Метод Гальоркіна

Нехай дана крайова задача

$$Ly \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{cases} \qquad (2)$$

Для знаходження наближеного розв'язку цієї задачі вчинимо так. Задаємося на (a,b) деякою системою лінійно-незалежних функцій $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$, неперервних і двічі неперервно-диференційованих. Причому функція $u_0(x)$ повинна задовольняти неоднорідним крайовим умовам (2), а $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ повинні задовольняти однорідним крайовим умовам, тобто крайовим умовам

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Розглянемо функцію y_n як лінійну комбінацію

$$y_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \qquad (3)$$

де c_i – невідомі константи.

Якщо базисні функції вибрати так, як це було описано вище, то y_n буде задовольняти крайовим умовам (2), незалежно від вибору c_i.

Розглянемо функцію $R(x, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) = Ly_n - Ly$. Вона називається відхилом і являє собою різницю лівої і правої частини рівняння (1), в яке замість точного розв'язку $y(x)$ підставляється наближений розв'язок $y_n(x)$ у вигляді (3). Якщо відхил дорівнює нулю, то маємо випадок точного розв'язку. Задача розв'язання звичайного диференціального рівняння зводиться до того, щоб відхил був мінімальним. Тоді вираз (3) буде наближеним розв'язком задачі.

Підбір коефіцієнтів c_i породжує різні методи.

Суть методу Гальоркіна полягає в тому, що базисні функції повинні бути ортогональні до відхилу.

Умова ортогональності двох функцій має вигляд:

$$\int_a^b R(x, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) u_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В результаті одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$. Знайшовши їх і підставивши у (3), одержимо наближений розв'язок крайової задачі.

Приклад. Методом Гальоркіна знайти наближений розв'язок рівняння $y'' + xy' + y = 2x$, що задовольняє крайовим умовам $y(0) = 1$; $y(1) = 0$.

Розв'язок. За систему базисних функцій обираємо функції $u_0(x) = 1 - x$; $u_1(x) = x(1-x)$; $u_2(x) = x^2(1-x)$; $u_3(x) = x^3(1-x)$.

Наближений розв'язок задачі шукаємо у вигляді полінома

$$y_3 = (1-x) + c_1 x(1-x) + c_2 x^2(1-x) + c_3 x^3(1-x).$$

Підставляючи y_3 в ліву частину заданого диференціального рівняння, одержуємо відхил:

$$\begin{aligned} R(x, c_1, c_2, c_3) &= (1-4x) + c_1(-2 + 2x - 3x^2) + \\ &+ c_2(2 - 6x + 3x^2 - 4x^3) + c_3(6x - 12x^2 + 4x^3 - 5x^4) \end{aligned}.$$

Умови ортогональності функції R до функцій $u_i(x)$ приводять до системи

$$\begin{cases} \int_0^1 (x - x^2) R(x, c_1, c_2, c_3)\,dx = 0 \\ \int_0^1 (x^2 - x^3) R(x, c_1, c_2, c_3)\,dx = 0 \\ \int_0^1 (x^3 - x^4) R(x, c_1, c_2, c_3)\,dx = 0 \end{cases}.$$

Підставляючи замість R її значення, після відповідного інтегрування одержуємо систему

$$\begin{cases} 133c_1 + 63c_2 + 36c_3 = -70 \\ 140c_1 + 108c_2 + 79c_3 = -98 \\ 264c_1 + 252c_2 + 211c_3 = -210 \end{cases}.$$

Звідси знаходимо: $c_1 = -0{,}2090$; $c_2 = -0{,}7894$, $c_3 = 0{,}2090$, і, отже, $y_3 = (1-x)\left(1 - 0{,}29x - 0{,}7894x^2 + 0{,}2090x^3\right)$ – наближений розв'язок крайової задачі. Похибка наближеного розв'язку залежить від кількості базисних функцій.

Завдання до лабораторної роботи № 12

Розв'яжіть крайову задачу методом Гальоркіна.
Завдання вибираються з наведеної нижче таблиці варіантів.

Таблиця варіантів

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_1	-1	2	-3	-1	-2	-4	-3	-4	2	-2,7
k_2	-4,8	-3,1	2,5	1,7	2	1,2	2	3,2	3	-1,3

Шифр по горизон-талі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,5	1,3	2,4	-1	0	1	0	0,8	-4	0
B	0,5	0,7	0	1	-2	0,5	0	0,3	-0,6	2
a	1	-1	-1	0,5	0	2	-1	-0,5	-1	0
b	2	0	1,4	1,5	1	3	0	1,5	1	1
α_1	2	0	0	-3	2	0	0	-1	0	0
α_0	0	2	-1	0	0	5	-4	0	1	-1
β_0	-1	0	0	3	-2	0	0	-1	0	0
β_1	0	-1	2	0	0	-5	4	0	1	-1
h	0,1	0,1	0,25	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1
$p(x)$	k_1x	$\frac{k_1}{x+k_2}$	k_1x+k_2	k_2x	$k_2x^2-k_1$	k_1-x	k_2+x^2	k_1x^3	$k_2x^3-k_1$	$x^2k_1^2$
$q(x)$	$\frac{k_1x}{x^2+k_2^2}$	k_2x	k_1x^2	$k_2x^3+k_1$	k_2-x	k_2+x^3	k_2x	k_2x-k_1	k_1x+k_2	$\frac{k_2}{x+1}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+k_1^2}}$	k_2+x^3	$\frac{k_2+x}{x^2-k_1}$	$\frac{x^2+k_2}{x}$	$\frac{1}{k_1x-k_2}$	$\sqrt{x^2+k_2^2}$	$\frac{k_1x^2}{k_2+x}$	$\frac{1}{k_2x^2-k_1}$	$k_2x^2+k_1x$	$\frac{k_1x+k_2}{(k_1-x)^3}$