Різницевий метод розв’язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння еліптичного типу – рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) \text{ на } G, \tag{1}$$

$$u=\varphi \quad \text{на } \mathit{\Gamma}, \tag{2}$$

де G – деяка скінчена область (рис. 5), $\mathit{\Gamma}$ – границя області G, $f(x,y)$ – задана на G функція, φ – задана на $\mathit{\Gamma}$ функція.

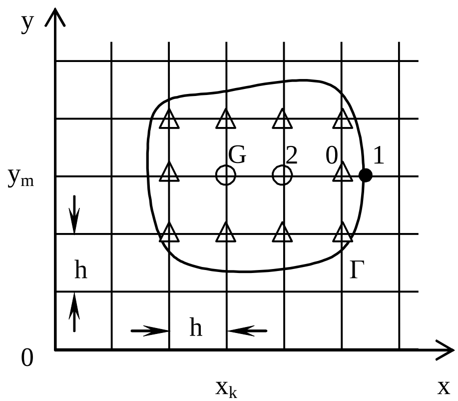

Рис.5.

Суть різницевого методу розв’язання задачі (1), (2) полягає у наступному. Будуємо квадратну сітку з кроком $h=1/M$ (M – натуральне): $x_k=kh$, $y_m=mh$. В усіх розташованих в області G вузлах сітки, які можна з'єднати з чотирма найближчими вузлами відрізками прямих, не перетинаючи границю $\mathit{\Gamma}$, частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, що входять у рівняння (1), замінимо формулами чисельного диференціювання другого порядку точності (порядку $O(h^2)$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{V_{k-1,m} - 2V_{km} + V_{k+1,m}}{h^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{V_{k,m-1} - 2V_{km} + V_{k,m+1}}{h^2}, \tag{3}$$

де $V_{km} = V(x_k, y_m)$ – наближений розв'язок задачі (1), (2).

Підставляючи (3) у (1), одержимо:

$$\frac{V_{k-1,m} - 2V_{km} + V_{k+1,m}}{h^2} + \frac{V_{k,m-1} - 2V_{km} + V_{k,m+1}}{h^2} = f_{km}, \tag{4}$$

де $f_{km} = f(x_k, y_m)$.

Для всіх внутрішніх вузлів області G поблизу її границі Γ (позначених на рис. 5 трикутниками), для формування різницевих рівнянь застосовується лінійна інтерполяція в напрямку осі Ox. Наприклад, у точці з номером 0 рівняння має вигляд

$$V_0 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} V_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \varphi_1, \tag{5}$$

де ρ_1 – відстань від точки 0 до точки 1 на границі Γ, у якій береться задане значення функції φ, позначене через φ_1; V_0, V_2 – невідомі в точках $0, 2$; $\rho_2 = h$ – відстань між цими точками. Тут для простоти використовується один індекс. Формула (5) означає лінійну інтерполяцію між точками $1, 2$ в точку 0.

Аналогічні різницеві рівняння задаються в інших вузлах, позначених трикутниками. При цьому відстань від точки, в яку відбувається інтерполяція, до обох крайніх точок не повинна перевищувати h і одна чи обидві крайні точки повинні лежати на границі Γ.

Отже, у кожному вузлі, позначеному кружком, задане рівняння (4), а в кожному вузлі, позначеному трикутниками, рівняння має вид типу (5). Загальне число рівнянь збігається з числом невідомих. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок V, для знаходження якого можуть бути застосовані прямі й ітераційні методи розв'язання систем рівнянь.

Якщо розв'язок задачі Діріхле (1), (2) $u(x,y) \in C_4(\overline{G})$, то має місце оцінка похибки

$$\max_{G_h}|u-V| = O\left(h^2\right),$$

де $\overline{G} = G \bigcup \Gamma$, G_h – множина усіх вузлів, позначених кружками й трикутниками.

Приклад. Розв’язати задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(x-y) + \frac{1{,}25y}{1{,}5+x}$$

$$u(x,y)\big|_{\Gamma} = |x| + |y| \ ,$$

де $\Gamma : x^2 + y^2 = 1.$

Розв’язок. Візьмемо крок $h = 0{,}5$ і побудуємо сітку (див. рис.6).

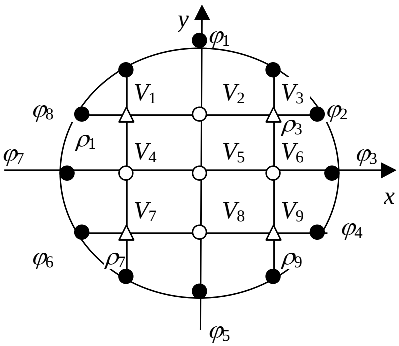

Рис.6.

З метою спрощення запису будемо використовувати один нижній індекс. Для зручності обчислень рівняння (4) розв'яжемо відносно V_{km}:

$$V_{km} = \frac{V_{k-1,m} + V_{k+1,m} + V_{k,m-1} + V_{k,m+1}}{4} - \frac{h^2}{4} f_{km}. \qquad (4^*)$$

Використовуючи далі формули (4^*), (5), одержимо систему рівнянь щодо невідомих $V_i (i = 1, 2, \ldots, 9)$:

$$\left.\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\rho_1}{\rho_1+h}V_2 + \frac{h}{\rho_1+h}\varphi_8 \\
V_2 &= \frac{V_1+\varphi_1+V_3+V_5}{4} - \frac{h^2}{4} f_2 \\
V_3 &= \frac{\rho_3}{\rho_3+h}V_2 + \frac{h}{\rho_3+h}\varphi_2 \\
V_4 &= \frac{\varphi_7+V_1+V_5+V_7}{4} - \frac{h^2}{4} f_4 \\
V_5 &= \frac{V_4+V_2+V_6+V_8}{4} - \frac{h^2}{4} f_5
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
V_6 &= \frac{V_5+V_3+\varphi_3+V_9}{4} - \frac{h^2}{4} f_6 \\
V_7 &= \frac{\rho_7}{\rho_7+h}V_8 + \frac{h}{\rho_7+h}\varphi_6 \\
V_8 &= \frac{V_7+V_5+V_9+\varphi_5}{4} - \frac{h^2}{4} f_8 \\
V_9 &= \frac{\rho_9}{\rho_9+h}V_8 + \frac{h}{\rho_9+h}\varphi_4
\end{aligned}$$

Обчислимо величини $\varphi_i \, (i = 1, 2, \ldots, 8)$, f_2, f_4, f_5, f_6, f_8, ρ_1, ρ_3, ρ_7, ρ_9, використовуючи умови задачі:

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_5 = \varphi_7 = 1; \quad \varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_6 = \varphi_8 = \left|\sqrt{1-0{,}5^2}\right| + |0{,}5| \approx 1{,}366\,;$$

$$f_2 = \cos(0-0{,}5) + \frac{1{,}25\cdot 0{,}5}{1{,}5+0} \approx 1{,}295; \quad f_4 = \cos(-0{,}5-0) + \frac{1{,}25\cdot 0}{1{,}5-0{,}5} \approx 0{,}878\,;$$

$$f_5 = \cos 0 + \frac{1{,}25\cdot 0}{1{,}5+0} = 1; \quad f_6 = \cos(0{,}5-0) + \frac{1{,}25\cdot 0}{1{,}5+0{,}5} \approx 0{,}878\,;$$

$$f_8 = \cos(0+0{,}5) + \frac{1{,}25\cdot(-0{,}5)}{1{,}5+0} \approx 0{,}461;$$

$$\rho_1 = \rho_3 = \rho_7 = \rho_9 = \sqrt{1-0{,}5^2} - 0{,}5 \approx 0{,}366\,.$$

Підставляючи обчислені значення в останню систему, перетворимо її до вигляду

$$\left.\begin{aligned}
V_1 &= 0{,}423V_2 + 0{,}788 \\
V_2 &= 0{,}25(V_1+V_3+V_5) - 0{,}169 \\
V_3 &= 0{,}423V_2 + 0{,}788 \\
V_4 &= 0{,}25(V_1+V_5+V_7) - 0{,}195 \\
V_5 &= 0{,}25(V_2+V_4+V_6+V_8) - 0{,}063
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
V_6 &= 0{,}25(V_3+V_5+V_9) - 0{,}195 \\
V_7 &= 0{,}423V_8 + 0{,}788 \\
V_8 &= 0{,}25(V_5+V_7+V_9) - 0{,}221 \\
V_9 &= 0{,}423V_8 + 0{,}788
\end{aligned}$$

Розв’язуючи систему, одержимо наближений розв’язок задачі: $V_1 = 0{,}946$; $V_2 = 0{,}374$; $V_3 = 0{,}946$; $V_4 = 0{,}340$; $V_5 = 0{,}277$; $V_6 = 0{,}340$; $V_7 = 0{,}918$; $V_8 = 0{,}307$; $V_9 = 0{,}918$.

Завдання до лабораторної роботи № 14

Різницевим методом розв'яжіть задачу Діріхле для рівняння Пуассона.

№1. $f(x,y)=1+0{,}2y\sin x-y^2;$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|+|y|.$$

№2.

$f(x,y)=\cos(x+y)+0{,}5(x-y);$

$$(|x|+2)(|y|+2)=12(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=2|x|+|y|.$$

№3. $f(x,y)=\dfrac{\cos x}{x+1}-0{,}5y^2;$

$$\left.\begin{aligned}|y|&=4-x^2\\ x&\in[-2,2]\end{aligned}\right\}(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|\cdot|y|.$$

№4. $f(x,y)=(1-y^2)\cos x+0{,}6y;$

$$x^2+y^2=16(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|+2|y|.$$

№5.

$f(x,y)=1+0{,}4y\sin x-1{,}5y^2;$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|\cdot|y|.$$

№6. $f(x,y)=\dfrac{\cos y}{x+2}+0{,}3y^2;$

$$\left.\begin{aligned}|x|&=4-y^2\\ y&\in[-2,2]\end{aligned}\right\}(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|+|y|.$$

№7.

$f(x,y)=\cos(1{,}5x+y)+(x-y);$

$$(|x|+2)(|y|+2)=12(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|\cdot|y|.$$

№8. $f(x,y)=1-\sin(x+y)+\dfrac{0{,}5y}{x+2};$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=2|x|+|y|.$$

№9. $f(x,y)=\dfrac{\cos y}{1{,}5+x}+0{,}1y^2;$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|\cdot|y|.$$

№10.

$f(x,y)=0{,}6\sin x-1{,}25y^2+1;$

$$\left.\begin{aligned}|y|&=4-x^2\\ x&\in[-2,2]\end{aligned}\right\}(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|+|y|.$$

№11.

$$f(x,y)=\cos(2x+y)+1{,}5(x-y);$$
$$x^2+y^2=16(\Gamma),$$
$$\varphi(x,y)|_\Gamma=0{,}5|x|+|y|.$$

№12.

$$f(x,y)=1-\frac{0{,}1y}{x+2}-\sin(2x+y);$$
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1(\Gamma),$$
$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|+0{,}5|y|.$$

№13. $f(x,y)=\dfrac{\cos y}{1{,}25+x}-0{,}1y^2;$

$$\left.\begin{aligned}|x|=4-y^2\\ y\in[-2,2]\end{aligned}\right\}(\Gamma),$$
$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|+\frac{y^2}{2}.$$

№14. $f(x,y)=1+0{,}8y\sin x-2y^2;$

$$(|x|+2)(|y|+2)=12(\Gamma),$$
$$\varphi(x,y)|_\Gamma=2|x|+0{,}5|y|.$$

№15.

$$f(x,y)=\cos(1{,}5x+y)+1{,}5(x-y);$$
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1(\Gamma),$$
$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|+|y|.$$

№16.

$$f(x,y)=1-\sin(2x+y)+\frac{0{,}3y}{x+2};$$
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1(\Gamma),$$
$$\varphi(x,y)|_\Gamma=2|x|+0{,}5|y|.$$

№17. $f(x,y)=\dfrac{\cos y}{1{,}75+x}-0{,}5y^2;$

$$\left.\begin{aligned}|y|=9-x^2\\ x\in[-3,3]\end{aligned}\right\}(\Gamma),$$
$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|+\frac{1}{2}|y|.$$

№18.

$$f(x,y)=1+(1-x)\sin y-(2+x)y;$$
$$x^2+y^2=16(\Gamma),$$
$$\varphi(x,y)|_\Gamma=\frac{1}{2}|x|+2|y|.$$

№19.

$$f(x,y)=(0{,}8-y^2)\cos x+0{,}3y;$$
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1(\Gamma),$$
$$\varphi(x,y)|_\Gamma=0{,}5|x|+|y|.$$

№20. $f(x,y)=1+2{,}2\sin x+1{,}5y^2;$

$$\left.\begin{aligned}|y|=9-x^2\\ x\in[-3,3]\end{aligned}\right\}(\Gamma),$$
$$\varphi(x,y)|_\Gamma=0{,}5|x|+|y|.$$

№21.

$$f(x,y)=\cos(x+y)+0{,}75(x-y);$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=0{,}5|x|+2|y|.$$

№22.

$$f(x,y)=1-\sin(1{,}25x+y)+\frac{0{,}5y}{x+2};$$

$$x^2+y^2=16(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=0{,}5|x|\cdot|y|.$$

№23. $f(x,y)=\dfrac{\cos y}{x+2}-0{,}3y^2;$

$$(|x|+3)(|y|+2)=18(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|+0{,}5|y|.$$

№24.

$$f(x,y)=1-\sin(0{,}75x+y)+\frac{0{,}1y}{x+2};$$

$$\left.\begin{array}{l}|y|=9-x^2\\ x\in[-3{,}3]\end{array}\right\}(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=2|x|+0{,}5|y|.$$

№25. $f(x,y)=\dfrac{\cos y}{1{,}25+x}-0{,}5y^2;$

$$x^2+y^2=16(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=0{,}5(|x|+|y|).$$

№26.

$$f(x,y)=\cos(1{,}5x+y)-2{,}25(x+y);$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=\frac{1}{2}|x|+|y|.$$

№27. $f(x,y)=\dfrac{\cos y}{1{,}5+x}-1{,}25y^2;$

$$\left.\begin{array}{l}|x|=4-y^2\\ y\in[-2{,}2]\end{array}\right\}(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|+0{,}5|y|.$$

№28.

$$f(x,y)=1-(x-1)\sin y+2(x+y);$$

$$(|x|+2)(|y|+3)=18(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=2|x|+0{,}5|y|.$$

№29.

$$f(x,y)=1-\sin(0{,}75x-y)+\frac{1{,}75y}{x+1};$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|+0{,}5|y|.$$

№30. $f(x,y)=\cos(x-y)+\dfrac{1{,}25y}{1{,}5+x};$

$$(|x|+5)(|y|+5)=45(\Gamma),$$

$$\varphi(x,y)|_\Gamma=|x|+0{,}5|y|.$$