## Загальні положення

У багатьох випадках первісна $F(x)$ функції $f(x)$ не може бути знайдена за допомогою елементарних засобів чи є занадто складною. Внаслідок цього обчислення визначеного інтеграла від такої функції $f(x)$ за формулою Ньютона-Лейбніца може бути складним чи навіть неможливим.

Крім того, підінтегральна функція може задаватися за допомогою таблиці, і тоді саме поняття первісної втрачає зміст. Тому важливе значення мають наближені і, у першу чергу, чисельні методи обчислення визначених інтегралів.

Звичайний прийом побудови квадратурних формул полягає в тому, що дану функцію $f(x)$ заміняють інтерполюючою чи апроксимуючою функцією $\varphi(x)$ простого вигляду (наприклад, поліном), а потім наближено покладають:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx .$$

Функція $\varphi(x)$ повинна бути така, щоб інтеграл від неї обчислювався безпосередньо.

Якщо в якості $\varphi(x)$ взяти інтерполяційний многочлен Лагранжа $L_n(x)$ з вузлами інтерполяції $x_1,...,x_n$ з відрізка інтегрування, то одержимо квадратурну формулу Ньютона-Котеса. Якщо $L_n(x)$ – многочлен другого ступеня з вузлами $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$, $x_3 = b$, то інтегруючи його, одержимо окремий випадок квадратурної формули Ньютона-Котеса – квадратурну формулу Сімпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)\right] .$$

Часто виникає задача обчислення інтегралів, де підінтегральна функція чи її похідні невисокого порядку мають ділянки різкої зміни, наприклад, обертаються на нескінченність. Такі функції погано наближаються многочленами відразу на усьому відрізку інтегрування. У таких випадках часто виявляється більш зручним розбити вихідний відрізок на частини й на кожній частині застосувати свою квадратурну формулу. Підсумовуючи потім квадратурні формули за усіма елементарними відрізками, одержимо так звану складену чи узагальнену квадратурну формулу.

## Квадратурна формула Гауса

Якщо в квадратурній формулі Ньютона-Котеса, що, як відомо, є точною для многочленів ступеня $n-1$, за вузли інтегрування взяти нулі многочлена Лежандра ступеня $n$, ортогонального до усіх многочленів нижчого степеня, то одержимо квадратурну формулу Гауса, точну для многочленів ступеня $2n-1$:

$$\int_a^b f(x)p(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n} D_j f(x_j)\ . \qquad (1)$$

Для практичного застосування формул Гауса необхідно мати в розпорядженні вузли й коефіцієнти цих квадратур. Наведемо параметри квадратур Гауса для відрізка $[-1,1]$ при $p(x)\equiv 1$. У цьому випадку залишковий член $R(f)$ для квадратурної формули (1) має вигляд:

$$R(f) = f^{(2n)}(\xi)\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n!)^3(2n+1)}\ .$$

Таблиця вузлів і коефіцієнтів квадратур Гауса для відрізка $[-1,1]$ при $p(x)\equiv 1$.

| $n$ | $j$ | $d_j$ | $D_j$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 2,00000000 |
| 2 | 2; 1 | ±0,57735027 | 1,00000000 |
| 3 | 3; 1 | ±0,77459667 | $\frac{5}{9} = 0{,}55555556$ |
| | 2 | 0,00000000 | $\frac{8}{9} = 0{,}88888889$ |
| 4 | 4; 1 | ±0,86113631 | 0,34785484 |
| | 3; 2 | ±0,33998104 | 0,65214516 |
| 5 | 5; 1 | ±0,90617985 | 0,23692688 |
| | 4; 2 | ±0,53846931 | 0,47862868 |
| | 3 | 0,00000000 | 0,56888889 |
| 6 | 6; 1 | ±0,93246951 | 0,17132450 |
| | 5; 2 | ±0,66120939 | 0,36076158 |
| | 4; 3 | ±0,23861919 | 0,46791394 |
| 7 | 7; 1 | ±0,94910791 | 0,12948496 |
| | 6; 2 | ±0,74153119 | 0,27970540 |
| | 5; 3 | ±0,40584515 | 0,38183006 |
| | 4 | 0,00000000 | 0,41795918 |
| 8 | 8; 1 | ±0,96028986 | 0,10122854 |
| | 7; 2 | ±0,79666648 | 0,22238104 |
| | 6; 3 | ±0,52553242 | 0,31370664 |
| | 5; 4 | ±0,18343464 | 0,36268378 |

***Приклад.*** Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+2x}\,dx,$$

застосовуючи формулу Гауса з трьома вузлами інтегрування. Оцінити похибку отриманого результату.

***Розв'язок.*** Оцінку похибки виконаємо за правилом Рунге. Тому інтеграл обчислимо двічі. Спочатку застосуємо формулу Гауса з трьома вузлами по всьому інтервалу інтегрування. Позначимо це наближене значення $I_1$. Потім розіб'ємо інтервал інтегрування $[0;1]$ на два – $[0;0{,}5]$ і $[0{,}5;1]$, й за допомогою тієї ж формули обчислимо значення інтеграла на цих відрізках. Підсумовуючи отримані значення, знайдемо $I_2$.

Відрізок інтегрування $[-1{,}1]$, для якого наведена таблиця вузлів і коефіцієнтів квадратур Гауса, заміною змінних $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$ відображається на $[a;b]$. Це дозволяє нам визначити вузли інтегрування

$$x_1 = \frac{1+0}{2} + \frac{1-0}{2}d_1 = 0{,}11270;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}d_2 = 0{,}5000;$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}d_3 = 0{,}88730.$$

Відповідні коефіцієнти квадратурної формули (1) для нашого випадку будуть:

$$C_1 = \frac{b-a}{2}D_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{18};$$

$$C_2 = \frac{b-a}{2}D_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9} = \frac{4}{9};$$

$$C_3 = \frac{b-a}{2}D_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{5}{18}.$$

Подальші обчислення зведемо в таблицю

| $j$ | $x_j$ | $y_j$ | $C_j$ | $C_j \cdot y_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,11270 | 1,10698 | 5/18 | 0,30749 |
| 2 | 0,50000 | 1,41421 | 4/9 | 0,62854 |
| 3 | 0,88730 | 1,66571 | 5/18 | 0,46270 |
| $I_1 = \sum_{j=1}^{3} C_j y_j = 1{,}39873$ | | | | |
| 1 | 0,05635 | 1,05485 | 5/36 | 0,14651 |
| 2 | 0,25000 | 1,22474 | 2/9 | 0,27217 |
| 3 | 0,44365 | 1,37379 | 5/36 | 0,19080 |
| 4 | 0,55635 | 1,45351 | 5/36 | 0,20188 |
| 5 | 0,75000 | 1,58114 | 2/9 | 0,35136 |
| 6 | 0,94365 | 1,69921 | 5/36 | 0,23600 |
| $I_2 = \sum_{j=1}^{6} C_j y_j = 1{,}39872$ | | | | |

$$I = I_2 + \frac{I_2 - I_1}{63} = 1{,}3987198.$$

$$\varepsilon = \frac{|I_2 - I_1|}{63} \approx 2 \cdot 10^{-7}.$$

## Завдання до лабораторної роботи № 9

У лабораторній роботі треба за допомогою квадратурної формули Гауса, з похибкою, що не перевищує $\varepsilon = 10^{-6}$, обчислити заданий визначений інтеграл.

### *Варіанти завдань*

1. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi} \cos\left(x + \sin x^2\right)dx$;
2. $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \lg\left(2 - \cos 3x\right)dx$;
3. $\int\limits_{1{,}5}^{3} x^4 \cdot 2^{-x^2}\, dx$;
4. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sin\left(x^2 - 2x\right)}{x^2}dx$;
5. $\int\limits_{0}^{\pi/4} tg\left(x^2 - \cos x\right)dx$;
6. $\int\limits_{1{,}1}^{4{,}3} \ln\left(x + x^{-1}\right)dx$;
7. $\int\limits_{0{,}17}^{0{,}48} ch\left(2x - x^3\right)dx$;
8. $\int\limits_{-2{,}1}^{1{,}1} \frac{e^x}{2x + 7}dx$;
9. $\int\limits_{-\pi}^{-\pi/6} \lg\left(3 + \sin 3x\right)dx$;
10. $\int\limits_{0{,}23}^{0{,}42} ch\left(x - 2x^{-1}\right)dx$;
11. $\int\limits_{3}^{4{,}5} x^{1/3} \cdot 3^{-x^2}\, dx$;
12. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos\left(x^2 - \sin 2x\right)dx$;
13. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi} \left(3 - x^2 \cos x^4\right)dx$;
14. $\int\limits_{0}^{3\pi/2} 4^{\cos^2 x}\, dx$;
15. $\int\limits_{-1}^{2{,}1} \frac{3^x}{3x + 4}dx$;
16. $\int\limits_{1}^{3{,}2} th\left(2x + x^2\right)dx$;
17. $\int\limits_{1}^{1{,}3} \cos\left(3x + x^{-1}\right)dx$;
18. $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/2} \sin\left(1 + \cos^2 x\right)dx$;
19. $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi} \lg\left(4 + \sin 2x\right)dx$;
20. $\int\limits_{1{,}1}^{4{,}2} x^2 \cdot 4^{-x^4}\, dx$;

21. $\int_{1,6}^{3,1} x^{-2}\cos\left(2x - x^2\right)dx$;

22. $\int_{0}^{7\pi/2} \sin\left(2\cos x + 1\right)dx$;

23. $\int_{1}^{4,3} 5^{-\left(x + x^{-1}\right)}dx$;

24. $\int_{1,1}^{4,2} 2^{x}\left(3x - 2\right)^{-1}dx$;

25. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} tgx^2 dx$;

26. $\int_{-\pi/2}^{5\pi/6} \left(2 - \cos x^3\right)dx$;

27. $\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \sin\left(x^3 + \cos x^2\right)dx$;

28. $\int_{-\pi/3}^{\pi} 3^{\sin^2 x} dx$;

29. $\int_{1}^{3,5} x^{-3}\sin\left(x^3 - 2x\right)dx$;

30. $\int_{1,1}^{3,2} x^4 \cdot 2^{-(x+3)^2} dx$.