Наближене розв’язання інтегрального рівняння Фредгольма II роду шляхом зведення його до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай дано інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \tag{1}$$

де $K(x,y)$, $f(x)$ – ядро рівняння й вільний член відповідно, λ – чисельний параметр, $\varphi(x)$ – шукана функція.

Інтеграл, що входить у цю рівність, ми можемо за допомогою будь-якої квадратурної формули приблизно замінити на деякий простого виду вираз, що не містить знака інтеграла. Дійсно, усяка лінійна формула наближеного інтегрування має вигляд:

$$\int_a^b \psi(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k\psi(x_k), \tag{2}$$

де A_k, x_k – ваги і вузли квадратурної формули відповідно.

Після застосування формули (2) до інтеграла в лівій частині рівняння (1) приходимо до рівності:

$$\tilde{\varphi}(x)-\lambda\sum_{k=1}^{n} A_k K(x,x_k)\tilde{\varphi}(x_k) = f(x), \tag{3}$$

де через $\tilde{\varphi}(x)$ позначений наближений розв’язок для шуканої функції $\varphi(x)$.

Припускаючи потім у рівності (3) послідовно $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ приходимо, до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $\tilde{\varphi}(x_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ – наближень для значень шуканої функції $\varphi(x_i)$:

$$\tilde{\varphi}(x_i)-\lambda\sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i,x_k)\tilde{\varphi}(x_k) = f(x_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{4}$$

За цими значеннями наближене значення самої функції може бути знайдене за допомогою того чи іншого прийому інтерполяції. У даному спеціальному випадку зручніше за все одержати це значення, виходячи з рівності (3), а саме:

$$\tilde{\varphi}(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x, x_k) \tilde{\varphi}(x_k). \qquad (5)$$

Очевидно, що точність результату, отриманого при заміні інтегрального рівняння (1) системою лінійних рівнянь (4), буде тим вище, чим меншу похибку ми робимо, заміняючи інтеграл сумою, тобто буде залежати від того, яку квадратурну формулу ми застосовуємо для апроксимації інтеграла в рівності (1).

Приклад. Застосуємо розглянутий вище спосіб наближеного розв'язання інтегральних рівнянь до знаходження розв'язку рівняння

$$\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{xy}\varphi(y)dy = 1 - \frac{1}{2x}\left(e^x - 1\right),$$

використовуючи при цьому квадратурну формулу Гауса.

Розв'язок. Заміняючи це інтегральне рівняння на систему, при $n = 2$, і прийнявши до уваги, що $\lambda = \frac{1}{2}$, $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$, одержимо систему (4) для даного випадку у вигляді:

$$\left(1 - \frac{1}{4}K_{1,1}\right)\tilde{\varphi}(x_1) - \frac{1}{4}K_{1,2}\tilde{\varphi}(x_2) = f_1,$$

$$-\frac{1}{4}K_{2,1}\tilde{\varphi}(x_1) + \left(1 - \frac{1}{4}K_{2,2}\right)\tilde{\varphi}(x_2) = f_2.$$

Відповідно до викладеного вище, за x_1 й x_2 взяті вузли квадратурної формули Гауса для інтервалу $(0;1)$: $x_1 = 0{,}2113$; $x_2 = 0{,}7887$. Обчисливши значення $K_{i,k} = K(x_i, x_k)$, $f_i = f(x_i)$ і підставивши їх у систему, приведемо її до вигляду

$$0{,}7386\tilde{\varphi}(x_1) - 0{,}2954\tilde{\varphi}(x_2) = 0{,}4434$$

$$-0{,}2954\tilde{\varphi}(x_1) + 0{,}5343\tilde{\varphi}(x_2) = 0{,}2384.$$

Відповідно до викладеного вище, за x_1 й x_2 взяті вузли квадратурної формули Гауса для інтервалу $(0;1)$: $x_1 = 0{,}2113$; $x_2 = 0{,}7887$. Обчисливши значення $K_{i,k} = K(x_i, x_k)$, $f_i = f(x_i)$ і підставивши їх у систему, приведемо її до вигляду

$$0{,}7386\tilde{\varphi}(x_1) - 0{,}2954\tilde{\varphi}(x_2) = 0{,}4434$$

$$-0{,}2954\tilde{\varphi}(x_1)+0{,}5343\tilde{\varphi}(x_2)=0{,}2384\,.$$

Розв'язуючи дану систему, одержимо:

$$\tilde{\varphi}(x_1)=0{,}9997\,;\ \tilde{\varphi}(x_2)=0{,}9990\,.$$

Тоді наближений розв'язок в інших точках, згідно (5), може бути записаний у вигляді:

$$\tilde{\varphi}(x)=\frac{1}{4}\left(e^{0{,}2113x}\cdot 0{,}9997+e^{0{,}7887x}\cdot 0{,}9990\right)+1-\frac{1}{2x}\left(e^{x}-1\right)\,.$$

Завдання до лабораторної роботи № 15.

Розв'яжіть інтегральне рівняння Фредгольма шляхом зведення його до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

№ 1. $y(x)-\int\limits_0^1 xty(t)dt=2x$;

№ 2. $y(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} cos^2\,ty(t)dt=1$;

№ 3. $y(x)-\pi\int\limits_0^1 (1-x)\sin 2\pi ty(t)dt=\frac{1}{2}(1-x)$;

№ 4. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin xy(t)tdt=2\sin x$;

№ 5. $y(x)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} (\cos(x+t)+\cos(x-t))y(t)dt=\cos x$;

№ 6. $y(x)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 y(t)dt=\sin \pi x$;

№7. $y(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos x\sin ty(t)dt=\sin x$;

№ 8. $y(x)-\int_0^1 (1+x)\cos 2\pi t y(t)dt = x$;

№ 9. $y(x)-\frac{\ln 2}{2}\int_0^1 2^{x+t} y(t)dt = x$;

№ 10. $y(x)-\int_0^1 (2x-t)y(t)dt = \cos 2\pi x$;

№ 11. $y(x)-\int_0^1 (1+2xt)y(t)dt = -\frac{1}{6}(x+3)$;

№ 12. $y(x)+\int_0^1 \left(x-\sqrt{t}\right)y(t)dt = \frac{5}{3}x+\sqrt{x}-\frac{1}{6}$;

№ 13. $y(x)-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{x}{1+t^2} y(t)dt = 1+x^2$;

№ 14. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} y(t)dt = \sin x$;

№ 15. $y(x)+\pi\int_0^1 x\sin 2\pi t y(t)dt = \cos 2\pi x$;

№ 16. $y(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 xe^t y(t)dt = e^{-x}$;

№ 17. $y(x)-\int_0^{\pi/2} \sin x\cos t y(t)dt = 1$;

№ 18. $y(x)-\int_0^1 x\left(1-\frac{3}{2}t\right)y(t)dt = 1$;

№ 19. $y(x) - \int\limits_0^1 \sin 2\pi x y(t)dt = x$;

№ 20. $y(x) - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(x + 2t) y(t)dt = x$;

№ 21. $y(x) - \frac{1}{3} \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 + 1 + xt\right) y(t)dt = 1$;

№ 22. $y(x) + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (x \sin t + \sin 2x) y(t)dt = \sin x$;

№ 23. $y(x) - \int\limits_{-1}^{1} \cos \pi x \cos 3\pi t y(t)dt = \cos 3\pi x$;

№ 24. $y(x) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 x y(t)dt = \sin 2\pi x$;

№ 25. $y(x) - \int\limits_0^1 (1 + 2x) t y(t)dt = 1 - \frac{3}{2} x$.