

## Метод скінченних різниць

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases} \quad (1)$$

де  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  неперервні функції на  $[a, b]$ ,  $\alpha_i, \beta_i, A, B$  - сталі, такі, що  $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$ ;  $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$ . Розіб'ємо відрізок  $[a, b]$  на  $n$  рівних частин, тобто одержимо  $h = (b - a)/n$ ; побудуємо систему рівновіддалених вузлів

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 1, \dots, n - 1); \quad x_0 = a; \quad x_n = b.$$

Розв'язок задачі будемо шукати чисельно. Для цього в рівнянні (1) похідні замінимо скінченними різницями другого порядку точності.

Введемо позначення  $y(x_i) = y_i$ ,  $p(x_i) = p_i$ ,  $q(x_i) = q_i$ ,  $f(x_i) = f_i$ .

Одержимо:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (2)$$

Граничні умови запишемо в такому вигляді:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \end{cases} \quad (3)$$

Таким чином, одержимо систему  $n + 1$  рівнянь з  $n + 1$  невідомими. Розв'язуючи цю систему, знайдемо значення функції  $y$  у відповідних точках.

**Приклад.** Методом скінченних різниць знайти розв'язок наступної крайової задачі:

$$\begin{cases} y'' + (1 + x^2)y = -1 \\ y(-1) = y(1) = 0. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Виберемо крок  $h = 0,5$ . Поклавши  $x_{-2} = -1$ ;  $x_{-1} = -0,5$ ;  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = 0,5$ ;  $x_2 = 1$ , з огляду на симетрію рівняння і крайових умов будемо мати  $y_{-2} = y_2 = 0$ ;  $y_{-1} = y_1$ . Таким чином, потрібно визначити лише дві ординати:  $y_0$  і  $y_1$ . Запишемо рівняння (49) у вигляді

$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2 + (1 + x_i^2)y_i = -1.$$

При  $i = 0$ , тобто при  $x_0 = 0$  будемо мати

$$(y_1 - 2y_0 + y_{-1})/0,25 + y_0 = -1.$$

Аналогічно, при  $i = 1$ , тобто при  $x_1 = 0,5$  будемо мати

$$(y_0 - 2y_1 + y_2)/0,25 + (1 + 0,25)y_1 = -1.$$

З огляду на  $y_{-1} = y_1$  і використовуємо крайову умову  $y_2 = 0$ , маємо систему

$$\begin{cases} -7y_0 + 8y_1 = -1 \\ 4y_0 - 6,75y_1 = -1. \end{cases}$$

Звідси  $y_0 = 0,967$ ;  $y_1 = 0,721$ .

Отримані значення занесемо в таблицю 16.

Таблиця 1 – Значення шуканої функції для крайової задачі (метод скінченних різниць)

$i$	-2	-1	0	1	2
$x$	-1	-0,5	0	0,5	1
$y$	0	0,721	0,967	0,721	0

### Питання для самоконтролю

1. Опишіть метод скінченних різниць.
2. Яка похибка методу скінченних різниць?

### Завдання до лабораторної роботи № 10

Розв'язати крайову задачу для звичайних диференціальних рівнянь методом скінченних різниць.

Завдання вибираються з наведеної нижче таблиці варіантів (табл. 2).

Таблиця 2 – Таблиця варіантів

Шифр по вертикалі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_1$	-1	2	-3	-1	-2	-4	-3	-4	2	-2,7
$C_2$	-4,8	-3,1	2,5	1,7	2	1,2	2	3,2	3	-1,3

Шифр по горизонталі	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A$	0,5	1,3	2,4	-1	0	1	0	0,8	-4	0
$B$	0,5	0,7	0	1	-2	0,5	0	0,3	-0,6	2
$a$	1	-1	-1	0,5	0	2	-1	-0,5	-1	0
$b$	2	0	1,5	1,5	1	3	0	1,5	1	1
$\alpha_0$	0	2	-1	0	0	5	-4	0	1	-1
$\alpha_1$	2	0	0	-3	2	0	0	-1	0	0
$\beta_0$	-1	0	0	3	-2	0	0	-1	0	0
$\beta_1$	0	-1	2	0	0	-5	4	0	1	-1
$h$	0,1	0,1	0,25	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1
$p(x)$	$c_1x$	$\frac{c_1}{x+c_2}$	$c_1x+c_2$	$c_2x$	$c_2x^2-c_1$	$c_1-x$	$c_2+x^2$	$c_1x^3$	$c_2x^3-c_1$	$x^2c_1^2$
$q(x)$	$\frac{c_1x}{x^2+c_2^2}$	$c_2x$	$c_1x^2$	$c_2x^3+c_1$	$c_2-x$	$c_2+x^3$	$c_2x$	$c_2x-c_1$	$c_1x+c_2$	$\frac{c_2}{x+1}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+c_1^2}}$	$c_2+x^3$	$\frac{c_2+x}{x^2-c_1}$	$\frac{x^2+c_2}{x}$	$\frac{1}{c_1x-c_2}$	$\sqrt{x^2+c_2^2}$	$\frac{c_1x^2}{c_2+x}$	$\frac{1}{c_2x^2-c_1}$	$c_2x^2+c_1x$	$\frac{c_1x+c_2}{(c_1-x)^3}$

