Лекція 1

Умови взаємодії заготівки і інструменту. Постанова краєвих задач

Пластична деформація при обробці тиском відбувається під дією валків, штампів, матриць і інших інструментів. Звичайно деформації інструменту малі в порівнянні з деформацією заготовок, тому вважаємо інструмент жорстким.

Відзначимо принципові особливості контактної взаємодії інструменту і заготовки. У більшості процесів обробки тиском фактичний майданчик контакту наперед невідомий і підлягає визначенню. Друга особливість пов'язана з наявністю тертя на майданчику фактичного контакту. Виникає проблема визначення областей зчеплення і областей ковзання; межа розділу цих областей наперед невідома і також є об'єктом рішення задачі. Крім того, умови взаємодії повинні відобразити напрям ковзання, яке не може бути визначене наперед. Нарешті, сили тертя є неконсервативними, тому рішення задачі залежить від історії руху штампу.

Коректне математичне формулювання умов контактної взаємодії повинне враховувати всі відмічені особливості і не пов'язувати постановку завдання з фіксацією певних майданчиків контакту, областей зчеплення і ковзання і т.п. Як наслідок таких загальних вимог виникають некласичні умови, що містять нерівності [3].

Відмітимо, що в багатьох дослідженнях по комп'ютерному моделюванню в ОМТ вказані особливості явно не відображаються в краєвих умовах, а враховуються за допомогою ряду евристичних алгоритмів вже в процесі чисельного рішення. Крім очевидної логічної недосконалості такого підходу, виключається можливість якої-небудь теоретичної оцінки погрішності отриманих результатів, стає неможливим обгрунтування збіжності, а відсутність чіткої початкової постановки може служити джерелом прямих помилок.

Розглянемо спочатку постановку умов контактної взаємодії в змінних Лагранжа. Виходимо з того, що майданчик контакту заготівки і інструменту наперед невідомий, проте у будь-якому випадку це майданчик є частиною Гс поверхні заготівки.

Називатимемо Гс областю можливого контакту.

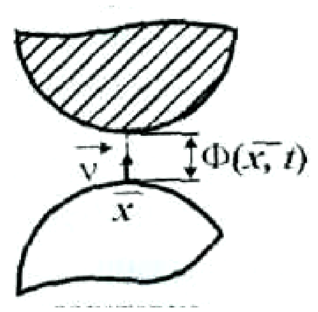
Взаємодію інструменту і заготівки описуватимемо за допомогою векторів *i*, а переміщень і напруг, визначених в точках поверхні Гс. Хай v - вектор одиничної зовнішньої нормалі до поверхні Гс. Розкладемо вектори *i* і з на нормальні і дотичні компоненти:

$$uv = \mathrm{wv}; \quad \text{мт} = i - uvv$$

$$\mathrm{GV} = av; \quad \text{ст} = \mathrm{a} - \mathrm{avv}.$$

Взаємне положення інструменту і заготівки описуватимемо функцією ф(х,г), значення якої рівні відстані від поверхні Гс до поверхні інструменту, зміряній уздовж напряму нормалі v і Гс у момент часу *t* (рис. 3.1).

інструмент



заготовка

Рисунок 3.1 – Взаємодія інструменту і заготовки

Функція *Φ(x,t)* може приймати і негативні значення, що відповідає зануренню інструменту в заготовку. Якщо в деякій точці *x* Гс відбувається контакт заготовки і інструменту, то в цій точці uv(x,t) = *Φ(x,t).* Крім того, нормальні напруги $_v$ повинні бути такими, що стискають, тобто $_v$ *(x,t)* < 0. Якщо ж в точці *x* контакт відсутній, то *uv (x,i) < Φ (x,t),* σ_v *(x,t) = 0.*

Запишемо одержані умови у формі, що не вимагає згадки про відсутність або наявність контакту в точці:

$$uv\ (x,t) < \Phi\ (x,t); \tag{3.1}$$

$$\sigma_v (x,t) \le 0; \tag{3.2}$$

$$\sigma_v (x,t)[uv\ (x,t) - \Phi(x,t)] = 0. \tag{3.3}$$

Умова (3.2) називається умовою непроникнення. Умови (3.1) - (3.3) повинні бути виконані в усіх точках поверхні можливого контакту; при їх формулюванні немає необхідності указувати фактичні майданчики контакту.

Сформулюємо тепер умови, що накладаються на дотичні компоненти векторів переміщень і напруг.

Згідно закону Амонтона - Кулона, дотичні зусилля в точках контакту не повинні по модулю перевищувати величини $f|\sigma_v (x,t)|$, причому взаємне ковзання відбувається, якщо $\left|\overrightarrow{\sigma_\tau}(x,t)\right| = f\left|\sigma(x,t)\right|$, і ковзання відсутнє, якщо $\left|\overrightarrow{\sigma_\tau}(x,t)\right| < f\left|\sigma(x,t)\right|$. Числовий коефіцієнт$f$ f характеризує властивості контактуючих поверхонь і називається коефіцієнтом тертя. Окрім факту ковзання, умови дотичної взаємодії повинні також відображати напрям взаємного ковзання. Відразу підкреслимо, що напрям ковзання, взагалі кажучи, не співпадає з напрямом вектора переміщення. Напрям ковзання слід пов'язувати з напрямом вектора швидкості взаємного ковзання.

Хай - різниця дотичних компонент швидкостей точки Гс і відповідної точки на поверхні інструменту. Напрям взаємного ковзання визначає одиничний вектор, а напрям дотичного зусилля - одиничний вектор $\vec{\sigma}_\tau / \left|\vec{\sigma}_\tau\right| /$. Приймаємо, що напрям взаємного ковзання протилежно напряму дотичного зусилля, тобто:

$$\frac{\Delta \dot{\vec{u}}_\tau}{\left|\Delta \dot{\vec{u}}_\tau\right|} = -\frac{\vec{\sigma}_\tau}{\left|\vec{\sigma}_\tau\right|}.$$

Об'єднуючи сформульовані вимоги, приходимо до наступних умов дотичної взаємодії в точках поверхні Гс:

$\sigma_\nu(x,t) \leq\leq 0;$ $\quad\quad$ $|\vec{\sigma}_\tau(x,t)| \leq f|\sigma_\nu(x,t)|$ (3.4)

$\Delta\dot{\vec{u}}_\tau(x,t) = 0$ $\quad\quad$ якщо $|\vec{\sigma}_\tau(x,t)| < f|\sigma_\nu(x,t)|$ (3.5)

$\dfrac{\Delta\dot{\vec{u}}_\tau(x,t)}{\left|\Delta\dot{\vec{u}}_\tau(x,t)\right|} = -\dfrac{\vec{\sigma}_\tau(x,t)}{|\vec{\sigma}_\tau(x,t)|}$ $\quad\quad$ якщо $|\vec{\sigma}_\tau(x,t)| = f|\sigma_\nu(x,t)|$ (3.6)

Підкреслимо, що при формулюванні умов (3.4) - (3.6) не вимагається ніякої інформації про фактичні майданчики зчеплення і ковзання.

Сформульовані умови контактної взаємодії описують всі відмічені вище особливості без яких-небудь апріорних припущень про характер рішення, зокрема, про фактичні майданчики контакту і фактичні майданчики зчеплення і ковзання.

Звернемо увагу на те, що умови містять нерівності, тобто мають некласичний характер. Умови дотичної взаємодії включають швидкості відносного ковзання, а не повні переміщення, причому ці співвідношення не є інтегрованими за часом. Цим пояснюється неконсервативний характер сил тертя. Заміна швидкостей повними переміщеннями можлива тільки за спеціальних умов зовнішнього вантаження, розглянутих [4].

Розглянемо тепер формулювання умов взаємодії металу і інструменту в змінних Ейлера. Виникаючі проблеми пов'язані з тим, що в "чистому" підході Ейлера поняття переміщення відсутнє. Тому безпосереднє переформулювання умов, одержаних раніше в змінних Лагранжа, неможливо. Ейлерове трактування завдання відноситься тільки до поточного стану жорстко-пластичного тіла і може бути послідовно проведена тільки для стаціонарних процесів формозміни без урахування зміцнення. В цьому випадку слід вважати, що майданчики фактичного контакту вже відомі, оскільки в рамках підходу Ейлера відсутній кінематичний критерій для визначення областей контакту і областей відставання.

Хай *Vs(x,t)* - вектор швидкостей точок поверхні інструменту. Умови нормальної взаємодії в точках майданчика контакту мають вигляд:

$$Vv\,(x,t) = (Vs)_v\,(x,t);\ \ \sigma_v\,(x,t) \le 0 \qquad (3.7)$$

Позначимо через $\Delta\vec{v}_\tau(x,t)$ різницю дотичних компонент векторів швидкостей металу і інструменту в точках поверхні контакту. Виходячи із закону тертя Амонтона - Кулона, одержуємо наступні умови дотичної взаємодії:

$$|\,\vec{\sigma}_\tau(x,t)\,| \le f\,|\,\sigma_v(x,t)\,,$$

$$\Delta\vec{v}_\tau = 0\,,\ \text{якщо}\ \left|\vec{\sigma}_\tau(x,t)\right| < f\left|\sigma_v(x,t)\right| \qquad (3.8)$$

$$\frac{\Delta\vec{v}_\tau(x,t)}{\left|\Delta\vec{v}_\tau(x,t)\right|} = -\frac{\vec{\sigma}_\tau(x,t)}{\left|\vec{\sigma}_\tau(x,t)\right|}\,,\ \text{якщо}\ \left|\vec{\sigma}_\tau(x,t)\right| = f\left|\sigma_v(x,t)\right| \qquad (3.9)$$

У разі нестаціонарних процесів деформації тіла, що зміцнюється, дослідження пластичного тертя можливо тільки на основі з'єднання Ейлерового і Лагранжевого підходів. Звичайна схема реалізації такого з'єднання припускає розбиття процесу деформації на послідовні етапи, на кожному з яких відбувається переформулювання умов взаємодії в змінних Ейлера. Послідовна фіксація параметрів напружено-деформованого стану проводиться із застосуванням змінних Лагранжа. Інакше кажучи, на кожному етапі визначається форма області і поточний майданчик контакту, щодо яких і формулюються умови (3.7) - (3.9).

Краєві задачі пластичної деформації

Сучасний етап розвитку комп'ютерного моделювання процесів ОМТ характеризується підвищеними вимогами до точності, достовірності, обгрунтованості одержуваних рішень. Вказані вимоги можуть бути виконані тільки з використанням коректних постановок відповідних математичних завдань. Розглянемо постановки завдання пластичної деформації як краєвих завдань для систем диференціальних рівнянь з приватними похідними. Далі, в п. 3.2, будуть представлені так звані варіаційні постановки цих завдань, зручніші для побудови алгоритмів чисельного рішення.

Почнемо з постановок краєвих завдань в рамках підходу Лагранжа. Хай тіло, що деформується, займає в початковому недеформованому стані область, обмежену поверхнею Г. Ця поверхня може складатися з трьох частин Гu, Γ_σ, Гс. На частини Гu, точки тіла закріплені, частина Γ_σ вільна від навантажень. Взаємодія металу і інструменту може відбуватися в точках поверхні Гс. Хай компоненти тензорів напруг і деформацій зв'язані співвідношеннями деформаційного типа.

Сформуємо краєве завдання пластичної деформації як завдання визначення функцій *ui(x,t),* e(/(x,r), *al}.(x,t),* що задовольняють рівнянням рівноваги:

$$\sigma_{ij.j}(x,t) = 0; \qquad (3.10)$$

співвідношенням Коші:

$$\varepsilon_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_{i,j}(x,t) + u_{j,i}(x,t)\right]; \qquad (3.11)$$

визначальним співвідношенням:

$$\sigma_{ij}(x,t) = \frac{\partial W(x,\varepsilon_{ij}(x,t)}{\partial \varepsilon_{ij}}; \qquad (3.12)$$

краєвою умовою:

$$ui\ (x,t) = 0 \text{ на } \Gamma u;$$

$$\sigma_{ij}\ (x,t)\ \&_{j\ (x) =} 0 \text{ на } \Gamma_\sigma \qquad (3.13)$$

умовам (3.1) - (3.3) контактної взаємодії на Гс, а також початкових умовах *ui* (x,0) =S_{ij} (x,0) = σ_{ij} (x,0) = 0.

Одержуємо краєве завдання визначення 15 функцій ui (x,t), Sij *(x,t)* σ_{ij} (x,t), що задовольняють 15 рівнянням (3.10) - (3.12), краєвим умовам (3.1) - (3.3), (15.7) і початковим умовам.

Принципова трудність постановки завдань в рамках теорії пластичності диференціального типа пов'язана з колізією між неінтегрованих визначальних співвідношень і недиференціюванням умов у вигляді нерівностей.

Внаслідок цього постановка повинна містити, як характеристики напружено-деформованого стану, так і швидкості зміни цих характеристик.

Перейдемо від рівнянь рівноваги і співвідношень Коші, записаних відносних повних параметрів ui, Sij, σ_{ij} до їх аналогів, одержаних шляхом почленного диференціювання. Відмітимо, що умови, що містять нерівності, не допускають такого переходу. Щоб перейти до завдання в швидкостях, представимо переміщення, деформації і напругу в наступному вигляді:

$$u_i(x,t) = \int_0^t \dot{u}_i(x,\tau)d\tau\,; \quad \varepsilon_{ij}(x,t) = \int_0^t \dot{\varepsilon}_{ij}(x,\tau)d\tau\,,$$

$$\sigma_{ij}(x,t) = \int_0^t \dot{\sigma}_{ij}(x,\tau)d\tau \qquad (3.14)$$

Сформулюємо тепер завдання визначення напружено-деформованого стану як завдання визначення процесу зміни функцій,, $\dot{\sigma}_{ij}(x,t)$ в кожен момент часу тих, що задовольняють рівнянням рівноваги і співвідношенням Коші в диференціальній формі:

$$\dot{\sigma}_{ij,j}(x,t) = 0\,; \qquad (3.15)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\dot{u}_{i,j}(x,t) + \dot{u}_{j,i}(x,t)\right]; \qquad (3.16)$$

визначальним співвідношенням:

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijkm}(...)\dot{\varepsilon}_{km}\,, \qquad (3.17)$$

граничною умовою:

$$\dot{u}_i(x,t) = 0 \text{ на } \Gamma u$$

$$\dot{\sigma}_{ij}(x,t)v_j = 0 \text{ на } \Gamma \qquad (3.18)$$

умовою контактної взаємодії – (3.1) – (3.6) з урахуванням співвідношень (3.14), а також початковою умовою:

ui (x,0) = Sij (x,0) = σ_{ij} (x,0) = 0.

Розглянемо, використовуючи підхід Ейлера, постановку завдання жорстко - пластичної течії. Хай Ω Ω - область простору, в якому відбувається пластичний перебіг металу. Напружено-деформований стан описуємо вектором швидкостей &i(x,t), тензором швидкостей деформацій ξ ξ_{ij} (x,t) тензором напруг $_{ij}$ (x,t).

Відповідне краєве завдання полягає у визначенні функцій &i (x,t), ξ_{ij} (x,t), $_{ij}$ (x,t), що задовольняють рівнянням рівноваги:

$$\sigma_{ij,j}(x,t) = 0; \qquad (3.19)$$

співвідношенням Коші - Стоксу:

$$\xi_{ij}(x,t) = \frac{1}{2}\left[v_{i,j}(x,t) + v_{j,i}(x,t)\right]; \qquad (3.20)$$

співвідношенням Сен-Венана - Льові - Мізеса:

$$s_{ij}(x,t) = \frac{2F(\xi_u)}{\xi_u}\xi_{ij}(x,t); \qquad (3.21)$$

краєвим умовам:

$$ui\ (x,t) = 0 \text{ на } \Gamma u; \qquad (3.22)$$

умовам (3.7) - (3.9) взаємодії металу і інструменту.

Підкреслимо, що під областю Ω. розуміється область простору, в якій фактично відбувається пластична деформація. Ця область повинна бути відома до рішення задачі.

Представлені постановки краєвих завдань можуть бути використані як основа для дослідження пластичної деформації тільки в достатньо простих окремих випадках. Рішення складніших задач вимагає перетворення постановок завдань до інших форм, зручніших для цілей комп'ютерного моделювання, зокрема, до варіаційних формулювань.