

Метод Гауса

Цей метод є точним. Він заснований на зведенні матриці системи до трикутного вигляду.

Нехай потрібно розв'язати систему $A\bar{x} = \bar{b}$; тут $A = [a_{ij}]$ – матриця коефіцієнтів системи розмірності $n \times n$, $\det A \neq 0$.

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ – вектори.

Віднімемо від другого рівняння системи

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

перше, помножене на таке число, щоб обернувся на нуль коефіцієнт при x_1 . Потім, у такий же спосіб, віднімемо перше рівняння з третього, четвертого і т.д. Тоді виключаються всі коефіцієнти першого стовпця, що лежать нижче головної діагоналі.

Потім, за допомогою другого рівняння виключимо з третього, четвертого тощо рівнянь коефіцієнти другого стовпця. Послідовно продовжуючи цей процес, виключимо з матриці A всі коефіцієнти, що лежать нижче головної діагоналі.

Запишемо загальні формули процесу. Нехай проведено виключення коефіцієнтів з $(k-1)$ -го стовпця. Тоді залишилися такі рівняння з ненульовими елементами нижче головної діагоналі:

$$\sum_{j=k}^n a_{ij}^{(k)} x_j = b_i^{(k)}, \quad k \leq i \leq n. \quad (2)$$

Помножимо k -й рядок на число

$$C_{mk} = \frac{a_{mk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad m > k \quad (3)$$

і віднімемо його від m -го рядка. Перший ненульовий елемент цього рядка обернеться на нуль, а інші зміняться за формулами

$$\begin{aligned} a_{m1}^{(k+1)} &= a_{m1}^{(k)} - C_{mk} a_{k1}^{(k)}, \\ b_m^{(k+1)} &= b_m^{(k)} - C_{mk} b_k^{(k)}, \\ k &< m, \quad 1 \leq n. \end{aligned} \quad (4)$$

Виконуючи обчислення за цими формулами при всіх зазначених індексах, виключимо елементи k -го стовпця. Назвемо таке виключення циклом процесу. Виконання всіх циклів називається прямим ходом виключення.

У результаті виконання прямого ходу одержимо систему з матрицею трикутного вигляду

$$\sum_{j=i}^n a_{ij}^{(i)} x_j = b_i^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (5)$$

Така система легко розв'язується за допомогою так званого зворотного ходу, суть якого така. З останнього рівняння визначаємо x_n . Підставляючи його в передостаннє рівняння, знаходимо x_{n-1} і т.д. Загальні формули зворотного ходу мають вигляд

$$x_i = \frac{1}{a_{ij}^{(i)}} \left[b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j \right], \quad i = n, n-1, \dots, 1. \quad (6)$$

Виключення за формулами прямого ходу (3)-(4) не можна проводити, якщо в ході розрахунку на головній діагоналі виявиться нульовий елемент $a_{kk}^{(k)} = 0$. Але в першому стовпці проміжної системи (2) всі елементи не можуть бути нулями: це означало б, що $\det A = 0$. Перестановкою рядків можна перемістити ненульовий елемент на головну діагональ і продовжити розрахунок.

Якщо елемент на головній діагоналі $a_{kk}^{(k)}$ малий, то цей рядок домножується на великі числа C_{mk} , що призводить до значних помилок округлення при обчисленнях. Щоб уникнути цього, кожен цикл завжди починають з перестановки рядків. Серед елементів стовпця $a_{mk}^{(k)}$, $m \geq k$ знаходять головний, тобто найбільший за модулем у k -ому стовпці, і перестановкою рядків переводять його на головну діагональ, після чого роблять виключення. У цьому суть методу Гауса з вибором головного елемента.

Завдання до лабораторної роботи № 1

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^6 a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

методом Гауса з вибором головного елемента.

Варіанти завдань

№ варі- анта	Матриця коефіцієнтів системи A						Стовпець вільних членів $\bar{b}$
1	2,1	1,3	-5,2	1,4	3,3	4,6	14,35
	6,3	-0,4	-14,4	7,8	14,0	21,0	90,95
	2,1	-3,0	-1,7	9,2	7,8	24,6	129,28
	4,2	-1,7	-6,9	10,6	11,1	29,2	143,63
	-2,1	3,0	-0,6	-13,4	-0,5	0,0	-65,30
	4,2	2,6	-15,0	-5,6	13,5	0,6	-43,71
2	1,7	-3,1	2,2	0,6	1,8	-0,1	-7,31
	3,3	4,2	0,7	5,4	2,1	1,6	40,53
	-0,4	5,7	4,1	3,6	-0,5	2,7	26,42
	4,7	-0,6	3,3	7,1	1,9	-4,6	23,24
	-0,1	7,2	4,8	2,3	5,1	3,3	52,40
	2,6	3,1	7,4	-4,1	8,2	-0,1	31,99
3	-3,7	0,2	5,3	-1,4	2,2	3,4	-3,25
	0,6	2,4	-1,7	3,0	-7,1	0,7	-30,32
	4,8	-5,2	-2,3	1,6	0,8	3,5	19,01
	1,1	4,4	0,8	3,1	-2,8	-5,1	6,19
	-0,3	1,5	-1,4	6,2	1,7	0,4	7,04
	2,2	-0,1	4,5	-3,3	2,6	6,6	20,35
4	1,7	-0,1	8,2	-1,4	2,3	0,0	41,48
	-1,3	-0,9	2,1	6,7	0,0	1,1	6,27
	-0,1	-1,3	0,5	2,4	5,6	0,6	16,44
	6,1	-0,1	3,2	1,2	0,7	-0,4	40,62
	2,2	0,1	-0,2	0,4	-1,8	5,1	5,08
	0,4	7,6	2,0	-0,3	1,8	2,1	3,65
5	0,9	-1,7	0,3	6,9	1,2	-0,1	0,78
	-0,3	1,9	7,4	-1,1	0,9	0,2	-13,80
	7,2	0,2	-0,9	1,3	-2,0	1,9	12,35
	0,4	0,6	2,2	-1,2	-0,1	5,2	12,69
	1,6	8,8	-0,4	0,7	2,3	-1,1	10,57
	-1,3	-0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	1,91
6	2,4	-1,0	0,2	0,0	1,4	6,8	13,12
	0,0	0,4	5,4	-1,0	-1,9	0,1	11,74
	-1,9	1,5	-0,7	0,3	7,4	0,0	18,81
	8,3	-1,4	0,0	1,0	2,1	-1,7	-6,40
	2,2	0,6	0,0	6,6	-0,1	0,4	4,64
	-0,5	7,8	1,1	0,1	0,0	2,4	13,78
7	-2,5	0,0	-0,4	0,0	6,7	1,2	4,13
	1,6	0,3	0,0	8,0	-1,1	-0,7	24,59
	1,2	-1,0	0,7	-0,9	0,0	5,9	-5,39

	-1,0 9,0 0,2	8,4 0,7 -1,4	0,2 -1,4 7,7	-1,3 2,1 0,1	0,0 -0,2 1,9	2,1 -0,8 0,0	15,64 12,98 -10,12
8	-0,9 0,7 5,9 0,0 1,2 -0,1	0,3 -0,4 0,0 1,6 -1,0 6,5	-0,5 6,4 -0,8 1,7 0,0 1,2	0,0 -2,0 1,1 -2,1 7,9 0,0	5,4 1,4 0,3 0,0 -0,2 -0,9	-1,2 0,0 0,7 6,6 0,4 -2,3	-3,19 -9,30 3,83 19,43 8,16 19,45
9	-1,4 0,4 0,7 0,0 6,7 1,2	1,7 -1,8 -0,4 -0,8 0,0 7,9	-0,1 5,1 -2,0 1,1 1,1 0,0	8,2 2,2 0,0 0,3 -1,3 -1,0	2,3 0,1 1,4 5,9 2,1 -0,2	0,0 -0,2 6,4 0,7 -0,9 0,4	-22,23 1,65 19,00 3,17 12,13 0,72
10	-0,4 0,3 -0,8 0,0 5,6 1,8	0,7 0,0 -0,2 6,7 2,4 -0,3	1,2 8,0 2,1 1,1 0,5 2,0	3,2 1,6 -1,4 2,1 -1,3 7,6	6,1 -1,1 0,7 -0,9 -0,1 0,4	-0,1 -0,7 9,0 -1,3 0,6 2,1	-22,40 -9,39 -3,09 3,94 -1,69 21,40
11	2,1 0,0 1,9 0,6 6,9 2,0	1,8 1,6 2,0 5,6 1,2 0,6	-0,3 6,8 1,3 2,4 -1,0 0,1	2,0 0,2 -0,9 -0,1 0,3 5,7	0,4 -1,0 7,2 -1,3 -1,7 -0,8	7,6 2,4 0,2 0,5 0,7 -1,3	-1,52 10,34 10,61 -1,98 22,74 28,30
12	-1,0 -0,1 5,9 0,2 1,9 1,4	1,2 -1,2 0,7 0,9 -2,0 6,8	0,3 5,2 0,3 -1,1 1,3 0,0	-1,7 2,2 1,1 1,9 7,2 0,2	6,9 0,6 -0,8 -0,3 0,2 -1,0	0,9 0,4 0,0 7,4 -0,9 2,4	-0,65 -4,52 6,23 25,28 1,74 -4,26
13	0,2 -0,9 -1,1 2,0 6,6 -1,0	0,9 0,2 2,3 5,7 0,0 1,2	-1,1 7,2 0,7 0,6 -2,1 0,3	1,9 1,9 -0,4 0,1 1,7 6,9	7,4 -2,0 1,6 -0,8 1,6 0,9	-0,3 1,3 8,8 -1,3 0,0 -1,7	-5,94 7,40 -6,04 -7,38 15,74 15,55
14	2,4 0,1 0,0 5,7 0,4	0,0 -1,9 0,3 2,0 -0,1	0,1 5,4 -0,7 0,6 0,0	1,1 -1,0 1,5 0,1 6,6	7,8 0,4 -1,9 -0,8 0,6	-0,5 0,0 7,4 -1,3 2,2	-11,76 4,66 28,60 -16,18 20,94

	1,4	6,8	0,0	0,2	-1,0	2,4	5,92
15	1,2	0,0	-0,4	6,6	0,1	-2,5	-8,86
	0,0	-0,9	6,1	0,7	-1,0	1,2	7,98
	0,0	1,9	0,1	-1,3	0,2	7,8	4,70
	-0,7	-1,1	0,0	0,3	8,1	1,3	29,47
	-0,1	5,2	-1,2	2,2	0,6	0,4	6,09
	7,9	0,4	-0,2	0,0	-1,0	1,2	-27,93
16	1,9	-1,7	0,3	2,1	7,9	-0,4	11,78
	0,9	0,0	6,8	-2,1	-0,9	1,3	10,44
	-0,5	0,3	1,3	2,9	0,1	6,2	13,82
	1,8	5,2	0,2	-0,4	0,0	2,2	-1,72
	5,8	0,5	-2,4	0,3	1,4	-0,1	1,76
	0,0	2,2	-1,2	8,0	-0,1	1,7	25,45
17	-0,1	0,2	-1,0	5,2	-1,8	0,4	3,42
	0,0	2,3	8,4	-0,2	1,6	-1,3	-11,56
	0,4	-0,1	-1,1	0,0	8,0	1,2	27,17
	-1,2	5,7	-0,5	0,0	0,3	-0,9	3,69
	-0,8	1,9	-1,4	1,1	0,0	6,6	0,90
	6,7	0,1	-2,1	1,7	1,5	0,0	11,57
18	-0,2	0,3	2,4	5,3	1,6	-0,3	-10,57
	0,0	2,1	8,4	0,2	-1,8	1,3	17,30
	0,4	-0,1	1,2	0,0	8,1	-1,0	7,62
	0,6	6,0	-0,4	-1,1	0,9	0,0	3,85
	-0,8	2,0	-1,4	-1,1	0,1	6,8	32,76
	6,3	-1,4	0,0	2,0	0,4	-0,7	1,95
19	2,1	0,4	7,7	-1,9	0,4	-1,7	-8,87
	1,3	-0,8	-2,0	1,2	6,8	0,1	12,52
	-0,7	-1,0	1,5	8,1	0,0	0,3	33,09
	0,0	6,2	-3,1	1,1	-0,8	-0,4	0,19
	0,6	0,0	1,2	-0,4	-2,5	5,7	17,56
	8,9	-0,6	1,3	-2,0	0,2	0,7	14,12
20	-0,7	-1,1	1,6	8,0	0,0	0,3	-11,48
	2,0	0,2	7,8	-2,1	0,2	-1,6	9,85
	-1,2	-0,8	2,0	0,9	6,6	0,1	19,77
	0,2	7,0	-3,3	1,4	-0,1	0,5	-19,81
	0,4	-0,2	1,1	-0,6	2,3	5,7	-4,61
	9,1	-0,5	1,2	-2,4	0,0	-0,6	19,36
21	-0,5	-1,3	-0,2	2,2	5,6	0,4	13,76
	-2,4	1,0	0,1	6,9	1,6	0,0	5,09
	0,9	1,5	0,6	-1,2	1,0	6,8	8,94
	0,1	7,0	0,7	-1,1	-1,9	1,6	-1,50
	7,8	-0,3	-1,9	0,4	1,7	2,2	-15,59
	1,4	0,6	5,8	0,1	-0,6	-1,8	2,55
	0,4	0,6	2,2	5,4	-1,2	-0,1	-1,82

22	0,7	-0,2	7,1	-1,2	1,9	2,1	2,64
	-2,2	-1,1	0,0	0,2	6,8	1,2	4,54
	0,1	-1,4	-1,8	2,0	0,0	6,6	-9,40
	-0,9	6,8	1,6	-0,2	1,2	-1,0	16,54
	7,5	0,4	-2,0	0,9	-1,1	0,1	22,19
23	-1,1	-0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	0,39
	-1,7	0,9	6,9	0,3	-1,2	-1,0	-15,29
	8,8	-1,5	0,3	-0,7	2,2	-1,1	13,95
	0,1	1,6	-1,5	-2,1	0,0	6,6	-17,54
	0,3	7,4	-1,9	1,1	0,9	0,2	5,60
24	1,3	-2,0	1,9	7,2	0,2	-0,9	3,68
	2,4	-1,0	0,2	0,0	6,8	1,4	11,18
	2,2	0,6	6,6	0,0	-0,1	-0,4	15,68
	7,4	-1,9	1,5	-0,7	0,3	0,0	21,01
	-1,3	-0,8	0,1	0,6	2,0	5,7	2,79
25	-0,5	7,8	1,1	0,1	0,0	2,4	0,69
	0,1	0,3	-1,0	5,4	-1,9	0,1	-18,92
	2,2	-0,4	0,6	5,2	-1,2	0,1	-1,82
	0,1	0,6	5,7	-1,3	-0,8	2,0	299,61
	0,0	0,2	-1,0	0,0	6,8	1,4	2,34
26	6,9	-0,9	-1,7	1,2	0,3	-1,0	15,43
	-0,4	2,1	2,0	-0,3	1,8	7,6	36,80
	-1,9	7,0	0,1	-1,6	0,7	-1,1	6,21
	0,4	0,6	2,2	-1,2	5,2	-0,1	-0,40
	-2,3	0,1	6,6	-0,4	0,0	1,2	-13,07
27	7,9	-0,3	1,3	-0,1	1,8	0,1	14,32
	1,2	-1,0	0,0	-0,2	0,4	7,8	1,54
	1,4	8,2	-0,1	0,0	-1,1	-0,7	6,93
	1,2	-1,0	0,7	6,1	-0,9	0,0	13,02
	2,2	-0,1	-0,3	0,2	5,3	-1,7	-3,84
28	1,6	0,0	8,1	-1,2	2,1	-0,1	30,16
	6,2	0,1	-2,7	1,2	-0,3	-0,5	-25,78
	-0,1	1,4	0,4	2,1	0,5	5,7	17,58
	-0,4	7,9	2,0	-0,2	-1,7	1,9	11,30
	1,3	-0,9	-2,1	6,8	0,0	0,7	-4,95
29	-0,9	0,3	0,0	-0,5	5,8	-1,1	-6,18
	0,4	-1,6	5,3	1,0	-0,2	-0,1	7,53
	6,6	0,0	1,1	-1,4	1,7	-0,6	24,20
	0,1	1,3	1,6	-2,1	0,2	6,7	15,66
	1,2	8,2	0,0	-1,1	0,1	0,2	-6,36
29	-1,3	1,8	-0,2	8,6	-2,2	0,0	-9,21
	0,1	0,0	0,9	-1,1	6,0	0,6	-13,70
29	-0,3	1,6	5,3	2,4	0,3	-0,2	20,17
	6,8	0,1	-1,1	-1,4	2,0	-0,8	12,52

	-0,7	0,4	2,0	0,0	-1,4	6,3	17,02
	-1,0	8,1	0,0	1,2	-0,1	0,4	-18,95
	1,3	-1,8	0,2	8,4	2,1	0,0	30,19
30	0,4	-0,8	0,0	1,1	6,2	-3,1	15,05
	0,3	0,0	8,1	1,5	-1,0	-0,7	-21,52
	5,7	-1,5	-0,4	1,2	0,0	0,6	0,99
	0,7	0,2	-2,0	1,3	-0,6	8,9	18,45
	0,1	6,8	1,2	-2,0	-0,8	1,2	1,48
	-1,7	0,4	-1,9	7,7	0,4	2,1	10,18