

Метод простих ітерацій

Цей найпростіший ітераційний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в тому, що система рівнянь $A\bar{x} = \bar{b}$ перетворюється до вигляду

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c} \quad (1)$$

і її розв'язок знаходиться як границя послідовності

$$\bar{x}^{n+1} = B\bar{x}^n + \bar{c}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Ітераційний процес (2) збігається до розв'язку системи зі швидкістю геометричної прогресії, якщо норма матриці $\|B\| < 1$. При цьому, початкове наближення $\bar{x}^0$ можна вибирати довільно. На практиці за початкове наближення $\bar{x}^0$ беруть стовпець вільних членів $\bar{c}$.

Нагадаємо визначення основних норм у просторах векторів і матриць. Якщо в просторі векторів $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ введена норма $\|\bar{x}\|$, то погодженою з нею нормою в просторі матриць A називають норму

$$\|A\| = \sup_{\bar{x} \neq 0} \|A\bar{x}\| / \|\bar{x}\|.$$

Найбільш вживані в просторі векторів наступні норми

$$\|\bar{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq m} |x_j|,$$

$$\|\bar{x}\|_1 = \sum_{j=1}^m |x_j|,$$

$$\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m |x_j|^2} = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})},$$

а погодженими з ними нормами в просторі матриць є відповідно норми

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right);$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right);$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq m} \lambda_{A^* A}^i},$$

тут λ_D^i – власне значення матриці D , A^* – матриця, сполучена до матриці A .

Для приведення вихідної системи до вигляду (1) практично роблять наступне. Із заданої системи виділяють рівняння з коефіцієнтами при невідомих, модулі яких більші від суми модулів інших коефіцієнтів при невідомих у рівнянні. Кожне виділене

рівняння вписують у такий рядок нової системи, щоб найбільший за модулем коефіцієнт виявився діагональним.

З останніх невикористаних і виділених рівнянь системи складають незалежні між собою лінійні комбінації з таким розрахунком, щоб був дотриманий зазначений вище принцип комплектування нової системи, й усі вільні рядки виявилися заповненими. При цьому треба подбати, щоб кожне невикористане раніше рівняння потрапило хоча б в одну лінійну комбінацію, що є рівнянням нової системи.

Якщо коефіцієнти й вільні члени даної системи є наближеними числами, написаними з p знаками, то для одержання розв'язку з m числом десяткових знаків ($m \leq p$) слід в значеннях послідовних наближень утримувати $m+1$ десяткових знаків і послідовні наближення обчислювати до їхнього збігу, після чого треба округлити результат на один знак.

Приклад.

Методом простої ітерації з точністю до двох вірних десяткових знаків після коми розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 3 = 0, & (A) \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0, & (B) \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 1 = 0, & (B) \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0, & (Г) \end{cases}$$

Розв'язок. У рівнянні (Б) коефіцієнт при x_3 за модулем більше від суми модулів інших коефіцієнтів при невідомих, тому його можна прийняти за третє рівняння нової системи. Коефіцієнт при x_1 в рівнянні (Г) також більше від суми модулів інших коефіцієнтів рівняння (Г), тому можна прийняти це рівняння за перше рівняння нової системи. Таким чином, нова система має такий вигляд:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0, & (I) \\ \dots\dots\dots, & (II) \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0, & (III) \\ \dots\dots\dots, & (IV) \end{cases}$$

Аналізуючи дану систему, легко помітити, що для одержання рівняння (II) з максимальним за модулем коефіцієнтом при x_2 досить скласти різницю (А)–(Б):

$$x_1 + 5x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 - 1 = 0 \quad (II).$$

Тепер у нову систему ввійшли рівняння (А), (Б) і (Г), тому в рівняння (IV) обов'язково повинне ввійти рівняння (В) даної

системи. Підбором переконуємося, що за рівняння (IV) можна взяти лінійну комбінацію $2(A) - (B) + 2(B) - (Г)$, тобто

$$3x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 9x_4 - 10 = 0 \quad (IV).$$

У підсумку одержали перетворену систему рівнянь (I)-(IV) еквівалентну даній. Розв'язавши цю систему щодо діагональних невідомих, будемо мати систему:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \cdot x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 - 0,2x_4 - 0,4, \\ x_2 = -0,2x_1 + 0 \cdot x_2 - 0,2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0,2, \\ x_3 = 0,2x_1 - 0,4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0,2x_4 - 0,4, \\ x_4 = 0,333x_1 + 0 \cdot x_2 - 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 - 1,111, \end{cases}$$

для знаходження розв'язку якої можна застосувати метод простої ітерації, тому що для неї виконується достатня умова збіжності. За нульове наближення коренів системи приймемо стовпець вільних членів, тобто $x_1^{(0)} = -0,4$; $x_2^{(0)} = 0,2$; $x_3^{(0)} = -0,4$; $x_4^{(0)} = -1,111$.

Підставляючи ці значення в праві частини рівнянь останньої системи, одержимо перші наближення коренів:

$$x_1^{(1)} = -0,2 \cdot 0,2 + 0,1(-0,4) - 0,2(-1,111) - 0,4 \approx -0,258;$$

$$x_2^{(1)} = -0,2(-0,4) - 0,2(-0,4) + 0,2 \approx 0,360;$$

$$x_3^{(1)} = 0,2(-0,4) - 0,4 \cdot 0,2 + 0,2(-1,111) - 0,4 \approx -0,782;$$

$$x_4^{(1)} = 0,333(-0,4) - 1,111 \approx -1,244.$$

Далі, підставляючи ці знайдені наближення знову в праві частини системи, одержимо другі наближення коренів:

$$x_1^{(2)} = -0,301; \quad x_2^{(2)} = 0,408; \quad x_3^{(2)} = -0,844; \quad x_4^{(2)} = -1,197.$$

Після нової підстановки будемо мати треті наближення коренів і т.д.

Для одержання коренів з необхідною точністю в одержуваних наближеннях утримуємо три знаки після коми й ітерації виконуємо доти, поки утримувані знаки в результатах перестануть змінюватися. Зведемо результати обчислень у таблицю

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	-0,4	0,2	-0,4	-1,111
1	-0,258	0,360	-0,782	-1,244
2	-0,301	0,408	-0,844	-1,197
3	-0,327	0,429	-0,863	-1,212
4	-0,330	0,438	-0,879	-1,220
5	-0,332	0,442	-0,885	-1,221
6	-0,333	0,443	-0,887	-1,222

7	-0,333	0,444	-0,888	-1,222
8	-0,333	0,444	-0,889	-1,222
9	-0,333	0,444	-0,889	-1,222

Як видно з таблиці, на сьомому кроці ітерацій утримувані десяткові знаки в результатах перестали змінюватися. Округляючи отримані значення коренів на один знак, одержуємо $x_1 \approx -0,33$; $x_2 \approx 0,44$; $x_3 \approx -0,89$; $x_4 \approx -1,22$.

Завдання до лабораторної роботи № 3

Методом простої ітерації з точністю до двох знаків після коми розв'яжіть систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^6 a_{ij}x_j = b_i, \quad i=1,2,\dots,6.$$

Варіанти завдань

№ варіанта	Матриця коефіцієнтів системи A						Стовпець вільних членів $\bar{b}$
1	2,1	0,3	4,4	-0,1	1,4	0,0	-2,25
	0,0	2,2	-3,4	0,3	-0,8	1,4	4,07
	5,2	-1,0	0,4	0,7	1,1	-0,1	3,69
	-0,6	1,5	3,2	-2,1	1,6	0,6	-8,02
	1,3	0,2	0,0	0,8	6,1	-1,4	-16,33
	0,4	0,0	-2,7	1,4	-1,8	3,1	18,06
2	3,3	4,2	0,7	5,4	2,1	1,6	24,87
	-0,1	7,2	1,8	-2,3	1,1	0,3	7,81
	-2,1	3,0	-0,6	-3,4	-0,5	0,0	0,20
	0,4	0,0	1,9	6,1	-0,8	-2,1	11,00
	4,7	-0,6	3,3	7,1	1,9	-4,6	0,12
	0,0	0,2	-1,6	2,4	0,7	5,7	22,04
3	0,4	7,6	2,0	-0,3	1,8	2,1	29,95
	4,8	-5,2	-2,3	1,6	0,8	-3,5	-20,33
	-2,1	3,3	-0,4	3,4	-0,5	0,0	2,11
	0,6	2,4	-1,7	3,0	-8,0	1,1	-1,91
	6,3	-0,4	1,4	0,8	0,0	1,0	7,01
	4,2	-1,7	6,9	0,0	1,1	9,2	17,25

4	1,7	-3,1	2,2	0,6	1,8	-0,1	2,68
	1,2	-1,0	0,7	-0,9	0,0	5,9	-6,17
	-0,1	7,2	4,8	2,3	5,1	3,3	-35,57
	2,1	1,3	-5,2	1,4	3,3	4,6	-25,65
	8,4	-1,6	0,0	0,7	-1,8	1,2	8,50
	1,6	8,7	-0,2	0,8	-2,0	1,1	-14,46
5	-1,1	-0,8	0,1	0,6	5,7	2,0	11,83
	-2,7	1,9	-5,9	1,3	-2,2	1,0	16,24
	8,8	-1,5	0,3	-0,7	1,2	-2,1	18,64
	2,1	3,6	-1,5	-2,1	0,0	4,6	-37,76
	0,3	7,4	-1,9	1,1	0,9	0,2	-7,90
	2,3	-2,0	3,9	4,2	0,2	-1,9	-8,78
6	3,4	-1,0	2,2	1,0	4,8	1,4	20,16
	2,2	0,6	6,8	0,0	-0,1	-0,4	-1,58
	4,4	-2,9	-1,5	-0,7	1,3	0,8	15,62
	-1,3	-0,8	0,1	0,6	2,0	5,7	-0,39
	-2,5	5,8	1,1	3,1	0,0	2,4	-11,95
	0,1	0,3	-1,0	5,4	-1,9	0,1	-12,82
7	2,2	-0,4	0,6	5,2	-1,2	0,1	9,43
	-2,1	3,6	4,7	-1,3	-2,8	2,0	7,77
	0,0	0,2	-1,0	0,0	6,8	1,4	-6,20
	4,9	-1,9	-2,7	1,2	0,3	-1,0	10,28
	-0,4	2,1	2,0	-0,3	1,8	7,6	16,05
	-2,9	4,0	1,1	-1,6	3,7	-1,1	-9,78
8	3,4	1,6	2,2	-1,2	4,2	-2,1	20,72
	-2,3	0,1	6,6	-0,4	0,0	1,2	6,52
	7,9	-0,3	1,3	-0,1	1,8	0,1	13,20
	2,2	-1,0	3,0	-1,2	3,4	5,8	5,70
	1,4	8,9	-0,1	0,0	-1,1	-0,7	-4,31
	3,2	-2,0	1,7	4,1	-1,9	0,4	0,23
9	2,2	-0,1	-0,3	0,2	5,3	-1,7	-6,11
	2,6	0,0	4,1	-1,2	2,1	-0,1	-18,21
	6,3	0,1	-2,7	0,2	-1,3	-0,5	-2,48
	-3,1	2,4	1,4	2,1	0,5	3,7	13,14
	-0,4	7,9	2,0	-0,2	-1,7	1,9	21,60
	3,3	-1,9	-2,1	4,8	0,0	1,7	2,68
10	-3,9	2,3	0,0	-1,5	3,8	-4,1	15,40
	0,4	-1,6	5,3	1,0	-0,2	-0,1	2,83
	4,6	0,7	2,1	-1,4	2,7	-3,6	35,68
	0,1	1,3	1,6	-2,1	0,2	6,7	-10,10
	2,2	5,2	0,9	-1,1	-2,1	1,2	-0,95
	-1,3	1,8	-0,2	8,6	-2,2	0,0	-29,34

11	0,1	0,0	0,9	-1,1	6,2	0,6	-2,06
	-2,3	3,6	4,3	2,4	0,3	-1,2	2,86
	6,8	0,1	-1,1	-1,4	2,0	-0,8	16,15
	-2,7	1,4	2,0	0,0	-3,4	4,3	-6,29
	-1,0	8,1	0,0	1,2	-0,1	0,4	-10,12
	3,3	-1,8	2,2	4,4	2,1	0,0	34,53
12	0,3	-0,9	0,0	1,1	6,3	-3,0	-18,47
	1,3	0,8	4,1	2,5	-3,0	-1,7	-11,85
	5,7	-1,5	-0,4	1,2	0,0	0,6	0,69
	2,7	3,2	-2,0	1,3	-3,6	4,9	33,99
	0,1	6,8	1,2	-2,0	-0,8	1,2	14,64
	-4,7	2,4	-3,9	-3,9	0,4	2,1	24,29
13	0,4	0,6	2,2	5,4	-1,2	-0,1	-26,32
	1,7	-2,2	4,1	-3,2	1,9	2,1	13,22
	-2,0	-1,1	0,0	0,2	6,8	1,2	23,50
	3,1	-2,4	-3,8	2,0	0,0	4,6	-20,28
	-0,9	6,8	1,6	-0,2	1,2	-1,0	13,06
	4,5	2,4	-2,0	3,9	-1,1	4,1	-29,17
14	-3,5	-1,3	-2,2	1,4	3,6	0,4	-22,69
	-2,4	1,0	0,1	6,9	1,6	0,0	-13,35
	3,9	1,5	2,6	-1,2	1,0	-4,8	11,33
	0,1	7,1	0,7	-1,1	-1,9	1,6	-17,57
	-0,9	6,8	1,6	-0,2	1,2	-1,0	-23,88
	1,4	-0,6	-8,8	2,1	-0,6	2,8	-30,08
15	2,1	0,4	7,7	-1,9	0,4	-1,7	-19,76
	-2,2	-3,1	0,8	4,2	-3,8	1,2	-15,45
	0,1	-1,4	-1,8	2,0	0,0	6,6	1,03
	2,4	-3,4	1,1	-4,1	0,9	2,1	-20,28
	-0,7	2,9	4,6	3,2	1,6	-0,8	3,86
	7,5	0,4	-2,0	0,9	-1,1	0,1	14,59
16	4,9	-2,7	0,9	1,4	-3,5	0,0	-29,45
	1,3	-0,8	-2,0	1,2	6,8	0,1	3,41
	-2,7	1,4	3,3	-2,5	0,0	-0,8	20,11
	0,2	7,0	-1,5	-0,1	-2,3	1,0	-7,93
	1,0	-2,1	3,6	4,4	0,9	2,5	-21,21
	9,1	-0,5	1,2	-2,4	0,0	-0,6	-28,18
17	0,1	0,0	0,9	-1,1	6,0	2,3	3,13
	-3,4	1,2	-2,7	4,8	-3,9	0,9	-4,70
	0,3	0,0	8,1	1,5	-1,0	-0,7	-9,75
	1,9	-4,1	0,0	-2,0	3,7	0,9	13,91
	-0,8	1,1	-2,8	-1,4	0,1	2,2	2,47
	-1,7	0,4	-1,9	7,7	0,4	2,1	6,41

18	1,2	0,0	-0,4	6,6	0,1	-2,5	16,04
	-3,7	1,3	2,8	-1,7	-4,2	0,0	19,46
	0,9	1,5	0,6	-1,2	1,0	6,8	25,20
	-1,6	-2,4	-3,7	4,1	0,0	2,9	9,52
	4,8	-1,9	1,8	-0,2	-3,5	0,0	11,16
	7,5	0,4	-2,0	0,9	-1,1	0,1	33,70
19	-3,7	0,9	4,1	-2,2	1,9	0,0	21,55
	0,4	0,6	2,2	5,4	-1,2	-0,1	-22,09
	1,9	-2,3	-3,5	2,0	0,4	-4,2	2,71
	-7,8	-0,3	-1,9	0,4	1,7	2,2	12,63
	0,4	-0,2	1,1	-0,6	2,3	5,7	-4,15
	2,3	1,7	0,9	3,4	-4,4	-1,9	-27,60
20	1,2	0,0	-0,4	6,6	0,1	-2,5	-10,39
	-3,9	2,6	4,1	-0,8	2,4	1,6	12,90
	0,0	-0,9	6,1	0,7	-1,0	1,2	-10,26
	2,4	0,8	-2,9	3,3	0,9	-1,6	4,21
	-4,1	3,7	2,5	-1,1	2,2	3,0	-3,00
	0,0	1,9	0,1	-1,3	0,2	7,8	-15,20
21	1,7	-0,8	-2,1	1,1	0,4	0,0	14,51
	-0,7	-1,1	0,0	0,3	8,1	1,3	20,69
	2,8	1,4	-1,0	-2,6	-0,7	3,1	1,51
	-0,1	5,2	-1,2	2,2	0,6	-0,4	-8,76
	7,9	0,4	-0,2	0,0	-1,0	1,2	3,98
	1,8	-2,4	3,5	-1,1	0,8	2,7	-5,78
22	1,9	-1,7	0,3	2,1	-7,9	-0,4	16,42
	-0,9	0,0	6,8	-2,1	-0,9	1,3	0,66
	2,1	3,3	-4,0	1,7	1,1	2,4	8,48
	-4,6	-2,8	1,3	3,5	0,9	0,0	24,85
	1,5	0,6	2,2	-0,4	1,8	-2,3	-14,05
	-0,5	0,3	1,3	2,9	0,1	6,2	35,58
23	1,8	-5,2	0,2	-0,4	0,0	2,2	-1,16
	-2,1	1,7	-1,6	2,8	-3,4	0,0	-25,32
	0,9	-1,4	0,2	-2,1	1,8	-3,4	11,05
	-4,4	2,9	-3,5	1,9	2,4	1,6	-14,78
	5,8	0,5	-2,4	0,3	1,4	-0,1	25,47
	0,0	2,2	-1,2	8,0	-0,1	1,7	-9,90
24	-2,6	1,7	0,4	-2,3	3,1	0,0	-23,91
	1,4	-3,2	-2,9	0,7	-1,8	2,2	16,04
	-0,1	0,2	-1,0	5,2	-0,8	1,4	9,91
	0,0	2,1	8,4	-0,2	1,6	-1,3	1,18
	3,6	-4,1	0,7	2,4	1,9	-3,2	45,77
	0,4	-0,1	-1,1	0,0	8,0	1,2	-1,15

25	-1,2	5,7	-0,5	0,2	-0,1	-0,9	11,76
	-0,8	1,9	-1,4	1,1	0,0	6,6	43,81
	4,5	-3,4	1,9	-2,8	3,7	0,0	-29,38
	2,6	1,8	-2,1	0,9	-1,1	-0,6	13,52
	6,7	-0,1	-1,2	1,7	0,5	0,0	11,10
	-1,5	2,0	0,8	0,0	-2,3	1,9	11,96
26	-0,2	0,3	2,4	5,3	1,6	-0,3	-11,76
	4,6	-3,0	-2,7	0,0	-1,9	3,5	-4,58
	1,1	2,9	0,8	-3,1	0,7	-2,3	7,68
	0,0	2,1	8,4	0,2	-1,8	1,3	-3,34
	0,4	-0,1	1,2	0,0	8,1	-1,0	30,76
	-2,8	1,5	-3,1	-2,2	0,0	3,3	20,42
27	1,9	-4,6	0,0	3,8	-2,4	1,2	10,07
	0,6	6,0	-0,4	-1,1	0,9	0,0	-18,17
	-0,8	2,0	-1,4	-0,1	1,1	6,8	-12,57
	2,4	-3,9	1,6	4,1	-2,7	-1,0	15,23
	-1,1	0,0	0,5	1,7	0,8	0,0	3,21
	6,3	-1,4	0,0	2,0	0,4	-0,7	11,36
28	2,1	0,4	7,7	-1,9	0,4	-1,7	-8,75
	-0,8	1,2	0,0	2,0	-1,6	0,4	4,72
	3,1	-2,8	-3,6	1,4	0,9	-2,2	3,07
	1,3	-0,8	-2,0	1,2	-6,8	0,1	19,48
	-0,7	1,0	1,5	-8,1	0,0	0,3	-11,57
	0,9	0,0	0,1	0,0	1,2	-0,8	-2,73
29	2,5	-1,8	-3,4	0,0	2,9	1,4	-10,68
	0,0	6,2	2,3	1,1	-0,8	-0,4	10,44
	-1,8	2,1	0,7	-1,5	2,4	0,1	20,68
	0,6	0,0	1,2	-0,4	-2,5	5,7	-7,83
	8,9	-0,6	1,3	-2,0	0,2	0,7	-32,61
	-3,3	2,9	-4,1	1,8	0,0	-2,5	7,49
30	-0,7	-1,1	1,6	8,0	0,1	-0,3	21,43
	2,5	1,7	-3,1	0,0	-1,2	2,1	-1,33
	-1,1	0,9	2,2	-1,4	2,6	-0,7	-7,79
	2,0	-0,2	7,8	2,1	0,1	-1,6	21,91
	-1,2	-0,8	2,0	0,9	-6,6	0,1	4,83
	3,6	2,7	-3,3	-1,8	0,0	2,1	-6,21