

Метод Халецького

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A\bar{x} = \bar{b}, \quad (1)$$

де $A = [a_{ij}]$ – квадратна матриця порядку n і

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ \dots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

– вектори-стовпці невідомих і вільних членів відповідно.

Представимо матрицю A у вигляді добутку нижньої трикутної матриці $B = [b_{ij}]$ і верхньої трикутної матриці $C = [c_{ij}]$ з одиничною діагоналлю, тобто

$$A = BC, \quad (2)$$

$$\text{де } B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \text{ і } C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Тоді елементи b_{ij} і c_{ij} визначаються за формулами:

$$\left. \begin{aligned} b_{i1} &= a_{i1}; \\ b_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj} \quad (i \geq j > 1) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

і

$$\left. \begin{aligned} c_{1j} &= \frac{a_{1j}}{b_{11}}; \\ c_{ij} &= \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj} \right) \quad (1 < i < j). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Звідси шуканий вектор \bar{x} може бути знайдений з ланцюга рівнянь

$$B\bar{y} = \bar{b}, \quad C\bar{x} = \bar{y}. \quad (5)$$

Оскільки матриці B і C – трикутні, то системи (5) легко розв'язуються, а саме:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{a_{1,n+1}}{b_{11}}; \\ y_i &= \frac{1}{b_{ii}} \left(a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k \right) \quad (i > 1) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

і

$$\left. \begin{aligned} x_n &= y_n; \\ x_i &= y_i - \sum_{k=i+1}^n c_{ik} x_k \quad (i < n). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

З формули (6) бачимо, що числа y_i зручно обчислювати разом з коефіцієнтами c_{ij} .

Схема Халецького зручна для роботи на ЕОМ, тому що в цьому випадку операції «нагромадження» (3) і (4) можна проводити без запису проміжних результатів. Метод є точним.

Приклад.

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 1,35x_1 - 1,72x_2 - 0,62x_3 + 0,48x_4 = 0,93; \\ 1,08x_1 + 0,64x_2 - 0,95x_3 + 1,54x_4 = 1,64; \\ 0,88x_1 - 0,72x_2 + 1,36x_3 - 0,68x_4 = -0,85; \\ 0,64x_1 + 1,48x_2 + 0,82x_3 - 1,58x_4 = -1,32 \end{cases}$$

методом Халецького.

Розв'язок.

Обчислення виконуємо за такою схемою:

x_1	x_2	x_3	x_4	Вільний член	Σ
1,35	-1,72	-0,62	0,48	0,93	0,42
1,08	0,64	-0,95	1,54	1,64	3,95
0,88	-0,72	1,36	-0,68	-0,85	-0,01
0,64	1,48	0,82	-1,58	-1,32	0,04
1,35	-1,27410	-0,45926	0,35555	0,68888	0,31111
1,08	2,01603	-0,22520	0,57341	0,44444	1,79263
0,88	0,40121	1,85450	-0,65945	-0,88138	-0,54085
0,64	2,29542	1,63086	-2,04830	0,65598	1,65596
			1	0,65598	1,65596
		1		-0,44879	0,55117
	1			-0,03277	0,96721
1				0,20778	1,20778

Відповідь: $x_1 = 0,2078$; $x_2 = -0,0328$; $x_3 = -0,4488$; $x_4 = 0,6560$;

Завдання до лабораторної роботи № 2

Розв'язати систему рівнянь за схемою Халецького з точністю до 0,0001.

$$\text{№ 1.} \begin{cases} 0,63x_1 + 1,00x_2 + 0,71x_3 + 0,34x_4 = 2,08; \\ 1,17x_1 + 0,18x_2 - 0,65x_3 + 0,71x_4 = 0,17; \\ 2,71x_1 - 0,75x_2 + 1,17x_3 - 2,35x_4 = 1,28; \\ 3,58x_1 + 0,21x_2 - 3,45x_3 - 1,18x_4 = 0,05. \end{cases}$$

$$\text{№ 2.} \begin{cases} 3,51x_1 + 0,17x_2 + 3,75x_3 - 0,28x_4 = 0,75; \\ 4,52x_1 + 2,11x_2 - 0,11x_3 - 0,12x_4 = 1,11; \\ -2,11x_1 + 3,17x_2 + 0,12x_3 - 0,15x_4 = 0,21; \\ 3,17x_1 + 1,18x_2 - 3,17x_3 + 0,22x_4 = 0,05. \end{cases}$$

$$\text{№ 3.} \begin{cases} 0,17x_1 + 0,75x_2 - 0,18x_3 + 0,21x_4 = 0,1; \\ 0,75x_1 + 0,13x_2 + 0,11x_3 + 1,00x_4 = 2,00; \\ -0,33x_1 + 0,11x_2 + 3,01x_3 - 2,01x_4 = 0,11; \\ 0,1x_1 + 1,12x_2 + 1,11x_3 - 1,31x_4 = 0,13. \end{cases}$$

$$\text{№ 4.} \begin{cases} -1,00x_1 + 0,13x_2 - 2,00x_3 - 0,14x_4 = 0,15; \\ 0,75x_1 + 0,18x_2 - 0,21x_3 - 0,77x_4 = 0,11; \\ 0,28x_1 - 0,17x_2 + 0,39x_3 + 0,48x_4 = 0,12; \\ 1,00x_1 + 3,14x_2 - 0,21x_3 - 1,00x_4 = -0,11. \end{cases}$$

$$\text{№ 5.} \begin{cases} 3,01x_1 - 0,14x_2 + 1,00x_3 - 0,15x_4 = 1,00; \\ -1,75x_1 + 1,11x_2 + 0,13x_3 - 0,75x_4 = 0,13; \\ 0,17x_1 - 2,11x_2 + 0,71x_3 - 1,71x_4 = 1,00; \\ 0,21x_1 + 0,21x_2 + 0,35x_3 + 0,33x_4 = 0,17. \end{cases}$$

$$\text{№ 6.} \begin{cases} 1,15x_1 + 0,62x_2 - 0,83x_3 + 0,92x_4 = 2,15; \\ 0,82x_1 - 0,54x_2 + 0,43x_3 - 0,25x_4 = 0,62; \\ 0,24x_1 + 1,15x_2 - 0,33x_3 + 1,42x_4 = -0,62; \\ 0,73x_1 - 0,81x_2 + 1,27x_3 - 0,67x_4 = 0,88. \end{cases}$$

$$\text{№ 7.} \begin{cases} 2,2x_1 - 3,17x_2 + 1,24x_3 - 0,87x_4 = 0,46; \\ 1,5x_1 + 2,11x_2 - 0,45x_3 + 1,44x_4 = 1,5; \\ 0,86x_1 - 1,44x_2 + 0,62x_3 + 0,28x_4 = -0,12; \\ 0,48x_1 + 1,25x_2 - 0,63x_3 - 0,97x_4 = 0,35. \end{cases}$$

$$\text{№ 8.} \begin{cases} 0,64x_1 + 0,72x_2 - 0,83x_3 + 4,2x_4 = 2,23; \\ 0,58x_1 - 0,83x_2 + 1,43x_3 - 0,62x_4 = 1,71; \\ 0,86x_1 + 0,77x_2 - 1,83x_3 + 0,88x_4 = -0,54; \\ 1,32x_1 - 0,52x_2 - 0,65x_3 + 1,22x_4 = 0,65. \end{cases}$$

$$\text{№ 9.} \begin{cases} 1,42x_1 + 0,32x_2 - 0,42x_3 + 0,85x_4 = 1,32; \\ 0,63x_1 - 0,43x_2 + 1,27x_3 - 0,58x_4 = -0,44; \\ 0,84x_1 - 2,23x_2 - 0,52x_3 + 0,47x_4 = 0,64; \\ 0,27x_1 + 1,37x_2 + 0,64x_3 - 1,27x_4 = 0,85. \end{cases}$$

$$\text{№ 10.} \begin{cases} 0,73x_1 + 1,24x_2 - 0,38x_3 - 1,43x_4 = 0,58; \\ 1,07x_1 - 0,77x_2 + 1,25x_3 + 0,66x_4 = -0,66; \\ 1,56x_1 + 0,66x_2 + 1,44x_3 - 0,87x_4 = 1,24; \\ 0,75x_1 + 1,22x_2 - 0,83x_3 + 0,37x_4 = 0,92. \end{cases}$$

$$\text{№ 11.} \begin{cases} 1,32x_1 - 0,83x_2 - 0,44x_3 + 0,62x_4 = 0,68; \\ 0,83x_1 + 0,42x_2 - 0,56x_3 + 0,77x_4 = 1,24; \\ 0,58x_1 - 0,37x_2 + 1,24x_3 - 0,62x_4 = 0,87; \\ 0,35x_1 + 0,66x_2 - 1,38x_3 - 0,93x_4 = -1,08. \end{cases}$$

$$\text{№ 12.} \begin{cases} 0,11x_1 - 0,17x_2 + 0,72x_3 - 0,34x_4 = 0,17; \\ 0,81x_1 + 0,12x_2 - 0,91x_3 + 0,17x_4 = 1,00; \\ 0,17x_1 - 0,18x_2 + 1,00x_3 + 0,23x_4 = 0,21; \\ 0,13x_1 + 0,17x_2 - 0,99x_3 + 0,35x_4 = 2,71. \end{cases}$$

$$\text{№ 13.} \begin{cases} 0,18x_1 + 2,11x_2 + 0,13x_3 - 0,22x_4 = 0,22; \\ 0,33x_1 - 0,22x_2 - 1,00x_3 + 0,17x_4 = 0,11; \\ -1,00x_1 + 0,11x_2 + 2,00x_3 - 0,45x_4 = 1,00; \\ 7,00x_1 - 0,17x_2 - 0,22x_3 + 0,33x_4 = 0,21. \end{cases}$$

$$\text{№ 14.} \begin{cases} 2,00x_1 + 0,05x_2 - 3,01x_3 - 0,11x_4 = 0,21; \\ 1,00x_1 - 2,00x_2 + 3,02x_3 + 0,05x_4 = 0,18; \\ 0,17x_1 + 0,99x_2 - 2,00x_3 - 0,17x_4 = 0,17; \\ 0,33x_1 - 0,07x_2 + 0,33x_3 + 2,00x_4 = 0,17. \end{cases}$$

$$\text{№ 15.} \begin{cases} 0,17x_1 - 0,13x_2 - 0,11x_3 - 0,12x_4 = 0,22; \\ 1,00x_1 - 1,00x_2 - 0,13x_3 + 0,13x_4 = 0,11; \\ 0,35x_1 + 0,33x_2 + 0,12x_3 + 0,13x_4 = 0,12; \\ 0,13x_1 + 0,11x_2 - 0,13x_3 - 0,11x_4 = 1,00. \end{cases}$$

$$\text{№ 16.} \begin{cases} 0,11x_1 + 1,13x_2 - 0,17x_3 + 0,18x_4 = 1,00; \\ 0,13x_1 - 1,17x_2 + 0,18x_3 + 0,14x_4 = 0,13; \\ 0,11x_1 - 1,05x_2 - 0,17x_3 - 0,15x_4 = 0,11; \\ 0,15x_1 - 0,05x_2 + 0,18x_3 - 0,11x_4 = 1,00. \end{cases}$$

$$\text{№ 17.} \begin{cases} 1,00x_1 - 0,17x_2 + 0,11x_3 - 0,15x_4 = 0,17; \\ 0,14x_1 + 0,21x_2 - 0,33x_3 + 0,11x_4 = 1,00; \\ 0,22x_1 + 3,44x_2 - 0,11x_3 + 0,12x_4 = 2,00; \\ 0,11x_1 + 0,13x_2 + 0,12x_3 + 0,14x_4 = 0,13. \end{cases}$$

$$\text{№ 18.} \begin{cases} 1,00x_1 + 0,55x_2 - 0,13x_3 + 0,34x_4 = 0,13; \\ 0,13x_1 - 0,17x_2 + 0,33x_3 + 0,17x_4 = 0,11; \\ 0,11x_1 + 0,18x_2 - 0,22x_3 - 0,11x_4 = 1,00; \\ 0,13x_1 - 0,12x_2 + 0,21x_3 + 0,22x_4 = 0,18. \end{cases}$$

$$\text{№ 19.} \begin{cases} 1,00x_1 - 0,51x_2 + 0,12x_3 + 0,55x_4 = 0,12; \\ 0,12x_1 + 0,18x_2 - 0,22x_3 - 0,41x_4 = 0,13; \\ 0,22x_1 - 3,01x_2 + 0,31x_3 + 0,58x_4 = 1,00; \\ 1,00x_1 + 0,24x_2 - 3,05x_3 - 0,22x_4 = 3,41. \end{cases}$$

$$\text{№ 20.} \begin{cases} 0,13x_1 + 0,22x_2 - 0,14x_3 + 0,15x_4 = 1,00; \\ 0,22x_1 - 0,31x_2 + 0,42x_3 - 5,10x_4 = 6,01; \\ 0,62x_1 - 0,74x_2 + 0,85x_3 - 0,96x_4 = 0,11; \\ 0,12x_1 + 0,13x_2 + 0,14x_3 + 0,45x_4 = 0,16. \end{cases}$$

$$\text{№ 21.} \begin{cases} 0,18x_1 + 0,19x_2 + 0,20x_3 - 0,21x_4 = 0,22; \\ 0,51x_1 - 0,50x_2 + 0,49x_3 - 0,48x_4 = 0,47; \\ 0,61x_1 + 0,62x_2 - 0,63x_3 + 0,64x_4 = 0,65; \\ 0,11x_1 - 0,15x_2 + 0,22x_3 - 0,38x_4 = 0,42. \end{cases}$$

$$\text{№ 22.} \begin{cases} 0,17x_1 - 0,18x_2 + 0,19x_3 - 5,74x_4 = 1,00; \\ 0,11x_1 - 0,43x_2 + 0,15x_3 - 0,17x_4 = 1,9; \\ 0,12x_1 + 0,14x_2 + 0,16x_3 + 0,18x_4 = 2,00; \\ 0,71x_1 - 0,13x_2 - 0,41x_3 + 0,52x_4 = 1,00. \end{cases}$$

$$\text{№ 23.} \begin{cases} 1,00x_1 - 2,01x_2 + 2,04x_3 + 0,17x_4 = 0,18; \\ 0,33x_1 - 0,77x_2 + 0,44x_3 - 0,51x_4 = 0,19; \\ 0,31x_1 + 0,17x_2 - 0,21x_3 + 0,54x_4 = 0,21; \\ 0,17x_1 + 1,00x_2 - 0,13x_3 + 0,21x_4 = 0,31. \end{cases}$$

$$\text{№ 24.} \begin{cases} 2,34x_1 - 1,42x_2 - 0,54x_3 + 0,21x_4 = 0,66; \\ 1,44x_1 - 0,53x_2 + 1,43x_3 - 1,27x_4 = -1,44; \\ 0,63x_1 - 1,32x_2 - 0,65x_3 + 1,43x_4 = 0,94; \\ 0,56x_1 + 0,88x_2 - 0,67x_3 - 2,38x_4 = 0,73. \end{cases}$$

$$\text{№ 25.} \begin{cases} 0,63x_1 - 0,76x_2 + 1,34x_3 + 0,37x_4 = 1,21; \\ 0,54x_1 + 0,83x_2 - 0,74x_3 - 1,27x_4 = 0,86; \\ 0,24x_1 - 0,44x_2 + 0,35x_3 + 0,55x_4 = 0,25; \\ 0,43x_1 - 1,21x_2 + 2,32x_3 - 1,41x_4 = 1,55. \end{cases}$$

$$\text{№ 26.} \begin{cases} 1,43x_1 + 0,87x_2 - 1,57x_3 - 0,58x_4 = 2,34; \\ 0,63x_1 - 0,57x_2 - 2,34x_3 + 0,66x_4 = 0,77; \\ 1,57x_1 + 0,66x_2 - 0,57x_3 + 1,15x_4 = -0,24; \\ 0,88x_1 - 0,67x_2 + 0,55x_3 - 0,45x_4 = 0,56. \end{cases}$$

$$\text{№ 27.} \begin{cases} 1,71x_1 - 0,83x_2 + 1,44x_3 - 0,72x_4 = 1,35; \\ 0,64x_1 - 0,85x_2 - 0,43x_3 + 0,88x_4 = 0,77; \\ 0,38x_1 + 1,42x_2 + 0,63x_3 - 1,55x_4 = 0,28; \\ 0,83x_1 - 0,66x_2 + 0,58x_3 + 1,22x_4 = -0,47. \end{cases}$$

$$\text{№ 28.} \begin{cases} 0,85x_1 + 1,27x_2 - 2,37x_3 + 0,57x_4 = 1,47; \\ 1,47x_1 - 0,28x_2 + 0,56x_3 - 1,21x_4 = 0,86; \\ 0,66x_1 + 1,31x_2 - 0,63x_3 - 0,43x_4 = -0,55; \\ 0,57x_1 - 0,78x_2 - 0,56x_3 - 0,83x_4 = 0,27. \end{cases}$$

$$\text{№ 29.} \begin{cases} 0,68x_1 + 1,32x_2 - 0,63x_3 - 0,87x_4 = 1,43; \\ 0,57x_1 + 0,36x_2 - 1,24x_3 - 0,235x_4 = 0,33; \\ 0,82x_1 - 0,32x_2 + 1,42x_3 + 1,48x_4 = -0,84; \\ 0,56x_1 - 1,20x_2 + 1,50x_3 - 0,64x_4 = 0,45. \end{cases}$$

$$\text{№ 30.} \begin{cases} 1,42x_1 + 2,34x_2 - 0,88x_3 + 0,53x_4 = 0,72; \\ 0,71x_1 - 1,15x_2 + 0,53x_3 - 0,67x_4 = -0,18; \\ 0,55x_1 - 0,93x_2 - 1,42x_3 + 1,32x_4 = 0,68; \\ 0,44x_1 - 0,25x_2 + 1,92x_3 - 1,08x_4 = 0,43. \end{cases}$$