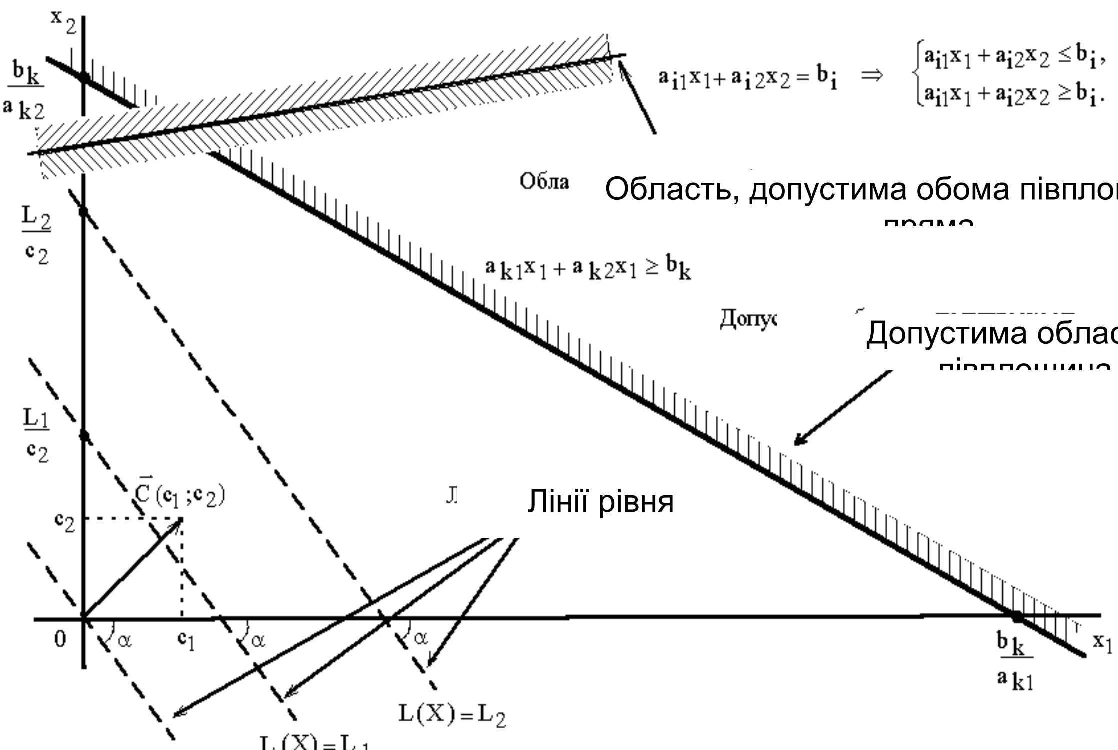
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М.П.Драгоманова

До 175-річчя Національного педагогічного університету імені М.П.Драгоманова

Гончаренко Я. В.

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ



Київ – 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені М.П.Драгоманова

Гончаренко Я. В.

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Київ – 2010

Гончаренко Я.В. Математичне програмування. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. — 184 с.

Рекомендовано до друку Радою Фізико-математичного Інституту НПУ імені М.П.Драгоманова

Рецензенти:

Працьовитий Микола Вікторович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, директор Фізико-математичного інституту НПУ імені М.П.Драгоманова

Лещинський Олег Львович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач відділенням бакалаврату ПЕК НАУ

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Одним з основних завдань фахівця з економіки та підприємництва є керівництво економічними системами, розробка та впровадження стратегічних і тактичних планів. Математичне програмування — один з основних інструментів управління економічними системами, що полягає в розробці методів розв’язування оптимізаційних задач та дослідження отриманих розв’язків.

Основними завданнями навчальної дисципліни “Математичне програмування” є:

1) ознайомити студентів з видами економіко-математичних моделей;
2) ознайомити студентів з основними методами та алгоритмами знаходження оптимального розв’язку задач лінійного, цілочисельного, нелінійного, стохастичного та динамічного програмування.
3) навчити, використовуючи здобуті знання, розв’язувати теоретичні і прикладні задачі економіки;
4) дати необхідну підготовку і знання для вивчення інших дисциплін професійного циклу, зокрема, дослідження операцій.

Навчальний посібник “Математичне програмування”, містить необхідний мінімум знань з наступних розділів: загальна задача лінійного програмування та методи її розв’язання, двоїстість у лінійному програмуванні, транспортна задача, цілочисельне програмування, елементи нелінійного програмування, елементи теорії ігор, елементи стохастичного та динамічного програмування, а також задачі для самостійного розв’язання та завдання розрахункової роботи для студентів спеціальностей «Математика та економіка», «Економічна теорія та інформатика», «Менеджмент організацій».

ВСТУП

Одним з основних завдань фахівця з економіки та підприємництва є керівництво економічними системами, розробка та впровадження стратегічних і тактичних планів. Математичне програмування — один з основних інструментів управління економічними системами, що полягає в розробці методів розв'язування оптимізаційних задач та дослідження отриманих розв'язків.

Як самостійний науковий напрямок математичне програмування сформувалось на початку 40-х років XX століття. В 1939 році відомий російський математик Л.В.Канторович опублікував роботу "Математичні методи організації та планування виробництва", в якій сформулював принципово новий клас екстремальних задач з обмеженніми і розробив ефективний метод їх розв'язання. Так було започатковано новий розділ прикладної математики, який пізніше отримав назву "лінійне програмування". Дослідження Л.В.Канторовича в цій галузі сприяли створенню строго наукового інструментарію для розв'язання фундаментальних економічних проблем (ефективності капіталовкладень, ціноутворення, теорії ренти тощо), за що в 1975 р. Канторович був удостоєний (разом з Т.Ч.Купмансом) Нобелевської премії з економіки.

Лінійне програмування є однією з основних частин розділу сучасної математики, який називається «математичне програмування». В загальній постановці задачі цього розділу виглядають наступним чином. Існують деякі змінні $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ і функція цих змінних $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$, яка називається *цільовою функцією.* Ставиться задача: знайти екстремум (максимум або мінімум) цільової функції при умові що значення змінних належать деякій області G.

В залежності від виду функції $f(x)$ і області G виділяють різні розділи математичного програмування: квадратичне, опуклу, цілочисельне програмування тощо. Лінійне програмування характеризується тим, що

а) функція $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ є лінійною;

б) область G визначається системою лінійних рівнянь або нерівностей.

1. ЖОРДАНОВІ ВИКЛЮЧЕННЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

1.1. Звичайні жорданові виключення

Нехай задана система лінійних функцій:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1.1.1}$$

від незалежних змінних x_1, x_2, …, x_n, a_{ij} — деякі дійсні числа

($i = 1,2,...,n, \quad j = 1,2,...,m$).

Систему (1.1.1) можна представити у вигляді жорданової таблиці:

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

1.2. Алгоритм кроку звичайних жорданових виключень

1. Розв'язувальний елемент замінити оберненою величиною.
2. Решту елементів розв'язувального рядка розділити на розв'язувальний елемент і змінити знак на протилежний.
3. Решту елементів розв'язувального стовпчика розділити на розв'язувальний елемент.
4. Всі інші елементи знайти за правилом прямокутника:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{ks} - a_{is}a_{kj}}{a_{ks}},$$

де a_{ks} — розв'язувальний елемент; a_{ij} — деякий елемент старої жорданової таблиці; a'_{ij} — відповідний елемент нової жорданової таблиці; $i \neq k$, $j \neq s$.

Правило прямокутника можна проілюструвати наступною схемою:

$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{is}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	a_{kj}	$\cdots$	a_{ks}	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

1.3. Застосування звичайних жорданових виключень до знаходження оберненої матриці і розв'язування систем лінійних рівнянь

Розглянемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

де $a_{ij} \in R$, $b_i \in R$, причому визначник основної матриці системи не дорівнює 0 (система є визначеною).

Переписавши систему у вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - b_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n - b_2 = 0, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n - b_n = 0, \end{cases}$$

запишемо її у вигляді жорданової таблиці:

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	1
$0_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	$-b_1$
$0_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	$-b_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$0_n =$	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nn}	$-b_n$

У першому стовпчику таблиці записані нулі (праві частини рівнянь системи) з номерами рядків, в яких вони знаходяться.

Згідно з теоремою Стейніца, зробивши рівно n кроків звичайних жорданових виключень, після можливих перестановок рядків або стовпчиків, можна одержати наступну жорданову таблицю:

	0_1	0_2	$\cdots$	0_n	1
$x_1 =$	a'_{11}	a'_{12}	$\cdots$	a'_{1n}	c_1
$x_2 =$	a'_{21}	a'_{22}	$\cdots$	a'_{2n}	c_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_n =$	a'_{n1}	a'_{n2}	$\cdots$	a'_{nn}	c_n

З останньої таблиці знаходимо розв'язки даної системи лінійних рівнянь:

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \dots,\ x_n = c_n$$

і матрицю, обернену основній матриці системи:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Якщо необхідно знайти розв'язок системи, не виписуючи оберненої матриці, то після кожного кроку жорданових виключень можна викреслювати стовпчик, в заголовку якого утворився 0.

Задача 1.3.1. Знайти розв'язки та обернену матрицю до основної матриці системи:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8, \\ x_1+x_2+x_3=6, \\ -x_1+2x_2+2x_3=9. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо дану систему у вигляді жорданової таблиці:

	x_1	x_2	x_3	1
$0_1=$	**1**	2	1	-8
$0_2=$	1	1	1	-6
$0_3=$	-1	2	2	-9

З розв'язувальним елементом $a_{11}=1$ виконаємо перший крок звичайних жорданових виключень. Отримаємо:

	0_1	x_2	x_3	1
$x_1=$	1	-2	-1	8
$0_2=$	1	**-1**	0	2
$0_3=$	-1	4	3	-17

З елементом $a_{22}=-1$ виконаємо другий крок звичайних жорданових виключень. Отримаємо:

	0_1	0_2	x_3	1
$x_1=$	-1	2	-1	4
$x_2=$	1	-1	0	2
$0_3=$	3	-4	**3**	-9

З елементом $a_{33}=3$ виконаємо третій крок звичайних жорданових виключень. Отримаємо:

	0_1	0_2	0_3	1
$x_1=$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
$x_2=$	1	-1	0	2
$x_3=$	-1	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	3

Отже,

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3.$$

Матриця, обернена до основної матриці системи:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Задача 1.3.2. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} -x_1+3x_2+6x_3=5, \\ 2x_1-3x_2-8x_3=-3, \\ 4x_1-9x_2-7x_3=39. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо дану систему у вигляді жорданової таблиці:

	x_1	x_2	x_3	1
$0_1=$	-1	3	6	-5
$0_2=$	2	-3	-8	3
$0_3=$	4	-9	-7	39

З розв'язувальним елементом $a_{11}=-1$ виконаємо перший крок звичайних жорданових виключень. Отримаємо:

	0_1	x_2	x_3	1
$x_1=$	-1	3	6	-5
$0_2=$	-2	3	**4**	-7
$0_3=$	-4	3	17	19

В отриманій таблиці викреслимо перший стовпчик і з розв'язувальним елементом $a_{23}=4$ виконаємо другий крок звичайних жорданових виключень. Отримаємо:

	x_2	0_2	1
$x_1=$	$-\frac{6}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{22}{4}$
$x_3=$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$
$0_3=$	$-\frac{39}{4}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{195}{4}$

В отриманій таблиці викреслимо другий стовпчик і з розв'язувальним елементом $a_{31}=-\frac{39}{4}$ виконаємо третій крок звичайних жорданових виключень. Отримаємо:

	1
$x_1=$	-2
$x_3=$	-2
$x_2=$	5

Отже,

$$x_1=-2,\ x_2=5,\ x_3=-2.$$

Відповідь: $x_1=-2$, $x_2=5$, $x_3=-2$.

Зауважимо, що значення елементів стовпчика, в заголовку якого стоїть нуль, можна не обчислювати взагалі.

Задача 1.3.3. Знайти матрицю, обернену до даної:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо матрицю у вигляді жорданової таблиці, заголовки рядочків і стовпчиків якої позначимо для зручності a_1, a_2, a_3 і b_1, b_2, b_3 відповідно.

	a_1	a_2	a_3
$b_1 =$	-1	2	3
$b_2 =$	0	1	-2
$b_3 =$	1	**1**	3

З елементом $a_{32}=1$ виконаємо перший крок звичайних жорданових виключень. Отримаємо:

	a_1	b_3	a_3
$b_1 =$	-3	2	-3
$b_2 =$	**-1**	1	-5
$a_2 =$	-1	1	-3

З елементом $a_{21}=-1$ виконаємо другий крок звичайних жорданових виключень. Отримаємо:

	b_2	b_3	a_3
$b_1 =$	3	-1	**5**
$a_1 =$	-1	1	-5
$a_2 =$	1	0	2

З елементом $a_{13}=5$ виконаємо третій крок звичайних жорданових виключень. Отримаємо:

	b_2	b_3	b_1
$a_3 =$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$a_1 =$	2	0	-1
$a_2 =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Переставивши місцями рядочки та стовпчики отриманої таблиці, отримаємо:

	b_1	b_2	b_3
$a_1 =$	-1	2	0
$a_2 =$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$a_3 =$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$

1.4. Модифіковані жорданові виключення

У деяких застосуваннях (наприклад, у симплекс-методі, який ми розглянемо пізніше) важливо, щоб елементи розв'язувального рядка не змінювали, а елементи розв'язувального стовпчика змінювали знак. У цьому випадку використовують модифіковані жорданові виключення.

В цьому випадку система (1.1.1) представляється у вигляді жорданової таблиці:

	$-x_1$	$-x_2$	$\cdots$	$-x_n$
$y_1 =$	$-a_{11}$	$-a_{12}$	$\cdots$	$-a_{1n}$
$y_2 =$	$-a_{21}$	$-a_{22}$	$\cdots$	$-a_{2n}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$y_m =$	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	$\cdots$	$-a_{mn}$

Алгоритм кроку модифікованих жорданових виключень

1. Розв'язувальний елемент замінити оберненою величиною.
2. Решту елементів розв'язувального рядка розділити на розв'язувальний елемент.
3. Решту елементів розв'язувального стовпчика розділити на розв'язувальний елемент і змінити знак на протилежний.
4. Всі інші елементи знайти за правилом прямокутника:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{ks} - a_{is}a_{kj}}{a_{ks}},$$

де a_{ks} — розв'язувальний елемент; a_{ij} — деякий елемент старої жорданової таблиці; a'_{ij} — відповідний елемент нової жорданової таблиці; $i \neq k$, $j \neq s$.

2. АНАЛІЗ МІЖГАЛУЗЕВОГО БАЛАНСУ. МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЄВА

Розглянемо n галузей виробництва, кожна з яких за певний проміжок часу випускає x_i ($i = 1,2,...,n$) одиниць продукції (*валовий випуск продукції*). При цьому x_{ij} – певна частина продукції i-ої галузі, яка використовується як напівфабрикат j-ою галуззю, а y_i — частина продукції i-ої галузі, що реалізується зовні виробництва (*товарна продукція*). Тоді баланс міжгалузевих зв'язків виробництва виражається системою рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} + y_1, \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} + y_2, \\ ... \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nn} + y_n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Позначимо через

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_i}$$ — *коефіцієнти прямих витрат,*

які дорівнюють нормі продукції i-ої галузі на виробництво одиниці продукції j-ої галузі. Як правило, коефіцієнти прямих витрат в практичних задачах відомі.

Перепишемо систему (2.1) у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2, \\ ... \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases} \tag{2.2}$$

або в матричній формі:

$$X = AX + Y, \tag{2.3}$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ — *вектор валового випуску продукції,*

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ — *матриця прямих витрат,*

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$ — *вектор товарної продукції.*

Розв'язавши рівняння (2.2), отримаємо:

$$X = (E - A)^{-1}Y ,$$

де E — одинична матриця. При цьому:

$B = (E - A)^{-1}$ — *матриця повних витрат,*

$C = B - E$ — *матриця повних внутрішніх витрат,*

$D = C - A$ — *матриця побічних витрат.*

З економічного змісту задачі випливає, що значення x_i $(i = 1,2,...,n)$ повинні бути невід'ємними при невід'ємних значеннях y_i та a_{ij}.

Матриця A ($a_{ij} \ge 0$, $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,n$) називається *продуктивною*, якщо для будь-якої матриці Y ($y_i \ge 0$, $i = 1,2,...,n$) існує розв'язок X системи (2.2) такий, що $x_i \ge 0$ $(i = 1,2,...,n)$.

Критерій продуктивності матриці A. *Матриця A є продуктивною, якщо максимум сум елементів її стовпчиків не більше одиниці, причому хоча б для одного стовпчика сума елементів строго менше* 1, *тобто матриця A є продуктивною, якщо*

1) $a_{ij} \ge 0, \ \ \forall i, j = 1,2,...,n$,

2) $\max\limits_{j=1,2,...,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$,

3) існує номер j такий, що $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Зауваження. Рівняння (2.3) описує балансову модель виробництва, розроблену і досліджену видатним економістом В.Леонтьєвим (США) у 1936-1940 рр.

Задача 2.1. Міжгалузеві зв'язки для трьох галузей задаються матрицею прямих витрат:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Плановий випуск продукції для кожної галузі становить:

$$y_1 = 80 \text{ од.}, \ \ y_2 = 17 \text{ од.}, \ y_3 = 5 \text{ од.}$$

Знайти: 1) валовий випуск продукції кожної галузі; 2) матрицю повних витрат; 3) матрицю повних внутрішніх витрат; 4) матрицю побічних витрат.

Розв'язання. Обчислимо матрицю:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & -0{,}2 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження валової продукції та матриці повних витрат розв'яжемо систему рівнянь за допомогою звичайних жорданових виключень:

$$(E - A)X = Y,$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & -0{,}2 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Складемо жорданову таблицю:

	x_1	x_2	x_3	1
$0_1 =$	**0,9**	0	-0,2	80
$0_2 =$	0	0,6	-0,3	17
$0_3 =$	-0,4	0	0,9	5

З розв'язувальним елементом $a_{11} = 0{,}9$ виконаємо перший крок жорданових виключень:

	0_1	x_2	x_3	1
$x_1 =$	$\frac{10}{9}$	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{800}{9}$
$0_2 =$	0	**0,6**	-0,3	17
$0_3 =$	$\frac{7}{9}$	0	$\frac{73}{90}$	$\frac{365}{9}$

З розв'язувальним елементом $a_{22} = 0{,}6$ виконаємо другий крок жорданових виключень:

	0_1	0_2	x_3	1
$x_1 =$	$\frac{10}{9}$	0	$-\frac{2}{9}$	$\frac{800}{9}$
$x_2 =$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{85}{3}$
$0_3 =$	$\frac{7}{9}$	0	$\frac{73}{90}$	$\frac{365}{9}$

З розв'язувальним елементом $a_{33} = \frac{73}{90}$ виконаємо третій крок жорданових виключень:

	0_1	0_2	0_3	1
$x_1 =$	$\frac{90}{73}$	0	$\frac{20}{73}$	100
$x_2 =$	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{45}{73}$	$53\frac{1}{3}$
$x_3 =$	$\frac{40}{73}$	0	$\frac{90}{73}$	50

Отримали, що $x_1 = 100$, $x_2 = 53\frac{1}{3}$, $x_3 = 50$.

Отже, для виробництва даного обсягу товарної продукції перша галузь повинна випустити 100 од. продукції, друга — $53\frac{1}{3}$ од. продукції, а третя — 50 од.

При цьому *матриця повних витрат* має вид: $B = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{90}{73} & 0 & \frac{20}{73} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{45}{73} \\ \frac{40}{73} & 0 & \frac{90}{73} \end{pmatrix}$,

матриця повних внутрішніх витрат: $C = B - E = \begin{pmatrix} \frac{17}{73} & 0 & \frac{20}{73} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{45}{73} \\ \frac{40}{73} & 0 & \frac{17}{73} \end{pmatrix}$,

матриця побічних витрат: $D = C - A = \begin{pmatrix} \frac{97}{730} & 0 & \frac{27}{365} \\ 0 & \frac{4}{15} & \frac{231}{730} \\ \frac{54}{365} & 0 & \frac{97}{730} \end{pmatrix}$.

Задача 2.2. В таблиці наведені дані про використання балансу двома галузями за звітний період (ум. гр.од.):

	Галузь	Споживання		Кінцевий продукт	Валовий випуск
		Енергетика	Машино-будування		
Виробництво	Енергетика	7	21	72	100
	Машино-будування	12	14	73	200

Знайти необхідний обсяг валового випуску в кожній галузі, якщо кінцеве споживання енергетичної галузі необхідно збільшити вдвічі, а машинобудування залишиться на колишньому рівні.

Розв'язання. За умовою задачі:

$x_1 = 100$, $x_2 = 200$, $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 16$, $y_1 = 72$, $y_2 = 73$.

Знайдемо коефіцієнти прямих витрат за формулою: $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_i}$.

$$a_{11} = \frac{7}{100} = 0{,}07; \quad a_{12} = \frac{21}{100} = 0{,}21; \quad a_{21} = \frac{12}{200} = 0{,}06; \quad a_{22} = \frac{16}{200} = 0{,}08.$$

Тобто матриця прямих витрат: $A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}21 \\ 0{,}06 & 0{,}08 \end{pmatrix}$.

Матриця A складається з невід'ємних елементів і задовольняє критерію продуктивності, оскільки

$$\max\{0{,}07 + 0{,}06;\ \ 0{,}21 + 0{,}08\} = 0{,}29 < 1$$

Тому для будь-яких значень кінцевого продукту можна знайти необхідний обсяг валового випуску X за формулою:

$$X = (E - A)^{-1} Y.$$

Знайдемо матрицю повних витрат:

$$S = E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}21 \\ 0{,}06 & 0{,}08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}93 & -0{,}21 \\ -0{,}06 & 0{,}92 \end{pmatrix},$$

$$|S| = |E - A| = \begin{vmatrix} 0{,}93 & -0{,}21 \\ -0{,}06 & 0{,}92 \end{vmatrix} = 0{,}93 \cdot 0{,}92 - (-0{,}21) \cdot (-0{,}06) = 0{,}843;$$

$$S^T = \begin{pmatrix} 0{,}93 & -0{,}06 \\ -0{,}21 & 0{,}92 \end{pmatrix};$$

$$S_{11}^T = (-1)^2 \cdot 0{,}92 = 0{,}92; \qquad S_{12}^T = (-1)^3 \cdot (-0{,}21) = 0{,}21;$$

$$S_{21}^T = (-1)^3 \cdot (-0{,}06) = 0{,}06; \qquad S_{22}^T = (-1)^4 \cdot 0{,}93 = 0{,}93;$$

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}843} \begin{pmatrix} 0{,}92 & 0{,}21 \\ 0{,}06 & 0{,}93 \end{pmatrix} \text{— матриця повних витрат.}$$

За умовою матриця кінцевого продукту: $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 73 \end{pmatrix}$. Тоді матриця валового випуску обчислюється наступним чином:

$$X = \frac{1}{0{,}843} \begin{pmatrix} 0{,}92 & 0{,}21 \\ 0{,}06 & 0{,}93 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 144 \\ 73 \end{pmatrix} = \frac{1}{0{,}843} \begin{pmatrix} 147{,}81 \\ 76{,}53 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 175{,}34 \\ 90{,}78 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: валовий випуск в енергетичній галузі необхідно збільшити до 175,34 ум. од., а в машинобудуванні — до 90,78 ум.од.

3. МОДЕЛЬ МІЖНАРОДНОЇ ТОРГІВЛІ (МОДЕЛЬ ОБМІНУ)

Нехай є n країн S_1, S_2, …, S_n, національний дохід кожної з яких дорівнює відповідно x_1, x_2, …, x_n. Нехай a_{ij} — частка національного доходу, яку країна S_j витрачає на закупівлю товарів у країни S_i. Будемо вважати, що весь національний дохід витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.1}$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *структурною матрицею торгівлі.*

Для будь-якої країни S_i, $i = \overline{1,n}$ виручка p_i від внутрішньої і зовнішньої торгівлі складає

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n.$$

Для збалансованої торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі для кожної країни, тобто виручка від торгівлі для кожної країни повинна бути не менше її національного доходу:

$$p_i \ge x_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Розглянемо випадок $p_i > x_i$, $i = \overline{1,n}$. Тоді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n > x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n > x_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n > x_n. \end{cases}$$

Додавши ліві і праві частини нерівностей, отримаємо після перегрупування:

$$x_1(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2}) + \dots + x_n(a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn}) >$$
$$> x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Враховуючи умови (3.1), отримаємо суперечність:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n > x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Отже, $p_i = x_i$, $i = \overline{1,n}$.

Позначивши $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, отримаємо систему рівнянь:

$$AX = X \qquad \text{або} \qquad (A - E)X = O,$$

де O — нульова матриця.

Задача 3.1. Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Знайти співвідношення національних доходів країн для збалансованої торгівлі.

Розв'язання. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$(A - E)X = O,$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & -0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо метод Гауса:

$$\begin{pmatrix} -0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & -0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -9 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 12 & -16 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$x_3 \in R, \qquad x_2 = \frac{4}{3}x_3, \qquad x_1 = -\frac{4}{3}x_3 + 2x_3 = \frac{2}{3}x_3.$$

Отриманий результат означає, що для збалансованої торгівлі співвідношення національних доходів повинно становити:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 1 \qquad \text{або} \qquad 2:4:3.$$

Відповідь: $2:4:3$.

4. ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1. Постановка задачі математичного програмування

Кожна система має мету (ціль) розвитку та функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимального прибутку або мінімізація витрат. Ступінь досягнення мети, як правило, має кількісну міру.

Побудуємо наступну математичну модель:

1. Опишемо величини, які будуть використовуватись в моделі:

– *параметри моделі* c_k $(k = 1,2,...,l)$ — числові характеристики системи, які є сталими величинами;

– *керовані змінні* x_i $(i = 1,2,...,n)$ — незалежні змінні характеристики моделі, які можуть змінюватись в певному інтервалі;

– *некеровані змінні* y_j $(j = 1,2,...,m)$ — незалежні змінні, значення яких носять об'єктивний характер (найчастіше їх значення залежать від зовнішнього середовища, а не від волі людини).

– величина z, яка вимірює ступінь досягнення мети системи.

2. Встановимо взаємозв'язки між величинами:

– *цільова функція*: $z = f(x_1,...,x_n; y_1,...,y_m; c_1,...,c_l)$ — функціональна залежність, яка встановлює взаємозв'язок між керованими та некерованими змінними і параметрами моделі;

– *система обмежень:*

$$\begin{cases} \varphi_1(x_i, y_j, c_k) \geq (=,>,<,\leq) 0, \\ \ldots \\ \varphi_s(x_i, y_j, c_k) \geq (=,>,<,\leq) 0; \end{cases}$$

виражає в математичній формі обмеження на вибір значень керованих змінних x_i, обумовлені зовнішніми щодо досліджуваної системи умовами (параметрами виробничо-економічної системи).

Задача математичного програмування полягає в знаходженні таких значень керованих змінних x_i, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Будь який набір значень змінних $(x_1,...,x_n)$, що задовольняє систему обмежень, називається *допустимим (або опорним) розв'язком (планом)*. Сукупність усіх розв'язків системи обмежень називається *областю існування розв'язків.*

Опорний розв'язок, при якому цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним*.

Найпростішим випадком задач математичного програмування є *задачі лінійного програмування* (задачі, в яких цільова функція і система обмежень є лінійними).

5. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Постановка задачі лінійного програмування. Приклади

Розглянемо цільову функцію:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{5.1.1}$$

і систему обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Задача лінійного програмування формулюється наступним чином: знайти максимум або мінімум цільової функції (5.1.1) при виконанні умов (5.1.2). Тобто серед усіх розв'язків системи (5.1.2) знайти такі, в яких функція (5.1.1) набуває найбільшого або найменшого значення.

Розглянемо приклади задач, які приводять до задачі лінійного програмування.

Задача оптимального планування виробництва

Нехай для виробництва одного виду продукції існує n різних технологій і використовується m видів ресурсів. При цьому:

a_{ij} — кількість одиниць i-го ресурсу, що використовується по j-й технології за одиницю часу;

b_i — запас i-го ресурсу;

c_j — кількість продукції, що виробляється за одиницю часу.

Позначимо x_j — час, на протязі якого виробництво ведеться по j-й технології. Тоді, загальний випуск продукції описується функцією:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n,$$

а використання i-го ресурсу становить:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Виникає *задача*: знайти такі значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для яких при заданих запасах ресурсів випуск продукції буде максимальним. Тобто, маємо задачу лінійного програмування:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Задача планування оптимальної структури товарообігу

Нехай торгівельне підприємство реалізує n груп товарної продукції. Нормативні витрати ресурсів у розрахунку на одиницю продукції k-ї групи ($k = 1,2,...,n$) становлять:

– торгівельні площі a_{1k} м^2;

– фонд робочого часу a_{2k} год.;

– витрати обігу a_{3k} гр.од.;

– нормативний план на реалізацію a_{4k} гр.од.

Загальні ресурси:

– торгівельної площі b_1 м^2;

– фонду робочого часу b_2 год.;

– витрати обігу b_3 гр.од.

Від реалізації одиниці продукції k-ї товарної групи торговельне підприємство одержує прибуток c_k гр.од. ($k = 1,2,...,n$).

Задача: визначити структуру товарообігу, при якій досягається максимум прибутку, за умови, що реалізацію кожної групи товарів не менше запланованої.

Позначимо через x_k ($k = 1,2,...,n$) — кількість реалізованої продукції k-ї товарної групи.

Тоді прибуток від реалізації визначається функцією:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n,$$

а система обмежень набуває вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n \le b_3, \\ x_1 \ge a_{41}, \\ ... \\ x_n \ge a_{4n}. \end{cases}$$

5.2. Графічний спосіб розв'язання задачі лінійного програмування

Розглянемо задачу лінійного програмування для випадку, коли кількість керованих змінних дорівнює двом:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{5.2.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

На координатній площині x_1Ox_2 кожна нерівність системи (5.2.2) визначає деяку півплощину. Отже, множина розв'язків системи — це множина точок, які належать перетину всіх півплощин (якщо він непорожній), тобто деякому многокутнику Ω, який називається *многокутником (областю) допустимих розв'язків.*

Якщо у виразі цільової функції (5.1.1) величину z сприймати як параметр, то отримаємо сім'ю прямих $c_1x_1 + c_2x_2 - z = 0$. При $z = 0$ матимемо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$. Вектор нормалі цієї прямої має координати $\vec{n} = (c_1; c_2)$. З іншого боку цей вектор є також вектором градієнта для цільової функції, оскільки:

$$\overrightarrow{grad\ z} = (z'_{x_1}; z'_{x_2}) = (c_1; c_2) = \vec{n}.$$

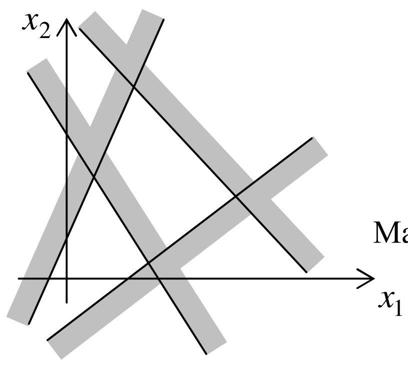
Тобто вектор $\vec{n}$ вказує напрям найбільшого зростання цільової функції (зауважимо, що напрям найшвидшого спадання задає вектор протилежний вектору $\vec{n}$).

Оскільки цільова функція, будучи лінійною, не може мати точок екстремуму, що лежать всередині області допустимих розв'язків, то вона набуває найбільшого і найменшого значень на межі області. В силу того, що система обмежень також є лінійною, можна зробити висновок, що найбільше і найменше значення цільової функції досягається у вершинах області допустимих розв'язків. Вершини многокутника допустимих розв'язків називаються *опорними розв'язками*.

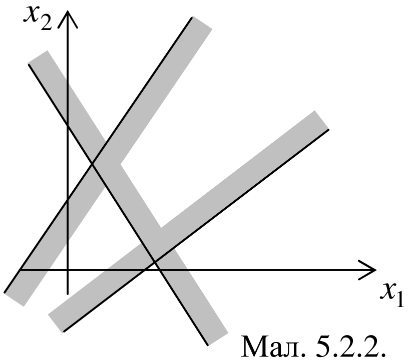
Враховуючи сказане вище, сформулюємо **алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом**:

1. Побудувати область допустимих розв'язків. При цьому можливі наступні випадки:

а) перетин півплощин є порожньою множиною (наприклад, див. мал. 5.2.1). Тоді система обмежень є несумісною і задача розв'язків не має.

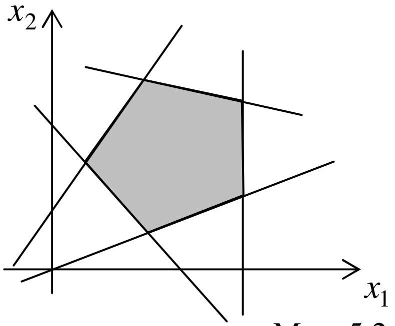


Мал. 5.2.1.



Мал. 5.2.2.

б) область допустимих розв'язків є незамкненою (наприклад, див. мал. 5.2.2). Тоді цільова функція є необмеженою і $\max z = \infty$ (або $\min z = -\infty$).



Мал. 5.2.3.

в) область допустимих розв'язків є замкненим багатокутником (наприклад, див. мал. 5.2.3). Тоді існує скінчений розв'язок задачі лінійного програмування.

2. Побудувати вектор $\vec{n} = (c_1; c_2)$ і пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, перпендикулярну до цього вектора. Знайти останню спільну точку прямої та багатокутника допустимих розв'язків, яку пройде пряма, рухаючись в напрямку вектора $\vec{n}$ (і не змінюючи свого напряму). В цій точці цільова функція набуватиме свого максимального значення. Для того, щоб знайти мінімальне значення, потрібно уявити, що пряма рухається в напрямку, протилежному до вектора $\vec{n}$.

Задача 5.2.1. Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо область допустимих розв'язків. Для цього побудуємо прямі:

$l_1: \; x_1 + 2x_2 = 6$,

x_1	0	6
x_2	3	0

Підставивши в першу нерівність координати точки (0;0), отримаємо правильну нерівність $0 \le 6$. Отже, перша нерівність визначає півплощину, в якій знаходиться точка О (на мал. ця півплощина позначена стрілкою).

$l_2: \ 2x_1 + x_2 = 8$,

x_1	0	4
x_2	8	0

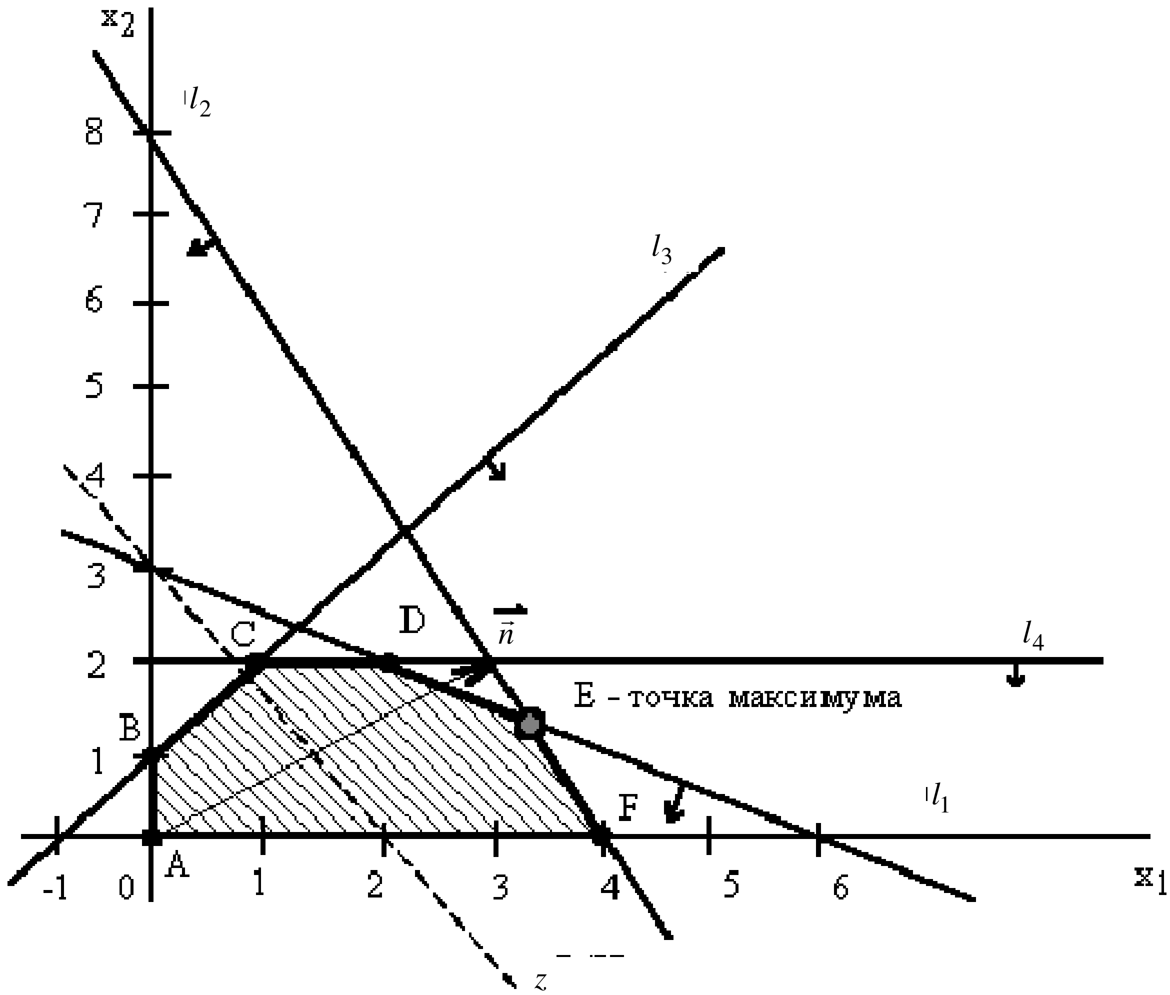
Аналогічно визначимо півплощину, яку визначає друга нерівність.

$l_3: \ -x_1 + x_2 = 1$,

x_1	0	-1
x_2	1	0

Аналогічно визначимо півплощину, яку визначає третя нерівність.

$l_4: \ x_2 = 2$ — пряма паралельна осі Ox. Нерівність $x_2 < 2$ визначає півплощину, яка лежить нижче прямої l_4.



Побудуємо вектор $\vec{n} = (3;2)$ і пряму, перпендикулярну до цього вектора. Точка E — це остання вершина багатокутника допустимих розв'язків ABCDEF, через яку проходить цільова пряма, рухаючись в напрямку вектора $\vec{n}$.

Визначимо координати точки E, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, \\ 2x_1 + x_2 = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_2 = -4, \\ 2x_1 + x_2 = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{10}{3}, \; x_2 = \frac{4}{3}.$$

Максимальне значення цільової функції:

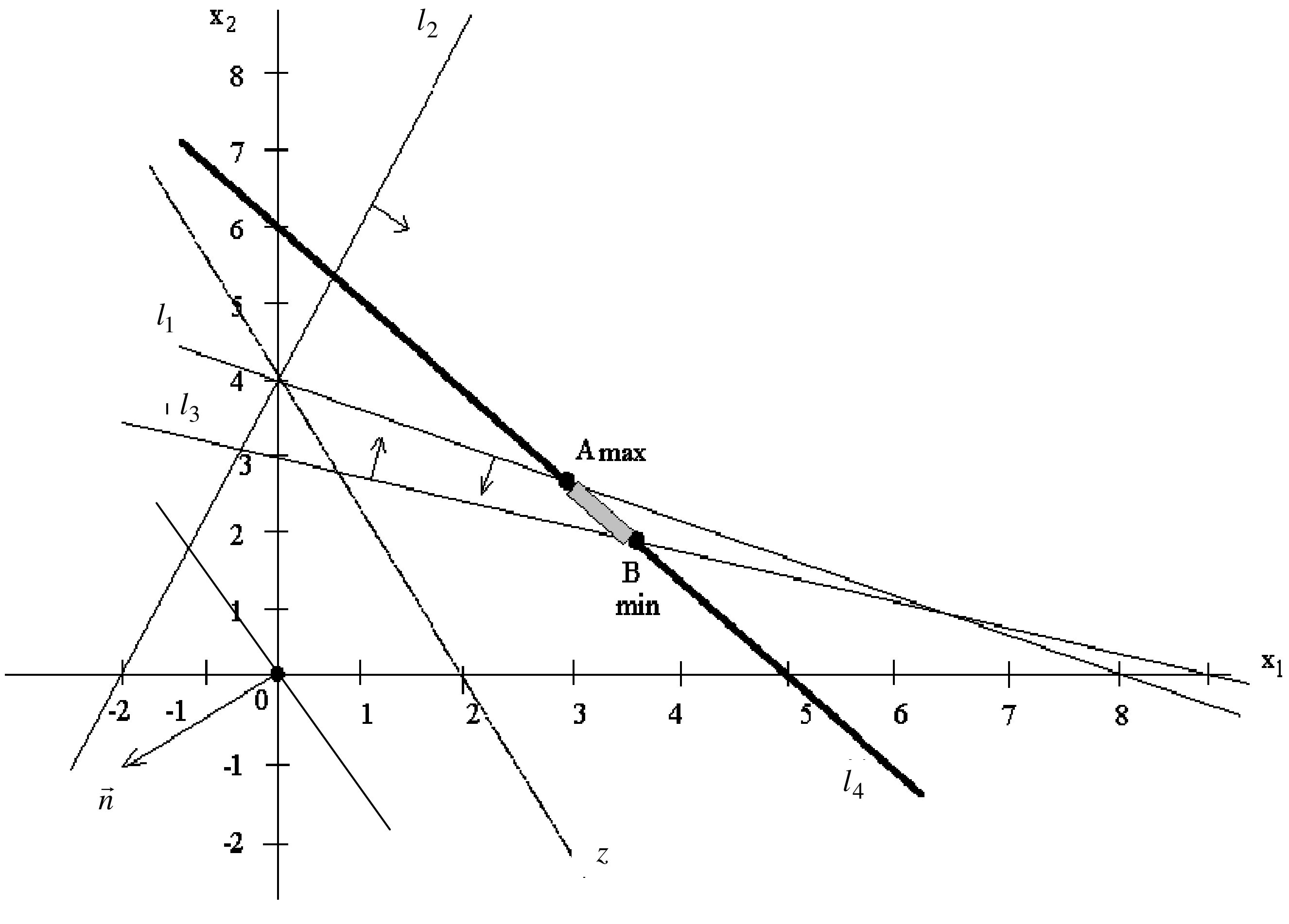
$$\max z = z\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}.$$

Задача 5.2.2. Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом:

$$z = -2x_1 - x_2 \to \min(\max),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо область допустимих розв'язків.



Зауважимо, що рівняння в системі обмежень визначає множину точок прямої l_4. Областю допустимих розв'язків є відрізок AB.

Побудуємо вектор $\vec{n} = (-2;-1)$. Для знаходження мінімуму цільової функції рухаємо цільову пряму в напрямку, протилежному напрямку вектора $\vec{n}$. Точка B — це остання точка відрізка AB, через яку проходить цільова пряма при такому русі. Отже, B — це точка мінімуму цільової функції.

Визначимо координати точки B, склавши систему з рівнянь прямих l_3 і l_4.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30; \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{45}{13},\ x_2 = \frac{24}{13}.$$

Мінімальне значення цільової функції дорівнює:

$$\min z = z\left(\frac{45}{13};\frac{24}{13}\right) = -2\cdot\frac{45}{13} - 1\cdot\frac{24}{13} = -\frac{114}{13}.$$

Для визначення точки максимуму будемо рухати цільову пряму у напрямку вектора $\vec{n}$. Останньою точкою відрізка AB, через яку пройде пряма при такому русі, буде точка A. Отже, точка A є точкою максимуму. Знайдемо її координати, склавши систему з рівнянь прямих l_1 і l_4.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ 6x_1 + 5x_2 = 30; \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{20}{7},\ x_2 = \frac{18}{7}.$$

Максимальне значення цільової функції дорівнює:

$$\max z = z\left(\frac{20}{7};\frac{18}{7}\right) = -2\cdot\frac{20}{7} - 1\cdot\frac{18}{7} = -\frac{58}{7}.$$

5.3. Симплекс-метод розв'язання задачі лінійного програмування

1. *Формулювання задачі в стандартному вигляді.*

Стандартним називатимемо наступний вигляд задачі лінійного програмування:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n + b_1 \geq 0, \\ ... \\ -a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - ... - a_{mn}x_n + b_m \geq 0, \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,...,n. \end{cases}$$

2. *Побудова симплекс-таблиці.*

	$-x_1$	$-x_2$	$\cdots$	$-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
$z =$	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0

3. *Знаходження опорного розв'язку.*

1. Якщо у симплекс-таблиці всі елементи останнього стовпчика (крім, можливо, значення цільової функції) невід'ємні, то числа $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ задовольняють систему обмежень, тобто утворюють опорний розв'язок.
2. Якщо в останньому стовпці є від'ємні елементи, то застосовується наступне **правило:**
   1) Вибираємо довільний рядок з від'ємним елементом в останньому стовпчику (нехай $b_k < 0$). Якщо в цьому рядку немає інших від'ємних елементів, то система обмежень несумісна і задача розв'язків не має.
   2) Якщо у вибраному рядку є від'ємні елементи, то вибираємо довільний з них (нехай $a_{sk} < 0$) і стовпчик, в якому він знаходиться вибираємо за розв'язувальний.
   3) В розв'язувальному стовпчику знаходимо всі додатні відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до відповідних елементів розв'язувального стовпчика. Серед знайдених відношень вибираємо найменше і той елемент розв'язувального стовпчика, якому воно відповідає, вибираємо за розв'язувальний.

4) З розв’язувальним елементом здійснюємо крок модифікованих жорданових виключень.

Описане правило застосовуємо до тих пір, поки не встановимо несумісність системи обмежень або не позбавимось від від’ємних елементів в останньому стовпчику.

4. *Оптимізація опорного розв’язку.*

Нехай після знаходження опорного розв’язку отримана наступна симплекс-таблиця:

	$-y_1$	$\cdots$	$-y_k$	$-x_{k+1}$	$\cdots$	$-x_n$	1
$x_1 =$	b_{11}	$\cdots$	b_{1k}	$b_{1(k+1)}$	$\cdots$	b_{1n}	b_1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x_k =$	b_{k1}	$\cdots$	b_{kk}	$b_{k(k+1)}$	$\cdots$	b_{kn}	b_k
$y_{k+1} =$	$b_{(k+1)1}$	$\cdots$	$b_{(k+1)k}$	$b_{(k+1)(k+1)}$	$\cdots$	$b_{(k+1)n}$	b_{k+1}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$y_m =$	b_{m1}	$\cdots$	b_{mk}	$b_{m(k+1)}$	$\cdots$	b_{mn}	b_m
$z =$	q_1	$\cdots$	q_k	q_{k+1}	$\cdots$	q_n	Q

1. Якщо в останньому рядочку (рядочку цільової функції) симплекс-таблиці (після знаходження опорного розв’язку) всі елементи (крім, можливо Q) невід’ємні, то задача лінійного програмування розв’язана:
$$\max z = Q$$
і досягається в точці:
$$x_1 = b_1,\ \ldots,\ x_k = b_k,\ x_{k+1} = \ldots = x_n = 0.$$
2. Якщо в останньому рядочку є від’ємні елементи, то вибираємо з них найбільший за модулем і стовпчик, в якому він знаходиться позначаємо як розв’язувальний.
3. Якщо всі елементи розв’язувального стовпчика від’ємні або рівні 0, то $\max z = \infty$.
4. Якщо серед елементів розв’язувального стовпчика є додатні, то знаходимо найменше додатнє відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до елементів розв’язувального стовпчика і елемент, якому воно відповідає, вибираємо за розв’язувальний.
5. З розв’язувальним елементом здійснюємо крок модифікованих жорданових виключень.

   Описане правило застосовуємо до тих пір, поки не встановимо необмеженість цільової функції або не позбавимось від від’ємних елементів в останньому рядочку.

Задача 5.3.1. Підприємство виготовляє продукцію чотирьох видів A, B, C і D, для чого використовує три види ресурсів: 1, 2 і 3. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів на підприємстві наведені в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	1	1	1	280
2	1	-	1	1	80
3	1	5	1	-	250

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: A — 4 у.о., B — 3 у.о., C — 6 у.о., D — 7 у.о. Попередній аналіз збуту показав, що попит на продукцію виду B становить не менше 50 од. Визначити план виробництва продукції, який забезпечує підприємство максимальний дохід.

Розв'язання. Нехай:

x_1 — кількість продукції виду A; x_2 — кількість продукції виду B;

x_3 — кількість продукції виду C; x_4 — кількість продукції виду D.

Тоді обмеження, пов'язані з запасами ресурсів та попитом, матимуть вигляд:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 280, \\ x_1 + x_3 + x_4 \le 80, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 \le 250, \\ x_2 \ge 50 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,3. \end{cases}$$

Дохід підприємства від продажу продукції визначатиметься функцією:

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 \to \max .$$

Запишемо отриману задачу лінійного програмування в стандартному вигляді:

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 \to \max ,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 280 \ge 0, \\ -x_1 - x_3 - x_4 + 80 \ge 0, \\ -x_1 - 5x_2 - x_3 + 250 \ge 0, \\ x_2 - 50 \ge 0, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,3. \end{cases}$$

Складемо симплекс-таблицю:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
$y_1 =$	2	1	1	1	280
$y_2 =$	1	0	1	1	80
$y_3 =$	1	5	1	0	250
$y_4 =$	0	**-1**	0	0	-50
$z =$	-4	-3	-6	-7	0

У стовпчику вільних елементів є від'ємний елемент: $b_4 = -50$. Рядок, в якому знаходиться цей елемент, містить від'ємний елемент $a_{42} = -1$. Отже, другий стовпчик буде розв'язувальним. Знайдемо додатні відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до елементів розв'язувального стовпчика: $\frac{280}{1} = 280$, $\frac{250}{5} = 50$, $\frac{-50}{-1} = 50$.

Отримали два найменших додатніх відношення, рівних 50. Візьмемо будь-яке з них: нехай $\frac{-50}{-1} = 50$ і виберемо елемент $a_{42} = -1$ за розв'язувальний. Виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень:

	$-x_1$	$-y_4$	$-x_3$	$-x_4$	1
$y_1 =$	2	1	1	1	230
$y_2 =$	1	0	1	**1**	80
$y_3 =$	1	5	1	0	0
$x_2 =$	0	-1	0	0	50
$z =$	-4	-3	-6	-7	150

Останній стовпчик не містить від'ємних елементів. Отже, ми знайшли опорний розв'язок задачі:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 50,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0.$$

Останній рядочок таблиці містить від'ємні елементи. Це означає, що знайдений розв'язок не є оптимальним. Виберемо в останньому рядочку найбільший за модулем від'ємний елемент: $q_4 = -7$. В четвертому стовпчику є додатні елементи, виберемо його за розв'язувальний. Знайдемо додатні відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до елементів розв'язувального стовпчика: $\frac{230}{1} = 230$, $\frac{80}{1} = 80$.

Найменше відношення відповідає елементу $a_{24} = 1$. Виберемо його за розв'язувальний елемент і виконаємо крок модифікованих жорданових виключень:

	$-x_1$	$-y_4$	$-x_3$	$-y_2$	1
$y_1 =$	1	1	0	-1	150
$x_4 =$	1	0	1	1	80
$y_3 =$	1	5	1	0	0
$x_2 =$	0	-1	0	0	50
$z =$	3	4	1	7	710

В останньому рядку таблиці всі елементи додатні. Це означає, що

$$\max z = 710,$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 50,\ x_3 = 0,\ x_4 = 80.$$

Отже, для забезпечення максимального прибутку 710 у.о. від продажу продукції необхідно виготовити і реалізувати 50 од. продукції виду B і 80 од. продукції виду D.

5.4. Задача лінійного програмування в нестандартних постановках

5.4.1. Випадок змішаної системи обмежень.

Якщо система обмежень містить рівняння, то симплекс-таблиця матиме вигляд:

	$-x_1$	$-x_2$	$\dots$	$-x_n$	1
$0=$	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
$0=$	a_{k1}	a_{k2}	$\dots$	a_{kn}	b_k
$y_{k+1}=$	$a_{(k+1)1}$	$a_{(k+1)2}$	$\dots$	$a_{(k+1)n}$	b_{k+1}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$y_m=$	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m
$z=$	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$	0

Щоб знайти опорний розв’язок необхідно позбавитись від 0-рядочків таблиці (рядочків, які відповідають рівнянням). Для цього:

1. Якщо існує 0-рядок, в якому всі елементи, крім вільного, від’ємні, то система обмежень несумісна. В протилежному випадку вибираємо додатній коефіцієнт довільного рівняння і стовпчик, в якому він знаходиться, позначаємо як розв’язувальний. Знаходимо мінімальне додатне відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до елементів розв’язувального стовпчика і вибираємо розв’язувальний елемент.
2. З розв’язувальним елементом виконуємо крок модифікованих жорданових виключень.
3. В утвореній таблиці викреслюємо 0-стовпчик.

Задача 5.4.1. Розв’язати задачу лінійного програмування:

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ -2x_1 + 2x_3 \ge -4, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3. \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо задачу в стандартній постановці:

$$z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + 6 \ge 0, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 5 = 0, \\ -2x_1 + 2x_3 + 4 \ge 0, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3. \end{cases}$$

Складемо симплекс-таблицю:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	0	-1	6
$0 =$	1	**1**	2	5
$y_3 =$	2	0	-2	4
$z =$	-4	-3	-5	0

Виберемо за розв'язувальний другий стовпчик. В ньому існує єдине додатнє відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до елементів розв'язувального стовпчика. Тому за розв'язувальний елемент виберемо $a_{22} = 1$.

Виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень:

	$-x_1$	0	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	0	-1	6
$x_2 =$	1	1	2	5
$y_3 =$	**2**	0	-2	4
$z =$	-1	3	1	15

В отриманій таблиці в останньому стовпчику немає від'ємних елементів. Отже, опорним розв'язком задачі є:

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 5,\ \ x_3 = 0.$$

В останньому рядочку таблиці є від'ємний елемент. Тому знайдений розв'язок не є оптимальним. Виберемо перший стовпчик за розв'язувальний і знайдемо додатні відношення:

$$\frac{6}{1} = 6,\quad \frac{5}{1} = 5,\quad \frac{4}{2} = 2.$$

Мінімальне відношення відповідає елементу $a_{31} = 2$. Виберемо його за розв'язувальний і виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень.

	$-y_3$	$-x_3$	1
$y_1 =$	$-\frac{1}{2}$	0	4
$x_2 =$	$-\frac{1}{2}$	3	3
$x_1 =$	$\frac{1}{2}$	-1	2
$z =$	$\frac{1}{2}$	0	17

Отже, $\max z = 17$ при $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$.

5.4.2. Випадок, коли не на всі керовані змінні накладено умову невід'ємності

Якщо на деякі керовані змінні задачі лінійного програмування не накладено умову невід'ємності, то для зведення задачі лінійного програмування до стандартного вигляду, ці змінні виключають. При цьому їх поведінку враховують після того, як одержаний розв'язок задачі лінійного програмування, щоб виразити його через початкові змінні. Розглянемо на прикладі процедуру виключення змінних.

Задача 5.4.2. Розв'язати задачу лінійного програмування

$$z = -3x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \\ x_1 - x_2 + 1 \ge 0, \\ x_1 - 4x_2 + 13 \ge 0, \\ -4x_1 + x_2 + 23 \ge 0. \end{cases}$$

Відмітимо, що на змінні x_1 та x_2 не накладено умову невід'ємності.

Складемо симплекс-таблицю:

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	**-1**	-2	1
$y_2 =$	-2	-1	-4
$y_3 =$	-1	1	1
$y_4 =$	-1	4	13
$y_5 =$	4	-1	23
$z =$	3	-6	0

Для виключення змінної x_1 вибираємо довільний елемент таблиці за розв'язувальний і виконуємо з ним крок модифікованих жорданових виключень. Виберемо елемент $a_{11} = -1$. Отримаємо:

	$-y_1$	$-x_2$	1
$x_1 =$	-1	2	-1
$y_2 =$	-2	3	-6
$y_3 =$	-1	3	0
$y_4 =$	-1	6	12
$y_5 =$	4	-9	27
$z =$	3	-12	3

Маємо, що $x_1 = y_1 - 2x_2 - 1$. (5.4.1)

Виключимо з останньої таблиці змінну x_1.

	$-y_1$	$-x_2$	1
$y_2 =$	-2	**3**	-6
$y_3 =$	-1	3	0
$y_4 =$	-1	6	12
$y_5 =$	4	-9	27
$z =$	3	-12	-21

Виберемо довільний розв‘язувальний елемент в другому стовпчику (для того, щоб виключити змінну x_2). Нехай це буде $a_{12} = 3$. Виконаємо з цим елементом крок модифікованих жорданових виключень:

	$-y_1$	$-y_2$	1
$x_2 =$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-2
$y_3 =$	1	-1	6
$y_4 =$	3	-2	24
$y_5 =$	-2	3	9
$z =$	-5	4	-21

Маємо, що $x_2 = \frac{2}{3} y_1 - \frac{1}{3} y_2 - 2$. (5.4.2)

Виключимо з останньої таблиці змінну x_2.

	$-y_1$	$-y_2$	1
$y_3 =$	**1**	-1	6
$y_4 =$	3	-2	24
$y_5 =$	-2	3	9
$z =$	-5	4	-21

У стовпчику вільних елементів всі елементи додатні. Тому знайдений розв’язок є опорним:

$y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Тоді з формул (5.4.1) і (5.4.2):

$x_2 = -2$, $x_1 = 3$.

Але цей розв’язок не є оптимальним, оскільки в останньому рядочку є від’ємні елементи. Виберемо перший стовпчик за розв’язувальний (оскільки в ньому знаходиться від’ємний елемент останнього рядочка -5). Знайдемо найменше додатне відношення елементів стовпчика вільних коефіцієнтів до елементів розв’язувального стовпчика: $\frac{6}{1} = 6$, $\frac{24}{3} = 8$.

Найменше відношення відповідає елементу $a_{11} = 1$. Виберемо його за розв’язувальний і виконаємо крок модифікованих жорданових виключень:

	$-y_3$	$-y_2$	1
$y_1 =$	1	-1	6
$y_4 =$	-3	**1**	6
$y_5 =$	2	1	21
$z =$	5	-1	9

В останньому рядочку є від’ємний елемент. Тому вибираємо другий стовпчик за розв’язувальний. Знаходимо найменше додатне відношення для цього стовпчика: $\frac{6}{1} = 6$, $\frac{21}{1} = 21$. Найменше відношення відповідає елементу $a_{22} = 1$. Виберемо його за розв’язувальний і виконаємо крок модифікованих жорданових виключень:

	$-y_3$	$-y_4$	1
$y_1 =$	-2	1	12
$y_2 =$	-3	1	6
$y_5 =$	5	-1	15
$z =$	2	1	15

Отже, оптимальний розв‘язок знайдений:

$$\max z = 15, \quad y_1 = 12, \quad y_2 = 6.$$

Тоді з формул (*) і (**) маємо:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

5.4.3. Мінімізація цільової функції

Для того, щоб знайти мінімум цільової функції потрібно розглянути допоміжну функцію:

$$F = -z = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - ... - c_n x_n$$

і розв‘язати задачу на знаходження максимуму функції F при тій же самій системі обмежень. Тоді

$$\min z = -\max F.$$

Задача 5.4.3. Розв’язати задачу лінійного програмування:

$$z = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 \le 5, \\ 3x_1 - 2x_2 \ge -4, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3. \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо задачу в стандартній постановці:

$$F = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 5 \ge 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4 \ge 0, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3. \end{cases}$$

Складемо симплекс-таблицю:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$0 =$	-2	-1	**1**	2
$y_1 =$	1	2	0	5
$y_2 =$	-3	2	0	4
$F =$	-2	-3	1	0

Виключимо з таблиці 0-рядок.

Виберемо за розв‘язувальний елемент $a_{13} = 1$ і виконаємо крок модифікованих жорданових виключень.

	$-x_1$	$-x_2$	0	1
$x_3 =$	-2	-1	1	2
$y_1 =$	1	2	0	5
$y_2 =$	-3	**2**	0	4
$F =$	0	-2	-1	-2

Виключимо з таблиці 0-стовпчик.

Опорний розв'язок задачі:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Оптимізуємо опорний розв'язок. Виберемо за розв'язувальний елемент $a_{32} = 2$.

	$-x_1$	$-y_2$	1
$x_3 =$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
$y_1 =$	**4**	-1	1
$x_2 =$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$F =$	-3	1	2

Розв'язувальний елемент $a_{21} = 4$.

	$-y_1$	$-y_2$	1
$x_3 =$	$\frac{7}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{39}{8}$
$x_1 =$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$x_2 =$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{19}{8}$
$F =$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{4}$

Отже,

$\max F = \frac{11}{4}$,

$\min z = -\frac{11}{4}$ при $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{19}{8}$, $x_3 = \frac{39}{8}$.

5.5. Двоїста задача лінійного програмування

Розглянемо задачу лінійного програмування, сформульовану в стандартному вигляді:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \ge 0, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + b_m \ge 0, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,...,n. \end{cases}$$

Двоїстою задачею лінійного програмування є задача:

$$f = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m + c_1 \le 0, \\ ... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m + c_n \le 0, \\ y_i \ge 0,\ i = 1,2,...,m. \end{cases}$$

Пряма і двоїста задачі називаються *спряженими*.

Двоїста задача утворюється за наступним правилом:

1. Вільні коефіцієнти системи обмежень даної задачі стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі.

2. Максимізація цільової функції даної задачі замінюється на мінімізацію цільової функції двоїстої.

3. Матриця коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі одержується транспонуванням матриці коефіцієнтів системи обмежень даної задачі.

4. Вільні коефіцієнти системи обмежень двоїстої задачі утворюються з відповідних коефіцієнтів цільової функції даної задачі.

5. Знаки нерівностей в системі обмежень двоїстої задачі змінюються на протилежні.

Розв’язання двоїстої задачі ґрунтується на двох наступних теоремах.

Теорема 1 (основна (перша) теорема двоїстості). *Двоїста задача має розв’язок тоді і тільки тоді, коли його має пряма задача. При цьому:*

$$\max z = \min f.$$

Теорема 2 (друга теорема двоїстості). *Оптимальні розв’язки прямої задачі* x_i^* ($i = 1,2,...,n$) *та двоїстої задачі* y_i^* ($i = 1,2,...,m$) *задовольняють наступні умови:*

1) $x_j^*\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_j^* + c_j\right) = 0$ *(* $j = 1,2,...,n$ *);* *2)* $y_i^*\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* + b_i\right) = 0$ *(* $i = 1,2,...,m$ *).*

Друга теорема двоїстості стверджує, що якщо хоча б один з оптимальних розв'язків двох спряжених задач перетворює i-те обмеження в строгу нерівність, то відповідна змінна для іншої задачі x_i^* (або y_i^*) дорівнює нулю. Якщо ж i-та координата хоча б одного оптимального розв'язку додатна, то кожний оптимальний розв'язок іншої спряженої задачі перетворює i-те обмеження в рівність.

Економічна інтерпретація двоїстої задачі.

Розглянемо наступну задачу: нехай підприємство має m видів ресурсів, запаси яких становлять b_1, b_2, ..., b_m. Ресурси використовуються для виготовлення n видів продукції. Відома ціна кожного виду продукції — c_1, c_2, ..., c_n і норма витрат a_{ij} i-го ресурсу на виготовлення одиниці продукції виду j. Потрібно визначити план виробництва кожного виду продукції, який максимізує прибуток від продажу продукції.

Якщо x_1, x_2, ..., x_n — обсяги виробництва кожного виду продукції, то можна сформулювати наступну задачу лінійного програмування:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,...,n. \end{cases}$$

Припустимо тепер, що підприємство планує продати всі наявні ресурси. Необхідно визначити оптимальні ціни на кожний вид ресурсів y_i $(i = 1,2,...,m)$, тобто такі, щоб втрати при продажу ресурсів були мінімальними. При цьому необхідно врахувати, що загальна виручка повинна бути не меншою за ту, яку можна було б отримати, використовуючи ці ресурси для виготовлення продукції. Побудуємо математичну модель поставленої задачі:

$$f = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ ... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n, \\ y_i \ge 0,\ i = 1,2,...,m. \end{cases}$$

Отримана задача є двоїстою до даної. Отже, можна стверджувати, що, якщо існує оптимальний план випуску продукції при заданих ресурсах, то існує оптимальна вартість ресурсів, для якої загальна вартість усіх ресурсів буде найменшою. Змінні двоїстої задачі виражають цінність одиниці кожного виду ресурсів, тому їх іноді називають *тіньовими цінами.*

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу прямої задачі та рентабельність продукції, що виготовляється. Якщо двоїста оцінка y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний i-й ресурс використовується у виробництві продукції неповністю і називається *недефіцитним.* Якщо ж $y_i > 0$, то i-й ресурс використовується повністю і є *дефіцитним.* У цьому випадку величина y_i показує на скільки збільшиться значення цільової функції z, якщо запас i-го ресурсу збільшити на одну одиницю.

Аналіз рентабельності продукції, що виготовляється, виконується за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі. Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі дорівнює вартості всіх ресурсів, що використовуються для виробництва одиниці j-ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці j-ї продукції c_j, то виготовляти таку продукцію не вигідно, вона є *нерентабельною* і в оптимальному плані прямої задачі відповідна величина $x_j = 0$. Якщо ж загальна вартість всіх ресурсів, що використовується на виготовлення одиниці j-ї продукції, дорівнює її ціні, то виготовляти таку продукцію доцільно, вона є *рентабельною* і в оптимальному плані прямої задачі відповідна змінна $x_j > 0$.

Задача 5.5.1. Підприємство виготовляє три види продукції А, В і С, використовуючи для цього три види ресурсів 1,2 і 3. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції, запаси ресурсів та ціни на одиницю продукції наведені в таблиці:

Ресурс	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції			Запас ресурсу
	А	В	С	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Ціна	9	10	16	

1) Записати математичні моделі прямої і двоїстої задач.

2) Знайти оптимальні плани прямої і двоїстої задач, проаналізувати їх.

3) Визначити статус кожного виду ресурсів та рентабельність кожного виду продукції.

Розв'язання.

1) Нехай x_1, x_2, x_3 — кількість продукції виду А, В та С відповідно. Тоді, математична модель прямої задачі має вид:

$$z = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max ,$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

Математична модель двоїстої задачі:

$$f = 360y_1 + 192y_2 + 180y_3 \to \min ,$$

$$\begin{cases} 18y_1 + 6y_2 + 5x_3 \ge 9, \\ 15y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 10, \\ 12y_1 + 8y_2 + 3y_3 \ge 16, \end{cases}$$
$$y_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

2) Розв’яжемо пряму задачу симплекс-методом:

$$z = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max ,$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -18x_1 - 15x_2 - 12x_3 + 360 \ge 0, \\ -6x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 192 \ge 0, \\ -5x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 180 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,3. \qquad x_i \ge 0,\ i = 1,2,3.$$

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	18	15	12	360
$y_2 =$	6	4	**8**	192
$y_3 =$	5	3	3	180
$z =$	-9	-10	-16	0

Опорний розв’язок:

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Розв’язувальний елемент $a_{23} = 8$.

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$	1
$y_1 =$	9	**9**	$-\frac{3}{2}$	72
$x_3 =$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	24
$y_3 =$	$\frac{11}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{8}$	108
$z =$	3	-2	2	384

Розв’язувальний елемент $a_{12} = 9$.

	$-x_1$	$-y_1$	$-y_2$	1
$x_2 =$	1	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$	8
$x_3 =$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{18}$	$\frac{5}{24}$	20
$y_3 =$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	96
$z =$	5	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{3}$	400

Розв'язувальний елемент $a_{12} = 9$.

Оптимальний розв'язок прямої задачі:

$$\max z = 400, \ x_1 = 0, \ x_2 = 8, \ x_3 = 20.$$

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі:

$$\min f = 400, \quad y_1 = \frac{2}{9}, \quad y_2 = \frac{5}{3}, \quad y_3 = 0.$$

Оптимальний розв'язок прямої задачі передбачає виробництво продукції В в обсязі 8 од. і продукції С — в обсязі 20 од. При цьому підприємство отримає максимальний прибуток від реалізації продукції, який становитиме 400 гр.од.

3) Оскільки y_1 і y_2 відмінні від нуля, то ресурси 1 та 2 використовуються повністю, а ресурс 3 використовується не повністю при оптимальному плані виробництва (оскільки $y_3 = 0$). Отже, ресурс 3 є недефіцитним, а ресурси 1 та 2 дефіцитними. Найменша загальна вартість всіх ресурсів, що використовуються на підприємстві, становить 400 гр.од.

Оцінимо рентабельність продукції. Для цього підставимо отримані значення y_1, y_2, y_3 в ліві частини нерівностей системи обмежень двоїстої задачі:

$$\begin{cases} 18y_1 + 6y_2 + 5x_3 = 18 \cdot \frac{2}{9} + 6 \cdot \frac{5}{3} + 0 = 14 > 9 \ \ (\textit{продукція А нерентабельна}), \\ 15y_1 + 4y_2 + 3y_3 = 15 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{5}{3} + 0 = 10 = 10 \ \ (\textit{продукція В рентабельна}), \\ 12y_1 + 8y_2 + 3y_3 = 12 \cdot \frac{2}{9} + 8 \cdot \frac{5}{3} + 0 = 16 = 16 \ \ (\textit{продукція С рентабельна}). \end{cases}$$

6. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

6.1. Постановка транспортної задачі. Основні поняття

Нехай в m пунктах A_1, A_2, …, A_m (виробники, склади тощо) зосереджено запаси однакової продукції у кількостях a_1, a_2, …, a_m відповідно. Цей запас продукції необхідно перевезти (як правило, повністю) в n пунктів споживання B_1, B_2, …, B_n, потреби яких становлять b_1, b_2, …, b_n відповідно. Відомі тарифи перевезень, тобто вартість перевезення одиниці вантажу з i-го пункту A_i до j-го пункту споживання B_j. Ці тарифи позначатимемо через c_{ij}.

Суть транспортної задачі полягає в тому, щоб перевезти усі (якщо це можливо) вантажі з пунктів A_i, задовольнивши при цьому потреби всіх (якщо це можливо) споживачів B_j при мінімальних витратах на перевезення.

Позначимо через x_{ij} — кількість вантажу, який перевозиться з пункту A_i до B_j. Припустимо, що загальні запаси вантажів дорівнюють сумарним потребам споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (6.1.1)$$

Тоді математична модель транспортної задачі запишеться у вигляді:

– цільова функція виражає витрати на перевезення:

$$z = c_{11}x_{11} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min \qquad (6.1.2)$$

– система обмежень визначається вимогою перевезення всіх вантажів і задоволення всіх потреб споживачів:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n, \\ x_{ij} \ge 0 \ \ (i = 1,\ldots,m; \ \ j = 1,\ldots,n). \end{cases} \qquad (6.1.3)$$

Рівність (6.1.1) називається *балансовою умовою*. Якщо виконується балансова умова, то модель транспортної задачі називається *закритою,* в протилежному випадку — *відкритою.*

Теорема. *Транспортна задача (6.1.2)-(6.1.3) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли її виконується балансова умова.*

Транспортна задача є задачею лінійного програмування (в нестандартній постановці), тому її можна розв'язувати симплекс-методом. Але в зв'язку з особливостями її моделі та широким практичним застосуванням, для розв'язання транспортної задачі існують спеціальні методи, які є простішими, ніж симплекс-метод.

6.2. Методи знаходження опорного розв'язку транспортної задачі

Дані транспортної задачі представимо у вигляді таблиці:

$A_i \backslash B_j$	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}; x_{11}	c_{12}; x_{12}	…	c_{1n}; x_{1n}
a_2	c_{21}; x_{21}	c_{22}; x_{22}	…	c_{2n}; x_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}; x_{m1}	c_{m2}; x_{m2}	…	c_{mn}; x_{mn}

В таблиці x_{ij} — керовані змінні транспортної задачі (обсяг перевезень з пункту A_i до пункту B_j), c_{ij} — тарифи перевезень, a_i — кількість вантажу в пункті A_i, b_j — потреби пункту B_j.

Припустимо, що виконується балансова умова (6.1.1). Оскільки кількість рівнянь в системі обмежень (6.1.3) дорівнює $m+n-1$, *опорний розв'язок транспортної задачі має містити рівно $m+n-1$ ненульових значень змінних x_{ij}, а всі інші значення дорівнюватимуть нулю.*

З умовою транспортної задачі можна пов'язати дві матриці:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$ — матриця перевезень;

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$ — *матриця тарифів* або *матриця вартості перевезень*.

Клітинки таблиці з ненульовими значеннями x_{ij} будемо називати *завантаженими*, а інші — *порожніми*.

Ланцюгом матриці перевезень транспортної задачі називається довільна послідовність клітин, яка задовольняє умову: кожна пара клітин міститься в одному рядку або одному стовпці так, що ніякі три або більше клітин послідовності не знаходяться в одному рядку або одному стовпці матриці перевезень.

Ланцюг, перша і остання клітини якого співпадають, називається *циклом*.

Теорема (необхідна і достатня умова опорності розв'язку транспортної задачі). *Для опорності розв'язку транспортної задачі необхідно, щоб завантажених клітин у матриці перевезень було рівно* $m+n-1$ *і достатньо, щоб із завантажених клітин було неможливо утворити жодного циклу.*

Метод мінімального елемента знаходження опорного розв'язку транспортної задачі. Суть цього методу полягає в наступному: на кожному кроці здійснюється максимально можлива поставка в клітинку з найменшим тарифом.

Приклад 6.2.1. Нехай умова транспортної задачі задана таблицею:

A_i \ B_j	100	130	70
80	2	3	1
120	1	4	5
60	2	2	6
40	4	5	3

Легко бачити, що балансова умова умова виконується: $100+130+70=300$ і $80+120+60+40=300$.

Таблиця містить дві клітинки з найменшим тарифом: $c_{13}=1$ і $c_{21}=1$. Максимальне перевезення в клітинці (1,3) становить 70 од., а в клітинці (2,1) — 100 од. вантажу. Тому перше перевезення здійснимо в клітинку (2,1). Тобто $x_{21}=100$, а оскільки потреби першого споживача повністю задоволені, то $x_{11}=0$, $x_{31}=0$, $x_{41}=0$. наступне перевезення здійснимо в клітинку (1,3): $x_{13}=70$, $x_{23}=0$, $x_{33}=0$, $x_{43}=0$. Серед незаповнених клітинок найменший тариф має клітинка (3,2), тому наступне перевезення здійснюємо в неї: $x_{32}=60$. Аналогічно, $x_{12}=10$, $x_{22}=20$, $x_{42}=40$.

Отримали таблицю, в якій знайдено опорний розв'язок:

B_j / A_i	100	130	70
80	2 -	3 10	1 70
120	1 100	4 20	5 -
60	2 -	2 60	6 -
40	4 -	5 40	3 -

Зауваження 1. Може статись, що опорний розв'язок містить менше, ніж $m+n-1$ завантажених клітинок. Такий випадок називається *виродженим.* Тоді у порожню клітинку (бажано таку, якій відповідає найменший тариф) заповнюють нулем і вважають її завантаженою. При цьому необхідно слідкувати, щоб виконувалась необхідна і достатня умова опорності.

Зауваження 2. Існує багато інших методів знаходження опорного розв'язку транспортної задачі. Розглянемо деякі з них:

1) *метод північно-західного кута* — заповнення таблиці починають з лівої верхньої клітинки, далі переходять до наступної клітинки рядочка або стовпчика. Закінчують заповнювати таблицю в правій нижній клітинці.
2) *метод подвійної переваги* — перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, яким відповідають найменші тарифів (в рядочку та стовпчику). Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (як мінімальні по рядочку і стовпчику), потім заповнюють клітинки, позначені один раз, а потім заповнюють таблицю методом мінімального елемента;
3) *метод апроксимації Фогеля* — на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими тарифами в кожному рядочку і стовпчику таблиці. Серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному їй рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшим тарифом.

6.3. Оптимізація опорного розв'язку. Метод потенціалів

Розв'язок транспортної задачі x_{ij} називається *потенціальним*, якщо існує набір $m+n$ чисел u_1, u_2, …, u_m, v_1, v_2, …, v_n, для якого виконуються умови:

1) для кожного $x_{ij} > 0$

$$u_i + v_j = c_{ij}. \tag{6.3.1}$$

2) для кожного $x_{ij} = 0$

$$u_i + v_j \le c_{ij}. \tag{6.3.2}$$

Числа u_1, u_2, …, u_m називаються *потенціалами пунктів постачання*, а числа v_1, v_2, …, v_n — *потенціалами пунктів призначення.*

Теорема. *Опорний розв'язок* x_{ij} *транспортної задачі є оптимальним тоді і тільки тоді, коли він є потенціальним, тобто задовольняє умови (6.3.1) і (6.3.2).*

Метод потенціалів

1) *Обчислення потенціалів.* Після знаходження опорного розв'язку, кожному рядку (кожному постачальнику вантажу) ставиться у відповідність потенціал u_i, $i = 1,2,...,m$, а кожному стовпчику (кожному споживачу) — потенціал v_j, $j = 1,2,...,n$, так, щоб в кожній завантаженій клітинці їх сума дорівнювала тарифу, тобто $u_i + v_j = c_{ij}$. Для знаходження потенціалів необхідно розв'язкти систему $m+n-1$ (кількість завантажених клітинок) рівнянь з $m+n$ невідомими (кількість потенціалів). Оскільки ця система є невизначено, то для знаходження її частинного розв'язку, одному з потенціалів можна надати довільного числового значення (найчастіше $u_1 = 0$).

2) *Перевірка оптимальності.* Для перевірки оптимальності переглядають всі порожні клітинки і для кожної з них перевіряється виконання умови (6.3.2) $u_i + v_j \le c_{ij}$. Якщо для всіх порожніх клітинок ця умова виконується, то знайдений розв'язок є оптимальним.

3) *Оптимізація.* Якщо умова (6.3.2) не виконується для кількох порожніх клітинок, то серед них вибирають таку, що різниця $u_i + v_j - c_{ij}$ є найбільшою (найбільше порушення). Для цієї клітинки будують цикл, утворений тільки з завантажених клітинок (за виключенням першої). В першу клітинку ставиться знак $\oplus$ (це означає, що клітинку потрібно завантажити), у всі інші клітинки по черзі ставляться знаки Θ, $\oplus$, Θ, … (Θ означає, що клітинку потрібно розвантажити). У клітинках, яким відповідає Θ, знаходять мінімально завантажену і весь вантаж цієї клітинки

«переміщують» за циклом, тобто додають до вантажів всіх клітинок зі знаком $\oplus$ і віднімають від вантажів клітинок зі знаком Θ.

В отриманому розв'язку знову обчислюються потенціали, здійснюється перевірка оптимальності і, у разі необхідності, оптимізація.

Задача 6.3.1. Розв'язати транспортну задачу:

$$a_i = (60;\ 40;\ 30),\ b_j = (40;\ 30;\ 20;\ 40),\ c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання балансової умови:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 60 + 40 + 30 = 130, \qquad \sum_{j=1}^{4} b_j = 40 + 30 + 20 + 40 = 130.$$

Отже, транспортна задача є закритою. Знайдемо її опорний розв'язок:

A_i \ B_j	40	30	20	40	u_i
60	Θ 5 40	7 -	4 20	$\oplus$ 2 0	0
40	$\oplus$ 3 -	2 0	5 -	Θ 1 40	-1
30	3 -	2 30	3 -	7 -	-1
v_j	5	3	4	2	

Зауважимо, що при знаходженні опорного розв'язку було отримано всього 4 заповнені клітинки, тоді як їх має бути 3+4-1=6. Тому клітинки (2,2) і (1,4) з найменшими тарифами 2, вважатимемо заповненими 0.

Обчислимо потенціали. Нехай $u_1 = 0$, тоді $v_1 = 5$, $v_3 = 4$, $v_4 = 2$, $u_2 = -1$, $v_2 = 3$, $u_3 = -1$.

Перевіримо умову оптимальності для порожніх клітинок:

(1,2): 3+0<7; (2,1): 5+(-1)>3; (2,3): 4+(-1)<5;

(3,1): 5+(-1)>3; (3,3): 4+(-1)=3; (3,4): 2+(-1)<7.

Бачимо, що умова оптимальності порушується для клітинок (2,1) і (3,1). причому в обох випадках сума потенціалів перевищує тариф на 1.

Побудуємо цикл для клітинки (2,1): $(2,1) \to (2,4) \to (1,4) \to (1,1) \to (2,1)$.

Обидві завантажені клітинки містять однакову кількість вантажу 40. Тому від вантажу клітинок зі знаком Θ віднімемо 40, а до вантажу клітинок зі знаком $\oplus$ додамо 40. Отримаємо:

B_j / A_i	40	30	20	40	u_i
60	5 -	7 -	4 20	2 40	0
40	3 40	2 0	5 -	1 0	-1
30	3 -	2 30	3 -	7 -	-1
v_j	4	3	4	2	

Обчисливши потенціали і перевіривши умову оптимальності для незаповнених клітинок, бачимо, що знайдений в останній таблиці розв'язок є оптимальним.

Отже, $x_{11}=0$, $x_{21}=0$, $x_{31}=20$, $x_{41}=40$, $x_{21}=40$, $x_{22}=0$, $x_{23}=0$, $x_{24}=0$, $x_{31}=0$, $x_{32}=30$, $x_{33}=0$, $x_{34}=0$, мінімальні витрати на перевезення вантажу становлять:

$$z_{\min} = 4\cdot 20 + 2\cdot 40 + 3\cdot 40 + 2\cdot 30 = 80 + 80 + 120 + 60 = 340 \text{ гр. од.}$$

6.4. Відкрита модель транспортної задачі

Якщо балансова умова не виконується, можливі два випадки:

1) запаси вантажу перевищують попит, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

В цьому випадку вводиться в розгляд «уявний» пункт призначення (споживач) з попитом $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ і нульовими тарифами.

2) попит перевищує запаси вантажу, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

В цьому випадку вводиться в розгляд «уявний» виробник (пункт зберігання) з запасом продукції $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$.

В обох випадках в результаті одержуються транспортні задачі закритого типу. Неважко помітити, що оптимальний розв'язок одержаної задачі буде також оптимальним для даної задачі.

7. ЗАДАЧА ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

7.1. Постановка задачі цілочисельного програмування

Якщо в оптимальному розв’язку задачі математичного програмування одна або кілька змінних мають бути цілими, та така задача називається *задачею цілочисельного програмування.*

Математична модель цілочисельної задачі лінійного програмування має вид:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1 \ge 0, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + b_m \ge 0, \\ x_i \ge 0, \\ x_i - \text{цілі}, \ i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

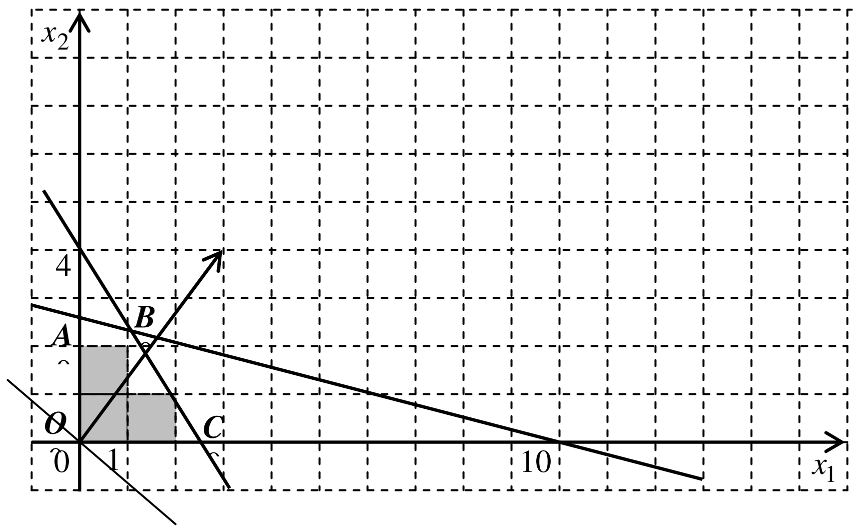
7.2. Геометричний метод розв’язання задачі цілочисельного програмування

Задача 7.2.1. Розв’язати задачу цілочисельного програмування:

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 4x_2 \le 10, \\ x_i \ge 0, \\ x_i - \textit{цілі}. \end{cases}$$

Розв’язання. Побудуємо многокутник допустимих розв’язків.



Мал. 7.2.1.

Пряма $l_1 : 3x_1 + 2x_2 = 8$ перетинає осі координат в точках $\left(\frac{8}{3};0\right)$ і $(0;4)$. Пряма $l_2 :\ x_1 + 4x_2 = 10$ перетинає осі координат в точках $(10;0)$ і $\left(0;\ \frac{10}{4}\right)$. Багатокутником допустимих розв'язків є чотирикутник $OABC$.

Побудуємо вектор $\vec{n} = (3;4)$ і лінію рівня $3x_1 + 4x_2 = 0$. Маємо, що найбільше значення цільова функція набуватиме в точці B, яка є точкою перетину прямих l_1 і l_2. Знайдемо її координати.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 + 4x_2 = 10, \end{cases} \qquad \begin{cases} -10x_2 = -22, \\ x_1 + 4x_2 = 10, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2{,}2; \\ x_1 = 1{,}95. \end{cases}$$

Отже, $\max z = z(1{,}95;\ 2{,}2) = 14{,}65$.

Якщо округлити отримані значення змінних, то матимемо $x_1 = 2$, $x_2 = 2$. Але точка з такими координатами не належить многокутнику допустимих розв'язків. Отже, округлення розв'язків може привести до неправильного результату.

Наблизимо многокутник допустимих розв'язків вписаним многокутником з вершинами в цілих точках. Зрозуміло що в цьому випадку цільова функція набуватиме максимального значення в точці з координатами $(1;2)$.

Отже, $\max z = z(1;2) = 11$.

7.3. Метод Гоморі

Нехай дано задачу цілочисельного програмування. Суть методу Гоморі полягає в наступному:

1. Знайти розв'язок даної задачі без врахування умови цілочисельності.

   Якщо оптимальний розв'язок послабленої задачі не містить дробових значень, то він є оптимальним і для даної задачі.

2. Якщо в оптимальному розв'язку є дробові значення, то вибврається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На основі елементів відповідного рядка останньої симплекс-таблиці будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_j\},$$

   де $\{x\}$ — дробова частина числа x.

3. Додаткове обмеження, після зведення його до канонічного виду, приєднується до останньої симплекс-таблиці. Отриману нову задачу розв'язують і перевіряють отриманий розв'язок на цілочисельність. Якщо він не цілочисельний, то алгоритм повторюють, починаючи з п.2.

Задача 7.3.1. Методом Гоморі розв'язати задачу цілочисельного програмування:

$$f = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 \le -1, \\ x_i \ge 0,\ x_i - \text{цілі}. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо задачу симплекс-методом без врахування умови цілочисельності.

Зведемо умову послабленої задачі до канонічного виду:

$$z = 2x_1 - x_2 - 5x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + 4 \ge 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 1 \ge 0, \\ x_i \ge 0. \end{cases}$$

Складемо симплекс-таблицю:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	1	-1	1	4
$0 =$	-2	-2	**1**	-4
$y_3 =$	1	-1	-1	-1
$z =$	-2	1	5	0

Виключимо з таблиці другий рядок (рівняння). Для цього виберемо розв'язувальний елемент $a_{23} = 1$ і виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень.

	$-x_1$	$-x_2$	0	1
$y_1 =$	3	1	-1	8
$x_3 =$	**-2**	-2	1	-4
$y_3 =$	-1	-3	1	-5
$z =$	8	11	-5	20

Виберемо розв'язувальний елемент $a_{21} = -2$ і виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень.

	$-x_3$	$-x_2$	1
$y_1 =$	$\frac{3}{2}$	-2	2
$x_1 =$	$-\frac{1}{2}$	1	2
$y_3 =$	$\frac{1}{2}$	**-2**	-3
$z =$	4	3	4

Виберемо розв'язувальний елемент $a_{32} = -2$ і виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень.

	$-x_3$	$-y_3$	1
$y_1 =$	1	-1	5
$x_1 =$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_2 =$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$z =$	$\frac{19}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Оптимальний розв’язок: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = 0$.

$\max z = z\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right) = -\frac{1}{2}$.

Значення x_1 та x_2 є дробовими з однаковими дробовими частинами $\frac{1}{2}$. Побудуємо для x_1 додаткове обмеження Гоморі:

$$\left\{-\frac{1}{4}\right\}x_3 + \left\{\frac{1}{2}\right\}y_3 \ge \left\{\frac{1}{2}\right\}, \quad \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2} \ge 0.$$

	$-x_3$	$-y_3$	1
$y_1 =$	1	-1	5
$x_1 =$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_2 =$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$y_4 =$	$-\frac{3}{4}$	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{2}$
$z =$	$\frac{19}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Додамо в останню симплекс-таблицю новий рядок, що відповідає отриманій нерівності.

Виберемо розв’язувальний елемент $a_{42} = -\frac{1}{2}$ і виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень.

	$-x_3$	$-y_4$	1
$y_1 =$	$\frac{5}{2}$	-2	6
$x_1 =$	-1	1	0
$x_2 =$	$\frac{1}{2}$	-1	2
$y_3 =$	$\frac{3}{2}$	-2	1
$z =$	$\frac{5}{2}$	3	-2

Знайдений оптимальний розв’язок, який задовольняє умову цілочисельності:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 0,$$

$$\max z = z(0; 2; 0) = -2.$$

Отже, $\min f = f(0; 2; 0) = 2$.

7.4. Метод «гілок і границь»

1. Знайти розв'язок даної задачі без врахування умови цілочисельності.
2. Якщо значення змінної в оптимальному плані послабленої задачі $x_i = x_i^*$ є дробовим, то можна стверджувати, що в оптимальному плані цілочисельної задачі для цієї змінної буде виконуватись одна з умов:

$$x_i \geq [x_i^*] + 1 \quad \text{або} \quad x_i \leq [x_i^*].$$

Тому початкову задачу цілочисельного програмування можна розбити на дві не пов'язані між собою задачі, в систему обмежень кожної з яких додається перша або друга нерівність.

3. Розв'язати дві послаблені задачі з додатковими нерівностями. Якщо знайдені оптимальні розв'язки є цілими то оптимальним розв'язком даної задачі є той з них, значення цільової функції для якого є більшим. Якщо ж обидва знайдені оптимальні розв'язки є дробовими, то для наступного «розгалуження» береться задача з більшим значенням цільової функції (при умові, що задача розв'язується в канонічній постановці, тобто шукається максимум цільової функції).
4. Кроки алгоритму, починаючи з 2, виконуються до тих пір, поки не буде знайдено цілі розв'язки.

Задача 1.4.1. Методом «віток і границь» розв'язати задачу цілочисельного програмування:

$$z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_i \geq 0, \ x_i - \text{\textit{цілі}}. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо задачу симплекс-методом без врахування умови цілочисельності.

Запишемо умову послабленої задачі в канонічній формі:

$$z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 + 1 \geq 0, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + 2 \geq 0, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 4 \geq 0, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

Складемо симплекс-таблицю:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	3	-1	**1**	1
$y_2 =$	1	3	-1	2
$y_3 =$	2	1	-1	4
$z =$	-1	1	-2	0

Опорним розв'язком задачі є:

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Виберемо розв'язувальний елемент $a_{13} = 1$ і виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень.

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	3	-1	1	1
$y_2 =$	4	**2**	1	3
$y_3 =$	5	0	1	5
$z =$	5	-1	2	2

Виберемо розв'язувальний елемент $a_{22} = 2$ і виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень.

	$-x_1$	$-y_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
$x_2 =$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$y_3 =$	5	0	1	5
$z =$	7	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$

Отже, послаблена задача розв'язана. Ми отримали

$\max z = z\left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}$.

Розглянемо значення $x_3 = \frac{5}{2}$. В оптимальному плані цілочисельної задачі значення x_3 задовольнятиме одну з умов:

$$x_3 \le 2 \quad \text{або} \quad x_3 \ge 3.$$

Розглянемо 2 випадки.

1. Додамо до умови задачі умову $x_3 \le 2$ або в канонічній формі: $-x_3 + 2 \ge 0$.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	3	-1	**1**	1
$y_2 =$	1	3	-1	2
$y_3 =$	2	1	-1	4
$y_4 =$	0	0	1	2
$z =$	-1	1	-2	0

Оскільки в якості розв'язувального елемента тут також потрібно вибрати $a_{13} = 1$, то використаємо результати розв'язання початкової задачі.

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	3	-1	1	1
$y_2 =$	4	2	1	3
$y_3 =$	5	0	1	5
$y_4 =$	3	**1**	1	1
$z =$	5	-1	2	2

Виберемо розв’язувальний елемент $a_{42} = 1$ і виконаємо з ним крок модифікованих жорданових виключень.

	$-x_1$	$-y_4$	$-y_1$	1
$x_3 =$		1		2
$y_2 =$		-2		1
$y_3 =$		0		5
$x_2 =$	3	1	1	1
$z =$	8	1	3	3

Отримуємо оптимальний розв’язок другої задачі, який задовольняє умову цілочисельності:

$$\max z = z(0;\ 1;\ 2) = 3 .$$

2. Додамо до умови задачі умову $x_3 \geq 3$ або в канонічній формі: $x_3 - 3 \geq 0$.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	3	-1	**1**	1
$y_2 =$	1	3	-1	2
$y_3 =$	2	1	-1	4
$y_4 =$	0	0	-1	-3
$z =$	-1	1	-2	0

Оскільки в якості розв’язувального елемента тут також потрібно вибрати $a_{13} = 1$, то використаємо результати розв’язання початкової задачі.

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_1$	1
$x_3 =$	3	-1	1	1
$y_2 =$	4	**2**	1	3
$y_3 =$	5	0	1	5
$y_4 =$	3	-1	-1	-2
$z =$	5	-1	2	2

Якщо вибрати в якості розв’язувального елемента $a_{22} = 2$, то в силу вже отриманих результатів (див. третю таблицю в розв’язанні першої задачі), отримаємо дробові значення розв’язків.

Отже, розв‘ язком даної задачі є розв’язок другої задачі: $\max z = z(0;\ 1;\ 2) = 3$.

8. МАТРИЧНІ ІГРИ

8.1. Розв’язання матричних ігор в чистих стратегіях

Матричну гра двох гравців з нульовою сумою можна описати наступним чином: нехай перший гравець має m стратегій, а другий — n. Кожній парі стратегій (i, j), $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$, поставлене у відповідність число a_{ij}, яке дорівнює виграшу 1-го гравця (відповідно програшу 2-го) при умові, що перший гравець використає i-ту стратегію, а 2-ий — j-ту.

Матриця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається *платіжною матрицею гри.*

Під оптимальною стратегією гравця на інтуїтивному рівні розуміється наступне: стратегія є оптимальною, якщо її застосування забезпечить даному гравцю найбільший гарантований виграш при всеможливих стратегіях другого гравця. Виходячи з цієї позиції, гравець 1 досліджує платіжну матрицю наступним чином: для кожного значення i, $i = 1,2,...,m$, визначається мінімальне значення виграшу:

$$\min_j a_{ij}, \quad i = 1,2,...,m,$$

тобто визначається мінімальний виграш гравця 1, якщо він застосує i-ту стратегію.

Приклад 8.1.1. Фірма виготовляє устаткування для хімічної промисловості. Експертами виробничого відділу фірми розглядаються три конструкторські варіанти устаткування: *А*-1, *А*-2, *А*-3. Для спрощення допустимо, що за технічними характеристиками ці три типи майже ідентичні, однак залежно від зовнішнього вигляду та зручності використання кожен тип може мати три модифікації: *М*-1, *М*-2, *М*-3 залежно від закупленої технології виробництва. Собівартість виготовлення устаткування наведена в табл. 1:

Таблиця 1

СОБІВАРТІСТЬ ВИГОТОВЛЕННЯ УСТАТКУВАННЯ, тис. ум. од.

Тип устаткування	Модифікація		
	М-1	М-2	М-3
А-1	10	6	5
А-2	8	7	9
А-3	7	5	8

Конфліктна ситуація виникає в зв'язку з необхідністю вибрати той тип устаткування та його модифікації, який буде затверджений економічним відділом фірми. З погляду виробництва найкращим є найдорожчий варіант, оскільки він дає змогу виробляти дорожчу та конкурентоспроможнішу продукцію, тоді як з погляду економічного відділу фірми найкращим є найдешевший варіант, який потребує найменшого відволікання коштів.

Завдання експертів полягає в тому, щоб запропонувати на розгляд фінансовому відділу такий тип устаткування, який забезпечить якщо не кращий, то в усякому разі не гірший варіант співвідношення вартості та зовнішнього вигляду.

Розв'язання.

Якщо виробничий відділ запропонує виготовлення устаткування типу А-1, то економічний відділ настоюватиме на придбанні технології, що дає модифікацію М-3, оскільки цей варіант найдешевший. Якщо зупинитись на устаткуванні виду А-2, то скоріш за все затверджено буде М-2, і нарешті для типу А-3 — також М-2.

Очевидно, що з усіх можливих варіантів розвитку подій експертам виробничого відділу необхідно настоювати на варіанті впровадження у виробництво устаткування типу А-2, оскільки це дає найбільше значення за реалізації найгірших умов — 7 тис. ум. од.

Наведені міркування ілюструють максимінну стратегію, отже:

$\min\limits_{i=1} a_{ij} = \min\{10;6;5\} = 5$,

$\min\limits_{i=2} a_{ij} = \min\{8;7;9\} = 7$,

$\min\limits_{i=3} a_{ij} = \min\{7;5;8\} = 5$,

$\alpha = \max\limits_{j} \min\limits_{i} a_{ij} = \max\{5;7;5\} = 7$ — нижня ціна гри.

Якщо учасник відхилиться від своєї оптимальної (максимінної) стратегії і вибере першу чи третю, то зможе отримати виграш, що дорівнює лише 5.

Розглянемо тепер ситуацію з погляду спеціалістів економічного відділу. Виходячи з витрат на виробництво устаткування, вибір технології, що дає змогу виготовляти модифікацію М-1, може призвести до найбільших витрат у тому разі, коли вдасться затвердити випуск устаткування типу А-1. Для технології виготовлення устаткування з модифікацією М-2 найбільші можливі витрати становлять 7 тис. ум. од. — для устаткування А-2, а з модифікацією М-3 — також для А-2. Для економістів найкращим є вибір технології, що забезпечує виготовлення устаткування модифікації другого виду, оскільки за найгірших для них умов вона дає найменші витрати — 7 тис. ум. од.

Останні міркування відповідають мінімаксній стратегії, що визначає верхню ціну гри.

$\max\limits_{j=1} a_{ij} = \max\{10;8;7\} = 10$,

$\max\limits_{j=2} a_{ij} = \max\{6;7;5\} = 7$,

$\max\limits_{j=3} a_{ij} = \max\{5;9;8\} = 9$,

$\beta = \min\limits_{i} \max\limits_{j} a_{ij} = \min\{10;7;9\} = 7$ — верхня ціна гри.

Якщо гравець відхилиться від своєї оптимальної (мінімаксної) стратегії, то це призведе до більших втрат. Якщо буде вибрано першу стратегію, то можливий програш дорівнюватиме 10, а якщо буде вибрано третю стратегію, то можливий програш становитиме 9. Наведена гра є парною грою із сідловою точкою.

Як правило, задачі теорії ігор, що моделюють реальні ситуації, мають значну розмірність. Тому важливим моментом дослідження платіжної матриці є способи її скорочення. Скоротити матрицю можна, якщо вилучити стратегії, про які наперед відомо, що вони є невигідними або повторюють одна одну.

Стратегії, яким відповідають однакові значення платіжної матриці (тобто матриця містить однакові рядки(стовпці)), називаються ***дублюючими***. Якщо всі елементи i-го рядка (стовпця) платіжної матриці перевищують значення елементів j-го рядка (стовпця), то кажуть, що i-та стратегія гравця А (гравця В) є ***домінуючою*** над j-ою.

Для спрощення розрахунків дублюючі та ті стратегії, для яких існують домінуючі, вилучають з платіжної матриці.

Приклад 8.1.2. Маємо гру гравців А і В, яка задана такою платіжною матрицею:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Необхідно визначити ціну гри та оптимальні стратегії гравців А і В.

Розв'язання.

Оптимізацію гри почнемо з визначення домінуючих стратегій для кожної із сторін, а також виключення із дальшого аналізу невигідних і дублюючих стратегій.

Визначимо домінуючі стратегії. Перша стратегія гравця А домінує над третьою, оскільки всі значення його виграшів за будь-яких дій противника є не гіршими, ніж за вибору третьої стратегії, тобто всі елементи першого рядка платіжної матриці не менші, ніж відповідні елементи її третього рядка. Тому третя стратегія гірша, ніж перша і може бути виключена із платіжної матриці.

Продовжуючи аналіз можливих дій гравця В, легко помітити, що його перша стратегія домінує над п'ятою, яку можна виключити як збитковішу, а тому невигідну для цього гравця. Отже, маємо таку платіжну матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

За вибору гравцем А першої стратегії залежно від дій гравця В він може отримати 6, 3, 8 або 5 одиниць виграшу. Але у будь-якому разі його виграш буде не меншим від $\min\{6,3,8,5\} = 3,$ тобто незалежно від поведінки гравця В. Якщо розглянути можливі наслідки вибору гравцем А другої стратегії, то, міркуючи аналогічно, з'ясуємо, що його гарантований виграш становитиме $\min(6,5,7,6) = 5.$ Для третьої стратегії маємо: $\min(4,4,3,8) = 3.$

Отже, нижня ціна гри буде дорівнювати: $\alpha = \max\{3,5,3\} = 5,$ а гравець А для максимізації мінімального виграшу має вибрати другу із трьох можливих стратегій. Ця стратегія є максимінною у даній грі.

Гравець В, який намагається мінімізувати свій програш, вибираючи першу стратегію, може програти 6,6 або 4 одиниці. Але за будь-яких варіантів дій гравця А гравець В може програти не більше ніж $\max\{6,6,4\} = 6.$ Для другої стратегії маємо: $\max\{3,5,4\} = 5,$ для третьої — $\max\{8,7,3\} = 8,$ а для четвертої — $\max\{5,6,8\} = 8.$ Отже, верхня ціна гри становитиме: $\beta = \min\{6,5,8,8\} = 5.$

Гравцю В доцільно вибрати також другу стратегію, яка є мінімаксною у грі. Оскільки $\alpha = \beta,$ то ця гра має сідлову точку. Ціна гри дорівнює 5. Оптимальною максимінною стратегією гравця А є друга з трьох можливих стратегій його дій. Для гравця В оптимальною є також друга із чотирьох можливих.

З наведеного прикладу зрозуміло, чому мінімаксна та максимінна стратегії мають назву песимістичних. Вибір оптимальної стратегії для кожного з гравців ґрунтується на припущенні, що він буде діяти за найгірших для нього умов. Зрозуміло, що в даному разі вибір такої стратегії може не влаштовувати учасників гри. Нехай гравець А вибрав другу (максимінну) стратегію і притримується її. Допустимо, що гравцеві В став відомим вибір стратегії противника, тоді йому доцільно обрати третю стратегію, за якої виграш становитиме 7 одиниць. У свою чергу гравець А також знає про зміну стратегії гравця В на третю і вибирає першу стратегію, що дає йому змогу отримати виграш у сумі 8 одиниць і т. д. Можливість такого розвитку подій виникає тому, що мінімаксна та максимінна стратегії в даному разі ***не є стійкими***. Тобто обставини, за яких обидва гравці використовують мінімаксну та максимінну стратегії, невигідні гравцям у тому разі, коли один з них змінює свою оптимальну стратегію.

Однак така нестійкість властива не всім іграм із сідловою точкою. В деяких випадках сідловій точці відповідають стійкі максимінна та мінімаксна стратегії. В такому разі відхилення від оптимальної стратегії одним з гравців спричиняє таку зміну виграшу, яка є невигідною для цього гравця, оскільки стан або не змінюється, або погіршується.

Отже, в загальному випадку не можна стверджувати, що гра з сідловою точкою визначає стійкі оптимальні стратегії.

8.2. Гра зі змішаними стратегіями

Скінченні ігри, як правило, не мають сідлової точки. Якщо гра не має сідлової точки, тобто $\alpha \neq \beta$ і $\alpha \leq \upsilon \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними, тобто кожна із сторін може покращити свій результат, вибираючи інший підхід. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять шляхом застосування ***змішаних стратегій***, які є певними комбінаціями початкових «чистих» стратегій. Тобто змішана стратегія передбачає використання кількох «чистих» стратегій з різною частотою.

Ймовірності (або частоти) вибору кожної стратегії задаються відповідними векторами:

для гравця А — вектор $X = (x_1, x_2, ... x_m)$, де $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$;

для гравця В — вектор $Y = (y_1, y_2, ... y_n)$, де $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Очевидно, що $x_i \geq 0$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$; $y_j \geq 0$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$.

Виявляється, що коли використовуються змішані стратегії, то для кожної скінченної гри можна знайти пару стійких оптимальних стратегій. Існування такого розв'язку визначає теорема, яку наведемо без доведення.

Теорема (***основна теорема теорії ігор***). Кожна скінченна гра має, принаймні, один розв'язок, можливий в області змішаних стратегій.

Нехай маємо скінченну матричну гру з платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Оптимальні змішані стратегії гравців А і В за теоремою визначають вектори $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ... x_m^*\right)$ і $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, ... y_n^*\right)$, що дають змогу отримати виграш:

$$\alpha \le \upsilon \le \beta .$$

Використання оптимальної змішаної стратегії гравцем А має забезпечувати виграш на рівні, не меншому, ніж ціна гри за умови вибору гравцем В будь-яких стратегій. Математично ця умова записується так:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \ge \upsilon \quad \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{8.2.1}$$

З другого боку, використання оптимальної змішаної стратегії гравцем В має забезпечувати за будь-яких стратегій гравця А програш, що не перевищує ціну гри υ, тобто:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le \upsilon \quad \left(i = \overline{1, m}\right). \tag{8.2.2}$$

Ці співвідношення використовуються для знаходження розв’язку гри.

Зауважимо, що в даному разі розраховані оптимальні стратегії завжди є стійкими, тобто якщо один з гравців притримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри υ незалежно від того, яку із можливих змішаних стратегій вибрав інший гравець.

З доведенням цього твердження можна ознайомитися в літературі [7, 8].

8.3. Геометрична інтерпретація гри 2×2

Найпростішим випадком скінченної гри є парна гра, коли у кожного учасника є дві стратегії.

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Розглянемо випадок, коли гра не має сідлової точки. Отже, $\alpha \neq \beta$. Необхідно знайти змішані стратегії та ціну гри. Позначимо шукані значення ймовірностей застосування «чистих» стратегій гравця A через $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, а для гравця B — через $Y^* = (y_1^*, y_2^*)$.

Згідно з основною теоремою теорії ігор, якщо гравець A притримується своєї оптимальної стратегії, то виграш буде дорівнювати ціні гри. Отже, якщо гравець A притримуватиметься своєї оптимальної стратегії $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, то:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \upsilon, \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = \upsilon. \end{cases} \tag{8.3.1}$$

Оскільки $x_1^* + x_2^* = 1$, то $x_2^* = 1 - x_1^*$. Підставивши цей вираз у систему рівнянь (8.3.1), отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}(1 - x_1^*) = \upsilon; \\ a_{12}x_1^* + a_{22}(1 - x_1^*) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}x_1^* + a_{21}(1 - x_1^*) = a_{12}x_1^* + a_{22}(1 - x_1^*) .$$

Розв'язавши дане рівняння відносно невідомого x_1^*, маємо:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} , \tag{8.3.2}$$

тоді:

$$x_2^* = 1 - x_1^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} . \tag{8.3.3}$$

Провівши аналогічні міркування стосовно гравця B, маємо:

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = \upsilon; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = \upsilon. \end{cases} \tag{8.3.4}$$

Оскільки $y_1^* + y_2^* = 1$, то $y_2^* = 1 - y_1^*$.

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}(1 - y_1^*) = \upsilon; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}(1 - y_1^*) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}y_1^* + a_{12}(1 - y_1^*) = a_{21}y_1^* + a_{22}(1 - y_1^*) .$$

Розв'язавши це рівняння відносно невідомого y_1^*, маємо:

$$y_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} , \tag{8.3.5}$$

тоді:

$$y_2^* = 1 - \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} . \tag{8.3.6}$$

Ціну гри υ знаходять, підставлючи значення x_1^*, x_2^* (або y_1^*, y_2^*) в будь-яке з рівнянь (8.3.1) або (8.3.4):

$$\upsilon = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (8.3.7)$$

Приклад 8.3.1. Знайти розв'язок гри з платіжною матрицею:

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	2	5
A_2	4	3

Розв'язання. Переконаємося, що гра не має сідлової точки:

$$\max\{\min(2;\ 5);\ \min(4;3)\} = \max\{2;3\} = 3 = \alpha,$$

$$\min\{\max(2;\ 4);\ \max(5;3)\} = \min\{4;5\} = 4 = \beta.$$

Отже, ця гра не має сідлової точки. Скористаємося формулами (8.3.1), (8.3.3), (8.3.5), (8.3.6), (8.3.7). Маємо:

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{3-4}{2+3-5-4} = \frac{1}{4}; \qquad x_2^* = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$y_1^* = \frac{3}{4}; \qquad y_2^* = \frac{1}{4}.$$

Ціна гри $\upsilon = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{3 \cdot 2 - 5 \cdot 4}{2+3-5-4} = 3{,}5$.

Отже, оптимальна стратегія кожного гравця полягає в тому, щоб випадково чергувати свої «чисті» стратегії. Гравець А має використовувати першу стратегію з імовірністю $\frac{1}{4}$, а другу — з імовірністю $\frac{3}{4}$, а гравець В — навпаки. За цих умов середній виграш дорівнюватиме 3,5.

Розв'язку гри 2×2 можна дати наочну геометричну інтерпретацію.

Розглянемо гру з платіжною матрицею виду:

B_j / A_i	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Відмітимо на осі абсцис відрізок довжиною, що дорівнює одиниці (рис. 8.3.1). Лівий кінець відрізка (точка з абсцисою $x = 0$) буде відповідати стратегії A_1, а правий кінець (x

= 1) — стратегії A_2, всі проміжні точки цього відрізка відповідатимуть змішаним стратегіям гравця А, причому імовірність x_1 стратегії A_1 буде дорівнювати відстані від точки Р до правого кінця відрізка, а ймовірність x_2 стратегії A_2 — відстані до лівого кінця відрізка. Проведемо через точки A_1 та A_2 два перпендикуляри до осі абсцис: вісь І і вісь ІІ. На першій з них відмітимо виграш за вибору стратегії A_1, а на другій — за стратегії A_2.

Нехай противник вибрав стратегію B_1, їй відповідають на осях І та ІІ дві точки B_1, причому довжина відрізка A_1B_1 дорівнює a_{11}, а довжина відрізка A_2B_1 дорівнює a_{12}.

Аналогічно будуємо пряму B_2B_2, яка відповідає стратегії B_2.

Необхідно знайти оптимальну стратегію X^*, таку, за якої мінімальний виграш гравця A буде максимальним. Для цього виділимо жирною лінією на малюнку нижню межу виграшу за умови вибору стратегій B_1 та B_2, тобто ламану лінію B_1MB_2. На цій межі знаходяться значення мінімального виграшу гравця A за будь-якої його змішаної стратегії. Очевидно, що найкраще з можливих мінімальних значень у нашому прикладі знаходиться в точці M, а в загальному випадку відповідає тій точці, де крива, що позначає мінімальний виграш гравця A, набуває максимального значення. Ордината цієї точки є ціною гри υ. Відстань до лівого кінця відрізка x_2 та відстань до правого кінця відрізка — x_1 дорівнюють відповідно ймовірностям стратегій A_2 та A_1.

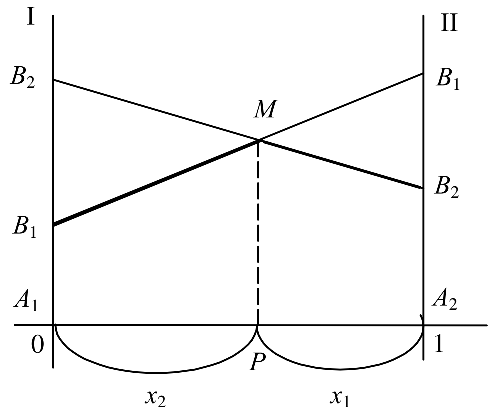


Рис. 8.3.1.

Геометрична інтерпретація дає також змогу наочно зобразити нижню та верхню ціну гри (рис. 8.3.2). Для нашого прикладу нижньою ціною гри є величина відрізка A_2B_2, а верхньою ціною гри — A_2B_1.

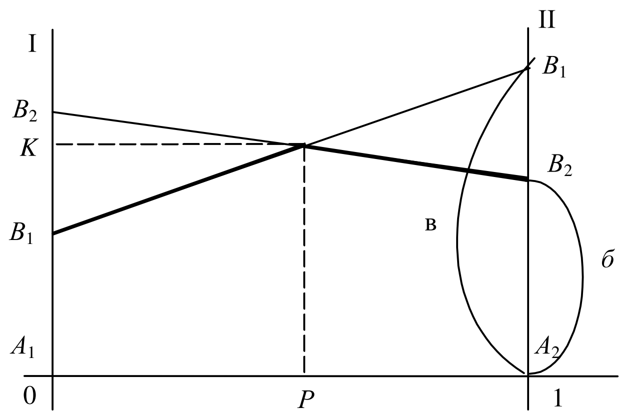


Рис. 8.3.2.

На цьому ж рисунку можна розглянути і геометричну інтерпретацію оптимальних стратегій противника В. Дійсно, частка y_1^* стратегії B_1 в оптимальній змішаній стратегії $Y^*=(y_1^*, y_2^*)$ дорівнює відношенню довжини відрізка KB_2 до суми довжин відрізків KB_2 та KB_1 на осі I: $y_1^* = \dfrac{KB_2}{KB_2 + KB_1} = \dfrac{KB_2}{B_1B_2}$.

З наведених міркувань легко висновувати, що гру 2×2 можна розв'язати елементарними прийомами. Аналогічно може бути розв'язана гра $2 \times n$, тобто коли гравець A має лише дві стратегії, а гравець $B - n$. У такому разі на рисунку слід зобразити перетин n прямих, що відповідатимуть n стратегіям гравця B. Мінімальні виграші гравця A являтимуть собою також ламану лінію, максимальне значення якої і визначатиме оптимальну стратегію для гравця A (рис. 8.3.3).

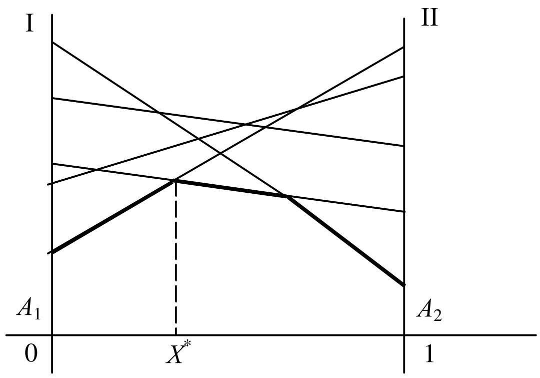


Рис. 8.3.3.

Можна також розв'язати і гру $m \times 2$, з тією різницею, що необхідно визначати не нижню величину виграшу, а верхню і знаходити не максимальне з можливих значення, а мінімальне.

8.4. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Якщо гра $2 \times n$ або $m \times 2$ може бути розв'язана геометрично, то у випадку гри $3 \times n$ ($m \times 3$) геометрична інтерпретація переходить у простір, що ускладнює як її побудову, так і сприйняття. У випадку ж, коли $n > 3$, $m > 3$, геометрична інтерпретація взагалі неможлива. Для розв'язування гри $m \times n$ використовують прийом зведення її до задачі лінійного програмування.

Нехай розглядається парна гра зі стратегіями $A_1, A_2, ..., A_m$ для гравця A та стратегіями $B_1, B_2, ..., B_m$ для гравця B і платіжною матрицею (a_{ij}) $\left(i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}\right)$. Необхідно знайти оптимальні змішані стратегії $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ та $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$, де $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^* = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^* = 1$.

Знайдемо спочатку оптимальну стратегію гравця A. За основною теоремою теорії ігор така стратегія має забезпечити гравцеві виграш, не менший за ціну гри (поки що невідому величину) υ, за будь-якої поведінки гравця B.

Допустимо, що гравець A застосовує свою оптимальну стратегію, а гравець B — свою «чисту» j-ту стратегію B_j, тоді середній виграш гравця A дорівнюватиме:

$$a_{1j}x_1^* + a_{2j}x_2^* + ... + a_{mj}x_m^*. \qquad (8.4.1)$$

За цих обставин виграш має бути не меншим, ніж ціна гри. Отже, для будь-якого значення j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ величина виду (8.4.1) має бути не меншою, ніж υ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* + ... + a_{m1}x_m^* \ge \upsilon; \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* + ... + a_{m2}x_m^* \ge \upsilon; \\ .... \\ a_{1n}x_1^* + a_{2n}x_2^* + ... + a_{mn}x_m^* \ge \upsilon. \end{cases}$$

Розділивши всі обмеження на υ, отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{x_1^*}{\upsilon} + a_{21}\dfrac{x_2^*}{\upsilon} + ... + a_{m1}\dfrac{x_m^*}{\upsilon} \ge 1; \\ a_{12}\dfrac{x_1^*}{\upsilon} + a_{22}\dfrac{x_2^*}{\upsilon} + ... + a_{m2}\dfrac{x_m^*}{\upsilon} \ge 1; \\ .... \\ a_{1n}\dfrac{x_1^*}{\upsilon} + a_{2n}\dfrac{x_2^*}{\upsilon} + ... + a_{mn}\dfrac{x_m^*}{\upsilon} \ge 1. \end{cases}$$

Позначивши $\dfrac{x_i^*}{\upsilon} = t_i$, маємо:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1; \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1; \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1. \end{cases}$$

$$t_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Враховуючи умову, що $x_1^* + x_2^* + ... + x_m^* = 1$, отримуємо $t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{\upsilon}$.

Необхідно зробити виграш максимальним. Цього можна досягти, коли вираз $t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{\upsilon}$ набуватиме мінімального значення. Отже, врешті маємо звичайну задачу лінійного програмування.

Цільова функція:

$$\max \upsilon = \min \frac{1}{\upsilon} = \min \sum_{i=1}^{m} t_i \qquad (8.4.2)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1; \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + ... + a_{m2}t_m \geq 1; \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1. \end{cases} \qquad (8.4.3)$$

$$t_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right). \qquad (8.4.5)$$

Розв’язуючи цю задачу симплексним методом, знаходимо значення $t_i \left(i = \overline{1, m}\right)$, а також величину $\frac{1}{\upsilon}$ і значення $x_i^* = \upsilon t_i$, що є оптимальним розв’язком початкової задачі. Отже, визначено змішану оптимальну стратегію $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ для гравця A.

За аналогією можна записати задачу лінійного програмування для визначення оптимальної стратегії гравця B. З цією метою позначимо:

$$u_j = \frac{y_j^*}{\upsilon} \quad \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Маємо таку лінійну модель задачі:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} u_j$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \leq 1; \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n \leq 1; \\ .... \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \leq 1. \end{cases}$$

$$u_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right).$$

Очевидно, що задача лінійного програмування для гравця B є двоїстою до задачі гравця A, а тому оптимальний розв’язок однієї з них визначає також оптимальний розв’язок спряженої.

Розглянемо приклад застосування методів лінійного програмування для знаходження оптимального розв’язку гри.

Приклад 8.4.1. Фірма розробила шість бізнес-планів (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6) на наступний рік. Залежно від зовнішніх умов (погодного стану, ринку тощо) виділено п’ять ситуацій (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5). Для кожного варіанта X_i $\left(i=\overline{1,6}\right)$ бізнес-плану та зовнішньої ситуації Y_j $\left(j=\overline{1,5}\right)$ обчислені прибутки, які наведені у табл. 1:

Таблиця 1

Варіант бізнес-плану	**Зовнішня ситуація**				
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
	прибутки, тис. грн				
X_1	1,0	1,5	2,0	2,7	3,2
X_2	1,2	1,4	2,5	2,9	3,1
X_3	1,3	1,6	2,4	2,8	2,1
X_4	2,1	2,4	3,0	2,7	1,8
X_5	2,4	2,9	3,4	1,9	1,5
X_6	2,6	2,7	3,1	2,3	2,0

Необхідно вибрати найкращий варіант бізнес-плану або комбінацію із розроблених планів.

Розв’язання.

Маємо гру, платіжною матрицею якої є відповідні елементи вищенаведеної таблиці. Легко переконуємося, що домінуючих стратегій у цій грі немає.

Потім визначаємо:

$$a=\max\{\min(1{,}0;1{,}5;2;2{,}7;3{,}2);\min(1{,}2;1{,}4;2{,}5;2{,}9;3{,}1);$$
$$\min(1{,}3;1{,}6;2{,}4;2{,}8;2{,}1);\min(2{,}1;2{,}4;3;2{,}7;1{,}8);\min(2{,}4;2{,}9;3{,}4;1{,}9;1{,}5);$$
$$\min(2{,}6;2{,}7;3{,}1;2{,}3;2);\}=\max\{1{,}0;1{,}2;1{,}3;1{,}8;1{,}5;2\}=2,$$

а також

$$\beta=\min\{\max(1{,}0;1{,}2;1{,}3;2{,}1;2{,}4;2{,}6);\max(1{,}5;1{,}4;1{,}6;2{,}4;2{,}9;2{,}7);$$
$$\max(2;2{,}5;2{,}4;3;3{,}4;3{,}1);\max(2{,}7;2{,}9;2{,}8;2{,}7;1{,}9;2{,}3);$$
$$\max(3{,}2;3{,}1;2{,}1;1{,}8;1{,}5;2)\}=\min\{2{,}6;2{,}9;3{,}4;2{,}9;3{,}2\}=2{,}6\ .$$

Отже, $\alpha \neq \beta$, тобто немає сідлової точки, а це означає, що необхідно застосувати метод зведення гри до задачі лінійного програмування:

$$\min Z = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6$$

за умов:

$$\begin{gathered}
t_1 + 1{,}2t_2 + 1{,}3t_3 + 2{,}1t_4 + 2{,}4t_5 + 2{,}6t_6 \geq 1; \\
1{,}5t_1 + 1{,}4t_2 + 1{,}6t_3 + 2{,}4t_4 + 2{,}9t_5 + 2{,}7t_6 \geq 1; \\
2t_1 + 2{,}5t_2 + 2{,}4t_3 + 3t_4 + 3{,}4t_5 + 3{,}1t_6 \geq 1; \\
2{,}7t_1 + 2{,}9t_2 + 2{,}8t_3 + 2{,}7t_4 + 1{,}9t_5 + 2{,}3t_6 \geq 1; \\
3{,}2t_1 + 3{,}1t_2 + 2{,}1t_3 + 1{,}8t_4 + 1{,}5t_5 + 2t_6 \geq 1; \\
t_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1{,}6}\right).
\end{gathered}$$

Розв'язуємо цю задачу симплексним методом. Оптимальний розв'язок задачі: $t_2 = 0{,}11$; $t_6 = 0{,}33$. Звідси отримаємо оптимальний розв'язок для початкової задачі: $x_2^* = 0{,}24$; $x_6^* = 0{,}76$. Ціна гри $\upsilon = 2{,}264$.

9. ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

9.1. Економічна постановка і математична модель задачі нелінійного програмування

Досить детально розглянута в розділах, присвячених лінійному програмуванню, задача пошуку оптимальних обсягів виробництва ґрунтується на припущеннях про лінійність зв'язку між витратами ресурсів і обсягами виготовленої продукції; між ціною, рекламою та попитом тощо. Якщо такі зв'язки насправді є нелінійними, то більш адекватні математичні моделі доцільно формулювати в термінах нелінійного програмування.

Нехай для деякої виробничої системи необхідно визначити план випуску продукції, за умови найкращого способу використання ресурсів системи. Відомі загальні запаси кожного ресурсу, нормативи витрат кожного ресурсу на одиницю продукції та ціна реалізації одиниці виготовленої продукції. Критерії оптимальності можуть бути різноманітними, наприклад максимізація виручки від реалізації продукції. Така умова подається лінійною залежністю загальної виручки від обсягів проданого товару та ціни одиниці продукції.

Однак, загально відомим є факт, що за умов ринкової конкуренції питання реалізації продукції є досить складним. Обсяг збуту кінцевої продукції визначається перш за все її ціною, отже в якості цільової функції доцільно розглядати максимізацію не всієї виготовленої, а лише реалізованої продукції. Тоді необхідно визначити також і оптимальне значення ціни одиниці продукції при якій обсяг збуту буде максимальним, для цього її потрібно ввести в задачу як невідому величину, при цьому обмеження задачі мають враховувати зв'язки між ціною, рекламою та обсягами збуту продукції. Цільова функція міститиме добуток двох невідомих величин (оптимальна ціна одиниці продукції та оптимальна кількість відповідного виду продукції) отже є нелінійною. Таким чином маємо задачу нелінійного програмування.

І нарешті будь-яка задача стає нелінійною, якщо в математичній моделі необхідно враховувати умови невизначеності та ризик. В якості величини ризику розповсюджене використання такої величини як дисперсія, тому врахування обмеженості ризику вимагає введення нелінійної функції в систему обмежень, а мінімізація ризику певного процесу досягається за рахунок дослідження математичної моделі з нелінійною цільовою функцією.

Загальна задача математичного програмування формулюється наступним чином:

Знайти такі значення змінних x_j $(j=\overline{1,n})$, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення):

$$\max\ (\min)\ F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (9.1.1)$$

за умов

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{\le, =, \ge\} b_i \ (i=\overline{1,m}) \qquad (9.1.2)$$

$$x_j \ge 0 \ (j=\overline{1,n}) \qquad (9.1.3)$$

Якщо всі функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ та $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i=\overline{1,m})$ є лінійними, то приходимо до задачі лінійного програмування, інакше (хоча б одна з функцій не є лінійною) маємо ***задачу нелінійного програмування***.

9.2. Геометрична інтерпретація задачі нелінійного програмування

Геометрично цільова функція (9.1.1) визначає деяку поверхню, обмеження (9.1.2)-(9.1.3) визначають допустиму підмножину n-вимірного евклідового простору. Знаходження оптимального розв'язку задачі нелінійного програмування зводиться до відшукання точки з допустимої підмножини, в якій досягається поверхня найвищого (найнижчого) рівня.

Якщо цільова функція неперервна, а допустима множина розв'язків замкнена, непуста і обмежена, то глобальний максимум (мінімум) задачі існує.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, що містять систему лінійних обмежень та нелінійну цільову функцію. В цьому випадку область допустимих розв'язків є опуклою, тобто замкненою, непустою та обмеженою.

Розглянемо приклад геометричного способу розв'язування задачі нелінійного програмування.

Приклад 9.2.1. Знайти мінімальне і максимальне значення функції

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 24 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Розв'язання. Область допустимих розв'язків утворює чотирикутник *ABCD* (рис. 9.2.1). Геометрично цільова функція представляє коло з центром в точці *M* (2; 2) і квадратом радіуса $R^2 = Z$, тобто значення цільової функції буде збільшуватися (зменшуватися) зі збільшенням (зменшенням) радіусу кола. Проведемо з точки *M* кола різних радіусів. Функція *Z* має два локальних максимуми: точка *B* (0; 6) і *C* (8; 0). Обчислимо значення функціоналу в цих точках:

$$Z(B) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (0-2)^2 + (6-2)^2 = 4 + 16 = 20,$$

$$Z(C) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (8-2)^2 + (0-2)^2 = 36 + 4 = 40.$$

Оскільки $Z(C) > Z(B)$, то точка *C* (8; 0) – точка глобального максимуму.

Очевидно, що найменший радіус $R = 0$, тоді

$$R^2 = 0 = Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \;\Rightarrow\; x_1 = 2;\; x_2 = 2.$$

Тобто точка М є точкою мінімуму, оскільки їй відповідає найменше можливе значення цільової функції.

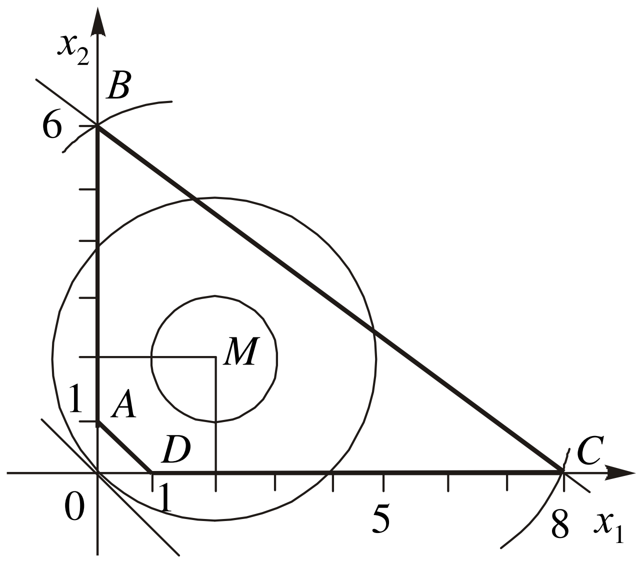


Рис. 9.2.1.

Відмітимо, що в даному випадку точка, яка відповідає оптимальному плану задачі знаходиться всередині багатокутника допустимих розв'язків, що для задач лінійного програмування неможливо.

Приклад 9.2.2. Знайти мінімальне значення функції

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Розв'язання. В даному прикладі множина допустимих розв'язків складається з двох окремих частин (рис. 9.). Цільова функція аналогічно попередньому випадку представляє коло з центром в точці *M* (4; 4). Функція *Z* має два локальних мінімуми в точці *A* ($x_1 \approx 0{,}71; x_2 \approx 11{,}29$), і в точці *B* ($x_1 \approx 11{,}29; x_2 \approx 0{,}71$).

Значення функціоналу в цих точках однакове і дорівнює:

$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 = 64$.

Отже маємо два альтернативні оптимальні плани.

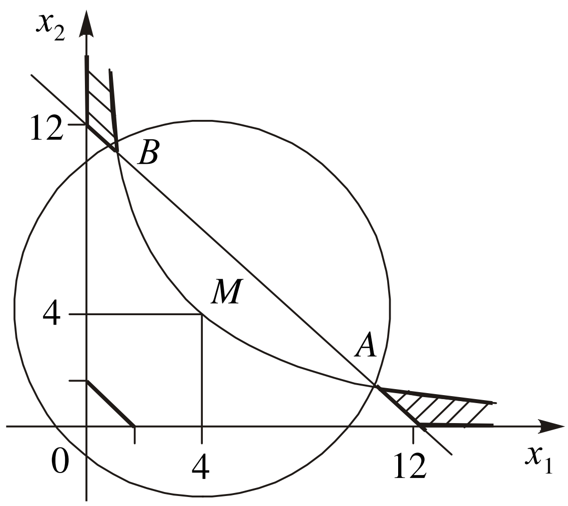


Рис. 9.2.2.

Даний приклад ілюструє одну з особливостей задач нелінійного програмування. На відміну від задач лінійного програмування багатогранник допустимих розв'язків задачі нелінійного програмування не обов'язково буде опуклою множиною.

Наведемо основні особливості задач нелінійного програмування, що впливають на методи їх розв'язування.

9.3. Основні труднощі розв'язування задач нелінійного програмування

Часто задачу нелінійного програмування стараються звести до лінійного вигляду, що призводить до значних похибок. Наприклад, як правило собівартість продукції y визначають як функцію $y = a + \frac{b}{x}$, де x – обсяги виробництва. Вівши заміну $z = \frac{1}{x}$ маємо $y = a + bz$, тобто приходимо до лінійної функції. При такій заміні похибок не допускають. Однак якщо функція собівартості буде $y = -ax^2 + bx + c$, то використання замість неї деякої лінійної функції $y = d + kx$ не виправдане, що видно з рис. 9.3.1.

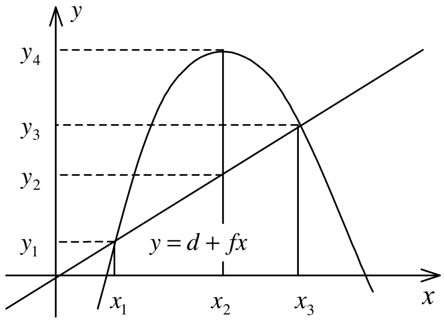


Рис. 9.3.1.

У точках x_1 і x_3 величина собівартості для двох цих функцій однакова. Однак у всіх інших точках ці значення відрізняються, причому у точці x_2 у значній мірі, тобто на величину:

$$y_4 - y_2 = -ax_2^2 + bx_2 + c - d - kx_2 = -ax_2^2 + (b-k)x_2 + (c-d)$$

Отже, лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею.Зведення нелінійної задачі до лінійної дає змогу отримати симплексним методом розв'язок близький до розв'язку початкової нелінійної задачі. Однак з вище розглянутого прикладу, бачимо, що при побудові наближених лінійних задач можливо отримати надто грубий розв'язок, який непридатний для використання.

Навіть питання про існування розв'язку задачі нелінійного програмування потребує окремого дослідження.

Розглянемо основні труднощі розв'язування нелінійних задач.

1. Для лінійних задач можна завжди знайти оптимальний розв'язок універсальним методом – симплексним. При цьому не існує проблеми з доведенням існування такого розв'язку, тобто в результаті розв'язування симплексним методом завжди приводить до одного з варіантів відповіді: 1) отримали оптимальний розв'язок;

1. умови задачі протирічиві, тобто розв'язку не існує;

3) цільова функція необмежена, тобто розв'язку також не існує.

Для задач нелінійного програмування ***не існує універсального методу*** розв’язування, що зумовило розробку значної кількості методів розв’язування окремих типів задач нелінійного програмування. Для кожного специфічного методу необхідно доводити існування розв’язку задачі, а також його єдиність, що є досить складною математичною задачею.

Відомі точні методи розв’язування нелінійних задач, але при цьому існують трудності обчислювального характеру, тобто навіть для сучасних ЕОМ такі алгоритми є досить трудомісткими, тому в більшості випадків для розв’язування нелінійних задач виправданим є використання наближених методів.

2. Для задач лінійного програмування доведено наявність єдиного екстремуму, що досягається в одній з вершин (або кількох одночасно) багатогранника допустимих розв’язків задачі. При знаходженні розв’язку задачі нелінійного виникають ***кілька локальних оптимумів***, що значно ускладнює пошук серед них глобального.

На рис. 9.3.2 маємо на відрізку локальні оптимуми у точках x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, глобальний – у точках x_4 та x_6.

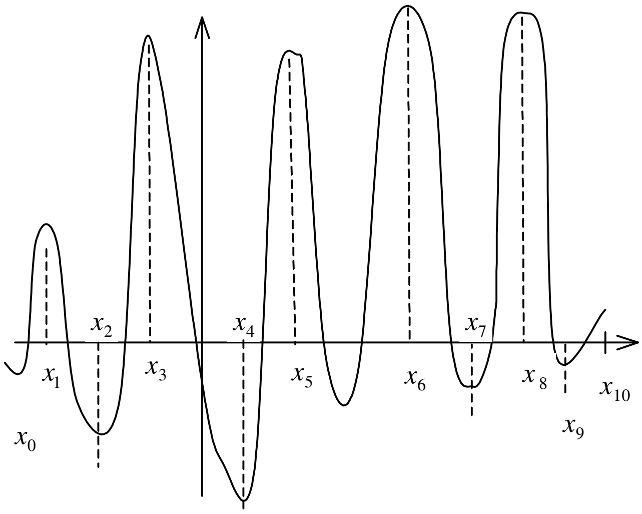


Рис. 9.3.2.

Більшість наближених методів дають можливість, як правило, знаходити локальний оптимум. Можна користуватись простим способом і визначити всі локальні оптимуми і методом порівняння знайти глобальний. Однак для практичних розрахунків такий метод є неефективним. Часто глобальний оптимум наближені методи не “уловлюють”. Наприклад, у випадку, коли глобальний оптимум знаходиться досить близько до локального. Якщо відрізок $[x_0, x_{10}]$ розібити на десять підвідрізків і глобальний оптимум попаде у відрізок $[x_i, x_{i+1}]$ (рис. 9.3.2), а зліва від x_i та справа x_{i+1} крива $y = f(x)$ буде підніматись, то глобальний оптимум буде пропущеним.

3. У задачах лінійного програмування точка оптимуму завжди була граничною точкою багатогранника допустимих планів. Для нелінійних задач точка, яка визначає ***оптимальний план***, може бути як граничною так і знаходитись ***всередині допустимої області розв'язків*** (планів).

2. Доведено, що множина допустимих планів задачі лінійного програмування завжди є опуклою множиною. У випадку коли система обмежень задачі є нелінійною вона може визначати ***множину допустимих розв'язків як неопуклу***, або навіть складатись з довільних не зв'язаних між собою частин.

Одним з найбільш поширених прикладів зазначеної особливості є задачі цілочислового програмування. Нагадаємо, вимога цілочисловості змінних задачі приводить до множини допустимих розв'язків утвореної окремими точками, що зумовлює розглянуті вище ускладнення відшукання розв'язків такого типу задач.

Кожна з вказаних особливостей задач вимагає застосування специфічних методів пошуку розв'язку, тому безперечно найбільш складними для розв'язування є задачі нелінійного програмування в яких поєднується декілька або всі згадані особливості.

9.4. Класичний метод оптимізації. Метод множників Лагранжа

Як уже згадувалось, для розв'язування задач нелінійного програмування не існує універсального методу, тобто до них необхідно застосовувати широке коло різних методів і обчислювальних алгоритмів. Вони в основному базуються на застосуванні диференційного числення і залежать від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи розв'язування задач нелінійного програмування бувають прямі та непрямі. За допомогою прямих методів знаходження оптимальних планів здійснюють у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) значення цільової функції. Типовим представником цієї групи методів є градієнтні. Методика застосування непрямих методів передбачає зведення задачі до такої, оптимум якої слід знаходити простішими методами. Серед непрямих найкраще розробленими є методи розв'язування задач квадратичного та сепарабельного програмування.

Найпростішими для розв'язування є задачі нелінійного програмування, в яких система обмежень складається лише з рівнянь.

Метод множників Лагранжа

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні початкової задачі простішою. Для цього цільову функцію замінюють іншою, з більшою кількістю змінних, тобто такою, яка включає в себе умови, що подані як обмеження. Після такого перетворення дальше розв'язування задачі полягає в знаходженні екстремуму нової функції, на змінні якої не накладено ніяких обмежень. Тобто від початкової задачі пошуку умовного екстремуму переходимо до задачі відшукання безумовного екстремального значення іншої функції. Отже, завдяки такому перетворенню можливе застосування методів класичного знаходження екстремуму функції кількох змінних.

Узагальнення необхідної умови існування локального екстремуму функції n змінних має аналогічний вигляд. Отже, для розв'язування задачі необхідно знайти вирази частинних похідних нової цільової функції за кожною змінною і прирівняти їх до нуля. В результаті отримаємо систему рівнянь. Її розв'язок визначає так звані стаціонарні точки, серед яких є і шукані екстремальні значення функції.

Розглянемо метод множників Лагранжа для розв'язування задачі нелінійного програмування, що має вигляд:

$$\max(\min)Z = f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) \tag{9.4.1}$$

за умов:

$$q_i(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{9.4.2}$$

де функції $f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ і $q_i(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n)$ мають бути диференційовними.

Задача (9.4.1), (9.4.2) полягає в знаходженні екстремуму функції $f(x)$ за умов виконання обмежень $q_i, (i = \overline{1,m})$.

Переходимо до задачі пошуку безумовного екстремуму. В літературі [13, 28] теоретично доведено, що постановки та розв'язання таких задач еквівалентні.

Замінюємо цільову функцію (9.4.1) на складнішу. Ця функція називається ***функцією Лагранжа*** і має такий вигляд:

$$\begin{gathered} L(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n; \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad ..., \quad \lambda_m) = \\ f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \end{gathered} \tag{9.4.3}$$

де λ_i — деякі невідомі величини, що називаються ***множниками Лагранжа.***

Знайдемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, & \left(j = \overline{1,n}\right); \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, & \left(i = \overline{1,m}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} = 0 & \left(j = \overline{1,n}\right); \\ b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, & \left(i = \overline{1,m}\right). \end{cases} \tag{9.4.4}$$

Друга група рівнянь системи (9.4.4) забезпечує виконання умов (9.4.2) початкової задачі нелінійного програмування.

Система (9.4.4), як правило, нелінійна.

Розв'язками її є $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$ — стаціонарні точки. Оскільки, ці розв'язки отримані з необхідної умови екстремуму, то вони визначають максимум, мінімум задачі (9.4.1), (9.4.2) або можуть бути точками перегину (сідловими точками).

Для діагностування стаціонарних точок і визначення типу екстремуму необхідно перевірити виконання достатніх умов екстремуму, тобто дослідити в околі стаціонарних точок диференціали другого порядку (якщо для функцій $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n), q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ існують другі частинні похідні і вони неперервні).

Узагальнення достатньої умови існування локального екстремуму для функції n змінних приводить до такого правила: за функцією Лагранжа виду (9.4.3) будується матриця Гессе, що має блочну структуру розмірністю $(m+n)\times(m+n)$:

$$H = \left(\begin{array}{c|c} O & P \\ \hline P' & Q \end{array}\right),$$

де O — матриця розмірністю $(m \times m)$, що складається з нульових елементів,

P — матриця розмірністю $(m \times n)$, елементи якої визначаються так:

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial q_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

P' — транспонована матриця до P розмірністю $(n \times m)$,

Q — матриця розмірністю $(n \times n)$ виду:

$$Q = \left\| \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right\|, \text{ де } i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Розглянемо ознаки виду екстремуму розв'язку системи (9.4.4). Нехай стаціонарна точка має координати $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$.

1. Точка X^* є точкою максимуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку (m + 1), наступні (n – m) головних мінорів матриці H утворюють знакозмінний числовий ряд, знак першого члена якого визначається множником $(-1)^{m+1}$.

2. Точка X^* є точкою мінімуму, якщо, починаючи з головного мінору порядку (m + 1), знак наступних (n – m) головних мінорів матриці H визначається множником $(-1)^m$.

Розглянемо задачу, розв’язок якої знайдемо методом множників Лагранжа.

Приклад 9.4.1. Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю виділило 1200 га ріллі під основні сільськогосподарські культури — озиму пшеницю і цукрові буряки.

У табл. 1 маємо техніко-економічні показники вирощування цих культур:

Таблиця 1

Показник	Озима пшениця x_1, сотні га	Цукрові буряки x_2, сотні га
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн/т	800	300
Собівартість, грн/т	$y_1 = 12{,}5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12{,}5x_2^2 - 150x_2 + 650$

Необхідно знайти оптимальні площі посіву озимої пшениці та цукрових буряків.

Нехай: x_1 — площа ріллі під озимою пшеницею, сотні га;

x_2 — площа ріллі під цукровими буряками, сотні га.

Звернемо увагу на те, що собівартість тонни пшениці та цукрових буряків залежить від відповідної площі посіву.

Запишемо економіко-математичну модель цієї задачі. Критерієм оптимальності візьмемо максимізацію чистого доходу:

$$\max f = 4(800 - 12{,}5x_1^2 + 200x_1 - 1200)x_1 100 +$$
$$+ 35(300 - 12{,}5x_2^2 + 150x_2 - 650)x_2 100 =$$
$$= 400(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1) + 3500(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2)$$

за умов:

$$x_1 + x_2 = 12.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) =$$
$$= 400(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1) + 3500(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2) +$$
$$+ \lambda_1(12 - x_1 - x_2).$$

Візьмемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 400\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 3500\left(-37{,}5x_2^2 + 300x_1 - 350\right) - \lambda_1 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 12 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь визначаємо координати сідлових точок. З першого та другого рівняння знаходимо λ_1 і, прирівнюючи вирази, маємо:

$$400(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400) = 3500(-37{,}5x_2^2 + 300x_2 - 350) \qquad (9.4.5)$$

або, скоротивши на 100 обидві частини і розкривши дужки, отримаємо:

$$150x_1^2 + 1600x_1 - 1600 = 1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250\,. \qquad (9.4.6)$$

Із останнього рівняння системи маємо: $x_1 = 12 - x_2$.

Підставимо вираз для x_1 у рівність (9.4.6). Отримаємо:

$$-150(12 - x_2)^2 + 1600(12 - x_2) - 1600 = -1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250$$

або

$$-150\left(144 - 24x_2 + x_2^2\right) + 19\,200 - 1600x_2 - 1600 =$$
$$= -1312{,}5x_2^2 + 10\,500x_2 - 12\,250\,;$$

$$21\,600 + 3600x_2 - 150x_2^2 + 19\,200 - 1600x_2 - 1600 +$$
$$+ 1312{,}5x_2^2 - 10\,500x_2 + 12\,250 = 0.$$

Отже, $1162x_2^2 - 8500x_2 + 11\,450 = 0$;

$D = 72\,250\,000 - 53\,219\,600 = 19\,030\,400$

$\sqrt{D} \approx 4362$.

$x_2^{(1)} = \dfrac{8500 + 4362}{2324} \approx 5{,}53$ (553 га);

$x_2^{(2)} = \dfrac{8500 - 4362}{2324} \approx 1{,}78$ (178 га).

Відповідно дістаємо:

$x_1^{(1)} \approx 6{,}47$(647 га);

$x_1^{(2)} \approx 10{,}22$(1022 га).

Тобто отримали дві сідлові точки:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 6{,}47; \\ x_2^{(1)} = 5{,}53. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = 10{,}22; \\ x_2^{(2)} = 1{,}78. \end{cases}$$

Перевіримо за допомогою достатньої умови існування екстремуму спочатку сідлову точку $X_1^*(x_1^{(1)};x_2^{(1)})$.

Матриця Гессе має такий вигляд:

$$H = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -34100 & 0 \\ 1 & 0 & -401625 \end{array}\right).$$

За вищезазначеним правилом визначаємо головні мінори, починаючи з 2-го порядку ($m+1=1+1=2$):

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -34100 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -34100 & 0 \\ 1 & 0 & -401625 \end{vmatrix} = 435725.$$

Отже, головні мінори утворюють знакозмінний ряд та, починаючи з головного мінору 2-го порядку, наступний мінор визначається знаком $(-1)^{m+1} = (-1)^2$, тобто $X_1^*(x_1^{(1)};x_2^{(1)})$ є точкою максимуму.

Обчислимо значення цільової функції в цій точці:

$$f(x_1 = 6{,}47;\ x_2 = 5{,}53) = 4(800 - 532{,}26 + 1294 - 1200)647 + \\ + 35(300 - 382{,}26 + 829{,}5 - 650)553 = 4625863.$$

Аналогічні обчислення для точки $X_1^*(x_1^{(2)} = 10{,}22;\ x_2^{(2)} = 1{,}78)$ показують, що вона не є екстремальною.

Отже, цільова функція набуде максимального значення, якщо озима пшениця вирощуватиметься на площі 647 га, а цукрові буряки — на площі 553 га.

Метод множників Лагранжа може застосовуватися також у разі наявності обмежень на знаки змінних і обмежень-нерівностей.

Розглянемо таку задачу в загальному вигляді:

$$\max(\min) F = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\begin{cases} q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \ (i = 1, 2, ..., k); \\ q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \ (i = k+1, ..., l); \\ q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge b_i \ (i = l+1, 2, ..., m), \end{cases}$$

причому всі функції, що входять у задачу, мають бути диференційовними хоча б один раз.

Очевидно, що введення в ліві частини нерівностей системи обмежень задачі додаткових невід'ємних змінних $x_{n+i} \geq 0$ $(i = k+1,...,m)$ перетворює початкову задачу в таку, що містить лише обмеження-рівності, тобто яка за формою та методом розв'язування збігатиметься з задачею (9.4.1), (9.4.2).Особливості розв'язання такого типу задач розглянуто в літературі: [19], [28].

9.5. Необхідні умови існування сідлової точки

Для розроблення методів розв'язування окремих типів задач нелінійного програмування важливе значення має поняття сідлової точки, а також визначення необхідних і достатніх умов існування сідлових точок функції Лагранжа $L(X,\Lambda)$ у (n + m)-вимірному просторі змінних $(x_1, x_2,...,x_n, \lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_m)$ за довільних умов, які можуть накладатися на їх знаки (необхідні і достатні умови існування сідлової точки функції Лагранжа за відсутності обмежень на знаки змінних розглянуто в § 9.4).

Розглянемо нелінійну задачу:

$$\max F = f(x_1, x_1,...,x_n),$$

$$q_i(x_1, x_2,...,x_n) = b_i \ (i = \overline{1,m}).$$

Причому на компоненти векторів X,Λ накладено обмеження на знаки. Позначимо множину точок, що задовольняють такі обмеження, через Ω.

Функція Лагранжа для цієї задачі має вигляд:

$$L(X,\Lambda) = f(x_1, x_2,...,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2,...,x_n)). \qquad (9.5.1)$$

Точка $(X^*, \Lambda^*) = (x_1^*, x_2^*,...,x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*,...,\lambda_m^*)$ називається ***сідловою точкою*** функції Лагранжа (9.5.1), якщо для всіх $X \in \Omega$, $\Lambda \in \Omega$ виконується співвідношення:

$$L(X,\Lambda^*) \leq L(X^*,\Lambda^*) \leq L(X^*,\Lambda). \qquad (9.5.2)$$

Для диференційовних функцій $f(X)$ та $q_i(X)$ знайдемо необхідні умови існування сідлової точки.

Сідлова точка $(X^*, \Lambda^*) = (x_1^*, x_2^*,...,x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*,...,\lambda_m^*)$ функції $L(X,\Lambda)$ виду (9.5.1) за означенням задовольняє умову:

$$L(X,\Lambda^*) \leq L(X^*,\Lambda^*).$$

Нерівність виконується для всіх точок X, тобто також і для тих, у яких лише одна координата відрізняється від X^*. Допустимо, що це x_k, а всі інші збігаються з координатами сідлової точки $x_j = x_j^*$ $(j = 1,2,...,k-1,k+1,...,n)$.

Оскільки права частина нерівності є фіксованою, а в лівій частині змінюється лише одна координата x_k, то приходимо до функції однієї змінної $L(X,\Lambda^*) = L(x_k)$, яку можна зобразити графічно на координатній площині.

Розглянемо спочатку випадок, коли $x_k \geq 0$, тобто лише частину координатної площини, для якої $x_k \geq 0$.

Можливі такі випадки:

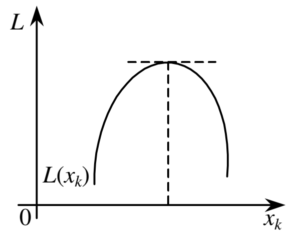


Рис. 9.5.1.

1) коли всі $x_j^* > 0$, то максимальне значення функції $L(x_k)$ досягатиметься в точці, для якої $\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_k} = 0$ (рис. 9.5.1).

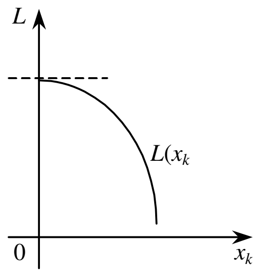


Рис. 9.5.2.

2) коли максимум функції $L(x_k)$ досягатиметься в точці $x_k = 0$ і розглядувана частинна похідна також дорівнюватиме нулю: $\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_k} = 0$ (рис. 9.5.2).

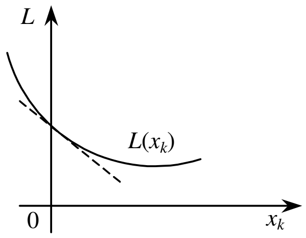


Рис. 9.5.3.

3) коли точка максимуму функції $L(x_k)$ досягатиметься також у точці $x_k = 0$, а частинна похідна $\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_k} \leq 0$ (рис. 9.5.3).

Узагальнюючи всі три ситуації, маємо:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \leq 0 \text{ для } x_j \geq 0$$

та
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j}(x_j^*) = 0 .$$

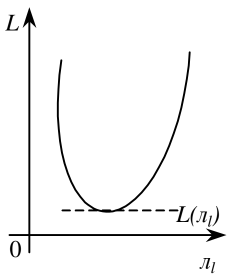


Рис. 9.5.4.

Розглядаючи другу частину нерівності (9.5.2):

$$L(X^*,\Lambda^*) \leq L(X^*,\Lambda)$$

аналогічними міркуваннями, що проілюстровані рис. 9.5.4.— 9.5.6, встановлюються необхідні умови для похідних по λ_l функції Лагранжа в сідловій точці.

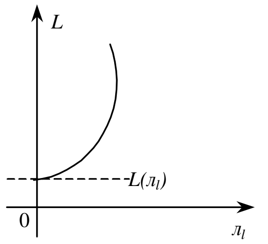


Рис. 9.5.5.

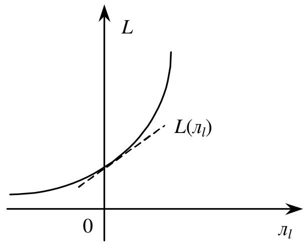


Рис. 9.5.6.

Об’єднуючи всі три випадки для невід’ємних координат, маємо необхідні умови сідлової точки:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \le 0 \text{ для тих індексів } j, \text{ де } x_j \ge 0. \qquad (9.5.3)$$

Зауважимо, що для $x_k \le 0$ маємо ті самі випадки, які зображено на рис. 9.5.1—9.5.6, причому графіки будуть симетрично відображені відносно осі *Oy*, тобто для недодатних координат необхідна умова має вигляд:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \ge 0 \text{ для тих індексів } j, \text{ де } x_j \le 0. \qquad (9.5.4)$$

І нарешті, як відомо з попереднього параграфа, якщо на знак x_j умови не накладаються, то необхідною умовою є:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} = 0, \ x_j \text{ — довільного знака.} \qquad (9.5.5)$$

Узагальнення всіх випадків приводить до рівняння:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0. \qquad (9.5.6)$$

Розглядаючи другу частину нерівності (9.5.2), за допомогою аналогічних міркувань встановлюємо необхідні умови для похідних по λ_i функції Лагранжа в сідловій точці:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \ge 0 \text{ для тих індексів } i, \text{ де } \lambda_i \ge 0, \qquad (9.5.7)$$

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \le 0 \text{ для тих індексів } i, \text{ де } \lambda_i \le 0, \qquad (9.5.8)$$

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0 \text{ для тих індексів } i, \text{ де } \lambda_i \text{ має довільний знак.} (9.5.8)$$

Отже, справджується рівняння: $\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0.$ (9.5.9)

Сукупність співвідношень (9.5.3)—(9.5.9) становить необхідні умови, які має задовольняти сідлова точка (X^*,Λ^*) функції Лагранжа для точок, що належать множині Ω. При цьому $L(X^*,\Lambda^*)$ повинна мати частинні похідні по всіх компонентах векторів X,Λ.

9.6. Теорема Куна—Таккера

Розглянутий метод множників Лагранжа уможливлює знаходження лише локальних сідлових точок функції Лагранжа.

Теорема Куна—Таккера дає змогу встановити типи задач, для яких на множині допустимих розв'язків існує лише один глобальний екстремум зумовленого типу. Вона тісно пов'язана з необхідними та достатніми умовами існування сідлової точки.

Розглянемо задачу нелінійного програмування, яку, не зменшуючи загальності, подамо у вигляді:

$$\max F = f(X), \tag{9.6.1}$$

$$q_i(X) \le b_i \ (i = \overline{1,m}), \tag{9.6.2}$$

$$x_j \ge 0 \, (j = \overline{1,n}). \tag{9.6.3}$$

(Очевидно, що знак нерівності можна змінити на протилежний множенням лівої і правої частин обмеження на (– 1)).

Теорема 9.6.1. (Теорема Куна—Таккера). *Вектор X^* є оптимальним розв'язком задачі (9.6.1)—(9.6.3) тоді і тільки тоді, коли існує такий вектор Λ^*, що при $X^* \ge 0, \Lambda^* \ge 0$ для всіх $X \ge 0, \Lambda \ge 0$ точка (X^*, Λ^*) є сідловою точкою функції Лагранжа*

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X)),$$

і функція мети $f(X)$ для всіх $X \ge 0$ угнута, а функції $q_i(X)$ $(i = \overline{1,m})$ — опуклі.

Доведення. ***Необхідність***. Нехай X^* — оптимальний план задачі (9.6.1)—(9.6.3), тобто є точкою глобального максимуму задачі. Отже, для всіх інших планів задачі *X* з множини допустимих розв'язків виконуватиметься співвідношення:

$$f(X^*) \ge f(X).$$

Розглянемо тепер вектор $\Lambda^* \ge 0$, що відповідає точці глобального максимуму X^*, і значення функції Лагранжа в точках (X^*, Λ^*), (X^*, Λ), (X, Λ^*), де $X \ge 0$ — довільний план задачі з множини допустимих розв'язків, $\Lambda \ge 0$ — вектор множників Лагранжа, що відповідає *X*.

З умови (9.6.1) маємо: $\frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = (b_i - q_i(X)) \cdot \lambda_i^* = 0$, тоді

$$L(X^*, \Lambda^*) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) = f(X^*). \tag{9.6.4}$$

Для точки з координатами (X^*, Λ) деякі доданки виду $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*))$ можуть бути відмінними від нуля. Оскільки за умовою задачі $b_i - q_i(X^*) \geq 0$, то лише за умови, що $\Lambda \geq 0$, матимемо нерівність:

$$f(X^*) = L(X^*, \Lambda^*) \leq L(X^*, \Lambda) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)) .$$

Функція $L(X^*, \Lambda)$ — лінійна відносно Λ, тобто остання нерівність виконується для будь-якого $\Lambda \geq 0$. Отже, точка (X^*, Λ^*) — точка глобального мінімуму по Λ функції Лагранжа.

Для встановлення нерівності, що відповідає лівій частині умови (9.5.2), а саме: $L(X, \Lambda^*) \leq L(X^*, \Lambda^*)$, скористаємося також рівнянням (9.6.1), підсумувавши його по *i*: $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0$. За умовою теореми $f(X), q_i(X)$ — угнуті функції і $\Lambda \geq 0$, тому виконується таке рівняння:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \right) \left(\Lambda - \Lambda^* \right) = \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - \Lambda^* \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} =$$
$$= \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_l^* = \Lambda \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} .$$

Отже, у точці X^* функція Лагранжа має глобальний максимум по *X*, що повністю доводить необхідність теореми.

Достатність. Для доведення достатності умов теореми потрібно виходити з того, що $X^* \geq 0, \Lambda^* \geq 0$, (X^*, Λ^*) — сідлова точка функції $L(X, \Lambda)$ (тобто для (X^*, Λ^*) виконується нерівність (9.5.2)), і необхідно довести, що тоді X^* є оптимальним планом задачі опуклого програмування.

Підставимо у нерівність (9.5.2) вираз функції Лагранжа (9.5.1) для задачі (9.6.2)—(9.6.3):

$$f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X)) \leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \leq$$
$$\leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)) \tag{9.6.5}$$

при всіх значеннях $X \geq 0, \Lambda \geq 0$.

Розглянемо праву частину подвійної нерівності (9.6.5).

$$f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \leq f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(X^*) - f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(X^*)) .$$

Остання нерівність має виконуватися для всіх $\Lambda \ge 0$. Крім того, $(b_i - q_i(X)) \ge 0$, тобто нерівність справджується лише у разі, коли

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) = 0 .$$

Тоді з лівої частини нерівності (9.6.5) маємо:

$$f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X)) \le f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X^*)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X)) \le f(X^*) .$$

Через те що $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (b_i - q_i(X)) \ge 0$, приходимо до нерівності $f(X) \le f(X^*)$, яка справджується для всіх значень $X \ge 0$.

Отже, точка X^* задовольняє обмеження і надає максимального значення цільовій функції задачі, тому що для всіх інших $X \ge 0$ функція $f(X)$ набуває менших значень, ніж у точці X^*, тобто вона є оптимальним планом задачі нелінійного програмування. Достатність умов тереми доведено.

Умови теореми Куна — Таккера виконуються лише для задач, що містять опуклі функції.

9.6.1. Опуклі й угнуті функції

Наведемо основні означення та теореми. Нехай задано n-вимірний лінійний простір R^n. Функція $f(X)$, що задана на опуклій множині $X \subset R^n$, називається ***опуклою***, якщо для будь-яких двох точок X_1 та X_2 з множини X і будь-яких значень $0 \le \lambda \le 1$ виконується співвідношення:

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda) X_1) \le \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1). \tag{9.6.6}$$

Якщо нерівність строга і виконується для $0 < \lambda < 1$, то функція $f(X)$ називається строго опуклою.

Функція $f(X)$, яка задана на опуклій множині $X \subset R^n$, називається ***угнутою***, якщо для будь-яких двох точок X_1 та X_2 з множини X і будь-якого $0 \le \lambda \le 1$ справджується співвідношення:

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda) X_1) \ge \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1). \tag{9.6.7}$$

Якщо нерівність строга і виконується для $0<\lambda<1$, то функція $f(X)$ називається строго угнутою.

Слід зазначити, що опуклість та угнутість функції визначаються лише відносно опуклих множин у R^n, оскільки за наведеними означеннями разом з двома будь-якими точками X_1 та X_2 множині X належать також точки їх лінійної комбінації: $\lambda X_2+(1-\lambda)X_1$ для всіх значень $0\le\lambda\le 1$, що можливо лише у разі, коли множина X є опуклою.

Теорема 9.6.2. *Нехай $f(X)$ — опукла функція, що задана на замкненій опуклій множині X, тоді будь-який локальний мінімум $f(X)$ на цій множині є і глобальним.*

Доведення. Допустимо, що в точці X' функція $f(X)$ має локальний мінімум, тоді як глобальний мінімум досягається в точці X^*, отже, виконуватиметься нерівність $f(X')>f(X^*)$. Через те що $f(X)$ — опукла функція, для будь-яких значень $0\le\lambda\le 1$ справджується співвідношення:

$$f\left(\lambda X^*+(1-\lambda)X'\right)\le\lambda f\left(X^*\right)+(1-\lambda)f\left(X'\right). \qquad (9.6.8)$$

Множина X опукла, тому точка $\lambda X^*+(1-\lambda)X'$ при $0<\lambda<1$ також належить цій множині. Враховуючи, що $f(X')>f(X^*)$, нерівність (8.29) матиме вигляд:

$$f\left(\lambda X^*+(1-\lambda)X'\right)\le\lambda f\left(X^*\right)+(1-\lambda)f\left(X'\right)<\lambda f(X')+(1-\lambda)f(X');$$

$$f\left(\lambda X^*+(1-\lambda)X'\right)<f(X').$$

Значення λ можна вибрати так, щоб точка $\lambda X^*+(1-\lambda)X'$ була розташована як завгодно близько до X'. Тоді отримана остання нерівність суперечить тому, що X' — точка локального мінімуму, оскільки існує як завгодно близька до неї точка, в якій функція набуває меншого значення, ніж у точці X'. Тому попереднє допущення неправильне. Теорему доведено.

Теорема 9.6.3. *Нехай $f(X)$ — опукла функція, що визначена на опуклій множині X, і крім того, вона неперервна разом з частинними похідними першого порядку в усіх внутрішніх точках X. Нехай X^* — точка, в якій $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*)=0,\ (i=\overline{1,n})$. Тоді в точці X^* досягається локальний мінімум, що збігається з глобальним.*

*Доведення***.** З рівності (9.5.1) для $0<\lambda<1$ знаходимо:

$$f\left(\lambda X_2+(1-\lambda)X_1\right)\le\lambda f\left(X_2\right)+(1-\lambda)f\left(X_1\right)=f(X_1)+\lambda(f(X_2)-f(X_1));$$

$$f\left(\lambda X_2+X_1-\lambda X_1\right)=f(X_1+\lambda(X_2-X_1))\le f(X_1)+\lambda(f(X_2)-f(X_1));$$

$$\frac{f(X_1+\lambda(X_2-X_1))-f(X_1)}{\lambda}\le f(X_2)-f(X_1).$$

Через те що існують частинні похідні першого порядку, функцію $f(X_1+\lambda(X_2-X_1))$ можна розкласти в ряд Тейлора:

$f(X_1+\lambda(X_2-X_1))=f(X_1)+\nabla f\left(X_1+\lambda\theta(X_2-X_1)\right)\lambda(X_2-X_1)$,

де $\nabla f\left(X_1+\lambda\theta(X_2-X_1)\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ — градієнт функції *f*, обчислений у точці $X_1+\lambda\theta(X_2-X_1)$, $0\le\theta\le 1$. Тоді:

$$\frac{f(X_1+\lambda(X_2-X_1))-f(X_1)}{\lambda}=\nabla f\left(X_1+\lambda\theta(X_2-X_1)\right)(X_2-X_1)\le$$

$$\le f(X_2)-f(X_1).$$

Переходимо до границі при $\lambda\to 0$, отримаємо:

$$\nabla f(X_1)(X_2-X_1)\le f(X_2)-f(X_1). \qquad (9.6.9)$$

Ця умова виконується для будь-яких внутрішніх точок X_1 та X_2 і є необхідною і достатньою умовою опуклості $f(X)$.

Якщо функція $f(X)$ неперервна разом з частинними похідними першого порядку і угнута на множині X, то аналогічно попередньому результату маємо:

$$\nabla f(X_1)(X_2-X_1)\ge f(X_2)-f(X_1).$$

Припустимо, що X^0 — довільна точка множини X, тоді, взявши $X_1=X^*$, $X_2=X^0$, а також за умовою теореми $\nabla f(X)=0$, в нерівності (9.6.9) маємо:

$$\nabla f(X^*)(X^0-X^*)=0\le f(X^0)-f(X^*)\Rightarrow f(X^0)\ge f(X^*).$$

Отже, опукла функція $f(X)$ досягає свого глобального мінімуму на множині X у кожній точці, де $\nabla f(X)=0$. Теорему доведено.

Як наслідок теореми можна показати, що коли X замкнена, обмежена знизу, опукла множина, то глобального максимуму опукла функція $f(X)$ досягає на ній у одній чи кількох точках (при цьому допускається, що в точці X значення функції скінченне). Застосовуючи за розв'язування таких задач процедуру перебору крайніх точок, можна отримати точку локального максимуму, однак не можна встановити, чи є вона точкою глобального максимуму.

Для угнутих функцій отримані результати формулюють так. Нехай $f(X)$ — угнута функція, що задана на замкненій опуклій множині $X\subset R^n$. Тоді будь-який локальний максимум $f(X)$ на множині X є глобальним. Якщо глобальний максимум досягається в двох різних точках множини, то він досягається і на нескінченній множині точок, що лежать на відрізку, який сполучає ці точки. Для строго угнутої функції існує єдина точка, в якій вона досягає глобального максимуму.

Градієнт угнутої функції $f(X)$ у точках максимуму дорівнює нулю, якщо $f(X)$ — диференційовна функція. Глобальний мінімум угнутої функції, якщо він скінченний на замкненій обмеженій зверху множині, має досягатися в одній чи кількох її крайніх точках за умови скінченності функції $f(X)$ у кожній точці цієї множини.

9.7. Опукле програмування

Опукле програмування розглядає методи розв'язування задач нелінійного програмування, математичні моделі яких містять опуклі або угнуті функції.

Загальний вигляд задачі опуклого програмування такий:

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{9.7.1}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \ (i = \overline{1, m}); \tag{9.7.2}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}), \tag{9.7.3}$$

де $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ — угнуті функції.

Аналогічний вигляд має задача для опуклих функцій.

Позначимо: $F'(X) = -F(X)$; $g_i'(X) = -g_i(X)$, тоді $\max F(X) \approx \min F'(X)$, і маємо:

$$\min F' = f'(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{9.7.4}$$

$$g_i'(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0 \quad (i = \overline{1, m}); \tag{9.7.5}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n}), \tag{9.7.6}$$

де $F' = f'(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_i'(x_1, x_2, ..., x_n)$ — опуклі функції.

Оскільки ці задачі еквівалентні, то нижче розглянемо задачу (9.7.1)—(9.7.3).

Множина допустимих планів задачі, що визначається системою (9.7.2), є опуклою.

Як наслідок теорем 9.6.2 та 9.6.3 справджується таке твердження: точка локального максимуму (мінімуму) задачі опуклого програмування (9.7.1)—(9.7.3) є одночасно її глобальним максимумом (мінімумом).

Отже, якщо визначено точку локального екстремуму задачі опуклого програмування, то це означає, що знайдено точку глобального максимуму (мінімуму).

У разі обмежень-нерівностей задачу опуклого програмування розв'язують, застосовуючи метод множників Лагранжа.

Функція Лагранжа для задачі (9.7.1)—(9.7.3) має вид:

$$\begin{aligned} L(X, \Lambda) = L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \\ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \end{aligned} \tag{9.7.7}$$

де $\lambda_i (i = \overline{1,m})$ — множники Лагранжа.

Використовуючи теорему Куна — Таккера, маємо необхідні та достатні умови існування оптимального плану задачі опуклого програмування.

Теорема 9.7.1. *Якщо задано задачу нелінійного програмування виду (9.7.1)—(9.7.3), де функції* $f(X)$, $g_i(X)$ $(i = \overline{1,m})$ *диференційовні і вгнуті по X, то для того, щоб вектор* $X^* \geq 0$ *був розв'язком цієї задачі, необхідно і достатньо, щоб існував такий вектор* $\Lambda^* \geq 0$, *що пара (* X^*, Λ^* *) була б сідловою точкою функції Лагранжа, тобто щоб виконувалися умови:*

(I) $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \leq 0, \left(j = \overline{1,n}\right);$ *(9.7.8)*

(II) $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0, \left(j = \overline{1,n}\right);$ *(9.7.9)*

(III) $\dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \geq 0, \left(i = \overline{1,m}\right);$ *(9.7.10)*

(IV) $\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0, \left(i = \overline{1,m}\right).$ *(9.7.11)*

Для задачі мінімізації (9.7.4)—(9.7.6), де всі функції $f(X)$, $g_i(X)$ $(i = \overline{1,m})$ диференційовні і опуклі по *X*, маємо умови, аналогічні вищенаведеним, але зі знаком «≥» в нерівностях (9.7.8) та (9.7.10).

Сформульована теорема доводиться з допомогою використання вищенаведених теорем цього та попередніх параграфів.

9.8. Квадратичне програмування

Окремою частиною задач опуклого програмування є задачі квадратичного програмування. До них належать задачі, які мають лінійні обмеження, а функціонал являє собою суму лінійної і квадратичної функцій:

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n + c_{11} x_1^2 + c_{22} x_2^2 + \ldots + c_{nn} x_n^2 + \\ + 2c_{12} x_1 x_2 + 2c_{13} x_1 x_3 + \ldots + 2c_{n-1,n} x_{n-1} x_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1,m});$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,n}).$$

9.8.1. Квадратична форма та її властивості

Квадратична функція n змінних називається ***квадратичною формою*** і може бути подана у вигляді:

$$Z(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}=X^TCX\ ,$$

де $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $X^T=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\.. & .. & .. & ..\\c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}$,

причому матриця C завжди симетрична, тобто $c_{ij}=c_{ji}$ для всіх $i,j=\overline{1,n}$.

Квадратична форма $Z(X)$ називається ***від'ємно означеною***, якщо для всіх X, крім $X=0$, значення $Z(X)<0$ (якщо $Z(X)\le 0$, то маємо від'ємно напівозначену квадратичну форму), у протилежному разі $Z(X)$ є ***додатно означеною*** (якщо $Z(X)\ge 0$, то маємо додатно напівозначену квадратичну форму).

Квадратична форма $Z(X)$ називається ***неозначеною***, якщо вона додатна для одних значень X і від'ємна для інших.

Вид квадратичної форми можна визначити, використовуючи

$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$ — вектор характеристичних коренів (власних значень) матриці C.

Вектор характеристичних коренів матриці C є вектором, кожна компонента якого задовольняє систему рівнянь виду $(C-E\lambda_i)\,X=0\ (i=\overline{1,n})$. Система має ненульовий розв'язок, якщо $|C-E\lambda|=0$. Таке рівняння називається характеристичним рівнянням матриці C і має $\lambda_i\ (i=\overline{1,n})$ коренів, які утворюють вектор Λ:

$$\begin{vmatrix}c_{11}-\lambda & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\c_{21} & c_{22}-\lambda & \cdots & c_{2n}\\.. & .. & . & ..\\c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\ \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}.$$

Наведемо без доведення теорему (доведення можна знайти в літературі [19]).

Теорема 9.8.1. *Для того, щоб довільна квадратична форма була додатно (від'ємно) означеною, необхідно і достатньо, щоб усі компоненти вектора характеристичних коренів* $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$ *були додатними (від'ємними) значеннями. Якщо* *хоча б один із характеристичних коренів дорівнює нулю, то квадратична форма є напівдодатною (напіввід'ємною). Якщо корені мають різні знаки, то квадратична форма є неозначеною.*

Приклад 9.8.1. Визначити вид квадратичної форми:

$$F = -4x_1x_2 - 4x_1^2 - x_2^2.$$

Матриця C має вигляд:

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Звідси маємо:

$$(-4-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)(-2) = 0 \to 4 + \lambda + 4\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \to \lambda^2 + 5\lambda = 0 .$$

Коренями отриманого квадратного рівняння є: $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = -5 < 0$, тоді $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \\ & -5 \end{pmatrix}$. Отже, квадратична форма $F = -2x_1x_2 - 4x_1^2 - x_x^2$ за теоремою 9.8.1 є напіввід'ємною.

9.8.2. Метод розв'язування задач квадратичного програмування

Зазначимо, що відомим з теорії аналізу функцій є таке твердження: від'ємно означена квадратична форма є угнутою, а додатно означена — опуклою.

Розглянемо випадок від'ємно означеної квадратичної форми, що входить у цільову функцію задачі квадратичного програмування.

$$\max\ F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j\ , \tag{9.8.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ (i = \overline{1,m})\ ; \tag{9.8.2}$$

$$x_j \geq 0\ (j = \overline{1,n})\ . \tag{9.8.3}$$

Оскільки цільова функція задачі є опуклою, а обмеження — лінійні, тобто визначають опуклу множину допустимих розв'язків, то ця задача належить до задач опуклого програмування, для яких справджується твердження, що будь-який локальний максимум є і глобальним. Отже, використовуючи умови теореми Куна — Таккера для задачі (9.8.1)—(9.8.2), отримаємо необхідні та достатні умови оптимальності плану у вигляді такої теореми.

Теорема 9.8.2. *Вектор X^* є оптимальним розв'язком задачі квадратичного програмування тоді, і тільки тоді, коли існують такі m-вимірні вектори $\Lambda^* \geq 0, W \geq 0$ і n-вимірний вектор $V \geq 0$, що виконуються умови:*

(I) $\dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j = 0$, $\left(j = \overline{1,n}\right)$; *(9.8.4)*

(II) $v_j \cdot x_j^* = 0$, $\left(j = \overline{1,n}\right)$; *(9.8.5)*

(III) $\dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0$, $\left(i = \overline{1,m}\right)$; *(9.8.6)*

(IV) $w_i \lambda_i^* = 0$, $\left(i = \overline{1,m}\right)$. *(9.8.7)*

Доведення. Запишемо функцію Лагранжа для задачі квадратичного програмування (9.8.1)—(9.8.2):

$$L(X,\Lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right). \quad (9.8.8)$$

Нехай (X^*,Λ^*) — сідлова точка функції Лагранжа, тобто яка визначає оптимальний план задачі квадратичного програмування. Застосуємо теорему 9.7.1 до виразу (9.8.8). За теоремою для того, щоб точка (X^*,Λ^*) визначала оптимальний план, необхідно і достатньо виконання умов (9.7.8)—(9.7.11):

для $x_j^* \geq 0$ має виконуватись умова:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} = c_j + 2\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i^* - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* a_{ij} \leq 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right), \quad (9.8.9)$$

а також

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot x_j^* = 0 \quad (9.8.10)$$

а для $\lambda_j^* \geq 0$ має виконуватись умова:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \geq 0, \ \left(i = \overline{1,m}\right), \quad (9.8.11)$$

а також

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \lambda_i^* = 0. \quad (9.8.12)$$

Візьмемо два вектори $V(v_1, v_2, \ldots v_n) \geq 0$ та $W(w_1, w_2, \ldots w_m) \geq 0$, компоненти яких будуть введені як додаткові змінні в рівняння (9.8.10) та (9.8.12). Для цього виберемо $v_j > 0$, якщо $\dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} < 0$ і $v_j = 0$, якщо $\dfrac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} = 0$. Аналогічно виберемо $w_i > 0$, якщо

$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} > 0$ і $w_i = 0$, якщо $\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = 0$. Тепер додамо компоненти вектора $V(v_1, v_2, ... v_n) \geq 0$ у (9.8.10) і віднімемо компоненти вектора $W(w_1, w_2, ... w_m) \geq 0$ від (9.8.12). Враховуючи правила вибору компонент векторів, матимемо для (9.8.10):

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j = 0, \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Звідси: $\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j^*} = -v_j$, тому для (9.8.11) маємо:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial x_j} \cdot \ x_j^* = -v_j x_j^* = v_j x_j^* = 0 .$$

Аналогічно для другої групи обмежень:

$$\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} - w_i = 0, \ \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Звідки $\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} = w_i$, тому $\frac{\partial L(X^*,\Lambda^*)}{\partial \lambda_i} \cdot \ \lambda_i^* = w_i \lambda_i^* = 0$.

Теорему доведено.

Наведену теорему можна використати для побудови ***ефективного методу розв'язування задач квадратичного програмування на основі алгоритму симплексного методу.***

Умови (9.8.4)—(9.8.8) утворюють стосовно змінних X^*, Λ^*, V, W систему $(n + m)$ рівнянь з $2(n + m)$ невідомими.

Умови (9.8.6) та (9.8.7) означають, що змінні x_j^*, v_j не можуть одночасно мати додатні значення, тобто входити в базис разом. Якщо деякі k компонент вектора X^* додатні, то відповідні їм компоненти вектора V дорівнюють нулю і лише $(n – k)$ компонент відмінні від нуля (додатні). Отже, разом x_j^*, v_j будуть мати не більш ніж n додатних компонент. З аналогічних міркувань щодо рівності (9.8.7) випливає, що разом з λ_i^*, w_i буде $n + m$ відмінних від нуля компонент, тобто це може бути базисний розв'язок системи, що утворена умовами (9.8.4) та (9.8.6). Для знаходження такого розв'язку можна застосувати симплексний метод.

Якщо зазначена система рівнянь має допустимий план (він буде єдиним), то оптимальний план відповідної задачі квадратичного програмування також існує.

Розв'язуємо систему рівнянь (9.8.4) і (9.8.6) симплексним методом. Як відомо, спочатку необхідно привести систему обмежень до канонічного виду введенням потрібної кількості додаткових та штучних змінних. Для зведення системи до канонічної форми та визначення початкового опорного плану вводимо штучні змінні

$\alpha(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ у рівняння виду (9.8.4), які будуть базисними для першого опорного плану, а змінні $\beta(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$ — у групу рівнянь (9.8.6), які також дають базисні змінні для початкового плану. Потім для знаходження базисного розв'язку системи (9.8.4), (9.8.6) розв'язуємо симплексним методом таку задачу лінійного програмування:

$$\max\ F' = -M\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j + \sum_{i=1}^{m}\beta_i\right) \tag{9.8.13}$$

за умов:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j^*} + v_j + \alpha_j = 0,\ (j = \overline{1,n}); \\ \dfrac{\partial L(X^*, \Lambda^*)}{\partial \lambda_i^*} - w_i + \beta_i = 0\ (i = \overline{1,m}); \end{cases} \tag{9.8.14}$$

$$X^* \geq 0, \Lambda^* \geq 0, V \geq 0, W \geq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0\,. \tag{9.8.15}$$

Якщо в процесі розв'язування задачі (9.8.13)—(9.8.15) всі штучні змінні будуть виведені з базису $(\alpha = 0, \beta = 0)$ і разом з цим для знайдених значень змінних X^*, Λ^*, V, W виконуються умови (9.8.5), (9.8.7), то знайдений розв'язок є оптимальним планом задачі квадратичного програмування.

Приклад 9.8.2. Розв'язати задачу квадратичного програмування:

$$\max F = 9x_1 + 5x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

*Розв'язання***.** Оскільки цільова функція виражена сумою лінійної функції $F_1 = 9x_1 + 5x_2$ та квадратичної форми $F_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 - \ \ -2x_1x_2$, а система обмежень є лінійною, то маємо задачу квадратичного програмування.

Визначимо вид квадратичної форми $F_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$, для чого відшукаємо корені характеристичного рівняння, що відповідає матриці, складеній з коефіцієнтів при змінних даної функції:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним рівнянням для матриці C буде:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)(-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = -1.$$

Оскільки обидва корені характеристичного рівняння від'ємні, то квадратична форма $F_2 = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$ є від'ємно означеною, а отже, опуклою.

Запишемо функцію Лагранжа для цієї задачі:

$$L(X, \Lambda) = 9x_1 + 5x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2 + \lambda(6 - 2x_1 - 3x_2).$$

Скористаємося теоремою 9.8.2. Необхідні умови існування екстремуму матимуть вигляд:

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 9 - 4x_1 - 2x_2 - 2\lambda \le 0$, причому $\frac{\partial L}{\partial x_1} x_1^* = 0$;

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 5 - 4x_2 - 2x_1 - 3\lambda \le 0$, причому $\frac{\partial L}{\partial x_2} x_2^* = 0$;

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 6 - 2x_1 - 3x_2 \ge 0$, причому $\frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda^* = 0$,

де $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ — координати сідлової точки.

Обмеження, що відповідають нерівностям, запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 2\lambda \le -9; \\ -2x_1 - 4x_2 - 3\lambda \le -5; \\ -2x_1 - 3x_2 \ge -6. \end{cases}$$

Вводимо додаткові змінні для зведення нерівностей до рівнянь:

$$\begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 2\lambda + v_1 = -9; \\ -2x_1 - 4x_2 - 3\lambda + v_2 = -5; \\ -2x_1 - 3x_2 - w_1 = -6. \end{cases}$$

Для зведення задачі до канонічної форми помножимо кожне рівняння на (–1):

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2\lambda - v_1 = 9; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3\lambda - v_2 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + w_1 = 6. \end{cases}$$

Очевидно, що в даному разі штучні змінні необхідно вводити в перші два рівняння. У третьому рівнянні базисною змінною буде w_1. Маємо таку задачу лінійного програмування:

$\max F' = -M\alpha_1 - M\alpha_2$,

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2\lambda - v_1 + \alpha_1 = 9; \\ 2x_1 + 4x_2 + 3\lambda - v_2 + \alpha_2 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + w_1 = 6. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda \ge 0, v_1 \ge 0, v_2 \ge 0, \alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0$.

Розв'язавши її симплексним методом, отримаємо:

$$x_1^* = 2\frac{1}{6},\ x_2^* = \frac{1}{6},\ \lambda^* = 0,\ v_1 = v_2 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0,\ w_1 = 1\frac{1}{6}.$$

Необхідно перевірити виконання умов:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} x_1^* = x_1^* v_1 = 2\frac{1}{6} \cdot 0 = 0\ ;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} x_2^* = x_2^* v_2 = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0\ ;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \lambda^* = \lambda^* w_1 = 0 \cdot 1\frac{1}{6} = 0\ .$$

Всі умови виконуються, отже, $(X^*, \Lambda^*) = \left(x_1^* = 2\frac{1}{6},\ x_2^* = \frac{1}{6},\ \lambda^* = 0 \right)$ є сідловою точкою функції Лагранжа для задачі квадратичного програмування, а $X^* \left(x_1^* = 2\frac{1}{6},\ x_2^* = \frac{1}{6} \right)$ — оптимальним планом задачі, для якого значення функціонала дорівнює:

$$F = 9 \cdot 2\frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} - 2\left(\frac{13}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 2 \cdot 2\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{97}{9}\ .$$

9.9. Економічна інтерпретація множників Лагранжа

Очевидно, що залежно від економічної постановки задачі, функція Лагранжа та умови існування сідлової точки можуть мати різну економічну інтерпретацію. Розглянемо задачу нелінійного програмування стосовно визначення оптимального плану виробництва продукції за умов використання обмежених ресурсів:

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n)\ ,$$

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1, m})\ ,$$

$$x_j \ge 0\ (j = \overline{1, n}).$$

Головна мета виробничої системи — максимізація прибутку від реалізованої продукції. Отже, цільова функція $F = f(X)$ — це прибуток від реалізації продукції в обсягах $X(x_1, x_2, ..., x_n)$, причому $f(X)$ — нелінійна. Крім того, для виробництва продукції необхідне використання *m* видів сировини, обсяги кожного виду якої відомі і становлять $b_i \quad (i = \overline{1, m})$. Система рівнянь $q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1, m})$ може бути подана у вигляді: $g_i(X) = b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0 \quad (i = \overline{1, m})$. Тобто, $q_i(X)$ — обсяг *i*-го виду сировини, що використовується для виробництва продукції в обсязі *X*, тоді $g_i(X)$ — лишок *i*-го ресурсу після виробництва продукції. Якщо $g_i(X) > 0$, то це означає, що на виробництво продукції використано не весь запас ресурсу, а якщо $g_i(X) = 0$ — ресурс вичерпано і якщо $g_i(X) < 0$, то це значить, що наявної (початкової) кількості сировини недостатньо для виробництва продукції на рівні *X*.

Виробнича система здебільшого функціонує в конкурентному середовищі, що характеризується антагоністичними інтересами.

λ_i — це змінні двоїстої до поставленої певної задачі. Вони можуть являти собою ціну, за якою на конкурентному ринку продається чи купується одиниця *і*-го виду сировини. Якщо $\lambda_i \geq 0$ і $g_i(X) > 0$, то така виробнича система може продати лишки сировини і отримати додатковий прибуток у розмірі $\lambda_i g_i(X)$. Якщо $g_i(X) < 0$, то підприємство може закупити потрібну кількість сировини, витративши суму грошей, що дорівнює $\lambda_i g_i(X)$. Така закупівля дасть змогу забезпечити виробництво продукції на рівні *X*. Отже, функція Лагранжа

$$L(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X)$$

являє собою загальний прибуток від виробництва, який включає прибуток від реалізації виготовленої продукції $f(X)$ та прибуток від продажу лишків сировини (чи витрати на придбання потрібної кількості сировини) $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X)$.

За цін λ_i, що встановлюються на ринку, виробнича система прагне максимізувати прибуток шляхом визначення оптимального обсягу виробництва продукції $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$. Отже, знаходиться значення функції Лагранжа при X^*:

$$L(X^*, \Lambda) = \max_X L(X, \Lambda).$$

Оскільки прибуток формується на конкурентному ринку, слід розраховувати на встановлення цін на ресурси на мінімально можливому рівні, тобто слід відшукати

$$L(X, \Lambda^*) = \min_\Lambda L(X, \Lambda).$$

Якщо для розглянутої задачі нелінійного програмування існує сідлова точка (X^*, Λ^*), то це означає, що існує такий рівень виробництва X^* та цін на ресурси Λ^*, за яких має місце конкурентна рівновага:

$$L(X^*, \Lambda^*) = \max_X L(X, \Lambda) = \min_\Lambda L(X, \Lambda).$$

Оскільки за теоремою Куна — Таккера для сідлової точки за будь-яких значень X, Λ виконується нерівність:

$$L(X, \Lambda^*) \leq L(X^*, \Lambda^*) \leq L(X^*, \Lambda),$$

то очевидно, що ніяка зміна рівня виробництва X^* виробничою системою не збільшить прибутку $L(X, \Lambda^*) \leq L(X^*, \Lambda^*)$ і також ніяка зміна цін на ресурси в ринковому середовищі не зможе зменшити прибутку $L(X^*, \Lambda^*) \le L(X^*, \Lambda)$. Отже, сідлова точка функції Лагранжа є точкою ринкової рівноваги.

Розглянемо інтерпретацію множників Лагранжа. Позначимо через $B(b_1, b_2, ..., b_m)$ вектор з компонентами, що означають обсяг *i*-го ресурсу у виробничій системі. Нехай $X^*(B)$ означає, що оптимальний план задачі є функцією від значень наявних ресурсів *B*. Для спрощення допустимо, що функції $X^*(B)$ та $f(X)$, $q_i(X)$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$ мають властивості неперервності та диференційовності. І нарешті, допустимо також, що коли для *i*-го ресурсу $g_i(X(B)) > 0$, то за невеликих змін значення вектора *B* (що позначимо через B'), які є досить близькими до *B*, також виконується нерівність $g_i(X(B')) > 0$.

За теоремою Куна — Таккера в задачах нелінійного програмування з обмеженнями — нерівностями для оптимального плану задачі має місце рівність ([3]):

$$\frac{\partial f(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j}.$$

Використовуючи правило диференціювання складної функції, можна написати таку рівність:

$\frac{\partial f(X^*(B))}{\partial b_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial b_k}$. Враховуючи, що $\frac{\partial f(X^*, \Lambda^*)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j}$, маємо:

$$\frac{\partial f(X^*(B))}{\partial b_k} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j} \right) \cdot \frac{\partial x_j}{\partial b_k} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial b_k} \right).$$

Тепер допустимо, що деяке *i*-те обмеження активне в точці *B*, тобто $g_i(X^*(B)) = \tilde{b}$. Тоді згідно з початковим допущенням це обмеження активне також і в деякому невеликому околі цієї точки. Враховуючи це, матимемо:

$\frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial b_k} = \gamma_{ik}$, де $\gamma_{ik} = \begin{cases} 0, \ i \ne k, \\ 1, \ i = k. \end{cases}$

Отже, $\frac{\partial f(X^*(B))}{\partial b_k} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial b_k} \right) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_i(X^*(B))}{\partial b_k} \right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ik} = \lambda_i.$$

Тому λ_i є маргінальними змінами оптимального значення цільової функції за зміни b_i. Аналогічно, як і в задачах лінійного програмування, можна вважати, що λ_i приблизно відповідає приросту цільової функції за збільшення обсягу відповідного *i*-го ресурсу на одиницю. Виходячи з цього, можна оцінити, як зміниться оптимальне значення цільової функції за змін обсягів ресурсів, не розв’язуючи нову задачу.

9.10. Градієнтний метод

Градієнтні методи належать до наближених методів розв’язування задач нелінійного програмування і дають лише певне наближення до екстремуму, причому за збільшення обсягу обчислень можна досягти результату з наперед заданою точністю, але в цьому разі є можливість знаходити лише локальні екстремуми цільової функції. Зауважимо, що такі методи можуть бути застосовані лише до тих типів задач нелінійного програмування, де цільова функція і обмеження є диференційовними хоча б один раз. Зрозуміло, що градієнтні методи дають змогу знаходити точки глобального екстремуму тільки для задач опуклого програмування, де локальний і глобальний екстремуми збігаються.

В основі градієнтних методів лежить основна властивість градієнта диференційовної функції — визначати напрям найшвидшого зростання цієї функції. Ідея методу полягає у переході від однієї точки до іншої в напрямку градієнта з деяким наперед заданим кроком.

Розглянемо **метод Франка — Вульфа**, *процедура якого передбачає визначення оптимального плану задачі шляхом перебору розв’язків, які є допустимими планами задачі.*

Нехай необхідно відшукати

$$\max F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

за лінійних обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1, m});$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}).$$

Допустимо, що X_0 — початкова точка, що належить множині допустимих планів даної задачі. В деякому околі цієї точки нелінійну цільову функцію замінюють лінійною і потім розв’язують задачу лінійного програмування. Нехай розв’язок лінійної задачі дав значення цільової функції F_0, тоді з точки X_0 в напрямку F_0 необхідно рухатись доти, поки не припиниться зростання цільової функції. Тобто у зазначеному напрямку вибирають наступну точку X_1, цільова функція знову замінюється на лінійну, і знову розв’язується задача лінійного програмування.

Розглянемо детальніше перехід від k-ої ітерації методу до $(k + 1)$-ої ітерації.

Припустимо, що відома точка X_k, яка належить області допустимих розв’язків. У даній точці обчислюємо градієнт цільової функції:

$$\nabla f(X_k) = \left(\frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2}; ..., \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \right).$$

Значення градієнта функції задає в даній точці напрям найшвидшого її зростання.

Замінюємо цільову функцію задачі лінійною функцією виду:

$$F = \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + ... + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \cdot x_n .$$

Потім розв'язуємо задачу лінійного програмування з обмеженнями початкової задачі і новою цільовою функцією:

$$\max F = \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1} \cdot x_1 + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2} \cdot x_2 + ... + \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n} \cdot x_n$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1, m});$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n}).$$

Нехай розв'язком такої задачі є точка $\tilde{X}_k$.

З початкової точки X_k в напрямку $\tilde{X}_k$ рухаємося з деяким довільним кроком $0 \le \lambda \le 1$, визначаючи координати нової точки X_{k+1} у такий спосіб:

$$X_{k+1} = X_k + \lambda(\tilde{X}_k - X_k).$$

Зауважимо, що значення параметра $0 \le \lambda \le 1$ доцільно вибирати таким, що дає найбільше значення цільової функції початкової задачі $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Для точки X_{k+1} повторюємо розглянутий процес, для чого знову розраховуємо значення градієнта і т. д.

У такий спосіб знаходимо послідовність точок $X_0, X_1, ...$, які поступово наближаються до оптимального плану початкової задачі. Ітераційний процес повторюється до того моменту, поки значення градієнта цільової функції не стане рівним нулю або виконуватиметься умова $|f(X_{k+1}) - f(X_k)| < \varepsilon$, де ε — досить мале число, яке означає потрібну точність обчислень.

Приклад 9.10.1. Підприємство виробляє два види продукції (А і В) і використовує на виробництво три види ресурсів: І, ІІ, ІІІ. Витрати ресурсів на виробництво одиниці кожного виду продукції подано в табл.

Таблиця

Вид ресурсу	Вид продукції		Загальний обсяг ресурсу
	А	В	
І	1	3	30
ІІ	1	1	15
ІІІ	5	2	60

Ціна реалізації одиниці продукції виду А становить 20 ум. од., проте прибуток залежить від витрат на виробництво, які пропорційні квадрату кількості виготовленої продукції. Аналогічно визначається прибуток для продукції виду В, ціна реалізації якої дорівнює 18 ум. од.

Розв'язання. Позначимо через x_1 кількість продукції виду А, x_2 — кількість продукції виду В, тоді загальний прибуток матиме вигляд: $F = 20x_1 - x_1^2 + 18x_2 - x_2^2$.

Математична модель задачі має вигляд:

$$\max F = 20x_1 - x_1^2 + 18x_2 - x_2^2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30; \\ x_1 + x_2 \le 15; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'яжемо задачу методом Франка Вульфа.

І ітерація

Вибираємо точку, що належить множині допустимих планів задачі. Розглянемо, наприклад, точку $X_0(x_1 = 2; x_2 = 3)$.

Визначимо градієнт цільової функції:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \left(20 - 2x_1; 18 - 2x_2\right).$$

В точці $X_0(x_1 = 2; x_2 = 3)$ обчислюємо значення градієнта:

$$\nabla f(X_0) = (20 - 2 \cdot 2; 18 - 2 \cdot 3) = (16; 12).$$

Використовуючи розраховане значення градієнта, записуємо і вводимо нову цільову функцію: $F_1 = 16x_1 + 12x_2$. Маємо таку задачу лінійного програмування:

$$\max Z = 16x_1 + 12x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30; \\ x_1 + x_2 \le 15; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'язуючи цю задачу симплексним методом, знаходимо її оптимальний план: $\tilde{X}_0(x_1 = 10; x_2 = 5)$.

Знайдемо новий допустимий план задачі, використовуючи формулу $X_{k+1} = X_k + \lambda(\tilde{X}_k - X_k)$ для визначення координат наступної точки.

Визначаємо координати точки X_1:

$$X_1 = X_0 + \lambda_1(\tilde{X}_0 - X_0), \; 0 \le \lambda_1 \le 1,$$

$$x_1 = 2 + \lambda_1(10 - 2) = 2 + 8\lambda_1; \; x_2 = 3 + \lambda_1(5 - 3) = 3 + 2\lambda_1.$$

Знайдемо крок λ_1 такий, за якого досягається максимальне значення цільової функції. Для цього підставимо розраховані значення для x_1, x_2, які виражені через λ_1, у цільову функцію $F = 20x_1 - x_1^2 + 18x_2 - x_2^2$:

$$F = 20x_1 + 18x_2 - x_1^2 - x_2^2 = 20 \cdot (2 + 8\lambda_1) + 18 \cdot (3 + 2\lambda_1) - (2 + 8\lambda_1)^2 -$$
$$- (3 + 2\lambda_1)^2 = 40 + 160\lambda_1 + 54 + 36\lambda_1 - (4 + 32\lambda_1 + 64\lambda_1^2) - (9 + 12\lambda_1 + 4\lambda_1^2) =$$
$$= 40 + 54 + 160\lambda_1 + 36\lambda - 4 - 32\lambda_1 - 64\lambda_1^2 - 9 - 12\lambda_1 - 4\lambda_1^2 =$$
$$= 81 + 152\lambda_1 - 68\lambda_1^2.$$

Отримали функцію, що залежить від λ_1. Знайдемо значення λ_1, за якого функція досягає максимуму, тобто коли її похідна дорівнює нулю:

$F' = 152 - 136\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 152/136$. Оскільки $0 \le \lambda_1 \le 1$, то беремо $\lambda_1 = 1$. Тоді наступна точка X_1 має координати:

$$x_1 = 2 + 8 \cdot 1 = 10;\ x_2 = 3 + 2 \cdot 1 = 5\ .$$

Для знайденої точки $X_1(x_1 = 10;\ x_2 = 5)$ обчислюємо значення цільової функції: $F = 165$.

II ітерація

Узявши точку $X_1(x_1 = 10;\ x_2 = 5)$, обчислюємо значення градієнта в ній:

$$\nabla f(X_1) = (20 - 2x_1; 18 - 2x_2) = (20 - 2 \cdot 10; 18 - 2 \cdot 5) = (0;8).$$

Використовуючи розраховане значення градієнта, вводимо нову цільову функцію: $F_1 = 8x_2$. Отримуємо таку задачу лінійного програмування:

$$\max F_1 = 8x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30; \\ x_1 + x_2 \le 15; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\ .$$

Розв'язавши її симплексним методом, отримуємо оптимальний план: $\widetilde{X}_1(x_1 = 0; x_2 = 10)$.

За формулою $X_{k+1} = X_k + \lambda(\widetilde{X}_k - X_k)$ визначаємо координати наступної точки наближення.

Визначаємо координати точки X_2:

$$X_2 = X_1 + \lambda_2(\widetilde{X}_1 - X_1),\ \ 0 \le \lambda_2 \le 1\ ,$$

$$x_1 = 10 + \lambda_2(0 - 10) = 10 - 10\lambda_2;\ x_2 = 5 + \lambda_2(10 - 5) = 5 + 5\lambda_2\ .$$

Знайдемо такий крок λ_2, за якого досягається максимальне значення цільової функції:

$$F = 20x_1 + 18x_2 - x_1^2 - x_2^2 = 20 \cdot (10 - 10\lambda_2) +$$
$$+ 18 \cdot (5 + 5\lambda_2) - (10 - 10\lambda_2)^2 - (5 + 5\lambda_2)^2.$$

Матимемо $F' = 40 - 250\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0{,}16$.

Обчислимо координати наступної точки X_2:

$$x_1 = 10 - 10\lambda_2 = 10 - 10 \cdot 0{,}16 = 8{,}4;$$
$$x_2 = 5 + 5\lambda_2 = 5 + 5 \cdot 0{,}16 = 5{,}8.$$

Для знайденої точки $X_2(x_1 = 8{,}4;\ x_2 = 5{,}8)$ значення цільової функції дорівнює: $F = 166{,}2$.

Продовжуючи процес у аналогічний спосіб, на *III ітерації* визначаємо точку $X_3(x_1 = 7{,}5;\ x_2 = 7{,}5)$ і переконуємося, що значення цільової функції знову зростає: $F = 172{,}5$.

На *IV ітерації* розраховуються координати точки $X_4(x_1 = 8;\ x_2 = 7)$, для якої $F = 173$.

V ітерація

Узявши точку $X_4(x_1 = 8;\ x_2 = 7)$, обчислюємо значення градієнта в ній:

$$\nabla f(X_4) = (20 - 2x_1; 18 - 2x_2) = (20 - 2 \cdot 8; 18 - 2 \cdot 7) = (4;4).$$

Використовуючи значення цього вектора (градієнта), вводимо нову цільову функцію: $F_4 = 4x_1 + 4x_2$ і маємо таку задачу лінійного програмування:

$$\max F_4 = 4x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30; \\ x_1 + x_2 \le 15; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'язавши цю задачу, отримаємо значення оптимального плану $\tilde{X}_4(8;7)$, тобто повертаємося до попереднього значення. Отже, точку з координатами $X^*(8;7)$ вважаємо оптимальним планом, оскільки маємо нульовий градієнт функції, тобто цей план поліпшити вже не можна.

10. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

10.1. Економічна сутність задач динамічного програмування

Всі економічні процеси та явища є динамічними, оскільки вони функціонують і розвиваються не тільки у просторі, але й у часі. Для народного господарства в цілому, його галузей, регіонів чи окремих підприємств з метою їх стабільного функціонування та розвитку необхідно розробляти стратегічні та тактичні плани. Стратегічні плани містять параметри діяльності об’єктів, які характеризують їх віддалене майбутнє. Отже, вони мають розроблятися на основі динамічних моделей, для знаходження розв’язків яких застосовуються методи динамічного програмування.

Динамічне програмування являє собою математичний апарат, що дає змогу здійснювати планування багатокрокових керованих процесів, а також процесів, які розвиваються у часі.

До задач динамічного програмування належать такі, що пов’язані з оптимальним розподілом капіталовкладень, розподілом продукції між різними регіонами, визначенням найкоротшого шляху завезення товарів споживачам, задачі щодо заміни устаткування, оптимального управління запасами тощо.

Економічні процеси можна уявити складеними з кількох етапів (кроків). На кожному з них здійснюється вплив на розвиток всього процесу. Тому у разі планування багатоетапних процесів прийняття рішень на кожному етапі має враховувати попередні зміни та бути підпорядкованим кінцевому результату. Динамічне програмування дає змогу прийняти ряд послідовних рішень, що забезпечує оптимальність розвитку процесу в цілому.

Слід зазначити, що оптимальні плани стосовно окремих відрізків планового періоду не завжди є оптимальними для всього інтервалу планування. Наприклад, недостатньо визначити оптимальний план виробництва на один місяць і орієнтуватися на нього протягом тривалого часу. Досить ймовірно, що в наступні місяці виробництво за тим самим планом може стати неоптимальним, оскільки за його розроблення можливості дальшого розвитку не враховувались. Доцільніше визначати оптимальні плани на кожен місяць з урахуванням змін у попередніх періодах. Лише тоді річний оптимальний план виробництва буде сумарним результатом оптимальних рішень, що приймалися для кожного місяця.

Поставимо задачу динамічного програмування в загальному вигляді.

Нехай аналізується деякий керований процес, подання якого допускає декомпозицію на послідовні етапи (кроки), кількість яких n задана. Ефективність всього процесу Z може бути подана як сума ефективностей Z_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ окремих кроків, тобто:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j ,$$

що має назву адитивного критерію (або як добуток ефективностей Z_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ окремих кроків у вигляді: $Z = \prod_{j=1}^{n} Z_j$, що має назву мультиплікативного критерію).

З кожним етапом (кроком) задачі пов'язане прийняття певного рішення, так званого ***крокового управління*** x_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$, що визначає як ефективність даного етапу, так і всього процесу в цілому.

Розв'язування задачі динамічного програмування полягає в знаходженні такого управління $X = \left(x_1, x_2, ... x_n\right)$ процесом у цілому, яке максимізує загальну ефективність: $\max Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j$, ($\max$ $Z = \prod_{j=1}^{n} Z_j$).

Оптимальним розв'язком цієї задачі є управління X^*, що складається з сукупності оптимальних покрокових управлінь:

$$X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ... x_n^*\right)$$

і уможливлює досягнення максимальної ефективності:

$$Z^* = \max_{x \in X} \{Z(x)\}.$$

10.2. Задача про розподіл капіталовкладень між двома підприємствами на *n* років

Розглянемо задачу динамічного програмування на прикладі задачі про розподіл капіталовкладень.

Допустимо, що розглядається виробнича система, яка складається з двох підприємств. Нехай плановий період складається з n інтервалів-частин (наприклад, років), і протягом даного періоду слід використати суму коштів b, що має бути розподілена між двома підприємствами. Відомі прибутки, які приносять вкладення коштів: вкладення у перше підприємство обсягом x приносить прибуток $g(x)$, а друге підприємство дає з такої ж суми прибутку $h(x)$.

Необхідно розподілити кошти на період у n років так, щоб досягти максимального прибутку за весь плановий період.

Можна легко сформулювати задачу, коли плановий період складається з одного року (однокрокова задача).

Якщо в перше підприємство здійснили вкладення обсягом x, тоді сума вкладених у друге підприємство коштів становить $b - x = y$ і дає прибуток $h(y)$.

У такому разі маємо однокрокову задачу:

$$\max Z = g(x) + h(y)$$

за умов:

$$x + y = b\ ,$$

$$x \geq 0,\ \ y \geq 0\ .$$

Введемо позначення:

$Z = Z_1$, $b = b_1$, $x = x_1$, $y = b_1 - x_1$, тоді задача матиме вигляд:

$$\max Z_1 = g(x_1) + h(b_1 - x_1)\ ; \qquad (10.1)$$

$$0 \leq x_1 \leq b_1\ . \qquad (10.2)$$

Тепер розглянемо цю задачу оптимального розподілу капітальних вкладень, якщо вона складається з двох періодів (етапів).

Оскільки прибуток утворюється в результаті випуску та реалізації продукції, що пов'язано з певними виробничими витратами, то на початок другого періоду початкова сума x_1 зменшиться до величини $x_2 = \alpha x_1$, де $0 \leq \alpha \leq 1$, а сума $(b_1 - x_1)$ — до величини $\beta(b_1 - x_1)$, де $0 \leq \beta \leq 1$. Щоб визначити найбільший прибуток, який можна отримати від сумарного залишку $b_2 = \alpha x_1 + \beta(b_1 - x_1)$ протягом другого етапу, необхідно розв'язати задачу математичного програмування, аналогічну до задачі (10.1)—(10.2), тобто:

$$\max Z_2 = g(x_2) + h(b_2 - x_2)\ , \qquad (10.3)$$

$$0 \leq x_2 \leq b_2\ . \qquad (10.4)$$

Поставимо тепер задачу оптимального поточного планування розподілу капіталовкладень по всіх *n* інтервалах періоду, причому принцип розподілу вкладень у кожному з періодів полягає у відшуканні оптимального використання тієї суми коштів, що залишається на кінець попереднього періоду. Критерій оптимальності не змінюється і полягає в максимізації прибутку за весь період. Тоді для *k*-го етапу (періоду) залишок коштів після використання в попередньому періоді становитиме b_k . Визначаємо оптимальну суму коштів x_k , що доцільно вкладати в перше підприємство в *k*-му періоді, розв'язуючи таку задачу:

$$\max Z_k = g(x_k) + h(b_k - x_k)\ , \qquad (10.5)$$

$$0 \leq x_k \leq b_k\ . \qquad (10.6)$$

Оскільки критерієм оптимальності є максимізація загального прибутку за всі *n* періодів, то в цілому необхідно знайти максимальне значення функціонала, що складається із максимальних значень прибутків кожного окремого періоду, тобто загальна задача має вид:

$$\max Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_{k=1}^{n} \left[g(x_k) + h(b_k - x_k) \right] \qquad (10.7)$$

за умов:

$$0 \le x_k \le b_k \quad \left(k = \overline{1,n}\right), \tag{10.8}$$
$$b_k = \alpha x_{k-1} + \beta(b_{k-1} - x_{k-1}) \quad \left(k = \overline{2,n}\right).$$

Цільова функція (10.7) є функцією n змінних $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і залежить від початкового параметра b_1.

Розв'язування задачі (10.7)—(10.8) розглянутими раніше однокроковими методами може виявитися неможливим. Проте міркування, які привели до формулювання задачі (10.7)—(10.8), породжують ідею побудови алгоритму поетапного розв'язування динамічних задач.

10.2.1. Метод рекурентних співвідношень

Продовжимо розгляд задачі (10.7)—(10.8). Позначимо через $R_n(b)$ максимальний прибуток, який досягнуто внаслідок виконання n кроків, тоді:

$R_n(b) = \max\limits_{x_1, x_2, ..., x_n} Z(b, x_1, x_2, ..., x_n)$, де змінні $x_j (j = \overline{1,n})$ задовольняють обмеження (10.8).

Як зазначалося вище, при $n = 1$ маємо однокрокову задачу управління і прибуток за один рік від вкладення коштів у два підприємства обчислюється за формулою:

$$R_1(b) = \max_{0 \le x \le b}\left[g(x) + h(b - x)\right].$$

Розглянемо період з двох років. Як зазначалося вище, до початку другого періоду залишок коштів становитиме $b_2 = \alpha x + \beta(b - x)$. Використаємо введені вище позначення: $b = b_1$, $x = x_1$.

Найбільший прибуток, який можна отримати на другому етапі, дорівнює:

$$R_2(b) = \max_{\substack{0 \le x_1 \le b_1, \\ 0 \le x_2 \le b_2}} \left[g(x_1) + h(b_1 - x_1) + g(x_2) + h(b_2 - x_2)\right].$$

Розглянемо детальніше зв'язок між величинами $R_1(b)$ та $R_2(b)$, тобто максимальним прибутком для однокрокової задачі та максимальним прибутком, що може бути отриманий за два кроки.

За довільно визначеного на першому кроці значення x, максимальний прибуток на другому кроці визначатиметься так:

$$R_1(b_2) = \max_{0 \le x_2 \le b_2}\left[g(x_2) + h(b_2 - x_2)\right] = R_1(\alpha x + \beta(b - x)).$$

Розглянемо тепер $R_2(b)$ — найбільший прибуток, що може бути отриманий від початкової суми b за два періоди. Очевидно це значення буде розраховуватись, як максимальна сума доходів першого та другого періодів:

$$R_2(b) = \max_{0 \le x \le b}\left(Z_1 + Z_2\right) = \max_{0 \le x \le b}\left[g(x) + h(b - x) + R_1(\alpha x + \beta(b - x))\right]. \tag{10.9}$$

Формула (10.9) є рекурентним співвідношенням, яке зв'язує величину прибутку, що досягнута лише за другий інтервал планового періоду і яка дорівнює $R_1(\alpha x+\beta(b-x))$, і прибуток за обидва (перший і другий) інтервали планового періоду, який дорівнює $R_2(b)$.

Міркуючи аналогічно, приходимо до співвідношення, що визначає загальний прибуток, який досягається за *n* інтервалів:

$$R_n(b)=\max_{0\le x\le b}\left[g(x)+h(b-x)+R_{n-1}(\alpha x+\beta(b-x))\right],\ (n=2,3,...), \qquad (10.10)$$

де $R_1(b)=\max\limits_{0\le x\le b}\left[g(x)+h(b-x)\right]$. Очевидно, що $R_{n-1}(\alpha x+\beta(b-x))$ — максимальний прибуток за $n-1$ останніх кроків за розподілу обсягів капіталовкладень на першому кроці у такий спосіб: у перше підприємство — *x*, а в друге — решту $(b-x)$. Визначивши $R_1(b)=\max\limits_{0\le x\le b}\left[g(x)+h(b-x)\right]$ з (10.10), можемо обчислити $R_2(b)$ і, користуючись ним, знаходимо знову з (10.10) $R_3(b)$ і т. д., причому на кожному кроці обчислень матимемо як значення $R_k(x_k)$, так і $x_k(b_k)$. Отже, процес розв'язування задачі полягає в обчисленні послідовностей функцій $R_k(x_k)$ та $x_k(b_k)$ для всіх $x_k\ge 0,\ k=\overline{1,n}$.

10.3. Задача про розподіл капіталовкладень між підприємствами

Планується на наступний рік діяльність виробничої системи, яка складається з *n* підприємств. Відома початкова сума коштів — b_0, що має бути розподілена між всіма підприємствами. Сума вкладень *x* приносить *k*-му підприємству прибуток $g_k(x)$. Значення функції $g_k(x)$ $\left(k=\overline{1,n};\,0\le x\le b_0\right)$, задані таблицею.

Необхідно визначити x_k — кошти, які потрібно виділити *k*-му підприємству так, щоб отримати максимальний сумарний прибуток від вкладення коштів в усі підприємства $\left(\max Z=\sum\limits_{k=1}^{n}g_k(x)\right)$.

Позначимо кількість коштів, що залишилися після *k*-го кроку (тобто кошти, які необхідно розподілити між рештою (*n* – *k*) підприємств через b_k:

$$b_k=b_{k-1}-x_k\quad\left(k=\overline{1,n}\right).$$

Задача розв'язується поетапно. В даному разі етапами є вкладення коштів в кожне підприємство**.**

I етап. Кошти вкладаються лише в одне (наприклад, перше) підприємство. Найбільший прибуток (ефективність першого етапу), що може бути отриманий, позначимо через $R_1(b_0)$. Маємо:

$$R_1(b_0)=\max_{0<x_1<b_0}\left\{g_1(x)\right\}.$$

II етап. Порівняємо ефективність, яку отримаємо, вкладаючи кошти лише у перше підприємство та вкладаючи кошти одночасно і в перше, і в друге підприємства. Якщо позначити ефективність другого етапу через $R_2(b_0)$, то отримаємо:

$$R_2(b_0) = \max_{\substack{0<x_1<b_0 \\ 0<x_2<b_1}} \{R_1(x_1) + g_2(x_2)\}.$$

Для k-го етапу маємо рекурентне співвідношення:

$$R_k(b_0) = \max_{0<x_k<b_k} \{R_{k-1}(x_{k-1}) + g_k(b_0 - x_k)\}.$$

Послідовно розв'язуючи отримані рівняння, визначаємо оптимальні рішення на кожному етапі.

Приклад 10.1. Виробнича система складається з чотирьох філіалів. За умови здійснення реконструкції обладнання на кожному філіалі можна досягти певного приросту прибутку. Фірма виділяє на додаткові капітальні вкладення 200 тис. ум. од. (для спрощення розрахунків допустимо, що додаткові вкладення будуть здійснені в обсягах 50, 100, 150 та 200 тис. ум. од.).

Необхідно визначити оптимальний розподіл коштів між філіалами для максимізації загального прибутку від усіх чотирьох філіалів за умови, що відомі прирости прибутку для кожного з них (табл. 10.1):

Таблиця 10.1

Капіталовкладення, тис. ум. од.	Приріст прибутку в філіалах, тис. ум. од.			
	1	2	3	4
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

Розв'язання. В даному прикладі етапами задачі буде не час, як у попередніх викладках, а розподіл коштів між філіалами. Отже, маємо чотирьохетапну задачу динамічного програмування. Відповідно до введених раніше позначень вважатимемо, що $g_i(x)$ — приріст прибутку в i-му філіалі за умови капіталовкладень у нього обсягом x тис. ум. од. Умова задачі має вигляд (табл. 10.2):

Таблиця 10.2

Приріст прибутку в філіалах, тис. ум. од.			
$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
25	30	36	28
60	70	64	56
100	90	95	110
140	122	130	142

І етап

Найпростіший спосіб розподілу коштів, з якого починаємо розв’язування задачі, — це вкладення коштів лише у перший філіал. Якщо маємо в розпорядженні суму коштів $b_1 = 50$ тис. ум. од., то ефективність вкладення цієї суми відповідає прибутку, що його буде отримано від інвестування в перший філіал — 25 тис. ум. од. Ефективність першого етапу позначимо через $R_1(b)$:

$$R_1(b_1 = 50) = \max_{0 \le x_1 \le b_1} [g(x_1)] = \max_{\substack{x_1 = 0, \\ x_1 = 50}} [g(0), g(50)] = g(50) = 25 .$$

Аналогічно поступаємо у разі, коли в розпорядженні маємо суму $b_2 = 100$ тис. ум. од. Тоді з наявних коштів вкладати можна суму величиною x_2, що може набувати таких значень: $x_2 = 0$, або $x_2 = 50$, або $x_2 = 100$ тис. ум. од. Очевидно, що з трьох названих можливих варіантів найбільшу ефективність будемо мати, вклавши кошти в сумі 100 тис. ум. од. Отже, фіксуємо найбільшу ефективність на другому кроці першого етапу — $R_1(b_2 = 100) = 60$, потім на третьому кроці — $R_1(b_3 = 150) = 100$ тис. ум. од. і т. д.

Узагальнимо всі випадки першого етапу у вигляді «таблиці найбільших ефективностей», де відображено можливі прибутки за умови різних вкладень тільки в першу філію (табл. 9.3):

Таблиця 10.3

b	$R_1(b)$
50	25
100	60
150	100
200	140

II етап

На кожному етапі необхідно зіставити ефективності прийнятих рішень на попередньому та поточному етапах. Тобто, тепер розглянемо розподіл коштів одночасно між двома філіалами фірми, порівнюючи отриманий прибуток з ефективністю попереднього етапу. Скористаємося формулою для загального випадку:

$$R_k(b_0) = \max_{0<x_k<b_k} \{R_{k-1}(x_{k-1}) + g_k(b_0 - x_k)\}.$$

Для нашого прикладу величина $R_1(x_1)$ — ефективність, що дають вкладення на попередньому етапі (в даному прикладі — в перший філіал фірми), яка була розрахована на першому кроці, і позначалась через $R_1(b)$, а величина $g_2(b_0 - x_1)$ — прибуток, що дає другий філіал від залишку суми.

За введених у даному прикладі позначень формула набуває вигляду:

$$R_2(b) = \max_{0\le x\le b}[g_1(x) + g_2(b-x)] = \max_{0\le x\le b}[g_2(x) + R_1(b-x)].$$

Знову спочатку допускаємо, що розподіляється сума $b_1 = 50$. Тоді можливі два варіанти вкладення: $x_1 = 0$ (вкладаємо кошти лише в другий філіал) або $x_1 = 50$ (вкладаємо кошти лише в перший філіал), тоді:

$$R_2(b_1 = 50) = \max_{0\le x_1\le 50}[R_1(x_1) + g_2(b_1 - x_1)] = \max[g_2(0) + R_1(50); R_1(0) + g_2(50)]$$

$$R_2(b_1 = 50) = \max[0 + 25; 30 + 0] = 30 .$$

Для наочності подамо проміжні розрахунки у вигляді табл. 9.4:

Таблиця 10.4

x_1	$b_1 - x_1$	$R_1(x_1)$	$g_2(b_1 - x_1)$	$R_2(b_1)$
0	50	0	30	0 + 30 = 30
50	0	25	0	25 + 0 = 25

Стрілкою позначено найбільший з можливих прибутків за умови розподілу вкладення 50 тис. ум. од. одночасно в перший та другий філіали фірми.

У такий спосіб визначено наступний елемент «таблиці найбільших ефективностей» для випадку, коли $b_1 = 50$ (табл. 10.5):

Таблиця 9.5

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	
150	100	
200	140	

Потім розглядаються можливі варіанти розподілу коштів, якщо $b_2 = 100$, тоді вкладати лише в другий філіал можна суму $x_2 \le b_2$. x_2 може набувати таких значень: $x_2 = 0$, $x_2 = 50$, $x_2 = 100$ тис. ум. од. Маємо такі результати: (табл. 10.6):

Таблиця 10.6

x_2	$b_2 - x_2$	$R_1(x_2)$	$g_2(b_2 - x_2)$	$R_2(b_2)$
0	100	0	70	0 + 70 = 70
50	50	25	30	30 + 25 = 55
100	0	60	0	60 + 0 = 60

З табл. 9.6 висновуємо, що вкладаючи 100 тис ум. од., з усіх варіантів найбільший прибуток буде дорівнювати 70 тис. ум. од. Отже, таблиця найбільших ефективностей після цього кроку поповнюється наступним елементом (табл. 10.7):

Таблиця 10.7

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	70
150	100	
200	140	

Аналогічно проводимо обчислення для $b_3 = 150$ та $b_4 = 200$ тис. ум. од.

Нехай $b_3 = 150$ (розглядається чотири можливих варіанти розподілу, табл. 10.8):

Таблиця 10.8

x_3	$b_3 - x_3$	$R_1(x_3)$	$g_2(b_3 - x_3)$	$R_2(b_3)$
0	150	0	90	0 + 90 = 90
50	100	25	70	25 + 70 = 95
100	50	60	30	60 + 30 = 90
150	0	100	0	100 + 0 = 100 ←

Нехай $b_4 = 200$ (розглядається п’ять можливих варіантів розподілу, табл. 10.9):

Таблиця 10.9

x_4	$b_4 - x_4$	$R_1(x_4)$	$g_2(b_4 - x_4)$	$R_2(b_4)$
0	200	0	122	0 + 122 = 122
50	150	25	90	25 + 90 = 115
100	100	60	70	70 + 60 = 130
150	50	100	30	100 + 30 = 130
200	0	140	0	140 + 0 = 140 ←

Внесемо всі розрахунки другого етапу в таблицю максимальних ефективностей, табл. 10.10:

Таблиця 10.10

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	70
150	100	100
200	140	140

III етап

Знову необхідно зіставити ефективності попереднього та поточного етапів. Отже, використовуємо дані, що описують прибуток, який можна отримати від вкладення одразу в перший та другий філіал (стовпчик $R_2(b)$) та прибуток від вкладення одночасно в три філіали. Знову використаємо формулу:

$$R_3(b_0) = \max_{0 \le x_2 \le b_2} \left[R_2(x_2) + g_3(b_0 - x_2) \right]$$

Аналогічно попереднім випадкам спочатку беремо $b_1 = 50$, тоді $x_1 = 0$ або $x_1 = 50$ тис. ум. од., маємо (табл. 10.11):

Таблиця 10.11

x_1	$b_1 - x_1$	$R_2(x_1)$	$g_3(b_1 - x_1)$	$R_3(b_1)$
0	50	0	36	0 + 36 = 36
50	0	30	0	30 + 0 = 30

$R_3(b_1 = 50) = 36$.

Другий крок: $b_2 = 100$, тоді x_2 може набувати таких значень: $x_2 = 0$, $x_2 = 50$, $x_2 = 100$ тис. ум. од. В результаті маємо (табл. 10.12):

Таблиця 9.12

x_2	$b_2 - x_2$	$R_2(x_2)$	$g_3(b_2 - x_2)$	$R_3(b_2)$
0	100	0	64	0 + 64 = 64
50	50	30	36	36 + 30 = 66
100	0	70	0	70 + 0 = 70

$R_3(b_2 = 100) = 70$.

При $b_3 = 150$ величина x_3 може набувати чотирьох значень: $x_3 = 0$, $x_3 = 50$, $x_3 = 100$, $x_3 = 150$ тис. ум. од., які означають частини загальної суми вкладення коштів лише в третє підприємство, відповідні їм чотири випадки: $b_3 - x_3 = 150$, $b_3 - x_3 = 100$, $b_3 - x_3 = 50$, $b_3 - x_3 = 0$ — лишки коштів, що необхідно вкладати в перші два філіали. Маємо (табл. 10.13):

Таблиця 9.13

x_3	$b_3 - x_3$	$R_2(x_3)$	$g_3(b_3 - x_3)$	$R_3(b_3)$
0	150	0	95	0 + 95 = 95
50	100	30	64	30 + 64 = 94
100	50	70	36	70 + 36 = 106
150	0	100	0	100 + 0 = 100

Отже, $R_3(b_3) = 106$.

Обчислення для останнього (четвертого) кроку $(b_4 = 200)$ третього етапу наведені в табл. 10.14:

Таблиця 10.14

x_4	$b_4 - x_4$	$R_2(x_4)$	$g_3(b_4 - x_4)$	$R_3(b_4)$
0	200	0	130	0 + 130 = 130
50	150	30	95	30 + 95 = 125
100	100	70	64	70 + 64 = 134
150	50	100	36	100 + 36 = 136
200	0	140	0	140 + 0 = 140 $\leftarrow$

$R_3(b_4) = 140$. Запишемо значення $R_3(b)$ у вигляді наступного стовпчика таблиці найбільших ефективностей (табл. 10.15).

Таблиця 10.15

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$	$R_3(b)$
50	25	30	36
100	60	70	70
150	100	100	106
200	140	140	140

Аналогічно проводяться обчислення для $R_4(b)$, які наводяться без коментарів.

$b_1 = 50.$

Таблиця 10.16

x_1	$b_1 - x_1$	$R_3(x_1)$	$g_4(b_1 - x_1)$	$R_4(b_1)$
0	50	0	28	0 + 28 = 28 $\leftarrow$
50	0	36	0	36 + 0 = 36

$R_4(b_1) = 36$. $b_2 = 100.$

Таблиця 10.17

x_2	$b_2 - x_2$	$R_3(x_2)$	$g_4(b_2 - x_2)$	$R_4(b_2)$
0	100	0	56	56 + 0 = 56
50	50	36	28	36 + 28 = 64
100	0	70	0	70 + 0 = 70 $\leftarrow$

$R_4(b_2) = 70$.

$b_3 = 150.$

Таблиця 10.18

x_3	$b_3 - x_3$	$R_3(x_3)$	$g_4(b_3 - x_3)$	$R_4(b_3)$
0	150	0	110	110 + 0 = 110
50	100	36	56	36 + 56 = 92
100	50	70	28	70 + 28 = 98
150	0	106	0	106 + 0 = 106

$R_4(b_3) = 110$.

$b_4 = 200.$

Таблиця 10.19

x_4	$b_4 - x_4$	$R_3(x_4)$	$g_4(b_4 - x_4)$	$R_4(b_4)$
0	200	0	142	142 + 0 = 142
50	150	36	110	36 + 110 = 146
100	100	70	56	70 + 56 = 126
150	50	106	28	106 + 28 = 134
200	0	140	0	140 + 0 = 140

$R_4(b = 200 = b_4) = 146$.

Остаточно маємо табл. 10.20:

Таблиця 10.20

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$	$R_3(b)$	$R_4(b)$
50	25	30	36	36
100	60	70	70	70
150	100	100	106	110
200	140	140	134	146

З табл. 10.20 легко помітити, що найбільший прибуток, який дадуть всі чотири філіали за умови вкладення коштів у розмірі 200 тис. ум. од., становить 146 тис. ум. од. Повертаючись до останнього кроку розрахунків (табл. 10.19) бачимо, що число 146 відповідає змінній $x_4 = 150$, $b_4 - x_4 = 50 \Rightarrow 110 + 36 = R_2(150)$.

Звідси маємо, що 150 тис. ум. од. необхідно вкласти в четвертий філіал, а 50 тис. ум. од. розподілити між трьома іншими. Знову повертаємося до елементів табл. 9.20. Використання 50 тис. ум. од. на трьох перших філіалах дає загальний прибуток обсягом 36 тис. ум. од. (виділений елемент таблиці 10.20). Це значення було розраховано на III етапі, на першому кроці: $b = 50 = b_1$ у такий спосіб (табл. 10.21):

Таблиця 10.21

x_1	$b_1 - x_1$	$R_3(x_1)$	$g_4(b_1 - x_1)$	$R_4(b_1)$
0	50	0	36	0 + 36 = 36
50	0	30	0	30 + 0 = 30

Отже, маємо: $x_1 = 50$, а $g_3(50) = 36$. Це означає, що 50 тис. ум. од. виділяються третьому філіалу, $b_1 - x_1 = 0$, $R_2(0)$ — що в перші два філіали кошти взагалі не вкладаються.

Отже, оптимальним планом задачі є: $X^*(x_1^* = 0;\ x_2^* = 0;\ \ x_3^* = 50;\ \ x_4^* = 150$ *тис. ум. од.). У разі такого розподілу коштів між філіалами фірми максимальний прибуток становитиме 146 тис. ум. од.*

10.4. Принцип оптимальності

З викладених у попередніх параграфах міркувань можна висновувати, що для прийняття оптимального рішення на *k*-му кроці багатокрокового процесу потрібна оптимальність рішень на всіх його попередніх кроках, а сукупність усіх рішень дає оптимальний розв’язок задачі лише в тому разі, коли на кожному кроці приймається оптимальне рішення, що залежить від параметра етапу b_k, визначеного на попередньому кроці.

Цей факт є основою методу динамічного програмування і є сутністю так званого ***принципу оптимальності Р. Белмана***, який формулюється так:

Оптимальний розв’язок багатокрокової задачі $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ *має ту властивість, що яким би не був стан системи* b_i *в результаті деякої кількості кроків, необхідно вибирати управління* x_{i+1}^* *на найближчому кроці так, щоб воно разом з оптимальним управлінням на всіх наступних кроках приводило до максимального виграшу на всіх останніх кроках, включаючи даний.*

Доведемо справедливість такого твердження, міркуючи від супротивного. Нехай маємо задачу на максимізацію функції $Z = \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j)$ і вектор $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ є її оптимальним планом (стратегією, поведінкою) *n*-крокового процесу (*n*-вимірної задачі) з початковим параметром стану *b*.

Принцип оптимальності еквівалентний твердженню, що вектор $(x_2^*,...,x_n^*)$ повинен бути оптимальним планом $(n-1)$-крокового процесу $(n-1)$-вимірної задачі з початковим параметром стану b_{n-1}, що дорівнює $b-x_1^*$. Припустимо протилежне, тобто що вектор $(x_2^*,...,x_n^*)$ не є оптимальним планом відповідного процесу, а ним є якийсь інший план $(x_2',...,x_n')$. Тоді дістанемо:

$$\max_{x_2,...,x_n} \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j) = \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j') > \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*),$$

але

$$\max_{x_1,x_2,...,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j) = \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j^*) = \max_{x_1} z_1(x_1) + \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*) <$$

$$< \max_{x_1} z_1(x_1) + \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j') = \max_{x_1} \max_{x_2,...,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j) = \max_{x_1,...,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j),$$

що суперечливо. Отже, принцип оптимальності доведено.

10.5. Багатокроковий процес прийняття рішень

Будь-яку багатокрокову задачу можна розв'язувати по-різному: або знаходити одразу всі елементи розв'язку на всіх кроках, або будувати оптимальне управління поступово, крок за кроком (на кожному етапі розрахунків оптимізуючи лише один крок). Як правило, другий спосіб оптимізації є значно простішим, ніж перший, особливо при значній кількості кроків. Оптимізація одного кроку є простішою порівняно з оптимізацією всього процесу, тому краще багато разів розв'язувати простіші задачі, ніж один раз — складну.

Динамічний процес поділяється на сукупність послідовних етапів або кроків. На кожному етапі оптимізується тільки один крок, а рішення, під впливом якого система переходить з поточного стану в новий, вибирається з врахуванням його наслідків у майбутньому і не завжди дає найбільший ефект на даному етапі.

Плануючи багатокроковий процес, необхідно обирати управління на кожному кроці з урахуванням його майбутніх наслідків на тих кроках, які ще попереду. Лише на останньому кроці можна прийняти рішення, яке дасть максимальний ефект, оскільки наступного кроку для нього не існує. Тому оптимізація методом динамічного програмування починається з кінця, тобто спочатку планується останній крок. На базі відомої інформації про те, як закінчився попередній крок, для різних гіпотез щодо завершення передостаннього кроку вибирається управління на останньому. Таке управління називають умовно-оптимальним.

Для всіх кроків його знаходять із припущення, що попередній крок закінчився згідно з однією із можливих гіпотез.

Коли всі умовно-оптимальні управління на всіх кроках відомі, то це означає, що визначено, як необхідно керувати на кожному кроці, яким би не був процес на початку. В такому разі можна знайти не умовно-оптимальне, а оптимальне управління.

Дійсно, якщо відомо початковий стан S_0, то можна вибрати для нього оптимальне управління x_1^*, що приведе до стану S_1, для якого також відоме оптимальне управління x_2^* і т. д.

Отже, в процесі оптимізації управління методом динамічного програмування багатокроковий процес виконується двічі. Перший раз — від кінця до початку, в результаті чого знаходять умовно-оптимальні управління і умовно-оптимальні виграші для всіх кроків. Другий раз — від початку до кінця, в результаті чого знаходять вже оптимальні покрокові управління, тобто оптимальне управління процесом у цілому.

Перший етап — знаходження умовно-оптимальних управлінь є дуже складним та довгим у порівнянні з другим. На другому етапі залишається лише «прочитати» рекомендації, що отримані на першому. Зауважимо, що «кінець» та «початок» можна поміняти місцями і здійснювати процес оптимізації також і в іншому напрямку (приклад 10.1).

Враховуючи вищезазначене, опишемо алгоритм розв’язування задач динамічного програмування, який складається з послідовності таких операцій:

1. Визначають специфічні показники стану досліджуваної керованої системи і множину параметрів, що описують цей стан. Стан системи описується у такий спосіб, щоб можна було забезпечити зв’язок між послідовними етапами розв’язання задачі і мати змогу одержати допустиме рішення задачі в цілому як результат оптимізації на кожному кроці окремо, а крім того, приймати оптимальні рішення на наступних етапах без урахування впливу майбутніх рішень на ті, що були прийняті раніше.

2. Поділяють процес на етапи (кроки), які, як правило, відповідають певним періодам планування динамічних процесів, або окремим об’єктам (підприємствам, видам продукції, устаткуванню тощо) у разі підготовки рішень стосовно керування ними.

3. Формулюють перелік управлінь x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ для кожного кроку і відповідні обмеження щодо них.

4. Визначають ефект, який забезпечує управління x_j на *j*–му кроці, якщо перед тим система була у стані *S*, у вигляді функції ефективності:

$$\max Z(S, x_j)\ .$$

5. Визначають, як змінюється стан *S* системи під впливом управління x_j на *j*-му кроці, тобто як здійснюється перехід до нового стану:

$$S' = \varphi_j(S, x_j)\ .$$

6. Будують рекурентну залежність задачі динамічного програмування, що визначає умовний оптимальний ефект $Z_j(S)$, починаючи з *j*–го кроку і до останнього, через вже відому функцію $Z_{j+1}(S')$:

$$Z_j(S) = \max_{x_j}\{Z_j(S)\} = \max_{x_j}\{f_j(S, x_j) + Z_{j+1}(S', x_j)\}.$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на *j*-му кроці $(x_j(S))$. Зауважимо, що у функції $Z_{j+1}(S)$ необхідно замість S врахувати змінений стан системи, тобто $S' = \varphi_j(S, x_j)$.

7. Використовують умовну оптимізацію останнього *n*-го кроку, визначаючи множину станів *S*, з яких можна за один крок дійти до кінцевого стану. Умовно-оптимальний ефект на *n*-му кроці обчислюють за формулою:

$$Z_n(S) = \max_{x_n}\{f_n(S, x_n)\}.$$

Потім знаходять умовно-оптимальне управління $x_n(S)$, в результаті реалізації якого цей максимум буде досягнуто.

8. Проводять умовну оптимізацію $(n-1)$-го, $(n-2)$-го та інших кроків за рекурентними залежностями (див. п. 6) і визначають для кожного кроку умовно-оптимальне управління:

$$x_n^*(S_{n-1}).$$

9. Проводять безумовну оптимізацію управління у «зворотному» напрямку від початкового стану S_0 до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на першому кроці x_1^* змінюють стан системи згідно з пунктом 5. Потім для цього нового стану знаходять оптимальне управління на другому кроці x_2^* і аналогічно ці дії повторюють до останнього етапу (кроку).

В результаті знаходять оптимальне покрокове управління $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, що забезпечує максимальну ефективність Z^*.

Приклад 10.2. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на чотирьох підприємствах, маючи для цього 4 млн грн. Для кожного підприємства розроблено інвестиційні проекти, які відображають прогнозовані загальні витрати *C* (обсяги капіталовкладень) та доходи *D*, пов’язані з реалізацією кожного проекту. Ці показники наведені в табл. 10.22:

Таблиця 10.22

Проект	Підприємство							
	1		2		3		4	
	C_1	D_1	C_2	D_2	C_3	D_3	C_4	D_4
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	1	4	2	4	1	2
3	2	5	2	6	3	9	2	8
4	3	7	3	8	4	12	3	5

Перший проект не передбачає розширення виробництва, а тому має нульові витрати і доходи. Необхідно розробити план інвестування виділених коштів у зазначені підприємства так, щоб одержати максимальний прибуток.

Розв'язання. Як вже наголошувалось, спрощеним, але і найменш ефективним способом розв'язування подібних задач є перебір усіх можливих варіантів. Проте на практиці їх так багато, що проаналізувати їх всі і вибрати серед них найефективніший неможливо. Головними недоліками такого способу розв'язування є великий обсяг обчислень, відсутність апріорної інформації про недопустимі розв'язки, а також неможливість скористатися проміжними результатами аналізу для відкидання неоптимальних комбінацій проектів.

Розв'яжемо цю задачу, починаючи пошук умовно-оптимального управління з останнього кроку. Кроками задачі вважатимемо кожне з чотирьох підприємств, оскільки для кожного з них маємо вибрати оптимальний інвестиційний проект за обмежених грошових ресурсів.

Зауважимо, що в цьому разі нединамічний процес розглядаємо як динамічний, аби скористатися методами динамічного програмування для знаходження оптимального розв'язку. Зв'язок між зазначеними кроками забезпечується обмеженням на загальний обсяг виділених коштів — 4 млн грн.

Змінні задачі візьмемо так, щоб можна було послідовно керувати процесом розподілу коштів:

x_1 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 1—4;

x_2 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 2—4;

x_3 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 3 і 4;

x_4 — обсяг капіталовкладень, виділених на 4 кроці.

k_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ — обсяг інвестицій в i-те підприємство $\left(k_i = 0,1,2,3,4\right)$.

k_i^* $\left(i=\overline{1,n}\right)$ — оптимальний обсяг інвестицій в i-те підприємство.

Рекурентне співвідношення, що описує зв'язок між ефективностями управління від 4-го до 1-го кроку (від четвертого до першого підприємства) подається у вигляді:

$$f_i^*(x_5)=0\,,$$
$$f_i^*(x_i;k_i)=\max_{k_i}\left\{D_i(k_i)+f_{i+1}^*(x_i-C_i(k_i))\right\}\ \left(i=\overline{1,4}\right),\ C_i(k_i)\le x_i\,,$$

де $f_i^*(x_i;k_i)$ — сумарна ефективність інвестицій з i-го кроку до останнього.

Тут $f^*(x_5)=0$, оскільки п'ятого підприємства не існує.

Виконаємо поетапні розрахунки за цією моделлю.

Етап IV.

$$f_4^*(x_4;k_4)=\max_{k_4}\left\{D_4(k_4)+f_5^*(x_4-C_4(k_4))\right\}.$$

Результати розрахунків подамо таблицею:

Таблиця 10.23

x_4	Дохід $f_4(x_4;k_4)=D_4(k_4)+f_5^*(x_5)$					Оптимальний розв'язок	
	$k_4=0$	$k_4=1$	$k_4=2$	$k_4=3$	$k_4=4$	$f_4^*(x_4)$	k_4^*
0	0	0				0	0
1	0	2				2	1
2	0	2	8			8	2
3	0	2	8	5		8	2
4	0	2	8	5		8	2

$$f_3^*(x_3;k_3)=\max_{k_3}\left\{D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3))\right\}$$

за умов

$$C_3(k_3)\le x_3\,,\ k_3=0,1,2,3,4.$$

Результати розрахунків наведені в табл. 10.24:

Таблиця 10.24

x_3	Дохід $f_3(x_3;k_3)=D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3))$				Оптимальний розв'язок	
	$k_3=1$	$k_3=2$	$k_3=3$	$k_3=4$	$f_3^*(x_3)$	k_3^*
0	$0+f_4^*(0-0)=$ $=0+0=0$				0	0
1	$0+f_4^*(1-0)=$ $=0+2=2$				2	0
2	$0+f_4^*(2-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(2-2)=$ $=4+0=4$			8	0
3	$0+f_4^*(3-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(3-2)=$ $=4+2=6$	$9+f_4^*(3-3)=$ $=9+0=9$		9	3
4	$0+f_4^*(4-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(4-2)=$ $=4+8=12$	$9+f_4^*(4-3)=$ $=9+2=11$	$12+f_4^*(4-4)=$ $=12+0=12$	12	2 або 4

Розрахунки виконують так. Нехай потрібно знайти $f_3^*(x_3=3)$. Обчислюємо за формулою:

$$f_3(x_3;k_3)=D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3)).$$

Отже,

$$f_3(x_3=3;k_3=1)=0+f_4^*(3-0)=0+f_4^*(3)=0+8=8,$$

$$f_3(x_3=3;k_3=2)=4+f_4^*(3-2)=4+2=6,$$

$$f_3(x_3=3;k_3=3)=9+f_4^*(3-3)=9+0=9.$$

Зауважимо, що $C_3(k_3=1)=0$, оскільки для третього підприємства не існує проекту з інвестиціями в 1 млн грн. Значення $f_4^*(x_3-C_3(k_3))$ беремо з попередньої таблиці. Потім маємо:

$$f_3^*(x_3;k_3)=\max_{k_3=1,2,3}\{D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3))\}=\max\{8,6,9\}=9.$$

Етап 2

$$f_2^*(x_2;k_2)=\max_{k_2}\{D_2(k_2)+f_3^*(x_2-C_2(k_2))\}$$

за умов:

$$C_2(k_2) \le x_2, \; k_2 = 0, 1, 2, 3, 4 .$$

Результати розрахунків подані в табл. 10.25:

Таблиця 10.25

x_2	Дохід $f_2(x_2;k_2) = D_2(k_2) + f_3^*(x_2 - C_2(k_2))$					Оптимальне рішення	
	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$	$f_2^*(x_2)$	k_2^*
0	0					0	0
1	4	4				4	1
2	8	6	6			8	0
3	9	12	8	8		12	1
4	12	13	14	10		14	2

Етап 1.

$$f_1^*(x_1;k_1) = \max_{k_1}\{D_1(k_1) + f_2^*(x_1 - C_1(k_1))\}$$

за умов: $C_1(k_1) \le x_1, \; k_1 = 0, 1, 2, 3, 4 .$

Виконуємо розрахунки лише для $x_1 = 4$, подаючи їх у табл. 10.26:

Таблиця 10.26

x_1	Дохід $f_1(x_1;k_1) = D_1(k_1) + f_2^*(x_1 - C_1(k_1))$				Оптимальний розв'язок	
	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$k_1 = 4$	$f_1^*(x_1)$	k_1^*
4	$3 + f_2^*(4-1) =$ $= 3 + 12 = 15$	$5 + f_2^*(4-2) =$ $= 5 + 6 = 11$	$7 + f_2^*(4-3) =$ $= 7 + 4 = 11$		15	1

Знайдемо оптимальний план. Із таблиці першого кроку випливає, що $k_1^* = 1$, тобто для першого підприємства реалізується другий проект, яким передбачено 1 млн грн інвестицій з доходом, що дорівнює 3 млн грн. Отже, для другого, третього і четвертого підприємств залишається 4 – 1 = 3 млн грн інвестицій. Із таблиці другого кроку маємо, що за умов $x_2 = 3$ максимальний ефект можна отримати в разі реалізації для другого підприємства першого проекту ($k_2 = 1$). Дохід у такому разі становитиме 4 млн грн. Отже, $x_3 = 3 - 1 = 2$, тобто для третього і четвертого підприємств слід використати 2 млн грн інвестицій. Із таблиці третього кроку за умов $x_3 = 2$ маємо, що $k_3 = 0$. Отже, $x_4 = 2$, а йому відповідають капітальні вкладення $k_4 = 2$, які забезпечують дохід обсягом 8 млн грн. Остаточно маємо: дохід від 4 млн грн інвестицій становить 3 + 4 + 8 = 15 (млн грн).

11. СТОХАСТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Головною умовою побудови та використання детермінованих моделей є припущення про те, що всі початкові параметри задачі мають бути чітко визначеними. З погляду економіки така умова означає, що на етапі постановки задачі абсолютно точною є інформація стосовно всіх параметрів моделі. Однак загальновідомо, що економічні системи функціонують і розвиваються за умов невизначеності, тобто досить важко, а іноді і неможливо, мати точні значення деяких параметрів математичної моделі, особливо коли прогнозується розвиток процесів у майбутньому. Фактичні значення можуть суттєво відрізнятися від тих, які були взяті за основу при побудові математичних моделей та визначенні оптимальних планів, що породжує ризик прийнятих рішень. Невизначеність може бути різного ступеня залежно від того, яку інформацію ми маємо про досліджуваний процес чи явище. Якщо відомий розподіл відповідних параметрів, то для прийняття рішень використовують методи стохастичного програмування, суть яких полягає в тому, що відшукуючи оптимальне рішення $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, тобто значення керованих змінних, необхідно враховувати також вплив ряду випадкових чинників $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$, керувати якими немає можливості. Наприклад, у разі планування діяльності сільськогосподарських підприємств є можливість точно передбачати площі посівів сільськогосподарських культур, рівні внесення добрив, поголів'я тварин (керовані змінні), але кінцевий результат діяльності у значній мірі залежить також від погодних умов, податкової та кредитної політики тощо (некеровані змінні).

Умовні екстремальні задачі, в яких параметри умов або складові розв'язку — випадкові величини, є предметом стохастичного програмування.

У стохастичному програмуванні частіше, ніж в інших розділах математичного програмування, значні труднощі виникають не лише за розроблення методів розв'язування задач, а також у разі їх постановки. Адже у постановці кожної задачі мають відображатися особливості прийняття рішень за умов невизначеності. Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить від її цільових засад та інформаційної структури.

11.1. Загальна математична постановка задачі стохастичного програмування

Типову задачу математичного програмування в детермінованій постановці формулюють так: визначити вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, для компонент якого:

$$\max(\min) F = f(X),$$

$$q_i(X) \le 0 \ (i = \overline{1, m}),$$

$$X \ge 0.$$

Якщо функції в даній задачі крім керованих параметрів *X* залежать ще і від деяких випадкових величин $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$, то маємо ***задачу стохастичного програмування***:

$$\max(\min) F = f(X, \omega),$$

$$q_i(X, \omega) \le 0 \; (i = \overline{1, m}),$$

$$X \ge 0, \; \omega \in \Omega,$$

де Ω — простір подій ω.

Залежно від можливості отримати та врахувати інформацію стосовно детермінованості (стохастичності) функцій $f(X, \omega)$, $q_i(X, \omega)$ постановки задач стохастичного програмування можуть містити:

I) стохастичні коефіцієнти цільової функції та детерміновані обмеження;

II) детерміновані коефіцієнти цільової функції та стохастичні вільні члени і коефіцієнти системи обмежень;

III) стохастичні коефіцієнти цільової функції, вільні члени і коефіцієнти системи обмежень.

Конкретні постановки задач стохастичного програмування мають свою специфіку. Передусім необхідно визначити:

1. Детермінованим чи випадковим є вектор *X*. Якщо вектор *X* є детермінованим, то він не залежить від випадкових параметрів моделі. Якщо ж він випадковий, то тоді *X* є функцією від ω — $X(\omega)$, тобто залежить від випадкових змінних.

2. Як розуміти максимізацію (мінімізацію) цільової функції — як абсолютну (для всіх значень $\omega \in \Omega$) чи як максимізацію її математичного сподівання або деякої іншої ймовірнісної характеристики цієї функції (моди, медіани), або як мінімізацію середнього квадратичного відхилення? Наприклад, що краще мати: платню 500 ± 200 чи 450 ± 50? У першому разі платня може змінюватися в межах від 300 до 700 гривень, а у другому — лише від 400 до 500.

3. Як виконуються обмеження: абсолютно для всіх $\omega \in \Omega$ чи в середньому, або з допустимими порушеннями, ймовірність яких мала?

При постановці задач стохастичного програмування необхідно виходити не лише з математичних міркувань, а й з економічного змісту та з врахуванням евристичних міркувань. Наприклад, детермінованість чи стохастичність вектора *X* зумовлюється сутністю економічних, технологічних процесів тощо. Для сільськогосподарського підприємства, наприклад, вектор, що визначатиме площі посіву сільськогосподарських культур, обов'язково має бути детермінованим. Якщо ж шуканий вектор для того самого підприємства за тих самих умов визначатиме, приміром, обсяги кредитів, то його компоненти мають бути стохастичними величинами, бо достеменно невідомо, чи вони будуть отримані.

Методи розв'язування стохастичних задач поділяють на дві групи — прямі та непрямі.

Прямі методи використовують для розв'язування задач стохастичного програмування, коли існують способи побудови функцій $f(X,\omega)$ і $g_i(X,\omega)\le 0, i=\overline{1,m}$ на базі інформації щодо параметра ω. Непрямими є методи зведення стохастичної задачі до задачі лінійного чи нелінійного програмування, тобто перехід до детермінованого аналога задачі стохастичного програмування.

11.2. Особливості математичної постановки задач стохастичного програмування

В задачах детермінованого характеру за певним набором початкових даних однозначно визначається вигляд цільової функції та обмежень задачі. У стохастичному програмуванні особливості побудови математичних моделей задач пов'язані з можливостями вибору виду функції мети та обмежень, тобто за одного набору початкових значень можна отримати математичні моделі, що суттєво відрізнятимуться, а отже, значні розбіжності матимуть і отримані за ними оптимальні плани. Розглянемо основні відмінності будови математичних моделей задач стохастичного програмування.

Довільна математична модель задачі математичного програмування складається з двох частин: цільової функції і обмежень. У задачах стохастичного програмування важливим є вибір як виду цільової функції так і виду обмежень. Цільова функція визначає ефективність функціонування і розвитку економічної системи. Якщо відомі основні характеристики випадкових параметрів задачі, то цільовою функцією може бути:

- максимізація математичного сподівання відповідного економічного показника (прибутку, рівня рентабельності тощо); в такому разі задачі мають назву *М*-моделей;
- мінімізація дисперсії деякого економічного показника за умови обмеження на певному бажаному рівні середньої величини того ж показника, тоді задачі мають назву *V*-моделей;
- ймовірність перевищення (неперевищення) економічним показником певного фіксованого рівня (порога), тоді задача належить до Р-моделей.

Обмеження в стохастичних економіко-математичних моделях можуть також задаватися різними способами, а значить, отримані оптимальні плани будуть мати відповідний рівень ймовірності їх виконання. При цьому потрібно брати до уваги як внутрішню невизначеність (технологічних процесів), так і невизначеність зовнішнього середовища (постачання сировини, попиту на вироблену продукцію, загальної суми податків тощо).

Нехай задано обмеження задачі математичного програмування в загальному вигляді:

$$g(X,\omega)\le 0\,. \tag{11.1}$$

Неможливість, а іноді й недоцільність вимоги, щоб знайдене рішення задовольняло обмеження (10.1) за будь-яких реалізацій випадкових параметрів $\omega \in \Omega$, породжує таку ідею: накласти дещо менш жорсткі умови, зокрема замість (11.1) можна допускати невиконання умов з певною ймовірністю. Наприклад:

$$P\{g(X,\omega) > 0\} \le \gamma, \tag{11.2}$$

або

$$P\{g(X,\omega) \le 0\} \ge 1-\gamma. \tag{11.3}$$

Обмеження (11.2) трактується так: ймовірність того, що $g(X,\omega) > 0$, не перевищує величину γ. Відповідно вираз (11.3) гарантує, що з ймовірністю $1-\gamma$ буде виконуватися обмеження (11.1). Наприклад, якщо $\gamma = 0{,}05$, то обмеження у 95 випадках із 100 буде виконуватися і тільки у п'яти випадках не буде виконуватися.

Крім того, система обмежень задачі може бути змішаною, тобто частина обмежень може виконуватися в середньому, частина — в жорсткій постановці, а частина — з деякою ймовірністю.

Наведемо кілька варіантів постановок задач стохастичного програмування.

Нехай $f(X,\omega)$ — функція, яка виражає ефективність плану для заданих X та ω. Тоді задачу визначення оптимального детермінованого плану X за випадкових параметрів ω можна сформулювати у таких варіантах:

а) $\max Mf(X,\omega)$, (11.4)

за умов:

$P\{g(X,\omega) \le 0\} \ge 1-\gamma$; (11.5)

$X \ge 0$, $\omega \in \Omega$; (11.6)

б) $\max \xi$ (11.7)

за умов:

$P\{f(X,\omega) \ge \xi,\ g(X,\omega) \le 0\} \ge 1-\gamma$; (11.8)

$X \ge 0$, $\omega \in \Omega$. (11.9)

Отже, за постановки задачі варіанту а) необхідно максимізувати середню сподівану ефективність за умов, що обмеження, наприклад, щодо ресурсів, виконання контрактів тощо виконуються з імовірністю $1-\gamma$. За постановки задачі варіанту б) крім цього вимагається, щоб значення функції ефективності, наприклад, прибутку було не менше величини ξ з імовірністю $1-\gamma$, а також, щоб величина ξ була максимальною. Зазначимо, що перевага варіанту а) полягає у тому, що він простіший стосовно обчислення.

Оскільки у моделі (11.4)—(11.6) як критерій оптимальності використано математичне сподівання $f(X,\omega)$, то маємо *М*-модель, а плани, отримані за такою моделлю, називають *М*-планами.

Зрозуміло, що можна формулювати задачі стохастичного програмування також і по-іншому, поєднуючи або комбінуючи у певний спосіб умови наведених вище першої та другої моделей. Так, приміром, задача стохастичного програмування може мати такий вигляд:

$$P\{f(X,\omega) \geq \alpha\} \rightarrow \max ,$$

за умов:

$$M(g_i(X,\omega)) \leq 0 \quad (i=\overline{1,k};\ k<m) ;$$

$$g_i(X,\omega) \leq 0 \ (i=\overline{k+1,m}) ;$$

$$X \geq 0 \quad \omega \in \Omega .$$

Отже, очевидно, що конкретних постановок задач стохастичного програмування досить багато і вибір певного їх виду для розв'язування практичних задач залежить від конкретних умов задачі, наявної інформації та мети дослідження.

Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить також від того, чи є можливість під час вибору (прийняття) рішень уточнювати стан економічного середовища (природи) на підставі певних спостережень.

Відомо, що для економічних систем розробляють стратегічні та тактичні плани. Розробляючи стратегічні плани, враховують всі можливі значення ω, тобто стан зовнішнього та внутрішнього середовища, та приймають рішення щодо траєкторії розвитку системи. Однак зустрічаються задачі, коли є можливість провести спостереження над ω (у певний момент стан економічного середовища стає відомим) і вибрати розв'язок з урахуванням результатів спостережень. Наприклад, плануючи виробничу діяльність підприємства, рішення щодо обсягів випуску продукції приймаються з урахуванням дослідження поточного стану структури ринку. Тоді розробляють тактичний план, тобто знаходять рішення $X(\omega)$ при заданому $\omega \in \Omega$, тобто розв'язують задачу:

$$\max f(X(\omega)) ,$$

за умов:

$$g_i(X(\omega)) \leq 0; \quad i=\overline{1,m} ,$$

$$X(\omega) \geq 0 .$$

У загальному випадку спостереження уможливлюють неповне описування стану середовища, а тому етапи вибору рішень можуть чергуватися з етапами спостережень за станом зовнішнього середовища. Отже, відбуваються багатоетапні процеси вибору рішень у такій послідовності:

рішення — спостереження — рішення — спостереження...

або

спостереження — рішення — спостереження — рішення...

Якщо ряд розв'язків починається зі слова «рішення» і воно зустрічається N раз, то модель називають N-етапною задачею (моделлю) стратегічного стохастичного програмування, а якщо зі слова «спостереження» — то задачею (моделлю) тактичного стохастичного програмування.

Кожен з N етапів у свою чергу також може бути поділений. У такому разі маємо одноетапні чи двохетапні задачі стохастичного програмування.

Одноетапна задача стохастичного програмування використовується в тому разі, коли рішення приймаються на підставі відомих характеристик розподілу ймовірностей випадкових параметрів умови задачі до спостережень за їхніми реалізаціями. У такому разі має прийматися найкраще в середньостатистичному розумінні рішення. Тобто випадкові параметри задачі замінюють їх середніми величинами і початкову задачу стохастичного програмування зводять до детермінованої.

Двохетапна задача стохастичного програмування виникає тоді, коли процес прийняття рішення поділяють на два етапи.

На першому етапі вибирається попередній план, який задовольняє умови задачі за будь-якої реалізації випадкових параметрів. На другому етапі розраховується величина компенсації відхилень розробленого плану від фактичних значень, що були визначені після спостереження за реалізацією випадкових параметрів. Оптимальний план задачі визначають так, щоб забезпечити мінімум середнього значення загальних витрат, які виникають на обох етапах розв'язування задачі. Для існування розв'язку двохетапної задачі вибір плану на першому етапі має гарантувати існування плану-компенсації.

Приклад 11.1. Побудуємо математичну модель відомої задачі про визначення оптимального виробничого плану в термінах стохастичного програмування. Необхідно розрахувати оптимальний план виробництва трьох видів продукції $X = (x_1, x_2, x_3)$, за якого максимізується загальний прибуток підприємства. Для спрощення розглянемо використання лише двох видів ресурсів, обсяги яких відомі: $b_1 = 550$ од., $b_2 = 205$ од. Прибуток від реалізації одиниці j-го виду продукції c_{kj} $(k, j = \overline{1,3})$ є випадковим, але відомі ймовірності одержання k-ої величини прибутку від реалізації одиниці j-го виду продукції p_{kj} $(k, j = \overline{1,3})$. Норми витрат i-го виду ресурсу на одиницю j-го виду продукції a_{ij} $(i = \overline{1,2};\ j = \overline{1,3})$ детерміновані. Початкові дані наведені в таблицях 11.1—11.4.

Таблиця 11.1

Прибуток від одиниці першого виду продукції, ум. од. (c_{k_1})	Ймовірність (p_{k_1})
10	0,3
13	0,4
15	0,3

Таблиця 11.2

Прибуток від одиниці другого виду продукції, ум. од. (c_{k_2})	Ймовірність (p_{k_2})
12	0,2
15	0,5
13	0,3

Таблиця 11.3

Прибуток від одиниці третього виду продукції, ум. од. (c_{k_3})	Ймовірність (p_{k_3})
12	0,3
11	0,5
14	0,2

Таблиця 11.4

Вид продукції	Норма витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції, ум. од.	
	першого виду	другого виду
Перший	5	1
Другий	4	2
Третій	3	1,5

Розв'язання.

Як зазначалось, математична постановка задачі стохастичного програмування може бути подана в різних варіантах залежно від вигляду цільової функції. Розглянемо кілька можливих варіантів постановок для умов даної задачі.

І варіант.

Цільова функція залежить від випадкової величини, отже, математична модель даної задачі має вигляд:

$$\max F = C(\omega)X \ ,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}) \ .$$

Маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з випадковими параметрами цільової функції. Очевидно, що величина F є також випадковою величиною з законом розподілу ймовірностей $N(\overline{F}, \sigma_F^2)$, де $\overline{F}$ — математичне сподівання, а σ_F^2 — дисперсія.

Щоб розв'язати таку задачу, необхідно знайти математичне сподівання $\overline{F}$.

Позначимо символами $M(c_j)$, $j = \overline{1,3}$ — математичне сподівання прибутку від j-го виду продукції, тоді математична модель набуває вигляду:

$$\max \overline{F} = M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 = M(C^T(\omega)X) \ ,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

У наведеній постановці маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з *M*-моделлю, оскільки цільова функція є математичним сподіванням випадкової величини (прибутку).

Оскільки випадкова величина прибутку є дискретною і відомі значення відповідних ймовірностей p_{kj} $(k = \overline{1,3}; j = \overline{1,3})$, то можна безпосередньо обчислити значення $M(c_j)$ $\left(j = \overline{1,3}\right)$. Отже, в числовому вигляді маємо:

$$M(c_1) = \sum_{k=1}^{3} c_{k1}p_{k1} = c_{11}p_{11} + c_{21}p_{21} + c_{31}p_{31} = 10 \cdot 0{,}3 + 13 \cdot 0{,}4 + 15 \cdot 0{,}3 = 12{,}7;$$

$$M(c_2) = \sum_{k=1}^{3} c_{k2}p_{k2} = c_{12}p_{12} + c_{22}p_{22} + c_{32}p_{32} = 12 \cdot 0{,}2 + 15 \cdot 0{,}5 + 13 \cdot 0{,}3 = 13{,}8;$$

$$M(c_3) = \sum_{k=1}^{3} c_{k3}p_{k3} = c_{13}p_{13} + c_{23}p_{23} + c_{33}p_{33} = 12 \cdot 0{,}3 + 11 \cdot 0{,}5 + 14 \cdot 0{,}2 = 11{,}9 .$$

Математична модель задачі набуває такого вигляду:

$$\max F = 12{,}7x_1 + 13{,}8x_2 + 11{,}9x_3 ,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 205; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

Початкова задача зведена до задачі лінійного програмування, яку можна розв’язати симплексним методом, але оптимальний план детермінованої задачі є наближеним розв’язком початкової стохастичної.

Оптимальним планом є $X_1^* = (x_1^* \approx 46{,}67;\ x_2^* = 0;\ x_3^* \approx 105{,}56)$, причому прибуток становить $F_{\max} \approx 1848{,}78$.

II варіант.

Отриманий розв’язок може бути основою плану виробництва продукції за даних умов. Однак очевидно, що, оскільки значення випадкових величин були замінені їх математичним сподіванням, то розв’язок задачі знайдено як деяке усереднення всіх можливих за даних умов розв’язків. Для деякого набору фіксованих умов розрахований план може виявитись неоптимальним, тобто справжнє значення прибутку буде значно відрізнятися від очікуваного рівня. Якщо, наприклад, зовнішні умови складаються найнесприятливіше (мінімальні рівні прибутків для кожного з видів продукції), то значення цільової функції для відшуканого оптимального плану буде дорівнювати:

$$F(c_{j\min}) = 10 \cdot 46{,}67 + 11 \cdot 105{,}56 = 1627{,}86 .$$

Очевидно, що відхилення даного значення від середнього очікуваного рівня (1848,78 – 1627,86 = 220,92) показує можливе завищення прибутку у плані. Відомо, що однією з головних характеристик відхилення значень випадкової величини від її середнього є дисперсія. Розрахуємо значення дисперсії для отриманого оптимального плану:

$$D_F = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 =$$
$$= 3{,}81 \cdot (46{,}67)^2 + 1{,}56 \cdot 0 + 1{,}29 \cdot (105{,}56)^2 = 22672{,}88 .$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_F = \sqrt{D_F} = \sqrt{22672{,}88} = \ = 150{,}58$.

Якщо допустити, що випадкова величина має нормальний закон розподілу, то, враховуючи властивості середнього квадратичного відхилення (правило трьох «сігм»), визначимо межі, в яких змінюватиметься прибуток: $\overline{F} \pm 3\sigma_F = 1848{,}78 \pm 451{,}74 = [1397{,}04; 2300{,}52]$. Якщо розраховані зміни прибутку не можуть влаштовувати особу, що приймає рішення, то доцільно ввести обмеження, яке зменшить ризик втрати доходу.

За необхідності зменшення можливих втрат прибутку в систему обмежень вводять умову, що дисперсія прибутку має не перевищувати деякої заданої величини. Розв’яжемо задачу з додатковою умовою, що дисперсія має не перевищувати 5000.

$$\max F = 12{,}7x_1 + 13{,}8x_2 + 11{,}9x_3 ,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 205; \\ 3{,}81x_1^2 + 1{,}56x_2^2 + 1{,}29x_3^2 \le 5000; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1{,}3}) .$$

Ця задача є нелінійною. Розв’язавши її, маємо такий оптимальний план:

$X_2^* = (x_1^* = 14{,}23; x_2^* = 37{,}78; x_3^* = 39{,}39)$, причому прибуток $F = 1170$ буде змінюватися приблизно на 210 ум. од. (оскільки $\sigma_F = \sqrt{D_F} \approx 70{,}7$).

ІІІ варіант.

Застосування інструментарію математичного програмування до розв’язання економічних задач уможливлює врахування найвибагливіших побажань стосовно набору властивостей розроблюваних планів. Допустимо, що необхідно, орієнтуючись на деякий середній рівень прибутку, досягти мінімального рівня можливих його змін. У такому разі доречно використати *V*-модель задачі стохастичного програмування:

$$\min Z = D_F = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 ,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2; \\ M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 \ge W; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}),$$

де W — бажаний рівень сподіваного прибутку.

Зафіксуємо бажаний прибуток на рівні не нижче, ніж 1500 ум. од., і знайдемо оптимальний план такої задачі:

$$\min Z = D_F = 3{,}81x_1^2 + 1{,}56x_2^2 + 1{,}29x_3^2,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 205; \\ 12{,}7x_1 + 13{,}8x_2 + 11{,}9x_3 \ge 1500; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

Розв'язавши цю задачу квадратичного програмування, маємо:

$X_3^* = (x_1^* \approx 18{,}24;\ x_2^* \approx 48{,}4;\ x_3^* \approx 50{,}47)$, мінімальна дисперсія сподіваного прибутку буде дорівнювати $Z = \min D_F = 8206{,}125$, тобто зміни прибутку відбуватимуться в межах ± 270 ум. од.

Вибір одного з наведених варіантів математичних моделей залежатиме від конкретної ситуації, поставлених цілей та вимог, однак наведений приклад показує, що використання стохастичних задач дає математично обґрунтовану інформацію, яка може бути основою прийняття рішень за складних реальних умов.

11.3. Приклади економічних задач стохастичного програмування

Приклад 11.2. Нехай потрібно зробити запас з n товарів у обсягах $X = (x_1, x_{2,\dots,x_n})$, на які є випадковий попит $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$. За нестачі одиниці j-го товару застосовується штрафна санкція у розмірі c_j, тобто $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, а затрати на зберігання одиниці відповідної продукції, яку не вдалося збути, задаються вектором $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Розв'язання. Функція збитків, що відповідає розв'язку X, має вигляд:

$$f(X, \omega) = \sum_{j=1}^{n} \{c_j \max(0, \omega_j - x_j) + d_j \max(0, x_j - \omega_j)\},$$

де $c_j \max(0, \omega_j, -x_j)$ — штраф за незадоволення попиту по j-му виду продукції; $d_j \max(0, x_j - \omega_j)$ — витрати на зберігання j-ої продукції. Для знаходження оптимального розв'язку цієї задачі необхідно мати функцію розподілу ймовірностей випадкової величини ω. Якщо така функція розподілу невідома, тобто її неможливо відшукати, то допускають, що випадкова величина розподілена рівномірно. В такому разі необхідно пам'ятати, що саме таке припущення може призвести до прийняття неправильного рішення.

Приклад 11.3. Індивіди можуть тримати своє багатство у вигляді грошей та облігацій. Оскільки гроші — це актив, що використовується як засіб обігу, то вони не приносять прибутку у вигляді процентів. Облігації — це цінні папери, що дають їх власникові певний дохід. Логічно допустити, що індивідууми мають зберігати своє багатство у вигляді облігацій. Однак це не так, оскільки процентна ставка і ринкова вартість облігацій наперед точно не відомі , тобто існує невизначеність. Необхідно визначити оптимальний розподіл активу на гроші та облігації.

Розв'язання. Нехай S — загальна величина активу, а x та y — величини активів, які зберігаються відповідно у формі грошей та облігацій. Вважаємо, що через рік активи, вкладені в облігації, змінюються. За решти однакових умов облігацію, яка приносить більший процент прибутку, на ринках цінних паперів можна продати за більшу суму, ніж облігацію з меншим процентом. Позначимо через ξ та η величини активів, які реалізуються через рік на одиницю активів, відповідно збережених у формі грошей та вкладених в облігації. Величина $\xi \equiv 1$, а η є випадковою величиною. Економіко-математична задача найвигіднішого розподілу активу на гроші та облігації полягає у максимізації сподіваної корисності:

$$\max F(x, y) = M(x + з\ y),$$

за умов:

$$x + y \leq S;$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Звідси випливає, що, коли $M\eta > 1$, то активи потрібно вкладати в облігації, а в протилежному разі — навпаки. Отже, питання щодо розподілу активу між грішми та облігаціями повністю вирішується на користь одного з цих видів заощаджень. Якщо $M\eta = 1$, то однаково, який спосіб заощадження буде використано.

Приклад 11.4. Відомо, що у комерційних банках нараховується більша процентна ставка на вкладені кошти порівняно з ощадним, але повернення внеску не гарантується. Перед кожним вкладником постає дилема: мати менший, але гарантований дохід, або більший, проте з ризиком втратити внесок. З ризиком невикористаних можливостей пов'язаний внесок в ощадний банк. Визначити оптимальний розподіл вкладень у банки.

Розв'язання. Позначимо через S загальну суму грошей певного власника; x— обсяг вкладень в ощадний банк, y— у комерційний; a, b— відповідно процентні ставки нарахувань в ощадному та комерційному банках; p — ймовірність повернення вкладу з комерційного банку; $(1-p)$ — ймовірність ліквідації (банкрутства) комерційного банку.

За певного розподілу S на x і y можливі такі дві ситуації щодо отримання доходів:

$ax+by$ — за умов успішного функціонування комерційного банку;

$ax-y$ — у протилежному разі.

Економіко-математична модель має такий вигляд:

$$\max F(x,\ y)=(1-p)(ax-y)+p(ax+by)$$

за умов:

$$x+y\le S\,;$$
$$x,\ y\ge 0.$$

Приклад 11.5. Потрібно оцінити доцільність страхування. Нехай якась особа бажає застрахувати частину свого активу. Для цього вона сплачує певний внесок страховій компанії, а у разі втрати активу одержує від неї страхову винагороду. Визначити частку активу, яку особа вважає за доцільне застрахувати.

Розв'язання. Позначимо через S актив (капітал, майно тощо), власником якого є певна особа. Частину його, яку бажано застрахувати, позначимо через x. Тоді страховий внесок, що сплачується страховій компанії, дорівнює rx, а у разі втрати активу клієнт одержує винагороду qx. Якщо відома ймовірність p недоторканності всього активу, то економіко-математичну модель визначення частки страхового активу можна записати так:

$$\max F(x)=p(S-rx)+(1-p)qx\ ,$$
$$0\le x\le S\ .$$

Тут можна легко врахувати також обсяги доходів.

Подібна модель може використовуватися страховими компаніями для визначення доцільних величин страхових внесків та страхових винагород, які зацікавили б клієнтів і були б вигідними страховій компанії.

11.4. Одноетапні задачі стохастичного програмування

Розглянемо лінійну одноетапну задачу стохастичного програмування в такій постановці: визначити план X, для якого

$$\max M\left\{\sum_{j=1}^{n}c_j(\omega)x_j\right\},$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j\le b_i(\omega)\right\}\ge p_i\ \ (i=\overline{1,m})\ ,$$

$$x_j\ge 0,\omega\in\Omega\ \ (j=\overline{1,n})\ ,$$

де вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції $C(\omega)=(c_j(\omega))\quad (j=\overline{1,n})$, матриця коефіцієнтів при змінних у системі обмежень $A(\omega)=\left(a_{ij}(\omega)\right)\quad (i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n})$, а також вектор $B(\omega)=(b_i(\omega))\quad (i=\overline{1,m})$ є випадковими величинами; ω — випадковий параметр, Ω — множина значень ω, що з'являються з певною ймовірністю. Нехай $A(\omega)$ — нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням $\overline{a}_{ij}$ і дисперсією σ_{ij}^2, а $B(\omega)$ і $C(\omega)$ — нормально розподілені випадкові величини з математичними сподіваннями відповідно $\overline{b}_i$ та $\overline{c}_j$ і дисперсіями σ_i^2, σ_j^2.

Оскільки в обмеженнях задачі виду $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \le b_i(\omega)\ (i=\overline{1,m})$ матриця $A(\omega)$ та вектор $B(\omega)$ є нормально розподіленими випадковими величинами, то їх різниці $\Delta_i(X)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)\quad (i=\overline{1,m})$ також є випадковими величинами з нормальним розподілом, математичним сподіванням $\overline{\Delta}_i(X)=\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}x_j-\overline{b}_i\ (i=\overline{1,m})$ і дисперсією $\sigma_i^2=\sum\sigma_{ij}^2x_j^2+\theta_j^2$.

Обмеження $P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega)x_j \le b_i(\omega)\right\}\ge p_i\ (i=\overline{1,m})$ еквівалентні нерівностям $P\{\Delta_i(X)\le 0\}\ge p_i\,(i=\overline{1,m})$. Враховуючи, що $\Delta_i(X)$ нормально розподілена випадкова величина, використаємо функцію нормального закону розподілу, внаслідок чого наведену нерівність можна записати так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(X)}\int_{-\infty}^{0}\exp\left\{\frac{(\xi-\overline{\Delta}_i)^2}{2\sigma_i^2(X)}\right\}d\xi \ge p_i\quad \left(i=\overline{1,m}\right).$$

Позначимо: $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi$. Тоді останню нерівність зведемо до вигляду:

$$\Phi\left(-\frac{\overline{\Delta}_i(X)}{\sigma_i(X)}\right)\ge p_i,\ \text{звідки}\ \overline{\Delta}_i(X)+\Phi^{-1}(p_i)\sigma_i(X)\le 0\,.$$

Підставивши в цю нерівність значення $\overline{\Delta}_i(X)$ і $\sigma_i(X)$, отримаємо:

$$\Phi^{-1}(p_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2x_j^2+\theta_i^2}\le\overline{b}_i-\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}}x_j\quad (i=\overline{1,m})\,.$$

Отже, початкову стохастичну задачу зведено до детермінованого аналогу з лінійною цільовою функцією та нелінійними обмеженнями:

$$\max F=\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_jx_j$$

за умов:

$$\Phi^{-1}(p_i)\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2 x_j^2+\theta_i^2}\le \overline{b_i}-\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}}x_j \quad (i=\overline{1,m}).$$

Таку задачу можна розв'язати одним з відомих методів розв'язування задач нелінійного програмування, наприклад, методом множників Лагранжа.

Розглянемо одноетапну задачу стохастичного програмування, що задана *P*-моделлю. Отже, маємо задачу виду:

$$\min F=k$$

за умов:

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n}c_j x_j\le k\right\}=p_0;$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i\le b_i\right\}\ge p_i \quad (i=\overline{1,m}),$$

$$X\ge 0.$$

У даній задачі необхідно мінімізувати величину *k*, що обмежує витрати на виготовлення продукції $\left(\sum_{j=1}^{n}c_j x_j\right)$, причому така вимога має виконуватися не строго, а із заданим рівнем імовірності — p_0. Інші обмеження також виконуються з певною імовірністю — $p_i \quad (i=\overline{1,m})$.

Допустимо, що випадкова величина $c_j \quad (j=\overline{1,n})$ — нормально розподілена з математичним сподіванням $\overline{c_j}$ і кореляційною матрицею $C=(c_{tj})$, де $c_{tj}=M\{(c_t-\overline{c}_t)(c_j-\overline{c}_j\}$. Тоді вираз $\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$ буде випадковою величиною, що також нормально розподілена з математичним сподіванням $\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j$ та дисперсією $\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{tj}x_t x_j$. Отже, (з попередніх викладок) можна записати:

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n}c_j x_j\le k\right\}=p_0\Rightarrow\ \Phi\left(\frac{k-\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{tj}x_t x_j}}\right)=p_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k(X)=\sum_{j=1}^{n}\overline{c}_j x_j+\Phi^{-1}(p_0)\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{tj}x_t x_j}.$$

При $p_0\ge 0$ величина $k(X)$ є угнутою функцією за змінними x_j. Отже, за зроблених допущень задачі стохастичного програмування

$$\min F=k,$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le k\right\} = p_0,$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i\right\} \ge p_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$X \ge 0$$

відповідає детермінований еквівалент:

$$\min\ k(X) = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + \Phi^{-1}(p_0)\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{tj} x_t x_j}$$

за умов:

$$\Phi^{-1}(p_i)\sqrt{\sum_t \sum_j \nu_{it} x_t x_j + 2\sum_j \nu_{ij} x_j^2 + \theta_i^2} \le \bar{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, m}).$$

Остання задача являє собою задачу опуклого програмування. Для її розв'язування можна застосувати теорему Куна—Таккера, або один з інших методів розв'язування задач нелінійного програмування.

Приклад 11.6. Фермер має змогу купити три види зерна та готувати з нього різні суміші для виробництва свинини. У табл. 11.5 містяться дані про поживність зерна, його вартість і мінімальні та максимальні потреби у поживних речовинах. Потреба у поживних речовинах розподілена рівномірно на зазначених інтервалах від мінімально можливого до максимального рівня $[\min_i; \max_i]$ для кожної i-ої поживної речовини $(i = \overline{1,4})$.

Таблиця 11.5

ВМІСТ ПОЖИВНИХ РЕЧОВИН В 1 Ц ЗЕРНА ТА ПОТРЕБА У ПОЖИВНИХ РЕЧОВИНАХ

Зерно	Поживна речовина				Ціна, грн
	кормові одиниці, ц	перетравний протеїн, кг	лізин, кг	кальцій, кг	
Ячмінь, ц	1,15	8,5	0,41	0,2	45
Кукурудза, ц	1,33	7,3	0,21	0,05	40
Горох, ц	1,18	19,2	1,42	0,2	50
Потреба у поживних речовинах:					
а) максимальна (*max_i*)	106	890	45	12	—
б) мінімальна (*min_i*)	95,4	801	41	9	—

Необхідно розробити економіко-математичну модель і знайти оптимальний розв'язок, який забезпечував би мінімальні витрати на закупівлю зерна за умов задоволення мінімально допустимих потреб у всіх поживних речовинах з ймовірністю $\gamma = 0{,}9$.

Розв'язання. Нехай x_1, x_2, x_3 — відповідно обсяги ячменю, кукурудзи і гороху, які необхідно закупити.

Критерій оптимальності:

$$\min F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

за умов:

$$P\{1{,}15x_1 + 1{,}33x_2 + 1{,}18x_3 \ge a\} \ge 0{,}9;$$
$$P\{8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \ge b\} \ge 0{,}9;$$
$$P\{0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \ge c\} \ge 0{,}9;$$
$$P\{0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \ge d\} \ge 0{,}9\ ,$$

де a, b, c, d — відповідно потреби кормових одиниць, перетравного протеїну, лізину та кальцію (випадкові, рівномірно розподілені величини).

Цю систему ймовірнісних обмежень запишемо детермінованими еквівалентами, тобто:

$$1{,}15x_1 + 1{,}33x_2 + 1{,}18x_3 \ge a_1;$$
$$8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \ge b_1;$$
$$0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \ge c_1;$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \ge d_1,$$

де a_1, b_1, c_1, d_1 — відповідно значення випадкових величин, що задовольняють умови:

$$P\{a \ge a_1\} \ge 0{,}9; \text{ і } P\{b \ge b_1\} \ge 0{,}9;$$
$$P\{c \ge c_1\} \ge 0{,}9; \text{ і } P\{d \ge d_1\} \ge 0{,}9.$$

Визначимо параметри a_1, b_1, c_1, d_1. З теорії ймовірностей відомо, що:

$$\frac{1}{106 - 95{,}4} \int_{95{,}4}^{a_1} d\varphi = 0{,}9\ .$$

Отже, маємо: $\frac{1}{10{,}6}\left(\varphi\Big|_{95{,}4}^{a_1}\right) = 0{,}9.$ Звідси: $\frac{1}{10{,}6}(a_1 - 95{,}4) = 0{,}9$ або $a_1 - 95{,}4 = 9{,}54$, тому $a_1 = 104{,}94.$

Відповідно отримаємо: $b_1 = 881{,}1;\ c_1 = 44{,}6;\ d_1 = 11{,}7.$

Запишемо детермінований варіант економіко-математичної моделі купівлі фермером зерна, яке буде використано для відгодівлі свиней:

$$\min F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

за умов:

$$1{,}15x_1 + 1{,}33x_2 + 1{,}18x_3 \ge 104{,}94,$$
$$8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \ge 881{,}1,$$
$$0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \ge 44{,}6,$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \ge 11{,}7,$$
$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0,\quad x_3 \ge 0.$$

Розв'язавши цю задачу симплексним методом, отримаємо: $x_1 = 30{,}94$, $x_2 = 35{,}59$, $x_3 = 18{,}66$. Оптимальні витрати дорівнюють 3749 гривням.

11.5. Двохетапні задачі стохастичного програмування

Недоліком розглянутих одноетапних задач стохастичного програмування є те, що в них лише фіксується факт можливих відхилень значень випадкових параметрів і усереднені розв'язки вибирають за умови, що відхилення значень від середнього рівня в будь-який бік небажане (зменшується величина дисперсії параметрів у обмеженнях або цільова функція — дисперсія мінімізується). У більшості реальних економічних задач має значення не лише величина відхилення, але також і його напрямок. Двохетапні задачі стохастичного програмування позбавлені зазначеного недоліку.

Розглянемо задачу стохастичного програмування в такій постановці:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j(\omega) x_j\,, \tag{11.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j = b_i(\omega)\ (i = \overline{1,m})\,; \tag{11.11}$$

$$x_j \ge 0\ \ (j = \overline{1,n})\,. \tag{11.12}$$

Якщо обмеження залежно від значень випадкових параметрів та вектора X виконуються як $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \le b_i(\omega)$, то можливе існування надлишку (ресурсів, продукції тощо). Позначимо його через Δ_i^+:

$$\Delta_i^+(X, \omega) = \left(b_i(\omega) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \right).$$

За виконання обмежень залежно від значень випадкових параметрів та вектора X у вигляді $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j \ge b_i(\omega)$ виникає дефіцит. Позначимо його через Δ_i^-:

$$\Delta_i^-(X,\omega)=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j-b_i(\omega)\right).$$

Отже, якщо $\Delta_i^+(X,\omega)=\left(b_i(\omega)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j\right)$, то $\Delta_i^-(X,\omega)=0$, а якщо $\Delta_i^-(X,\omega)=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j-b_i(\omega)\right)$, то $\Delta_i^+(X,\omega)=0$.

Інакше кажучи,

$$\Delta_i^+(X,\omega)=\max\left[0,\left(b_i(\omega)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j\right)\right],$$

$$\Delta_i^-(X,\omega)=\max\left[0,\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j-b_i(\omega)\right)\right].$$

Очевидно, що система обмежень (11.11) задачі може бути подана в еквівалентній формі:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j+\Delta_i^+-\Delta_i^-=b_i(\omega)\ (i=\overline{1,m}).$$

Допустимо також, що відомі величини α_i — питомі витрати на збереження надлишків $(\alpha_i>0)$ та β_i — питомі витрати, що пов'язані з дефіцитом $(\beta_i>0)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Отже, можна визначити штрафну функцію для *i*-го обмеження за результатом його виконання. Позначимо її через *S*, тоді:

$$S_i=\max\left\{\alpha_i\Delta_i^+;-\beta_i\Delta_i^-\right\}=\begin{cases}\alpha_i\Delta_i^+,\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)\le b_i(\omega),\\-\beta_i\Delta_i^-,\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)\ge b_i(\omega).\end{cases}$$

Тоді доцільно розв'язувати задачу (11.10)—(11.12) у такій постановці:

$$\min F(X)=\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_jx_j+M\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i\Delta_i^+(X,\omega)+\beta_i\Delta_i^-(X,\omega)\right)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_jx_j+M\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\max\left\{0,\left(b_i(\omega)-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j\right)\right\}+\right.$$

$$\left.+\beta_i\max\left\{0,\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j-b_i(\omega)\right)\right\}\right), \tag{11.13}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\omega)x_j=b_i(\omega)\ (i=\overline{1,m}); \tag{11.14}$$

$$x_j\ge 0\ \ (j=\overline{1,n}). \tag{11.15}$$

Змінні Δ_i^+ та Δ_i^- можна розглядати як такі, що забезпечують виконання обмежень (10.11) як рівностей.

Отже, розв'язування задачі відбувається в два етапи: спочатку відшукують фіксований план $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ згідно з апріорною інформацією про стан зовнішнього середовища, який і визначає реалізацію випадкових параметрів. Значення вектора X не задовольняє обмеження задачі для кожного $\omega \in \Omega$. На другому етапі після спостереження за зовнішнім середовищем і отримання точного значення випадкових параметрів ω знаходять значення змінних Δ_i^+ та Δ_i^-, що компенсують відхилення, які виникли за попереднім планом X. Витрати на корекцію початкового плану визначаються як

$$\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i \Delta_i^+ + \beta_i \Delta_i^-) .$$

Важливо спочатку отримати такий план, який би вимагав мінімальних витрат не лише на його реалізацію, але і на його коректування.

Коректування планів у процесі їх реалізації є цілком природним при складанні планів для реальних економічних процесів. Необхідність коректування плану зумовлена не недоліками планування, а складністю прийняття рішень за умов невизначеності.

Детерміноване моделювання не дає змоги об'єднати два етапи: прийняття плану та його коректування. Перехід від детермінованих моделей до стохастичних, в яких використовуються випадкові величини, що саме і викликають необхідність корекції, уможливлює отримання математичних моделей, що об'єднують вищеназвані два етапи планування. Отже, в результаті розв'язування двохетапних стохастичних задач отримують плани, що є стійкими за умов невизначеності і мінімізують загальні витрати на реалізацію і корекцію плану, тобто забезпечують загальний ефект від попереднього плану та його корекції.

У моделях двохетапного стохастичного програмування відображаються найхарактерніші особливості планування за умов невизначеності:

1) ймовірнісний характер початкової інформації,
2) вибір попереднього плану з урахуванням його майбутнього коректування,
3) коректування попередньо вибраного плану по мірі уточнення інформації.

Модель (11.13)—(11.15) — найпростіша двохетапна модель стохастичного програмування. У загальному випадку план-корекція вводиться в систему обмежень з допомогою матриці корекції загального вигляду, елементи якої можуть залежати від ω, тобто розглядається система нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\omega) x_j + \sum_{k=1}^{r} d_{ik}(\omega) y_k + b_i(\omega) \ge 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right),$$

$$x_j \ge 0,\ \left(j=\overline{1,n}\right);\ y_k \ge 0\ \left(k=\overline{1,r}\right),$$

або у векторно-матричній формі:

$$A(\omega)X + D(\omega)Y + b(\omega) \ge 0\,; \tag{11.16}$$

$$X \ge 0,\ Y \ge 0\,. \tag{11.17}$$

Попередній план X вибирається до спостережень над ω. Коли ω стає відомим, то визначають план-корекцію Y у такий спосіб, щоб виконувались співвідношення (11.16), (11.17). При цьому ефект від плану-корекції дорівнює:

$$\sum_{k=1}^{r} d_{ik}(\omega) y_k\,. \tag{11.18}$$

Оскільки з кожним планом-корекцією Y пов'язаний певний ефект, то при певному X і спостереженому ω його краще за все вибирати з умови максимізації (11.18) за обмежень (11.16), (11.17). Позначимо такий план через $Y(X,\omega)$ і назвемо його оптимальною корекцією плану X за зовнішніх умов ω. Можна допустити, що $Y(X,\omega)$ існує при кожному X і ω, у протилежному разі в (11.16) можна ввести штучні змінні Y^{-} і одночасно — в (11.17) з досить великим штрафом.

Сподіваний ефект від плану-корекції дорівнює:

$$M\left(\sum_{k=1}^{r} d_k(\omega) y_k(X,\omega)\right).$$

Суть задачі полягає у відшуканні плану X, який максимізував би математичне сподівання ефекту від плану з урахуванням його майбутньої корекції:

$$F(X) = \overline{C}(\omega)X + M\left(\sum_{k=1}^{r} d_k(\omega) y_k(X,\omega)\right) \tag{11.19}$$

за умов:

$$A(\omega)X + D(\omega)Y + b(\omega) \ge 0\,; \tag{11.20}$$

$$X \ge 0,\ Y \ge 0\,. \tag{11.21}$$

Іноді нелінійну задачу (11.19)—(11.21) зручно формулювати дещо в іншому вигляді, а саме: знайти такий детермінований вектор X і такий Y(ω), щоб

$$\max F(X) = \overline{C}(\omega)X + M\left(d(\omega), Y(\omega)\right) \tag{11.22}$$

за обмежень:

$$A(\omega)X + D(\omega)Y(\omega) + b(\omega) \ge 0\,; \tag{11.23}$$

$$X \ge 0,\ Y(\omega) \ge 0\,. \tag{11.24}$$

У такій постановці двохетапна задача зводиться до одноетапної. Одночасно знаходиться оптимальний план X і його оптимальна корекція $Y(\omega)$. Задача (11.22)—(11.24) на відміну від (11.19)—(11.21) лінійна, однак, якщо в задачі (11.19)—(11.21) розв'язком є n-вимірний вектор X, для пошуку якого можна застосувати чисельні методи, то в задачі (11.22)—(11.24) невідомими є $(X, Y(\omega))$ і застосувати для розв'язування задачі чисельні методи можна лише за умови, якщо Ω — скінченна множина з невеликою кількістю елементів.

Приклад 11.7. Розглянемо в загальному вигляді найпростішу стохастичну задачу з визначення оптимального плану виробництва.

Необхідно спланувати виробництво однорідної продукції, попит на яку випадковий.

Розв'язання. Позначимо через X обсяги виробництва продукції, через ω — попит на неї, а через C — витрати на виробництво одиниці продукції.

Оскільки попит на продукцію випадковий, то за будь-яких значень X можливе або її перевиробництво, або дефіцит. Позначимо надлишок продукції через $Y^+(X, \omega)$, дефіцит — через $Y^-(X, \omega)$, а питомі витрати, що пов'язані зі зберіганням надлишку продукції та компенсацією дефіциту, — відповідно через D^+ та D^-. Завдання полягає в знаходженні X, що мінімізує математичне сподівання витрат, які пов'язані з виробництвом, надлишком та дефіцитом продукції.

Математична модель задачі матиме вигляд:

$$\min F(X) = CX + M\left(D^+ Y^+(X, \omega) + D^- Y^-(X, \omega)\right),$$

де

$$Y^+(X, \omega) = \max\{0, X - \omega\},$$

$$Y^-(X, \omega) = \max\{0, \omega - X\}, \quad X \geq 0.$$

Очевидно, що коли розв'язок вибрати за середнім значенням попиту $\overline{\omega}$, то при $D^+ > C$ та $D^- > C$ (що, як правило, виконується) отримуємо тривіальну відповідь: $X = \omega$.

Приклад 11.8. Потрібно перевезти однорідну продукцію від двох постачальників трьом споживачам. Обсяг продукції першого постачальника a_1 = 340 од., а другого — a_2 = 560 од. Попит кожного споживача на продукцію є випадковим і відомий з відповідними ймовірностями, які наведені в табл. 11.6—11.8.

Таблиця 11.6

Попит першого споживача на продукцію, од. (b_1)	Ймовірність
100	0,05
175	0,2
200	0,6
300	0,1
340	0,05

Таблиця 11.7

Попит другого споживача на продукцію, од. (b_2)	Ймовірність
250	0,05
290	0,25
300	0,4
320	0,2
360	0,1

Таблиця 10.8

Попит третього споживача на продукцію, од. (b_3)	Ймовірність
290	0,1
300	0,3
400	0,3
590	0,2
600	0,1

Відомі також витрати на перевезення одиниці продукції від кожного постачальника до кожного споживача, що наведені в табл. 11.9 в умовних одиницях:

Таблиця 11.9

Постачальник	Споживач		
	перший	другий	третій
Перший	30	37	28
Другий	32	26	30

Якщо попит на продукцію буде більшим, ніж її наявність, то необхідно буде сплатити штраф за недопостачання кожної одиниці продукції першому, другому та третьому споживачам обсягом відповідно 105, 169 і 86 ум. од., а якщо попит буде меншим, то необхідно буде зберігати надлишки, що потребуватиме додаткових витрат на одиницю продукції обсягом відповідно 40, 45 та 30 ум. од.

Необхідно визначити обсяги перевезень продукції від постачальників до споживачів, які забезпечили б за заданих умов мінімальні витрати на постачання і зберігання продукції, а також на штрафи за недопостачання.

Розв'язання.

Задача належить до задач транспортного типу. Необхідно перевірити умову існування її розв'язку. Оскільки потреби споживачів є випадковими величинами, то визначимо спочатку математичне сподівання попиту кожного споживача.

$$M(b_1) = 100 \cdot 0{,}05 + 175 \cdot 0{,}2 + 200 \cdot 0{,}6 + 300 \cdot 0{,}1 + 340 \cdot 0{,}05 = 207;$$

$$M(b_2) = 250 \cdot 0{,}05 + 290 \cdot 0{,}25 + 300 \cdot 0{,}4 + 320 \cdot 0{,}2 + 360 \cdot 0{,}1 = 305;$$

$$M(b_3) = 290 \cdot 0{,}1 + 300 \cdot 0{,}3 + 400 \cdot 0{,}3 + 590 \cdot 0{,}2 + 600 \cdot 0{,}1 = 417.$$

Загальний обсяг попиту на продукцію становитиме:

$$\sum_{j=1}^{3} M(b_j) = 207 + 305 + 417 = 929\ ,$$

а пропозиція дорівнює: $\sum_{i=1}^{2} a_i = 340 + 560 = 900$ од .

Зіставимо обсяг продукції у постачальників і сподіваний загальний попит:

$$\sum_{i=1}^{2} a_i < \sum_{j=1}^{3} M(b_j)\ .$$

Отже, виникає незадоволений попит: $\sum_{j=1}^{3} M(b_j) - \sum_{i=1}^{2} a_i = 929 - \ -900 = 29$ од .

Позначимо через x_{ij} — обсяги перевезень продукції від *i*-го постачальника до *j*-го споживача, а невідомі величини, що характеризують обсяги недопостачання та надлишки, — відповідно векторами

$$Y^- = (y_1^-, y_2^-, y_3^-)\ ,$$

$$Y^+ = (y_1^+, y_2^+, y_3^+)\ .$$

Тоді математична модель двохетапної задачі стохастичного програмування, зведена до задачі лінійного програмування, відповідно до моделі (10.22)—(10.24) має вигляд:

$$\min F = 30x_{11} + 37x_{12} + 28x_{13} + 32x_{21} + 26x_{22} + 30x_{23} +$$
$$105y_1^- + 169y_2^- + 86y_3^- + 40y_1^+ + 45y_2^+ + 30y_3^+$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 340; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 560; \\ x_{11} + x_{21} - y_1^+ + y_1^- = 207; \\ x_{12} + x_{22} - y_2^+ + y_2^- = 305; \\ x_{13} + x_{23} - y_3^+ + y_3^- = 417. \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0\ ,\ \ y_j^+ \ge 0\ ,\ \ y_j^- \ge 0\ ,\ \ i = 1{,}2;\ \ j = 1{,}2{,}3\ .$$

Розв'язуючи цю задачу, отримаємо оптимальний план:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 340 \\ 207 & 353 & 0 \end{pmatrix},$$

причому план-корекція $Y^+ = (0 \quad 0 \quad 77)$, $Y^- = (0 \quad 48 \quad 0)$. Мінімальні витрати дорівнюють: F = 35 744 ум. од.

ЗАВДАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

1. Графічним методом визначити оптимальний план задачі лінійного програмування.

1.1 $Z = 2x_1 - 4x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 11, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ -2x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.2 $Z = x_1 - 3x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.3 $Z = 3x_1 + 4x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + 4x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 5, \\ x_2 \ge 5. \end{cases}$$

1.4 $Z = x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.5 $Z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 = 5, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.6 $Z = 4x_1 + 3x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.7 $Z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 5, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.8 $Z = 3x_1 - 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -3x_1 + 4x_2 \ge -12, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.9 $Z = 3x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.10 $Z = -x_1 - 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.11 $Z = 3x_1 - 4x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 11, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ -2x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.12 $Z = 2x_1 - x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.13 $Z = x_1 - x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.14 $Z = 3x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + 4x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 5, \\ x_2 \ge 5. \end{cases}$$

1.15 $Z = 4x_1 + 3x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.16 $Z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 = 5, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.17 $Z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 5, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.18 $Z = 3x_1 - 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -3x_1 + 4x_2 \ge -12, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.19 $Z = 3x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.20 $Z = -2x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.21 $Z = x_1 - 4x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 11, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ -2x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.22 $Z = x_1 + 3x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 \ge 30, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.23 $Z = x_1 + 4x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + 4x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 6, \\ x_2 \ge 5. \end{cases}$$

1.24 $Z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 = 5, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.25 $Z = -x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.26 $Z = 4x_1 + 3x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.27 $Z = x_1 + 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 5, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.28 $Z = -3x_1 - 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -3x_1 + 4x_2 \ge -12, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.29 $Z = 3x_1 + x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.30 $Z = -x_1 - 2x_2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

2. Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс-методом.

2.1 $Z = 30x_1 + 30x_2 + 45x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \le 0, \\ -5x_1 + 3x_2 - x_3 \le 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.2 $Z = 5x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \ge -3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.3 $Z = x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \le -2, \\ 2x_2 + 4x_3 \le 7, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.4 $Z = -x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 \ge -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.5 $Z=-x_1-2x_2+2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=10, \\ x_1-x_2\le 2, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.6 $Z=x_1+3x_2+9x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 10, \\ x_1-x_2-2x_3\ge -2, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.7 $Z=x_1+3x_2-3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3\ge 2, \\ -x_1-2x_3\ge -6, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.8 $Z=x_1-x_2+3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+3x_3\le 10, \\ x_1-x_2-x_3=-3, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.9 $Z=3x_1-2x_2-x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1-3x_2+3x_3\ge -6, \\ -2x_1+x_2+x_3\le 4, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.10 $Z=2x_1-x_2-3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1+x_3\le 6, \\ x_1-x_2-x_3=-2, \\ -x_1+6x_3\ge -4, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.11 $Z=-3x_1+2x_2-2x_3+x_4 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1+x_2-x_4=-5, \\ 2x_2+x_3\le 4, \\ -x_1-x_2+2x_3\ge -8, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.12 $Z=2x_1+x_2-x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 1, \\ -x_2-x_3\ge -2, \\ x_1+x_3\le 2, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.13 $Z=-2x_1-3x_2+x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-2, \\ x_1+2x_2\le 5, \\ 3x_1-2x_2\ge -4, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.14 $Z=4x_1+3x_2+5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1-x_3\le 6, \\ x_1+x_2+2x_3=5, \\ -2x_1+2x_3\ge -4, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.15 $Z=x_1+2x_2-3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3\le 4, \\ 2x_1+3x_2\le 6, \\ x_1+x_3\le 2, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.16 $Z=2x_1-3x_2+x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1-2x_2+x_3\le -2, \\ 2x_2+4x_3\le 7, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.17 $Z=-x_1-x_2+3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1+x_2-2x_3\ge -4, \\ 2x_1+x_2+3x_3\le 8, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.18 $Z=-x_1-x_2+3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=12, \\ x_1-x_2\le 2, \\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2.19 $Z = x_1 + 3x_2 + 9x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 10, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -2, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.20 $Z = x_1 + 3x_2 - 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 \ge 4, \\ -x_1 - 2x_3 \ge -6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.21 $Z = x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 \le 10, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.22 $Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 \ge -7, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \le 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.23 $Z = -x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \ge -3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.24 $Z = -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 = -5, \\ 2x_2 + x_3 \le 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \ge -8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.25 $Z = 3x_1 + x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_2 - x_3 \ge -2, \\ x_1 + x_3 \le 2, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.26 $Z = -2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 \le 5, \\ 3x_1 - 2x_2 \ge -4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.27 $Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ -2x_1 + 2x_3 \ge -4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.28 $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_3 \le 2, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.29 $Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \le -2, \\ 2x_2 + 4x_3 \le 7, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2.30 $Z = -x_1 - x_2 + 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 \ge -4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3. Розв'язати двоїсту задачу до поставленої і визначити оптимальний план прямої задачі.

3.1 $Z = -30x_1 + 10x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.2 $Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \ge -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.3 $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 50, \\ 3x_1 + x_3 \ge 15, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.4 $Z = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.5 $Z = 5x_1 + 12x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.6 $Z = -15x_1 - 10x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.7 $Z = 5x_1 - 3x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 \ge -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.8 $Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 20, \\ 2x_1 + x_3 \ge 15, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.9 $Z = 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.10 $Z = 6x_1 + 12x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.11 $Z = -10x_1 + 10x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \ge -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.12 $Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \ge -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.13 $Z = 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 50, \\ 2x_1 + x_3 \ge 15, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.14 $Z = -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.15 $Z = 5x_1 + 12x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.16 $Z = -30x_1 + 10x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.17 $Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 \ge -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.18 $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 3x_1 + x_3 \ge 15, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.19 $Z = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.20 $Z = x_1 + 12x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.21 $Z = -x_1 + 10x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.22 $Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \ge -2, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.23 $Z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 35, \\ 3x_1 + x_3 \ge 15, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.24 $Z = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.25 $Z = 5x_1 + 12x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.26 $Z = -3x_1 + 8x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge -3, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.27 $Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \ge -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.28 $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 50, \\ 3x_1 + x_3 \ge 15, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.29 $Z = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.30 $Z = 5x_1 + 12x_2 - 4x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

4. Розв’язати транспортну задачу (a_i - запаси продукції у виробників, b_k - потреби в даній продукції у споживачів, c_{ik} - вартість (тариф) перевезення продукції від i-го виробника k-му споживачу).

4.1 $a_i = (10;25;30;45)$,

$b_k = (20;15;50;10)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 2-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.2 $a_i = (100;120;150;90)$,

$b_k = (150;230;170;50)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 & 3 \\ 13 & 8 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати задачу при додатковій умові, потреби 3-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.3 $a_i = (70;55;43;87)$,

$b_k = (45;60;30;50)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 1-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.4 $a_i = (230;450;130;270)$,
$b_k = (350;500;170;260)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 1 & 9 \\ 10 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати задачу при додатковій умові, потреби 1-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.5 $a_i = (100;255;310;415)$,
$b_k = (110;205;300;400)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 10 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 3-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.6 $a_i = (70;130;250;290)$,
$b_k = (150;150;190;300)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 8 \\ 10 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати задачу при додатковій умові, потреби 1-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.7 $a_i = (20;45;60;85)$, $b_k = (45;20;30;70)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 2-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.8 $a_i = (170;200;150;190)$,
$b_k = (200;195;165;200)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, потреби 3-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.9 $a_i = (500;750;630;800)$,
$b_k = (450;800;690;520)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 7 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 10 & 13 \\ 14 & 12 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 2-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.10 $a_i = (170;220;240;300)$,
$b_k = (350;250;250;150)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, потреби 1-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.11 $a_i = (20;35;10;14)$,
$b_k = (15;20;15;10)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 2-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.12 $a_i = (340;560;100;250)$,
$b_k = (350;670;120;240)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, потреби 3-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.13 $a_i = (100;65;85;90)$, $b_k = (85;80;50;75)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 10 & 15 \\ 11 & 4 & 13 & 12 \\ 2 & 13 & 1 & 11 \\ 12 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 3-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.14 $a_i = (130;150;185;275)$, $b_k = (150;125;200;325)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 7 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, потреби 2-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.15 $a_i = (540;450;330;760)$,
$b_k = (620;350;250;370)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 1-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.16 $a_i = (265;345;280;440)$,
$b_k = (300;350;250;460)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати задачу при додатковій умові, потреби 1-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.17 $a_i = (20;45;50;95)$, $b_k = (30;40;40;80)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 11 & 2 & 9 & 9 \\ 8 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 3-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.18 $a_i = (530;500;630;770)$, $b_k = (650;450;760;690)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати задачу при додатковій умові, потреби 3-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.19 $a_i = (110;125;130;145)$,
$b_k = (120;115;150;110)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 9 & 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 2-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.20 $a_i = (90;110;140;80)$,
$b_k = (140;220;160;40)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 8 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, потреби 3-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.21 $a_i = (170;155;143;187)$, $b_k = (145;160;130;150)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 1-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.22 $a_i = (130;350;30;170)$, $b_k = (250;400;70;160)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 11 & 12 & 1 & 9 \\ 10 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, потреби 1-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.23 $a_i = (80;235;290;395)$,
$b_k = (90;185;280;380)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 3-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.24 $a_i = (170;230;350;390)$,
$b_k = (250;250;290;400)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, потреби 1-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.25 $a_i = (20;45;60;85)$, $b_k = (45;20;30;70)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 2-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.26 $a_i = (120;150;100;140)$, $b_k = (150;145;115;150)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, потреби 3-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.27 $a_i = (300;550;430;600)$, $b_k = (250;600;490;320)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 5 \\ 8 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 5 & 10 & 13 \\ 14 & 12 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 2-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.28 $a_i = (270;320;340;400)$, $b_k = (450;350;350;250)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, потреби 1-го споживача мають бути задоволені повністю.

4.29 $a_i = (120;135;110;120)$, $b_k = (115;120;115;110)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, що запаси продукції 2-го виробника мають бути вивезені повністю.

4.30 $a_i = (440;660;200;350)$, $b_k = (450;770;220;340)$,

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати задачу при додатковій умові, потреби 3-го споживача мають бути задоволені повністю.

5. Скласти математичну модель та розв'язати задачу лінійного програмування.

5.1 Підприємство виготовляє три види продукції А, В і С, використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	A	B	C	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: А – 9 грн., В – 10 грн. і С – 16 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.2 Підприємство виготовляє чотири види продукції А, В, С і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	1	1	1	280
2	1	-	1	1	80
3	1	5	1	-	250

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: А – 4 грн., В – 3 грн., С – 3 грн. і D – 7 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.3 Підприємство виготовляє три види продукції А, В і С, використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	A	B	C	
1	4	2	1	180
2	3	1	3	210
3	1	2	5	244

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: А – 10 грн., В – 14 грн. і С – 12 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.4 Підприємство виготовляє чотири види продукції А, В, С і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	6	1	2	4	300
2	5	2	2	4	200
3	2	3	1	1	90

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 4 грн., B – 2 грн., C – 3 грн. і D – 4 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.5 Підприємство виготовляє чотири види продукції A, B, C і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	3	2	1	2	200
2	3	1	3	4	500
3	1	1	1	3	400

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 27 грн., B – 10 грн., C – 15 грн. і D – 28 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.6 Підприємство виготовляє чотири види продукції A, B, C і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	1	1	3	300
2	1	-	2	1	70
3	1	2	1	-	340

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 8 грн., B – 3 грн., C – 2 грн. і D – 1 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.7 Підприємство виготовляє чотири види продукції A, B, C і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	1	-	2	1	180
2	-	1	3	2	250
3	4	2	-	4	800

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 9 грн., B – 6 грн., C – 4 грн. і D – 7 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.8 Підприємство виготовляє чотири види продукції A, B, C і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	1	2	2	1	300
2	3	-	2	2	600
3	1	4	-	1	200

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 3 грн., B – 2 грн., C – 5 грн. і D – 4 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.9 Підприємство виготовляє три види продукції А, В і С, використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	A	B	C	
1	2	1	2	120
2	3	1	2	200
3	2	2	1	120

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 2 грн., B – 3 грн. і C – 4 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.10 Фірма має можливість рекламувати свою продукцію, використовуючи для цього телебачення, радіо та газети. Витрати на рекламу в бюджеті фірми обмежені сумою 8000 грн. на місяць. Досвід минулих років показав, що 1 гривня, витрачена на телерекламу дає фірмі прибуток у розмірі 10 грн., на радіорекламу – 4 грн. та на рекламу в газеті – 8 грн. Фірма має намір витрачати на теле- та радіорекламу не більше як 70% рекламного бюджету, а витрати на газетну рекламу не повинні більш як удвічі перевищувати витрати на радіорекламу. Визначити такий розподіл рекламного бюджету за різними напрямками реклами, який дає фірмі найбільший прибуток.

5.11 Промислове підприємство виготовляє три види продукції А,В і С, для чого використовує два види ресурсів 1 і 2, запаси яких становлять відповідно 4000 та 6000 од. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат		
	A	B	C
1	2	3	5
2	4	2	7

Аналіз умов збуту продукції показав, що мінімальний попит на продукцію підприємства для продукції А,В і С відповідно становить 200,200 та 150 од. Але співвідношення випуску продукції А,В і С має бути 3:2:5. Прибуток від реалізації одиниці продукції виду А становить 30 грн., продукції В – 20 грн., а продукції С – 50 грн.

Визначити оптимальний план виробництва продукції трьох видів, що дає підприємству найбільший прибуток.

5.12 Фірма має можливість рекламувати свою продукцію, використовуючи для цього телебачення, радіо та газети. Витрати на рекламу в бюджеті фірми обмежені сумою 8000 грн. на місяць. Досвід минулих років показав, що 1 гривня, витрачена на телерекламу дає фірмі прибуток у розмірі 10 грн., на радіорекламу – 4 грн. та на рекламу в газеті – 8 грн. Фірма має намір витрачати на теле- та радіорекламу не менш як 25% рекламного бюджету, а витрати на газетну рекламу не менш як 50% витрат на телерекламу. Визначити такий розподіл рекламного бюджету за різними напрямками реклами, який дає фірмі найбільший прибуток.

5.13 Господарство планує вирощувати три сільськогосподарські культури (пшеницю, картоплю та гречку) і може виділити для цього 300 га земельних угідь. Для успішного вирощування сільськогосподарські культури потребують внесення комплексного мінерального добрива, запас якого в господарстві обмежений – 120 т.

Норму внесення мінерального добрива, урожайність та закупівельні ціни на сільськогосподарські культури наведено в таблиці:

Показник	Сільськогосподарська культура		
	Пшениця	Картопля	Гречка
Урожайність, ц/га	40	200	15
Закупівельна ціна, ум.од./ц	10	5	30
Норма внесення добрива, кг/га	300	500	200

Площа земельних угідь, що відводяться під вирощування гречки, повинна не перевищувати 40 га.

Визначити такий план розподілу посівної площі господарства, який дає найбільший прибуток від вирощування сільськогосподарських культур.

5.14 Фірма планує організувати виробництво двох видів продукції A та B, але має для цього обмежений інвестиційний фонд у розмірі 5000 грн. У разі потреби цю суму можна збільшити на 10000 грн. за рахунок банківського кредиту, процентна ставка за використання якого становить 20%. Витрати, пов'язані з виробництвом одиниці продукції A , дорівнюють 50 грн., а одиниці продукції B – 100 грн.

Очікуваний прибуток фірми від реалізації одиниці продукції A становить 100 грн., а одиниці продукції B — 50 грн.

Фірма має попереднє замовлення на виробництво не менше як 100 од. продукції A та та 50 одиниць продукції B.

Визначити обсяги виробництва продукції кожного виду, які забезпечать фірмі найбільший прибуток з урахуванням виплат за кредит.

5.15 Фірма має капітал 300000 грн., який може використовувати для фінансування проектів 1 та 2. Реалізація проекту 2 гарантує отримання щороку прибутку у розмірі 1 грн. на кожну вкладену гривню. Проект 1 гарантує прибуток у розмірі 3 грн. на кожну вкладену гривню, але через 2 роки. У разі фінансування проекту 1 період інвестицій має бути кратним двом рокам.

Визначити, як потрібно розпорядитися капіталом, щоб максимізувати загальний прибуток, що його може отримати фірма через три роки після початку інвестицій.

5.16 Підприємство виготовляє три види продукції A, B і C, використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	A	B	C	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 9 грн., B – 10 грн. і C – 16 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.17 Підприємство виготовляє чотири види продукції A, B, C і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	1	1	1	280
2	1	-	1	1	80
3	1	5	1	-	250

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 4 грн., B – 3 грн., C – 3 грн. і D – 7 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток

5.18 Підприємство виготовляє три види продукції A, B і C, використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	A	B	C	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 9 грн., B – 10 грн. і C – 16 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.19 Підприємство виготовляє чотири види продукції A, B, C і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	1	1	1	280
2	1	-	1	1	80
3	1	5	1	-	250

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 4 грн., B – 3 грн., C – 3 грн. і D – 7 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.20 Підприємство виготовляє три види продукції A, B і C, використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	A	B	C	
1	4	2	1	180
2	3	1	3	210
3	1	2	5	244

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 10 грн., B – 14 грн. і C – 12 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.21 Підприємство виготовляє чотири види продукції A, B, C і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	6	1	2	4	300
2	5	2	2	4	200
3	2	3	1	1	90

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 4 грн., B – 2 грн., C – 3 грн. і D – 4 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток

5.22 Підприємство виготовляє чотири види продукції A, B, C і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	3	2	1	2	200
2	3	1	3	4	500
3	1	1	1	3	400

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 27 грн., B – 10 грн., C – 15 грн. і D – 4 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток

5.23 Підприємство виготовляє чотири види продукції A, B, C і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	2	1	1	3	300
2	1	-	2	1	70
3	1	2	1	-	340

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 8 грн., B – 3 грн., C – 2 грн. і D – 1 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.24 Фірма має можливість рекламувати свою продукцію, використовуючи для цього телебачення, радіо та газети. Витрати на рекламу в бюджеті фірми обмежені сумою 9000 грн. на місяць. Досвід минулих років показав, що 1 гривня, витрачена на телерекламу дає фірмі прибуток у розмірі 10 грн., на радіорекламу – 4 грн. та на рекламу в газеті – 8 грн. Фірма має намір витрачати на теле- та радіорекламу не більше як 70% рекламного бюджету, а витрати на газетну рекламу не повинні більш як удвічі перевищувати витрати на радіорекламу. Визначити такий розподіл рекламного бюджету за різними напрямками реклами, який дає фірмі найбільший прибуток.

5.25 Підприємство виготовляє чотири види продукції A, B, C і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	1	-	2	1	180
2	-	1	3	2	250
3	4	2	-	4	800

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 9 грн., B – 6 грн., C – 4 грн. і D – 7 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток

5.26 Підприємство виготовляє чотири види продукції A, B, C і D використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норми витрат на одиницю продукції за видами				Запас ресурсу
	A	B	C	D	
1	1	2	2	1	300
2	3	-	2	2	600
3	1	4	-	1	200

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 3 грн., B – 2 грн., C – 5 грн. і D – 4 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.27 Підприємство виготовляє три види продукції A, B і C, використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат на одиницю продукції за видами			Запас ресурсу
	A	B	C	
1	2	1	2	120
2	3	1	2	200
3	2	2	1	120

Відомі ціна одиниці продукції кожного виду: A – 2 грн., B – 3 грн. і C – 4 грн. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший прибуток.

5.28 Промислове підприємство виготовляє три види продукції A,B і C, для чого використовує два види ресурсів 1 і 2, запаси яких становлять відповідно 4000 та 6000 од. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції ресурсів наведено в таблиці:

Ресурс	Норма витрат		
	A	B	C
1	2	3	5
2	4	2	7

Аналіз умов збуту продукції показав, що мінімальний попит на продукцію підприємства для продукції A,B і C відповідно становить 200,200 та 150 од. Але співвідношення випуску продукції A,B і C має бути 3:2:5. Прибуток від реалізації одиниці продукції виду А становить 30 грн., продукції В – 20 грн., а продукції С – 50 грн.

Визначити оптимальний план виробництва продукції трьох видів, що дає підприємству найбільший прибуток.

5.29 Фірма має можливість рекламувати свою продукцію, використовуючи для цього телебачення, радіо та газети. Витрати на рекламу в бюджеті фірми обмежені сумою 8000 грн. на місяць. Досвід минулих років показав, що 1 гривня, витрачена на телерекламу дає фірмі прибуток у розмірі 10 грн., на радіорекламу – 4 грн. та на рекламу в газеті – 8 грн. Фірма має намір витрачати на теле- та радіорекламу не менш як 25% рекламного бюджету, а витрати на газетну рекламу не менш як 50% витрат на телерекламу. Визначити такий розподіл рекламного бюджету за різними напрямками реклами, який дає фірмі найбільший прибуток.

5.30 Господарство планує вирощувати три сільськогосподарські культури (пшеницю, картоплю та гречку) і може виділити для цього 300 га земельних угідь. Для успішного вирощування сільськогосподарські культури потребують внесення комплексного мінерального добрива, запас якого в господарстві обмежений – 120 т.

Норму внесення мінерального добрива, урожайність та закупівельні ціни на сільськогосподарські культури наведено в таблиці:

Показник	Сільськогосподарська культура		
	Пшениця	Картопля	Гречка
Урожайність, ц/га	40	200	15
Закупівельна ціна, ум.од./ц	10	5	30
Норма внесення добрива, кг/га	300	500	200

Площа земельних угідь, що відводяться під вирощування гречки, повинна не перевищувати 40 га.

Визначити такий план розподілу посівної площі господарства, який дає найбільший прибуток від вирощування сільськогосподарських культур.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задача 1. Розв'яжіть задачі цілочисельного програмування методом Гоморі.

1) $Z = x_1 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12; \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24; \\ x_j \geq 0,\ x_j \text{ — цілі числа},\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

2) $Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4; \\ x_j \geq 0,\ x_j \text{ — цілі числа},\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3) $z = -3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \geq -7, \\ x_1 + x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

Задача 2. Розв'яжіть задачу цілочисельного програмування методом «гілок та меж»:

$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 16; \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30; \\ x_j \geq 0,\ x_j \text{ — цілі числа},\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Задача 3. Розв'язати матричні ігри.

1) $\begin{array}{c|ccccc} & & & B & & \\ \hline A & 1 & 3 & 4 & -3 & -2 \\ & 2 & 5 & 1 & 4 & 1 \end{array}$; 2) $\begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{B} \\ \hline & 2 & 5 \\ & 7 & 1 \\ A & 3 & 7 \\ & 4 & 6 \\ & 9 & 2 \end{array}$;

3) $\begin{array}{c|ccccc} & & & B & & \\ \hline A & 5 & 3 & 2 & -4 & 8 \\ & 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{array}$; 4) $\begin{array}{c|ccccc} & & & B & & \\ \hline & 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ A & 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \\ & 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \end{array}$.

Задача 4. Дві конкуруючі фірми (гравці) реалізують на ринку продукцію, котра швидко псується. Кожний з гравців прагне зайняти по два сегмента ринку (має дві стратегії). Відомі прибуток (виграш) або збиток (програш) для кожного гравця і кожного сегмента ринку, які наведені в платіжній матриці С. Розв'язати гру , знайти пару оптимальних стратегій і ціну гри.

а) $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$; б) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 5 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

в) $C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 5. При реалізації товару на ринку фірма може використати чотири маркетингові стратегії. Певні маркетингові стратегії можуть застосувати підприємства, що купують даний товар, наприклад, три стратегії. Кожна із стратегій фірми буде характеризуватись певним прибутком за певної стратегії конкурента. Ці дані наведені у таблиці.

Стра тегії конкур. Стратегії фірми	Прибуток (гр.од.) за стратегій конкурента		
	1	2	***3***
1	10	4	7
2	4	2	9
3	5	12	4
4	8	6	9

Необхідно визначити, які із стратегій повинна використати фірма, щоб максимізувати прибуток при прийнятному для неї ризику.

Задача 6. Розв'язати графічним методом задачу нелінійного програмування; знайти глобальні екстремуми:

а) $Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 8)^2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 30 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 14 \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0$.

б) $Z = 2x_1 + x_2$

$x_1^2 + x_2^2 \le 36$, $x_{1,2} \ge 0$.

в) $Z = \dfrac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \to \max(\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16; \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8; \\ x_1 + 3x_2 \ge 9; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,2}.$

Задача 7. Використовуючи метод множників Лагранжа, знайти точки умовного екстремуму наступної задачі нелінійного програмування:

1) $Z = x_1 x_2 + x_2 x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

2) $Z = 2x_1^2 + x_2^2$, $\quad$ 3) $Z = 2x_1 x_2 + x_2^2$,

$2x_1 + 3x_2 = 5$. $\quad$ $2x_1 + 4x_2 = 8$.

Задача 8. Користуючись теоремою Куна-Таккера, скласти функцію Лагранжа та записати необхідні і достатні умови існування сідлової точки наступної задачі нелінійного програмування:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0$$

Задача 9. Розв'язати градієнтним методом наступну задачу нелінійного програмування, почавши процес з точки $x^0(2,3)$:

$$Z = 10 - 2x_1 + x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 (\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 18 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 12 \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0$$

Задача 10. На виробництво трьох видів продукції (А; В; С) використовують матеріальні, трудові та фінансові ресурси. Норми витрат цих ресурсів на одиницю продукції, їх запаси, а також формули визначення прибутку від реалізації одиниці продукції, що залежать від обсягів виробництва, наведено в табл.

Таблиця

Вид ресурсу, показник	*Продукція*			Запас ресурсу
	A	B	C	
Матеріальні	4	5	7	100
Трудові	3	6	8	120
Фінансові	2	1	4	75
Прибуток	$4x_1^2$	$x_2^2 + 2x_2$	$3x_3^2 + 6$	—
Обсяг виробництва	x_1	x_2	x_3	—

Передбачаючи, що попит на продукцію видів В і С відомий і становить 12 і 8 од., а ресурси необхідно використати повністю, визначте оптимальний план виробництва продукції кожного виду. Розрахуйте оцінки ресурсів і здійсніть економічний аналіз оптимального плану.

Задача 11. В приведеній нижче таблиці містяться величини можливого збільшення продукції чотирьох нафтопереробних заводів при здійсненні додаткових капіталовкладень на їх реконструкцію та модернізацію.

Таблиця

Капіталовкладення тис. грн	Збільшення виробництва $R_j(s)$ продукції, млн. грн. заводи			
s	1	2	3	4
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

Знайдіть оптимальний план інвестування заводів.

Задача 12. Розглядається функціонування підприємства, для якого задані такі показники виробничої потужності та попиту на його продукцію за чотирма кварталами року

кварталу, i	Потужність, од. продукції		Попит, b_i
	при звичайному режимі роботи, од.	при роботі в понаднормовий час, од. продукції	
1	90	60	120
2	120	80	160
3	100	50	180
4	180	100	250

Виробничі витрати на всіх етапах однакові, а саме: для звичайного режиму роботи - c_i=3; а для понаднормового - d_i=4. Витрати на зберігання одиниці продукції сталі для всіх етапів і дорівнюють h_i=0,2 $\left(i=\overline{1,N}\right)$. Дефіцит не допускається.

Потрібно побудувати план виробництва продукції, який задовольняє попит щодо неї на кожному з етапів, мінімізуючи сумарні витрати.

Задача 13. Фірма виробляє товар, попит на який наперед невідомий. Навіть за відомих цін та витрат на виробництво очевидним є ризик або недоодержання прибутку, якщо обсяг виробництва менший від попиту, або невиправданих витрат у протилежному разі.

Нехай введено такі позначення: ξ — випадковий попит на продукцію; C — ціна на реалізовану продукцію; g — питомі витрати на її виробництво; x — шуканий обсяг виробництва продукції.

Побудуйте модель збалансування попиту та пропозиції з урахуванням можливості часткової адаптації виробництва до попиту.

Задача 14. Для виробництва двох видів виробів $(j=1{,}2)$ можна використати обладнання двох типів $(i=1{,}2)$. Затрати часу a_{ij} використання обладнання для виготовлення продукції є випадковими величинами. Собівартість одного виробу b_{ij} $(i=1{,}2;\ j=1{,}2)$ буде також випадковою величиною. Нехай щільності розподілів випадкових величин a_{ij} та b_{ij} відомі: a_{ij} розподілені за нормальним законом з математичними сподіваннями $\overline{a}_{ij}$ та середніми квадратичними відхиленнями σ_{ij}, а b_{ij} розподілені рівномірно на інтервалі (b_{ij}, γ_{ij}).

Нехай N_1 та N_2 — плани випуску першого та другого виробів (що зумовлюється контрактом), наприклад, N_1 = *100* шт., N_2 = *200* шт.

Визначте оптимальний план роботи обладнання, за якого мінімізуються сподівані виробничі затрати на випуск виробів, якщо ризик (ймовірність) перевищення фонду часу T на виконання контрактів становить не більше як 0,10, а ризик невиконання контракту не більший за 0,05.

Побудуйте математичну модель задачі та відшукайте розв’язки задачі за даними, наведеними у табл.

Таблиця

Група обладнання, (i)	Питомі затрати часу, год/шт.				Питома собівартість виробу, ум. од.				Фонд часу i-го обладнання, год
	$j=1$		$j=2$		$j=1$		$j=2$		
	a_{i1}	σ_{i1}	a_{i2}	σ_{i2}	δ_{i1}	γ_{i}	δ_{i}	γ_{i}	
1	0,2	0,2	0,3	0,3	2	4	1	2	50
2	0,1	0,2	0,1	0,2	3	6	2	8	65

Задача 15. Фірма планує розвиток економічної діяльності, який можливий за шістьома інвестиційними проектами. Зовнішньоекономічні умови, які будуть впливати на показники ефективності кожного проекту мають ймовірності 0.15, 0.5, 0.1, 0.15.

Матриця рентабельностід при цьому буде складати:

Інвестиційні проекти	***Рентабельність (%) за зовнішньоекономічних умов***				
	1	***2***	***3***	***4***	***5***
S1	23	11	30	16	10
S2	15	24	18	36	50
S3	42	12	8	46	9
S4	21	20	16	36	11
S5	16	12	4	16	26
S6	51	32	18	11	16
Імовірність настання ринкових умов	0,15	0,5	0,1	0,1	0,15

Необхідно визначити ефективність та ризикованість кожного проекту фірми та зробити висновок, у який із них доцільно вкладати кошти і чому.

Задача 15. На підприємстві випускається три види продукції. Прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду є випадковою величиною. Для виробництва продукції використовується два види ресурсів, обсяг запасів яких також є випадковою величиною. Необхідно розробити план випуску продукції, який дозволить максимізувати прибуток від реалізації всіх видів продукції за умов, що витрати кожного ресурсу не перевищуватимуть його обсяг на підприємстві. За даними експертного оцінювання ситуації на ринку відомі значення ймовірностей одержання прибутку від реалізації кожного з видів продукції:

ВИД ПРОДУКЦІЇ					
A		B		C	
Прибуток	ймовірність	Прибуток	Ймовірність	Прибуток	ймовірність
12	0,3	15	0,5	12	0,1
17	0,2	18	0,2	14	0,3
21	0.4	20	0,1	15	0,4
24	0.1	10	0,2	8	0,2

У зв”язку з коливанням цін на ресурси і доцільністю маневрування їх запасами підприємство оцінює ймовірні обсяги ресурсів двох видів, які використовуватимуться у виробництві:

Ресурс 1-го виду		**Ресурс 2-го виду**	
Обсяг	**Ймовірність**	**Обсяг**	**Ймовірність**
300	0,2	150	0,2
400	0,1	200	0,4
500	0,3	220	0,2
550	0,2	270	0,1
600	0,2	310	0,1

Технологічні норми витрат ресурсів на одиницю продукції є детермінованими величинами і становлять :

Продукція	**Витрати на одиницю продукції ресурсу**	
	Першого виду	**Другого виду**
А	3	4
В	5	2
С	1	3

Підприємство може закупати два види сировини, кожен з яких містить різну кількість “корисних” речовин трьох видів – А,В і С:

Сировина	**Вміст корисних речовин у сировині**	
	Першого виду	**Другого виду**
А	1	2
В	3	4
С	5	6

Відомо, витрати на придбання 1 кг сировини становлять відповідно 10 та 20 грн. Передбачається, що мінімально припустимі сумарні потреби в речовинах а,в,с у сумішах є випадковими величинами (позначимо їх як **a,b,c**), які розподілені рівномірно в інтервалах відповідно [100,160],[220,300],[400,800].

Необхідно знайти оптимальну кількість сировини кожного виду, яку слід придбати підприємству за умови мінімізації затрат на сировину, якщо мають виконуватися обмеження з мінімально припустимою потребою у всіх речовинах з ризиком (ймовірністю) їх невиконання не більше ніж 30%.

Задача 16. Підприємству необхідно перевезти однорідну взаємозамінювану продукцію від двох постачальників трьом споживачам. Обсяг продукції кожного постачальника заданий і становить відповідно 200 та 300 од. Попит на продукцію кожного із споживачів може змінюватися залежно від різних ринкових умов і тому вважається випадковою величиною, розподіл якої наведено в таблиці:

1-й споживач		2-й споживач		3-й споживач	
Попит	**ймовірність**	**попит**	**Ймовірність**	**попит**	**ймовірність**
120	0,4	200	0,3	300	0,3
150	0,3	180	0,2	250	0,2
170	0,2	170	0,1	200	0,2
190	0.1	130	0,4	240	0,3

Відомі витрати на перевезення одиниці продукції від кожного постачальника до кожного споживача:

Постачальник	Споживач		
	1-й	2-й	3-й
А	3	5	7
В	4	2	3

Якщо попит на продукцію споживача буде більшим за її наявність, то потрібно буде платити штраф за недопостачання кожної одиниці продукції в сумі відповідно 20 грн., 17 грн., 25 грн., а якщо попит буде меншим, то виникають витрати, пов'язані зі зберіганням одиниці продукції в сумі відповідно 12 грн., 10 грн., 8 грн.

Необхідно визначити обсяги перевезення продукції від постачальників до споживачів, які за заданих умов забезпечили б мінімальні витрати на постачання і зберігання продукції, а також штрафи за незадоволений попит.

Побудувати математичну модель і розв'язати двоетапну задачу стохастичного програмування.

Задача 17. Для виробництва двох виробів a і в можна використати обладнання двох груп – і і іі. Витрати часу цими групами обладнання на виготовлення продукції є випадковими величинами, розподіленими за нормальним законом з параметрами:

Група Обладнання	Питомі витрати часу, чол..шт.			
	Продукція А		Продукція В	
	Математичне Сподівання	Середньоква-дратичне відхилення	Математичне сподівання	Середньоква-дратичне відхилення
I	0,2	0,2	0,3	0,3
II	0,1	0,2	0,1	0,2

Собівартість одного виробу є також випадковою величиною, яка розподілена в інтервалі**:**

Група Обладнання	Питома собівартість виробу			
	Продукція А		Продукція В	
	Нижня межа інтервалу розподілу	Верхня межа інтервалу розподілу	Нижня межа інтервалу розподілу	Верхня межа інтервалу розподілу
I	2	4	1	2
II	3	6	2	8

Відомо, що план випуску виробів першого типу становить 100 шт, а другого типу – 200 шт. Фонд часу роботи двох груп обладнання становить відповідно 50 та 65 год.
Визначити оптимальний план роботи обладнання, за якого мінімізуються сподівані сумарні виробничі витрати на випуск продукції, якщо ризик (імовірність) перевищення фонду часу на виконання котрактів становить не більш як 1%, а ризик невиконання контракту не більший за 0.5 %.

Задача 17. Побудуйте економіко-математичні моделі й знайдіть розв'язки задач стохастичного програмування. Оцініть міру ризику, використовуючи показник коефіцієнта варіації величини прибутку.

а) Підприємство випускає продукцію трьох видів, прибуток якої є випадковою величиною; розподіл ймовірностей прибутку задано в табл.1.

Таблиця 1

Вид продукції	Прибуток одиниці продукції (грн.)	Ймовірність
A	12	0,3
	14	0,2
	17	0,1
	11	0,2
	19	0,2
B	27	0,1
	25	0,2
	20	0,3
	21	0,2
	17	0,2
C	7	0,1
	15	0,5
	17	0,2
	13	0,1
	10	0,!

Для виробництва продукції використовується три види ресурсів обсягом: 1000 од., 1300 од., 980 од. Відомі витрати ресурсів на 1 одиницю продукції:

$$\{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 9 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Продукції А випустити не більше 10 одиниць, продукції В – не менше 30. Попит на продукцію С – не обмежений.

б) Нехай на підприємстві випускається два види продукції. Прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду є випадковою величиною. Для виробництва продукції використовується три види ресурсів, обсяг яких також є випадковою величиною. Необхідно максимізувати прибуток від реалізації всіх видів продукції за умови, що витрати кожного ресурсу не перевищують його обсяг.

Витрати ресурсів на одиницю продукції дорівнюють:

$$\{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

За даними експертного оцінювання ситуації на ринку маємо функції розподілу ймовірностей прибутку і обсягів ресурсу (табл.1) і (табл.2)

Таблиця 1

Види продукції			
А		Б	
прибуток (грн.)	ймовірність	прибуток (грн.)	Ймовірність
7	0,4	8	0,45
8	0,3	9	0,4
10	0,1	10	0,1
12	0,05	11	0,05
14	0,05	12	0

Таблиця 2

Види ресурсів					
1 вид		2 вид		3 вид	
обсяг тони	ймовірність	Обсяг люд/год	ймовірність	обсяг кг	Ймовірність
500	0,35	600	0,3	550	0,4
550	0,25	650	0,25	580	0,2
600	0,15	680	0,2	600	0,15
650	0,1	700	0,15	630	0,1
680	0,1	720	0,05	650	0,1
700	0,05	750	0,05	680	0,05

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Абрамов Л. М., Капустин В. Ф.* Математическое программирование. Л., Изд-во Ленинград. ун-та, 1976. — 184 с.
2. *Акулич И. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1985.
3. *Ашманов С. А.* Линейное программирование. — М.: Наука, 1981.
4. *Белман Р.* Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.
5. *Белман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965.
6. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. — Т. 1—3. — М.: Мир, 1972.
7. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. М.: «Сов. радио», 1972. — 552 с.
8. *Вентцель Е. С.* Элементы динамического программирования. — М.: Наука, 1964.
9. *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Новые направления в линейном программировании. — М.: Советское радио, 1966.
10. *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. — М.: Наука, 1969.
11. *Данциг Дж.* Линейное программирование, его обобщение и приложения. — М.: Прогресс, 1966.
12. *Зайченко Ю. П.* Дослідження операцій: Підручник. — 4-те вид., перероб. і допов. — К., 2000. — 688 с.
13. *Зангвилл У.* Нелинейное программирование. Единый подход. М.: «Сов.радио», 1973. — 312 с.
14. *Ермольев Ю. М., Ястремский А. И.* Стохастические модели и методы в экономическом планировании. М.: Наука, 1979. — 249 с.
15. *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976.
16. *Калихман И. Л.* Сборник задач по математическому программированию. — М.: Высшая шк., 1975.
17. *Калихман И. Л., Войтенко М. А.* Динамическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1973.
18. *Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н.*; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. Исследование операций в экономике: учеб. Пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ, 2002. — 407 с.
19. *Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б.* Математическое программирование. — М.: Высш. школа, 1980. — 300 с.
20. *Кюнци Г. П., Крелле В.* Нелинейное программирование. — М.: «Советское радио», 1965. — 299 с.

21. *Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. М.* Методы выпуклой оптимизации. — М.: Наука, 1987.
22. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. Теория и практика. — М.: Мир, 1984.
23. *Наконечний С. І., Гвоздецька Л. В.* Збірник задач з курсу «Математичне програмування». Частина 1.: Навч. посібник. — К.: ІСОД, 1996. — 128 с.
24. *Наконечный С. И., Андрийчук В. Г.* Математическое моделирование экономических процессов сельскохозяйственного производства. Учеб. Пособие. — Киев: КИНХ, 1982. — 106 с.
25. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.
26. *Романюк Т. П., Терещенко Т. О., Присенко Г. В., Городкова І. М.* Математичне програмування: Навч. посіб. — К.: ІЗМН, 1996. — 312 с.
27. *Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. К.: Наук. думка., 1985. — 384 с.
28. *Степанюк В. В.* Методи математичного програмування К.: Вища школа, 1997. — 272 с.
29. *Таха Х.* Введение в исследование операций. — М.: Мир, 1985. — Т. 1, 2.
30. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. — М.: Мир, 1967.
31. *Ястремский А. И.* Стохастические модели математической экономики. — К.: 1983.
32. *Ястремский А. И.* О соотношениях двойственности в условиях оптимальности в линейных задачах стохастического программирования // Кибернетика. — 1987. — №1. — С. 102—107.
33. *Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О.* Математичне програмування. — К.: КНЕУ, 2001. — 248с.