Метод Ньютона (дотичних)

Цей метод дуже ефективний для розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. Його основна перевага полягає в тому, що при порівняно простій схемі обчислень він має швидку збіжність.

Нехай єдиний корінь ξ рівняння

$$f(x)=0 \tag{1}$$

розташований усередині інтервалу $[\alpha,\beta]$, причому $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні і зберігають визначені знаки $\forall x\in[\alpha,\beta]$. Відповідно до методу Ньютона корінь вихідного рівняння відшукується як границя ітераційної послідовності

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)},\ (i=0,1,2,...). \tag{2}$$

Початкове наближення $x_0\in[\alpha,\beta]$ і повинне задовольняти умові

$$f(x_0)f''(x_0)>0\ . \tag{3}$$

Геометрично метод Ньютона еквівалентний заміні рівняння кривої $y=f(x)$ рівнянням дотичної, проведеної до цієї кривої в точці $x=x_i$. За наближене значення кореня береться абсциса точки перетину цієї дотичної з віссю Ox.

Для оцінки точності наближення x_i можна скористатися формулою

$$|x_i-\xi|\le\frac{|f(x_i)|}{m_1}\ , \tag{4}$$

де $|f'(x)|\ge m_1>0,\ \forall x\in[\alpha,\beta],$ (5)

ξ – точне значення кореня.

Знайдемо з точністю $\varepsilon=0{,}0001$ корінь рівняння $x^3-3x^2+3=0$. Виконавши процедуру відділення коренів так, як описано вище (див. Розділ 3. Загальні положення) одержимо три інтервали $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$, що містять корінь. Знайдемо корінь, розташований в інтервалі $(0;2)$. Цей інтервал методом бісекції у попередньому пункті зменшили так, щоб його довжина була $\le 0{,}1$ (див. пункт 3.2). Маємо інтервал $(1{,}375;\ 1{,}3125)$.

Подальше уточнення кореня проведемо методом Ньютона.

Друга похідна $f''(x)$ на цьому інтервалі більше нуля, перша похідна $f'(x)$ – менше нуля. За початкове наближення x_0 візьмемо лівий кінець інтервалу, тобто $x_0=1{,}3125$. Тоді

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1{,}3125-\frac{0{,}093}{(-2{,}707)}=1{,}3469,\quad f(x_1)=0{,}00115.$$

Обчислимо значення першої похідної $f'(x)$ на другому кінці інтервалу й оцінимо похибку отриманого наближення $f'(1{,}375) \approx 2{,}578$, тобто $m_1 = 2{,}578$.

$$|x_1 - \xi| \le \frac{|f(x_1)|}{m_1} = \frac{0{,}00115}{2{,}578} \approx 0{,}00445 > 0{,}0001 \ .$$

Точність, з якою обчислене перше наближення, недостатня. Тому робимо наступний крок

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}3496 - \frac{0{,}0015}{(-2{,}639)} = 1{,}3473, \quad f(x_2) = 2 \cdot 10^{-7} \ ,$$

$$|x_2 - \xi| \le \frac{|f(x_2)|}{m_1} = \frac{2 \cdot 10^{-7}}{2{,}578} \approx 7{,}76 \cdot 10^{-8} < 0{,}0001 \ .$$

Як видно з оцінки похибки другого наближення, ми одержали значення кореня з похибкою, що не перевищує задану.

Корені, розташовані в двох інших інтервалах $(-\infty;0)$, $(2;+\infty)$ знаходяться аналогічно.

Завдання до лабораторної роботи № 6

Методом Ньютона з точністю до $\varepsilon = 0{,}0001$ обчисліть всі дійсні корені рівняння

$$a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0 \ .$$

Значення коефіцієнтів a_i $(i = 1,2,3,4)$ вибираються з таблиці варіантів.

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_1	1,6	-2,4	0,8	3,6	-1,2	6,4	-2,8	1,2	-0,4	5,2

Кое-фіцієнт a	Шифр по горизонталі									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_2	5,1	3,3	-6,3	-1,5	5,7	6,3	1,2	-6,9	5,4	-2,1
a_3	0,2	0	0,8	0	-1,2	0,4	0	-0,6	1,0	0
a_4	-2	3	7	-1	-4	6	-3	8	9	-5