 5, 1, 3}, {2, 4, 5, 3, 1},

{2, 5, 1, 3, 4}, {2, 5, 1, 4, 3}, {2, 5, 3, 1, 4}, {2, 5, 3, 4, 1}, {2, 5, 4, 1, 3}, {2, 5, 4, 3, 1}.

Аналогічно можуть бути побудовані інші чотири підмножини. Наша задача оцінить перспективність кожної з цих підмножин, тобто для кожної з необхідно обчислити їх ξ_i, де $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Для і = 1:

$A(\sigma_1) = A(\sigma_o) + a_1 = 0 + 2 = 2;$

$B(\sigma_1) = \max(A(\sigma_1), B(\sigma_0)) + b_1 = \max(2,0) + 3 = 5$

$C(\sigma_1) = \max(B(\sigma_1), C(\sigma0)) + c_1 = \max(5,0) + 4 = 5 + 4 = 9;$

$\delta_{A1} = A(\sigma_{1)} + \Sigma a_i + \min(b_i + c_i) = 2 + 12 + 3 = 17$, по всіх $i \neq 1$;

$\delta_{B1} = B(\sigma_{1)} + \Sigma b_i + \min c_i = 5 + 12 + 2 = 19$, по всіх $i \neq 1$;

$\delta_{C1} = C(\sigma_1) + \Sigma c_i = 9 + 10 = 19$, по всіх $i \neq 1$.

У такому разі введемо позначення

$\xi_1 = \max(17, 19, 19) = 19.$

Тепер можна сказати, що якщо обробка деталей почнеться з деталі № 1, то закінчиться обробка не раніше ніж через 19 годин.

Для і = 2:

$A(\sigma_1) = A(\sigma_o) + a_2 = 0 + 5 = 5;$

$B(\sigma_1) = \max(A(\sigma_1), B(\sigma_0)) + b_2 = \max(5,0) + 2 = 7$

$C(\sigma_1) = \max(B(\sigma_1), C(\sigma_0)) + c_2 = \max(7,0) + 4 = 7 + 4 = 11;$

$\delta_{A1} = A(\sigma_1) + \Sigma a_i + \min(b_i + c_i) = 5 + 9 + 3 = 17$, по всіх $i \neq 1$;

$\delta_{B1} = B(\sigma_1) + \Sigma b_i + \min c_i = 7 + 13 + 2 = 22$, по всіх $i \neq 1$;

$\delta_{C1} = C(\sigma_1) + \Sigma c_i = 11 + 10 = 21$, по всіх $i \neq 1$.

У такому разі введемо позначення

$\xi_2 = \max(17, 22, 21) = 22.$

Тепер можна сказати, що якщо обробка деталей почнеться з деталі № 2, то закінчиться обробка не раніше ніж через 22 годинк.

Аналогічно одержуємо для інших підмножин:

$i = 3$: $A(\sigma_1) = 1$, $B(\sigma_1) = 2$, $C(\sigma_1) = 4$, $\delta_{A1} = 20$, $\delta_{B1} = 18$, $\delta_{C1} = 16$, $\xi_3 = 20$;

$i = 4$: $A(\sigma_1) = 3$, $B(\sigma_1) = 7$, $C(\sigma_1) = 9$, $\delta_{A1} = 17$, $\delta_{B1} = 20$, $\delta_{C1} = 21$, $\xi_4 = 21$;

$i = 5$: $A(\sigma_1) = 3$, $B(\sigma_1) = 8$, $C(\sigma_1) = 10$, $\delta_{A1} = 20$, $\delta_{B1} = 22$, $\delta_{C1} = 22$, $\xi_5 = 22$.

Тепер можна сказати, що на даному етапі найбільш перспективною множиною є підмножина № 1.

Усі обчислення зручно проводити в табл. 50:

Таблиця 50

ОБЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ЗАДАЧІ ДЖОНСОНА

σ_k	$A(\sigma_k)$	$B(\sigma_k)$	$C(\sigma_k)$	ξ_k
	δ_{Ak}	δ_{Bk}	δ_{Ck}	

Зведемо всі зроблені обчислення в такі таблички і виконаємо аналогічні розрахунки для інших множин: 3, 4 і 5 (див. рис. 1, кроки 0—5.). Перспективною є множина 1. Розбиваємо цю множину можливих послідовностей обробки на підмножини: кроки 6—9. У цих підмножинах усі послідовності починаються деталлю № 1, а другі деталі в них відмінні від з тих, що залишилися (крім № 1). Після обчислень по (6)—(9) і порівняння оцінок множин 2 — 9, одержимо перспективну множину 8 (послідовність деталей $\sigma_2 = \{1, 4\}$, послідовність обробки, що починається деталями 1, 4). Потім йдуть кроки 10—12 і 13—14, 15—16. Потім необхідно повернутися на висячу вершину 7, тому що її оцінка рівна 20 та виявилася на цьому кроці (15—16) найменшою. Після виконання послідовності кроків 17—19, 22—23 і 24, одержуємо оптимальну послідовність обробки деталей:

$\sigma_5^* = \{1, 3, 5, 2, 4\}$ з найменшим часом обробки 20 годин.

У графі розв'язання задачі є дві вершини 3 і 9 з оцінками, рівними 20, але ми їх не розглядаємо, тому що їхня оцінка не кращою знайденої σ_5^* і краще вона вже не стане, але послідовності деталей, що відповідають цим вершинам, далеко не повні. У зв'язку з цим, нарощування цих послідовностей до 5 деталей може тільки збільшити їхні оцінки, тобто зробити більшими 20, у крайньому разі вони можуть залишитися незмінними, тобто рівними 20. Отже, маючи послідовність σ_5^*, не треба розглядати названі вершини.

ВИСНОВКИ

Задача про три верстати зважується методом гілок і границь.

Потрібно скласти таку послідовність запуску деталей на обробку, для якої час закінчення обробки на всіх верстатах буде найменшим.

Відповідно до методу галузей і границь, необхідно множину усіх можливих варіантів (n!) розбити на непересічні підмножини.

Спочатку обчислюються моменти закінчення обробки послідовності деталей σ_k на першому, другому і третьому верстатах відповідно.

Потім обчислюються оцінки (нижні границі) моменту закінчення всіх n деталей на трьох верстатах.

Визначають ті з множин, що є найбільш перспективними (їх назвемо «висячими»). Їх розвивають. Процес повторюється доти, поки не буде знайдена підмножина (послідовність) утримуюча n деталей, і для якої оцінка буде мінімальною і яке саме і буде розв'язком задачі.

ПРАКТИЧНІ ЗАНЯТТЯ

1. Приклад

1. Задача Джонсона (див табл. 51).

Таблиця 51

ЧАСИ ОБРОБКИ ДЕТАЛЕЙ НА ВЕРСТАТАХ

Деталі / Станки	1	2	3	4
Станок 1	4	8	3	8
Станок 2	10	12	7	9
Станок 3	6	8	4	9

Постановка задачі:

Необхідно опрацювати на трьох верстатах n деталей. У всіх деталей одна і та ж послідовність обробки: 1, 2 і 3-й станки. Час обробки деталей на кожному верстаті наведені в табл. 52.

Таблиця 52

ЧАС ОБРОБКИ ДЕТАЛЕЙ НА ВЕРСТАТАХ

Деталі / Станки	1	2	…	n	Σ
Станок 1	a_1	a_2	…	a_n	Σa_i
Станок 2	b_1	b_2	…	b_n	Σb_i
Станок 3	c_1	c_2	…	c_n	Σc_i

Вимагається скласти оптимальну послідовність обробки всіх n деталей на цих верстатах, тобто таку послідовність запуску деталей на обробку, для якої час закінчення обробки на всіх верстатах буде якнайменшим.

Алгоритм розв'язання

Ця задача розв'язується методом гілок і меж, для цього введемо ряд параметрів:

$\sigma_{k+1} = \{\sigma_k, i_{k+1}\}$ — вільна послідовність з $k + 1$ деталей;

А (σ_k), В (σ_k) и С (σ_k) — моменти закінчення обробки послідовності деталей *yk* на першому, другому і третьому верстатах відповідно. Для послідовності *yk* + 1 аналогічні моменти можна обчислити по рекурентних формулах:

$A(\sigma_{k+1}) = A(\sigma_k) + a_{k+1};$

$B(\sigma_{k+1}) = \max(A(\sigma_{k+1}), B(\sigma_k)) + b_{k+1};$

$C(\sigma_{k+1}) = \max(B(\sigma_{k+1}), C(\sigma_k)) + c_{k+1}.$

Оцінки:

$\delta_{Ak} = A(\sigma_k) + \Sigma a_i + \min(b_i + c_i)$, по всіх i $\in \overline{\sigma_k}$ (по всіх деталях, що не входять в послідовність σ_k);

$\delta_{Bk} = B(\sigma_k) + \Sigma b_i + \min c_i$, по всіх i $\in \overline{\sigma_k}$;

$\delta_{Ck} = C(\sigma_k) + \Sigma c_i$, по всіх i є $\overline{\sigma_k}$.

Величина δ_{Ak} має сенс оцінки закінчення обробки всієї послідовності деталей на всіх верстатах. Таким чином, можна сказати, що обробка всіх деталей на трьох верстатах завершиться не раніше ніж через δ_{Ak}, δ_{Bk} та $\delta_{Ck.}$

Введемо позначення

$$\xi = \max(\delta_{Ak}, \delta_{Bk}, \delta_{Ck}),$$

тоді $C(\sigma_n) \geq \xi$,
тобто величина ξ $\in$ оцінкою (нижньою межею) моменту закінчення всіх n деталей на трьох верстатах, за умови, що послідовність σ_k пройшла обробку на всіх верстатах. Очевидно, якщо взяти іншу послідовність (з інших номерів) деталей, то величина може бути іншою. Та з послідовностей ξ може бути іншою. Та з послідовностей σ_k, для якої ξ має менше значення, є переважнішою для розгляду в першу чергу.

Розв'язання задачі

Хай умови задачі задані табл. 53:

Таблиця 53

ЧАС ОБРОБКИ ДЕТАЛЕЙ НА ВЕРСТАТАХ

Верстати \ Деталі	1	2	3	4
Верстат 1	4	8	3	8
Верстат 2	10	12	7	9
Верстат 3	6	8	4	9

0-й крок, коли в послідовності 0 деталей:

Очевидно, що $\delta_{A0} = \delta_{B0} = \delta_{C0}$.

Тоді

$\delta_{A0} = 0 + \Sigma a_i + \min(b_i + c_i) = 34$, по всіх $i = \overline{1, n}$;

$\delta_{B0} = 0 + \Sigma b_i + \min c_i = 42$, по всіх $i = \overline{1, n}$;

$\delta_{C0} = 0 + \Sigma c_i = 27$, по всіх $i = \overline{1, n}$;

Оцінимо перспективність кожної з підмножин послідовностей обробки, тобто для кожної з підмножин необхідно обчислити їх ξ_i, де $i = 1, 2, 3, 4$.

Для і = 1:

$A(\sigma_1) = A(\sigma_o) + a_1$

$B(\sigma_1) = \max(A(\sigma_1), B(\sigma_0)) + b_1$

$C(\sigma_1) = \max(B(\sigma_1), C(\sigma 0)) + c_1$

$\delta_{A1} = A(\sigma_1) + \Sigma a_i + \min(b_i + c_i)$, по всіх $i \neq 1$;

$\delta_{B1} = B(\sigma_1) + \Sigma b_i + \min c_i$, по всіх $i \neq 1$;

$\delta_{C1} = C(\sigma_1) + \Sigma c_i$, по всіх $i \neq 1$.

У такому разі введемо позначення

$$\xi_1 = \max(\delta_{A1}, \delta_{B1}, \delta_{C1}).$$

Тепер можна сказати, що якщо обробка деталей почнеться з деталі № 1, то закінчиться обробка не раніше ніж через ξ_1.

Для і = 2:

$A(\sigma_1) = A(\sigma_o) + a_2$;

$B(\sigma_1) = \max(A(\sigma_1), B(\sigma_0)) + b_2$

$C(\sigma_1) = \max(B(\sigma_1), C(\sigma_0)) + c_2$

$\delta_{A1} = A(\sigma_1) + \Sigma a_i + \min(b_i + c_i)$, по всіх $i \neq 1$;

$\delta_{B1} = B(\sigma_1) + \Sigma b_i + \min c_i$, по всіх $i \neq 1$;

$\delta_{C1} = C(\sigma_1) + \Sigma c_i$, по всіх $i \neq 1$.

Знайдемо max $\xi_{2.}$

Аналогічно обчислюємо для інших підмножин.

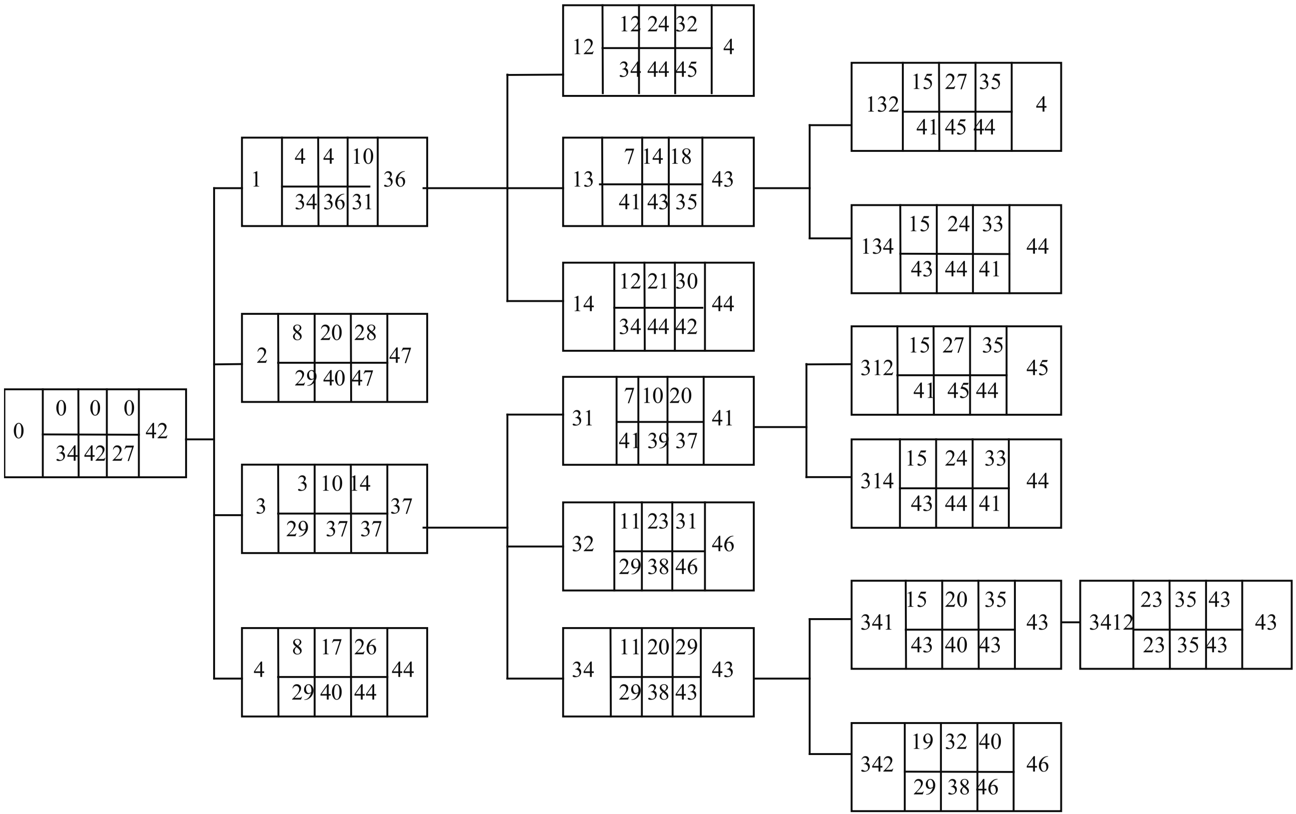

Рис. 19. Дерево розв’язання задачі Джонсона

Тепер можна сказати, яка підмножина на даному етапі є найперспективнішою.

Перспективною є множина 1.

Розбиваємо цю безліч можливих послідовностей обробки на підмножини. У цих підмножинах всі послідовності починаються деталлю № 1, а другі деталі у них різні з тих, що залишилися (окрім № 1). Після обчислень і порівняння оцінок множин одержимо перспективну множину (послідовність деталей $\sigma_2 = \{1, 2\}$, послідовність обробки, що починається деталями 1, 2). І так далі. Після виконання послідовності з чотирьох кроків, одержуємо оптимальну послідовність обробки деталей: $\sigma_5^* = \{3, 4, 1, 2\}$ з якнайменшим часом обробки 43 години.

Всі обчислення зведемо в рисунок 19.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Опишіть алгоритм розв'язання задачі Джонсона.
2. Сформулюйте критерій оптимальності задачі «трьох верстатів».

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Розв'язання задачу Джонсона.

Варіанти задачі Джонсона про три стани:

1.

	1	2	3	4
а	20	8	7	15
в	48	18	20	40
с	24	10	6	20

2.

	1	2	3	4
а	20	20	10	6
в	11	12	5	4
с	22	23	12	8

3.

	1	2	3	4
а	4	8	3	8
в	10	12	7	9
с	6	8	4	9

4.

	1	2	3	4
а	1	7	9	5
в	1	2	5	1
с	1	1	4	1

5.

	1	2	3	4
а	20	8	7	15
в	48	18	20	40
с	24	10	6	20

6.

	1	2	3	4
а	4	2	5	5
в	8	5	10	7
с	9	3	6	6

7.

	1	2	3	4
а	10	13	9	8
в	6	7	1	2
с	15	14	5	7

8.

	1	2	3	4
а	12	15	11	10
в	8	9	3	4
с	17	16	7	9

9.

	1	2	3	4
а	15	3	2	10
в	43	13	15	35
с	19	5	1	15

10.

	1	2	3	4
а	17	7	7	6
в	8	9	2	1
с	19	20	9	5

11.

	1	2	3	4
а	2	6	1	6
в	8	10	5	7
с	4	6	2	3

12.

	1	2	3	4
а	13	6	7	8
в	9	4	5	5
с	12	6	8	4

13.

	1	2	3	4
а	6	4	7	7
в	10	7	12	9
с	11	5	8	8

14.

	1	2	3	4
а	15	10	10	7
в	8	6	9	10
с	6	7	15	6

15.

	1	2	3	4
а	10	5	5	2
в	3	1	4	5
с	1	2	10	1

16.

	1	2	3	4
а	15	8	9	10
в	11	6	7	7
с	14	8	10	4

17.

	1	2	3	4
а	8	6	11	8
в	5	7	10	4
с	8	9	13	7

18.

	1	2	3	4
а	10	5	7	5
в	5	15	10	7
с	6	10	12	7

19.

	1	2	3	4
а	6	1	3	1
в	1	11	6	3
с	2	6	8	3

20.

	1	2	3	4
а	8	3	5	3
в	3	13	8	5
с	4	8	10	5

ТЕМА 22

ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1. ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ ДИНАМІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

У ЗЛП економічний процес вважається статичним, тобто не залежним від часу, тому оптимальне розв'язання знаходиться тільки на один етап планування.

Такі задачі називаються одноетапними чи однокроковими.

У задачах динамічного програмування економіки процес залежить від часу (декількох етапів (періодів) часу), тому є ряд оптимальних розв'язань (послідовно для кожного етапу), що забезпечують оптимальний розвиток процесу в цілому.

Задачі ДП називаються багатоетапними або багатокроковими.

ДП являє собою математичний апарат, що дозволяє здійснити оптимальне планування багатокрокових керованих процесів і процесів, що залежать від часу.

Економічний процес називається керованим, якщо можна впливати на хід його розвитку. Керуванням називається сукупність рішень, прийнятих на кожному етапі з метою впливу на хід процесу (розподіл і перерозподіл засобів на кожному етапі).

Наприклад, випуск продукції будь-яким підприємством — керований процес, тому що він визначається зміною ресурсів, складу устаткування, обсягом постачань сировини і т. ін.

Початком етапу керованого процесу вважається процес ухвалення рішення (про величину капітальних вкладень, заміні устаткування і т. ін.). Під етапом звичайно розуміють господарський рік.

Плануючи багатоетапний процес, виходять з інтересів процесу в цілому, тобто при ухваленні рішення на окремих етапах завжди необхідно мати на увазі кінцеву мету.

2. ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Нехай планується діяльність деякої системи s промислових підприємств P_1, P_2, …, P_j, …, P_n на деякий період часу T, що складає k господарських років t_i, де ($t = 1, \ldots, k$), причому $T = \sum t_i$.

На початку періоду T на розвиток підприємств виділені основні засоби D.

На початку кожного року виробляється фінансування всієї системи підприємств, тобто виділяється частина основних засобів. Відомий первісний стан системи S_0, який характеризується кількістю засобів, вже вкладених у підприємства і кінцевий стан S_k, сумою D.

Як слід розподілити по підприємствах і роках основні засоби D, щоб до кінця періоду T сумарний дохід W від усієї системи підприємств був би max?

Розв'язання

Позначимо через x_{ij} суму, виділену на початку i-го року j-му підприємству ($i = 1, \dots, k$), ($j = 1, \dots, n$).

Припустимо, що засоби на i-му етапі розподілені, тобто вибране визначене керування u_1, воно полягає в тому, що на початку i-го періоду підприємству P_1 виділені засоби x_{i1}, підприємству $P_2 - x_{i2}$ і т. д.

Тоді вектор $U_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ визначає розподіл засобів на i-му кроці.

Сукупність виділених засобів (керувань) на k кроках виражається системою векторів

$U_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$
$U_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$
…………
$U_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$

Сумарний дохід за k років залежить від сукупності керувань, тобто є функцією від $U_1, U_2, \dots, U_k$:

$$W = W(U_1, U_2, \dots, U_k).$$

Завдання полягає в тому, що: на кожному етапі необхідно вибрати таке керування, щоб сумарний дохід від усієї системи підприємств був max.

ВИСНОВКИ

ДП використання поетапного планування дозволяє спростити рішення задач. Спрощення досягається тим, що на кожному етапі, з огляду на розвиток усього процесу, оптимізують тільки один крок, тобто при ухваленні рішення враховується майбутнє.

Однак, у кожному процесі є останній *k-й* крок, ухвалення рішення на який не залежить від майбутнього. Тому на цьому кроці вибирають керування, що дозволяє одержати найбільший ефект. Спланувавши цей крок, до нього можна приєднати передостанній

$(k-1)-i$ крок, до якого, у свою чергу, $(k-2)-i$ і т. д. В остаточному підсумку приходять у початковий стан системи S_0. Процес динамічного програмування нібито обертається від кінця до початку [7, с. 274].

Практичні заняття

1. Задача про Диліжанс

Постановка задачі: Знайти найкоротший маршрут з кінцевого пункту в початковий, якщо відома матриця транспортних витрат (див. табл. 54).

Таблиця 54

МАТРИЦЯ ТРАНСПОРТНИХ ВИТРАТ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		7	5	9						
2					11	7	12			
3					8	5	9			
4					10	10	6			
5							11	13		
6							12		9	
7										8
8										7
9										6
10										

Алгоритм розв'язання:

$f_n(s)$ — вартість, що відповідає стратегії min витрат для шляху від пункту s, якщо до кінцевого пункту залишилося n кроків.

$j_n(s)$ — розв'язок, що дозволяє досягти $f_n(s)$.

Розраховувати будемо, користуючись рекурентним співвідношенням:

$$f_n(s) = \min\left(c_{sj} + f_{n-1}(j)\right) \text{ по всіх } s \text{ та } j \text{ на мережі.}$$

Розв’язок:

Крок 1

В / Із	10	*f*	*j*
7	8	**10**	**8**
8	7	10	7
9	6	**10**	**6**

Крок 2

В / Із	7	8	9	*f*	*j*
5	11 + 8	13 + 7		19	7
6	12 + 8		9 + 6	**15**	**9**

Крок 3

В / Із	5	6	7	*f*	*j*
2	11 + 19	7 + 15	12 + 8	20	7
3	8 + 19	5 + 15	9 + 8	**17**	**7**
4	10 + 19	10 + 15	6 + 8	14	7

Крок 4

В / Із	2	3	4	*f*	*j*
1	7 + 20	5 + 17	9 + 14	**22**	**3**

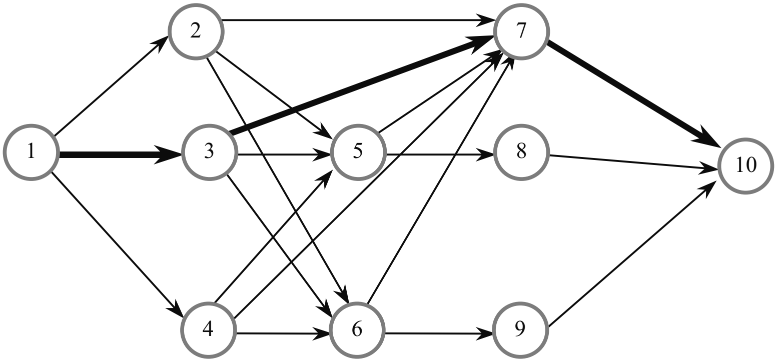

Рис. 20. Транспортна мережа

Відповідь: $F = 22$, найкоротший шлях 1 — 3 — 7 — 10.

2. Задача про диліжанс

Постановка задачі:

Знайти найкоротший маршрут з кінцевого пункту в початковий, якщо відома матриця транспортних витрат (табл. 55).

Таблиця 55

МАТРИЦЯ ТРАНСПОРТНИХ ВИТРАТ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		4	6	5						
2					3	7	5			
3					4	7	9			
4					5	3	7			
5								9	5	
6								4	7	
7								7	5	
8										1
9										1

Алгоритм розв'язання:

$f_n(s)$ — вартість, що відповідає стратегії min витрат для шляху від пункту s, якщо до кінцевого пункту залишилося n кроків.

$j_n(s)$ — розв'язання, що дозволяє досягти $f_n(s)$.

Розраховувати будемо, користуючись рекурентним співвідношенням:

$$f_n(s) = \min\,(c_{sj} + f_{n-1}(j)) \text{ по всіх } s \text{ і } j \text{ на мережі.}$$

Розв'язання:

Крок 1

Із \ В	10	*f*	*j*
8	1	**10**	1
9	1	**10**	1

Крок 2

Із \ В	8	9	*f*	*j*
5	9 + 1	5 + 1	**9**	6
6	4 + 1	7 + 1	**8**	5
7	7 + 1	5 + 1	9	6

Крок 3

Із \ В	5	6	7	*f*	*j*
2	3 + 6	7 + 5	5 + 6	**5**	9
3	4 + 6	7 + 5	9 + 6	5	10
4	5 + 6	3 + 5	7 + 6	**6**	8

Крок 4

Із \ В	2	3	4	*f*	*j*
1	4 + 9	6 + 10	5 + 8	**2, 4**	13

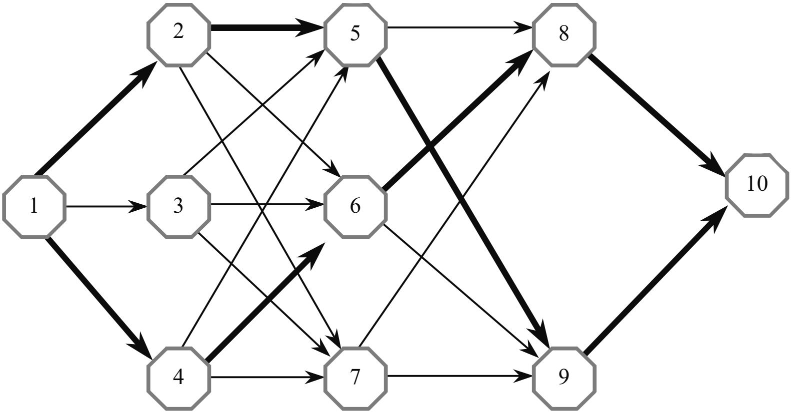

Рис. 21. Транспортна мережа

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Які основні принципи динамічного моделювання?
2. Сформулюйте загальну постановку задачі динамічного програмування.
3. Напишіть рекурентні співвідношення в задачі про диліжанс.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		10	15	14						
2					11	7	12			
3					8	5				
4					10	10				
5							11	13		
6							12	9	6	
7										10
8										2
9										6
10										

2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		12	17	16						
2					10	9	15			
3					7	7				
4					9	12				
5							14	10		
6							15	6	6	
7										12
8										4
9										8
10										

3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		8	7	11						
2					11	7	12			
3					8	5	9			
4					14	15	6			
5							11	13		
6							12		9	
7										8
8										7
9										6
10										

4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		9	12	9						
2					16	17	12			
3					18	15	19			
4					10	10	16			
5							11	13	12	
6							12	10	9	
7										3
8										7
9										6
10										

5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		5	2	4						
2					6	7	2			
3						5	9			
4					5	4	6			
5							11	13	12	
6							4	4	5	
7										8
8										7
9										8
10										

6.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		29	22	22						
2					26	15	12			
3					21	15	19			
4					20	10			10	
5							11	13	12	
6							12	10	9	
7										23
8										17
9										23
10										

7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		9	12	9						
2					4	12	12			
3					8	15	19			
4					7	13			8	
5							11	13	12	
6							12	10	9	
7										3
8										7
9										6
10										

8.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		12	8	7							
2					4	5	8				
3						7	8	9			
4						6	8	7			
5									11	10	
6									10	9	
7									12	8	
8										7	
9											6
10											9
11											

9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		9	11	7							
2					7	8	10				
3						7	9	5			
4						6	8	7			
5									10	8	
6									10	11	
7									12	4	
8										7	
9											6
10											9
11											

10.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		24	23	17							
2					17	18	10				
3						17	19	25			
4						26	18	17			
5									10	8	
6									10	11	
7									12	14	
8										7	
9											16
10											19
11											

11.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		36	31	37							
2					37	28	30				
3						27	29	5			
4						26	28	17			
5									20	18	
6									19	11	
7									22	14	
8										17	
9											6
10											9
11											

12.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		9	11	7							
2					7	8	10				
3						7	9	5			
4						6	8	7			
5									10	8	
6									10	11	
7									12	4	
8										7	
9											6
10											9
11											

13.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		9	10	7							
2					7	8	10	12			
3					9	7	9	5			
4					6	6	8	7			
5									10		
6									10	11	
7									12	4	
8									11	7	
9											16
10											19
11											

14.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		11	10	12							
2					15	19	14	12			
3					9	7	9	5			
4					7	5	7	9			
5									7		
6									6	11	
7									3	4	
8									11	7	
9											7
10											9
11											

15.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		4	5	6							
2					7	8	9	12			
3					9	8	7	5			
4					6	9	8	7			
5									7		
6									10	11	
7									8	4	
8									11	7	
9											9
10											5
11											

16.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		4	6	5						
2					3	7	5			
3					4	7	9			
4					5	3	7			
5								9	5	
6								4	7	
7								7	5	
8										1
9										1
10										

17.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		7	10	5						
2					9	5	5			
3					4	7	5			
4					7	8	7			
5								7	5	
6								4	7	
7								3	5	
8										8
9										5
10										

18.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		4	6	5						
2					5	8				
3					4		9			
4						3	7			
5								19	5	
6								14	7	
7								17	5	
8										10
9										1
10										

19.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		24	26	15						
2					23	17	25			
3					24	17	19			
4					15	13	17			
5								9	5	
6								24	27	
7								17	25	
8										21
9										19
10										

20.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		7	8	5						
2					15	18				
3					14		20			
4						3	7			
5								11	15	
6								10	17	
7								17	11	
8										21
9										23
10										

Список літератури

1. *Вагнер*. Вступление в исследование операций. — М.: Мир, 1973.

2. *Вагнер Г. М.* Основы исследования операций, т. 1—3, пер. с англ., М., 1972—73.

3. *Грубер И*. Економетрія. — К.: Астарта, 1996.

4. *Зайченко Ю. П., Шумилова С. А*. Исследование операций. Сб. задач. — К.: Высшая шк., 1990.

5. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций. — К.: Вища шк., 1990.

6. *Калихман И. Л.* Сборник задач по математическому программированию. — М.: Высш. шк., 1975.

7. *Крушевський А. В*., Довідник по економіко-математичному моделюванню. — К.: Техніка, 1982.

8. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. — М.: Высш. шк., 1976.

9. *Мирошник М. М.* Економико-математические методы и модели в планировании и управлении материально-техничним обеспечением. — М.: — Высш. шк., 1999.

10. *Невелівши А. М.* Прогнозування й планування матеріальних ресурсів. — К.: Техніка, 1975.

11. Линейное и нелинейное программирование / Под общей редакцией И. Н. Ляшенко. — К.: Высш. школа, 1975.

12. *Калихман И. Л.* Линейная алгебра и программирование. — М.: Высшая школа, 1967.

13. *Кузнецов Ю. Н.* Математическое программирование. — М.: Высшая школа, 1976.

14. *Курощ А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971.

15. *Юдин Б. Б. Гольштейн Е. Г.* Задачи и методы нелинейного программирования. — М.: Советское радио, 1964.

16. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование, 2 изд., М., 1967.

17. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование, перевод с английского. — М., 1967.

18. *Морз Ф. М., Кимбелл Д. Е*. Методы исследования операций, пер. с англ. — М., 1956.

19. *Кофман А., Фор Р.* Займемся исследованием операций, пер. с франц. — М., 1966.

20. *Черчмен Ч. У., Акофф Р., Арноф Л.* Введение в исследование операций, пер. с англ. — М., 1968.

21. *Акофф Р., Сасиени М. В*. Основы исследования операций, пер. с англ. — М., 1971.

22. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. — М., 1972.

23. *Трояновский В. М.* Математическое моделирование в менеджменте. — М.: Издательство РДЛ, 2000.

24. Operationsforschung. Mathematische Grundlagen, Methoden und Modelle, Hrsg. von W. Dück, M. Bliefernich, Bd 1—3, B., 1971—1973.

25. *Бахтин Е. А. и др.* Сборник задач по математическому программированию. — Новосибирск, 1994.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ІРИНА ЮРІЇВНА ІВЧЕНКО

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Навчальний посібник

Керівник видавничих проектів – *Б.А.Сладкевич*
Друкується в авторській редакції
Дизайн обкладинки – *Б.В. Борисов*

Підписано до друку 20.04.2007. Формат 60х84 1/16.
Друк офсетний. Гарнітура PetersburgC.
Умовн. друк. арк. 14,5.

Видавництво "Центр учбової літератури"
вул. Електриків, 23
м. Київ, 04176
тел./факс 425-01-34, тел. 451-65-95, 425-04-47, 425-20-63
8-800-501-68-00 (безкоштовно в межах України)
e-mail: office@uabook.com
сайт: WWW.CUL.COM.UA
Свідоцтво ДК №2458 від 30.03.2006