Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

І.П. Кенєва, Ю.П. Мінаєв, Н.І. Тихонська

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ВПРАВИ НА ВСТУПНИХ ІСПИТАХ ДО УНІВЕРСИТЕТУ ТА ОЛІМПІАДАХ ДЛЯ АБІТУРІЄНТІВ

Навчальний посібник

Затверджено
вченою радою ЗДУ
протокол № 3 від 30.11.04.

Запоріжжя
2005

УДК 53 (075.8)
ББК В3я73
К354

Кенєва І.П., Мінаєв Ю.П., Тихонська Н.І. Фізико-математичні вправи на вступних іспитах до університету та олімпіадах для абітурієнтів: Навчальний посібник / За заг. ред. Ю.П. Мінаєва. – Запоріжжя: ЗНУ, 2005. – 98 с.

У посібнику розглянуті вправи, які спеціально розроблені для підготовки учнів старшої профільної школи до продовження фізичної освіти у вищих навчальних закладах. Значна частина цих вправ вимагає для свого виконання не стільки знання фактичного матеріалу з фізики, скільки наявності елементарних математичних навичок і вміння їх застосовувати під час аналізу конкретних фізичних ситуацій. Доцільність використання запропонованих завдань у процесі підготовки до вивчення фізики у ВНЗ обґрунтована попередніми психолого-дидактичними дослідженнями авторів посібника і їхніх колег.

Для абітурієнтів і першокурсників фізичних і фізико-технічних факультетів університетів, учителів фізики і математики загальноосвітніх навчальних закладів.

Рецензент О.Ю. Осипов, декан фізичного факультету ЗНУ, кандидат фізико-математичних наук

Відповідальний за випуск Н.І. Тихонська

ЗМІСТ

ВСТУП

У 2003 році на фізичному факультеті Запорізького державного університету відбулися значні зміни у загальному стилі тих завдань, що пропонуються абітурієнтам. Таким змінам передували спеціальні психолого-дидактичні дослідження, які були спрямовані на розробку системи науково обґрунтованих вимог до абітурієнта фізичного факультету університету.

Ми провели психологічний аналіз стратегій засвоєння навчального матеріалу, якими користуються студенти з різними академічними успіхами у вивченні фізико-математичних дисциплін [2]. Досліджувалася також залежність якості засвоєння навчального матеріалу учнями старшої школи і студентами від рівня розвитку їхнього формального мислення [3]. Розглядалася практика вивчення фізики і математики у сучасних середніх навчальних закладах, зокрема, як організована математична підтримка поглибленого курсу фізики [8], та як впливає система оцінювання навчальних досягнень на вибір учителями методів навчання [7]. Була обґрунтована необхідність конкретизації системи вимог до абітурієнтів фізичного факультету університету в завданнях вступних іспитів [9].

Про результати досліджень робилися повідомлення на всеукраїнських і міжнародних науково-методичних конференціях, одна з яких відбулася у Кам'янець-Подільському 2-4 жовтня 2003 року. На той момент у нас були вже не тільки результати приймальної кампанії на фізичному факультеті ЗДУ з використанням нових типів завдань, а і результати більш детальної діагностики готовності до продовження фізичної освіти в університеті щойно прийнятих студентів першого курсу. Обговорення, яке відбулося після доповіді, виявило існуючу стурбованість представників інших вищих навчальних закладів рівнем фізико-математичної підготовки випускників сучасних середніх шкіл і зацікавленість новими типами завдань, які вперше були запропоновані абітурієнтам фізичного факультету ЗДУ. Це надало нам впевненості у необхідності створення посібника для абітурієнтів, у якому були б наведені розроблені нами завдання і необхідні методичні вказівки до них.

Перша спроба створення такого посібника і пропонується до уваги читачів. Хотілося б, щоб серед них були не тільки абітурієнти вищих навчальних закладів, де вивчення фізики передбачається навчальними планами, а і шкільні вчителі фізики та математики.

Успішність вивчення фізики у ВНЗ багато в чому визначається рівнем логіко-математичної підготовки та вмінням застосовувати знання, отримані на уроках математики, для розв’язування фізичних задач. На жаль, шкільні навчальні програми з фізики та математики ще й досі не узгоджені [1, 12]. А без належної математичної підтримки шкільний курс фізики розсипається на купу розрізнених фактів, які доводиться механічно заучувати. Здобуті у такий спосіб “знання” з фізики мало чого варті.

Досвід діагностики навичок розуміння найпростіших фізичних формул у першокурсників фізичного факультету ЗДУ показав, що у багатьох випускників середньої школи вони не сформовані. Ми давали найпримітивніші задачі на одну формулу. Більш того, ми давали і саму формулу, яка за своїм математичним змістом відповідає програмі восьмого класу. Але помітна частина першокурсників все ж таки була не в змозі впоратися з такими задачами.

Зважаючи на такий стан справ, на фізичному факультеті ЗДУ були вимушені піти на те, щоб перенести початок вивчення загальної фізики на один семестр, а в першому семестрі запропонувати спеціальний курс “Математичний апарат фізики”, який, не дивлячись на гучну назву, спрямований на ліквідацію елементарної математичної безграмотності, на відучування від шкідливої школярської звички механічно заучувати незрозумілі тексти та на знайомство хоча б із деякими прийомами критичного мислення. Вважаємо, що підготовлений нами посібник міг би бути корисним не тільки абітурієнтам, а і першокурсникам, які не отримали у школі необхідної підготовки для продовження фізичної освіти у вищому навчальному закладі.

В основному тексті посібника досить докладно розібрані приклади різних типів завдань вступних іспитів 2003 і 2004 років та олімпіад для абітурієнтів, які проводилися на фізичному факультеті ЗДУ. Для вступних іспитів були сформовані дві бази завдань. Одна – для вступників на денну бюджетну форму навчання, а друга – для вступників на заочну та контрактну (платну) форми. Ця остання база з найпримітивнішими завданнями використовувалася нами і для діагностики рівня підготовки першокурсників, які на вступних іспитах стикалися з завданнями з першої бази або були зараховані за співбесідою. Саме результати, отримані нами під час вхідного контролю першокурсників, примусили так докладно зупинитися на аналізі завдань, які призначалися для заочників і контрактників. Переглянути сторінки, де викладено відповідний матеріал, не завадить і тим, хто вважає свій рівень підготовки досить високим. Радимо звернути увагу на "ліричні відступи", яких досить багато.

Завдання, які пропонувалися на вступних іспитах на денну бюджетну форму навчання, були помітно складнішими, але, аналізуючи їх, ми орієнтувалися вже на підготовленішого читача і, відповідно, не описували дуже розгорнуто кожний крок розв'язку. Те саме стосується і завдань олімпіад.

У додатках, які можна знайти наприкінці посібника, ми навели завдання двох баз, із яких формувалися білети на вступних іспитах. Ці завдання можна використовувати для перевірки рівня засвоєння основного тексту посібника.

Зазначимо, що треба навчитися виконувати такі завдання практично усно (на екзамені вимагалося писати лише кінцеву відповідь). Для подальшого навчання у ВНЗ це зауваження особливо важливе. Той, хто не навчиться виконувати подібні завдання усно, не зможе встигати за ходом лекцій з фізико-математичних дисциплін.

Ми вирішили, що буде доцільним навести у додатках також тексти олімпіад для абітурієнтів фізичного факультету та рівневі екзаменаційні завдання з курсу “Математичний апарат фізики”, про який ми вже згадували. Зауважимо, що в цей курс увійшов тільки той математичний матеріал, який конче потрібний, щоб нормально сприймати лише перший розділ загального курсу фізики (механіку). Крім того, туди не потрапив матеріал, який потрібен для засвоєння механіки, але вивчається в першому семестрі в курсах математичного аналізу та аналітичної геометрії і лінійної алгебри.

Наприкінці вже досить затягненого вступу зазначимо головне. Той, хто вирішив продовжувати свою фізичну освіту, має готуватися не стільки до вступних іспитів, скільки до подальшого навчання. На теперішній час бар’єр вступних іспитів досить легко проходять майже всі бажаючі, з яких частка здатних успішно вчитися доволі мала. Як показали наші спеціальні дослідження, успішно вчаться на фізичному факультеті університету тільки ті студенти, які своєчасно, ще у старших класах середньої школи, перебудували своє мислення і свою пам’ять із дитячого рівня на рівень дорослої *культурної* людини (якщо не вживати спеціальних психологічних термінів). Саме фізико-математичний цикл шкільних предметів має найбільші потенційні можливості щодо необхідної перебудови всієї інтелектуально-вольової сфери. Але для їхньої реалізації технологія навчання цих предметів повинна мати відповідну спрямованість.

Автори будуть вдячні всім читачам, які надішлють електронною поштою свої відзиви на посібник із переліками зауважень за адресою: minaevy@mail.ru (тема: фізико-математичні вправи).

§1. Про те, що вважається незручним писати у підручнику з фізики

Перш за все розглянемо завдання для абітурієнтів, які вирішили навчатися на заочному відділенні фізичного факультету Запорізького державного університету. На перший погляд ці завдання здаються нескладними і не потребують додаткових роз’яснень. Подібними вправам не приділяють значної уваги у шкільних підручниках з фізики, бо вони вважаються надто простими. Але досвід показує, що часто-густо з виконанням таких завдань виникають проблеми і у студентів денного відділення.

1. Як зміняться сили гравітаційної взаємодії F двох матеріальних точок, якщо відстань між ними R зменшиться у 2 рази? Примітка: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{R^2}$**.**

Наведена формула виражає закон всесвітнього тяжіння, відкритий Ньютоном. Буквою G позначена гравітаційна стала, числове значення якої можна знайти у довіднику з фізики або в додатках до збірників фізичних задач. Але для виконання запропонованої вправи нам потрібно тільки знати, що G — це стала, яка від R (тобто відстані між матеріальними точками) не залежить. Маси матеріальних точок позначені як m_1 і m_2. Вони також не залежать від R. Таким чином, можна сказати, що сила взаємодії F обернено пропорційна квадрату відстані. Це записується так: $F \sim \dfrac{1}{R^2}$ або $F = \dfrac{k}{R^2}$, де k — коефіцієнт пропорційності. У нашому випадку $k = Gm_1 m_2$.

Що таке квадрат якоїсь величини, наприклад, відстані? І як він змінюється, коли сама величина зменшується в 2 рази або збільшується, наприклад, у 3 рази?

Квадрат величини (або, іншими словами, другий степінь) — це результат, який ми отримуємо, помноживши її саму на себе. У нашому випадку $R^2 = R \cdot R$. Наприклад, якщо $R = 5\,\text{м}$, то

$R^2 = 25\,\text{м}^2$. Як змінюється R^2 при зростанні R? Це питання схоже з таким: як змінюється величина y при зростанні x, якщо $y = x^2$? Кажуть, що при додатних x (тобто $x > 0$) змінна y *зростає* за квадратичним законом. А щоб це *уявити*, треба побудувати квадратичну параболу, яку вивчали на уроках математики (рис. 1).

Важливо пам'ятати, що R вимірюється в одиницях довжини, наприклад, у метрах, а R^2 – в одиницях площі, наприклад, у квадратних метрах. Слід також розуміти, що відстань є додатною величиною, тоді графік залежності R^2 від R буде виглядати, як на рис. 2.

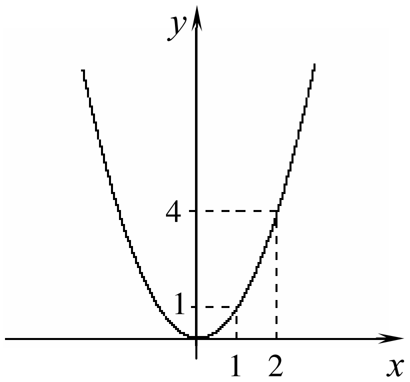


Рис. 1

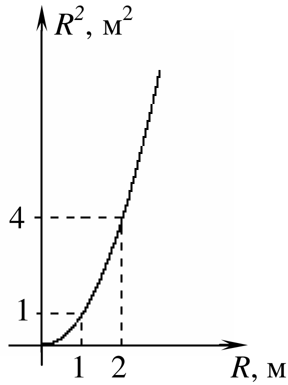


Рис. 2

У математиці можна поставити таке питання: при яких x виконується нерівність $x > x^2$? Але не можна ставити подібне питання стосовно R, якщо R — відстань. Воно було б безглуздим, бо не можна порівнювати величини, одна з яких вимірюється в метрах, а інша — у квадратних метрах. Що більше: відстань від Запоріжжя до Києва чи площа України?! Як би Ви подивилися на ту людину, яка б задала таке питання? А ось абітурієнти, які вважають, що $R^2 < R$, якщо $R < 1\text{м}$, зустрічаються, на жаль, досить часто.

Повертаючись до питання про те, як змінюється R^2 при зміні R, ми вже сміливо можемо сказати, що R^2 збільшується при збільшенні R (а також, що R^2 зменшується зі зменшенням R), бо R^2 є монотонно зростаючою функцією R при додатних R. А у скільки разів збільшується R^2 при збільшенні R? Щоб отримати відповідь на це питання, треба знати квадрат (тобто другий степінь) того числа, в яке збільшилася відстань R. Якщо R збільшується в 3 рази, то R^2 збільшиться в 9 разів. Зі зменшенням аналогічно: якщо R зменшується вдвічі, то R^2 зменшиться в 4 рази.

Уявити все це можна не тільки завдяки графікам. Другий степінь недарма називається квадратом. Подивіться на рис. 3 і 4. Якщо вважати R довжиною сторони квадрата, то R^2 буде площею цього квадрата. На рис. 3 показаний випадок, коли R збільшили в 3 рази: від a до $3a$. Легко бачити, що площа при цьому збільшилася в 9 разів. А на рис. 4 показано, як R зменшили вдвічі: від b до $b/2$. При цьому площа квадрата (відповідно і R^2) зменшилася в 4 рази.

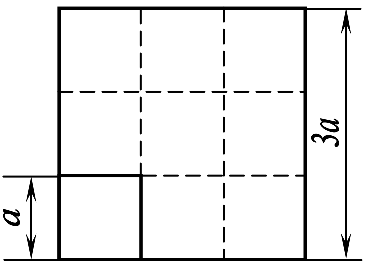


Рис. 3

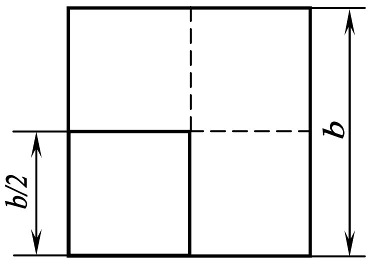


Рис. 4

Зробимо зауваження щодо використання словосполучень “*збільшити* в n разів” та “*зменшити* в n разів”. По-перше, так говорять тільки у тому випадку, коли йдеться про додатні величини. Можна сказати, що відстань збільшилася у 6 разів, але не можна говорити, що координата збільшилася у 6 разів (принаймні, коли вона від’ємна). Дійсно, якщо початкова координата $x_0 = -5м$, то координата $x_1 = 6x_0 = -30м$. Таким чином, $x_1 < x_0$. Якщо ж $\tilde{x}_0 = 5м$, то $\tilde{x}_1 = 6\tilde{x}_0 = 30м$. Відповідно, $\tilde{x}_1 > \tilde{x}_0$. Як бачимо, помноживши початкову координату в обох випадках на однакове число, отримуємо одного разу зменшення координати, а в іншому — збільшення (рис. 5). Таких непорозумінь не буде, коли збільшують або зменшують додатну величину.

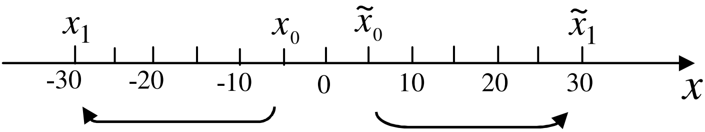


Рис. 5

По-друге, у словосполученнях “збільшити в n разів” та “зменшити в n разів” величина $n > 1$. Не кажуть “збільшити в 0,5 раза”, бо фактично це б означало “зменшити в 2 рази”.

Тепер звернемося до словосполучення *обернено пропорційно* і порівняємо зі словосполученням *прямо пропорційно* або, як іноді скорочено кажуть, *пропорційно*.

Пропорційність відноситься до найпростіших видів функціональних залежностей. Розрізняють пряму і обернену пропорційність. Дві змінні величини називають *прямо пропорційними* (або просто *пропорційними*), якщо відношення їх не змінюється, тобто при множенні однієї з них на будь-яке число друга множиться на те саме число. Пряма пропорційність між двома змінними величинами аналітично виражається формулою: $y = kx$, де число k називають коефіцієнтом пропорційності. Пряма пропорційність між двома величинами графічно виражається прямою лінією, що проходить через початок координат і має кутовий коефіцієнт k (рис. 6). Упевніться в цьому самостійно!

Змінні величини x і y називають *обернено пропорційними*, якщо одна з них пропорційна оберненому значенню іншої, тобто $y = k \cdot \frac{1}{x}$ або $xy = k$. Можна сказати і так: змінні величини називають обернено пропорційними, якщо їхній добуток залишається сталим ($x_1 y_1 = x_2 y_2 = ... = const$, де x_1, x_2, x_3, … — деякі значення змінної x, а y_1, y_2, y_3, … — відповідні їм значення величини y), тобто при множенні однієї зі змінних на будь-яке число друга ділиться на те саме число. Обернена пропорційність графічно виражається гіперболою, для якої асимптотами слугують вісі координат (рис. 7). Упевніться в цьому самостійно!

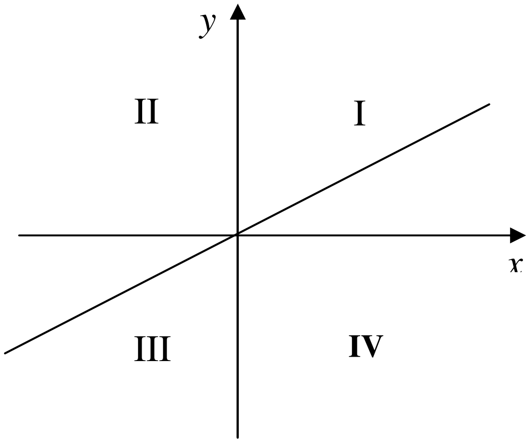


Рис. 6

Звернемо увагу на те, що коефіцієнт пропор-ційності (як прямої, так і оберненої) може бути і від'ємним. У цьому випадку графіки функцій $y = kx$ і $y = \frac{k}{x}$ будуть розташовуватися у другому і четвертому квадрантах, а не в першому і третьому (як на рис. 6 і 7).

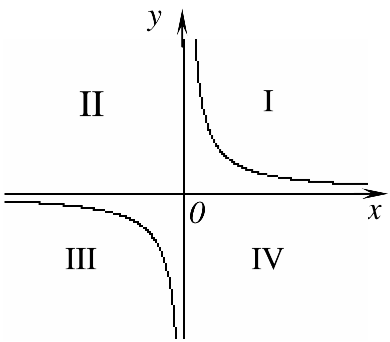


Рис. 7

Якщо ми кажемо, що якась величина *збільшується* пропорційно іншій або *зменшується* обернено пропорційно, то вважаємо коефіцієнт пропорційності та самі величини додатними. А ось словосполучення “*змінюється* пропорційно” та “*змінюється* обернено пропорційно” можна використовувати і при від’ємному коефіцієнті ($k < 0$).

Повертаючись до нашої вихідної вправи, тепер легко побудувати ланцюжок умовиводів:

• якщо R зменшиться у 2 рази, то R^2 також зменшиться, але у 4 рази;

• якщо R^2 *зменшиться* у 4 рази, то F навпаки *збільшиться* у 4 рази, оскільки сила гравітаційної взаємодії двох точкових мас обернено пропорційна квадрату відстані між ними.

Ми вільно використовували слова “збільшується” і “зменшується”, бо коефіцієнт оберненої пропорційності додатний: $k = Gm_1m_2 > 0$ (як добуток додатних величин).

Звернемо увагу на те, що вправу можна було виконати формально:

$$\left\{\begin{array}{l} F_1 = G\dfrac{m_1m_2}{R_1^2} \\ F_2 = G\dfrac{m_1m_2}{R_2^2} \\ R_2 = \dfrac{R_1}{2} \end{array}\right. \quad \Bigg| \quad \Rightarrow F_2 = 4F_1.$$

Це й означає, що сила збільшується у 4 рази. Але, якщо треба швидко отримати відповідь, то писати таку систему рівнянь, а потім її розв’язувати, мабуть, не кращий шлях. Треба навчитися *уявляти* собі функціональні залежності. Це дозволить виконувати подібні вправи в думці за лічені секунди. Якщо ж цьому не навчитися, то дійсно цікаві фізичні задачі ніколи не стануть для Вас доступними.

Все ж таки, якщо комусь до вподоби формальний шлях, або *вимагається* записати розв’язок, то краще одразу замінити Gm_1m_2 на k. Тоді система стає “прозорішою” і виглядатиме так:

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{k}{R_1^2} \\ F_2 = \dfrac{k}{R_2^2} \\ R_2 = \dfrac{R_1}{2}. \end{cases}$$

"Поділивши" друге рівняння на перше, отримуємо $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{R_1^2}{R_2^2} = \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2$. А відношення R_1 до R_2 за умовою дорівнює 2 (див. останнє рівняння системи). Таким чином, $\dfrac{F_2}{F_1} = 2^2 = 4.$ Звідки $F_2 = 4F_1$.

Ми не випадково так докладно зупинилися на цій примітивній (тобто дуже простій) вправі. Щоб навчитися виконувати подібні вправи швидко та в думці, важливо "відчути" ті поняття, які ми згадували, пояснюючи цю вправу, а не зазубрювати їхні означення. А для цього потрібен певний час і установка на *усвідомлення*, а не на зубрячку. Здається, що швидше запам'ятати кінцевий алгоритм виконання вправи певного типу і на цьому заспокоїтися. Але, виявляється, що через деякий час алгоритми виконання різних типів вправ переплутуються, якщо вони не "відчуті". І тоді можна робити грубі помилки, не помічаючи цього. А це ще гірше, ніж зовсім не розв'язати задачу. Більше того, залишається впевненість, що все робиш правильно, за добре завченим алгоритмом.

Таким чином, головне правило: не заучувати алгоритмів! Хочеться сказати, що кращий алгоритм — це власний алгоритм, хоча він може виявитися менш раціональним або не таким узагальненим, ніж той, що можна знайти у підручнику або узнати безпосередньо від інших людей.

Але тут треба звернути увагу на те, що у людей, на відміну від тварин, навчання йде в першу чергу як *привласнення* чужого досвіду. А таке привласнення може відбутися тільки завдяки власній активності, яка спрямована на усвідомлення, а не на механічне запам'ятовування. Щоб привласнити досвід, накопичений людством, треба пропустити його через себе. Проте набуття досвіду самостійного створення алгоритму виконання певної дії помітно відрізняється від усвідомлення й привласнення алгоритму, який розробив хтось іншій. Самостійне створення дає впевненість у власних силах. Зникає страх забути завчений алгоритм. З'являється відчуття вільного володіння певним навчальним матеріалом. А також зникає боязнь *нових*, незнайомих задач. У сучасних умовах це особливо важливо, бо кількість людей, яким доводиться розв'язувати нові задачі, невпинно зростає, причому стрімкими темпами. Крім того, це набагато цікавіше, ніж механічно повторювати завчені дії.

Чи не забагато для першої вправи ліричних відступів? Але перед тим, як перейти до другої, спробуйте зробити *рефлексію* своєї діяльності, яку Ви виконували під час читання великого за обсягом пояснювального тексту до такої простої вправи.

В енциклопедичному словнику можна знайти, що слово ***рефлексія*** походить від пізньолатинського *reflexio* — повернення назад, а означає *роздуми, самоспостереження, самопізнання.* У філософському розумінні рефлексія — це форма теоретичної діяльності людини, спрямована на осмислення своїх власних дій та їхніх законів. Чи було в цьому тексті для Вас щось нове, або таке, що Ви знали, але забули? Чи все було зрозумілим? Чи пам'ятали Ви, що таке *кутовий коефіцієнт, квадрант, асимптоти*? А якщо ні, то чи згадали це, читаючи наш текст, в якому означення цим термінам не даються, але можна здогадатися, про що йде мова? Чи відчуваєте Ви різницю між прийменниками *в (у)* і *на*, які використовують під час порівняння двох значень величини (яке з них більше)? Зауважимо, що в розглянутій вправі на питання "*Як зміниться ...?*" можна сказати тільки *збільшиться* або *зменшиться* та *у* скільки разів. А як треба змінити умову завдання, щоб можна було спитати про те, *на* скільки...?

Для виконання нашої першої вправи формально не потрібно було знати, що таке *матеріальна точка*. Але тим, хто збирається вчитися на фізичному факультеті університету, не завадило б це знати. Чи можна, наприклад, обчислювати силу гравітаційної взаємодії між яблуком і Землею за наведеною в умові вправи формулою? Треба навчитися ставити собі подібні запитання і шукати відповіді на них.

Якщо у Вас були проблеми з вправами такого типу, як ми зараз розібрали, не забудьте звернутися до додатків, які містяться наприкінці посібника, знайти подібні вправи і потренуватися.

2. Як треба змінити відстань від точкового заряду r, щоб напруженість електричного поля E ***зменшилася у 2 рази? Примітка:*** $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$**.**

Напруженість електричного поля, яке створює точковий заряд, спадає *обернено пропорційно* квадрату відстані від нього: $E \sim \frac{1}{r^2}$, або $E = \frac{\alpha}{r^2}$, де $\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ — коефіцієнт пропорційності.

Щоб напруженість E *зменшилася* в 2 рази, квадрат відстані від точкового заряду (r^2) треба *збільшити* в 2 рази, а саму відстань r, відповідно, треба збільшити в $\sqrt{2}$ разів.

Якщо треба навести формальний розв'язок, то це можна зробити так:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} E_1 = \dfrac{\alpha}{r_1^2} \\ E_2 = \dfrac{\alpha}{r_2^2} \end{array}\right| \Rightarrow \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2 = \dfrac{E_1}{E_2} \Rightarrow \dfrac{r_2}{r_1} = \sqrt{\dfrac{E_1}{E_2}} \\ E_2 = \dfrac{E_1}{2} \Rightarrow \dfrac{E_1}{E_2} = 2 \end{array}\right| \Rightarrow r_2 = \sqrt{2}r_1.$$

Така відповідь і означає, що відстань треба збільшити в $\sqrt{2}$ разів.

Можна записати і коротше: $E \sim \dfrac{1}{r^2} \;\Rightarrow\; r \sim \dfrac{1}{\sqrt{E}} \;\Rightarrow$ щоб *зменшити* E в два рази, треба *збільшити* r в $\sqrt{2}$ разів.

Хочеться дописати: "…бо відстань обернено пропорційна кореню квадратному з напруженості". Але краще цього не робити. Хоча формально можна розглядати r як функцію E: $r(E) = \sqrt{\dfrac{\alpha}{E}}$, але реально ми можемо змінювати тільки r, наближаючись або віддаляючись від точкового заряду і фіксуючи при цьому зміну напруженості електричного поля.

У деяких абітурієнтів виникає якийсь психологічний бар'єр, коли треба записати число, використовуючи знак квадратного кореня. Якщо цю ж саму вправу задати, замінивши 2 на 100 або 25, то відповідають правильно: відстань треба збільшити в 10 або, відповідно, в 5 разів. А ось коли стоїть 2 (або 3 чи 5), корінь квадратний з якого не буде цілим числом, виникає цей психологічний бар'єр. Навіть після того, як вони правильно виконали вправу з числами 100 або 25, бажання отримати відповідь у вигляді цілого або хоча б раціонального числа у таких абітурієнтів призводить до того, що вони замість $\sqrt{2}$ кажуть 4 або 1/2.

У зв'язку з таким експериментальним фактом, ми вимушені зробити відступ щодо використання поняття *обернена функція* в математиці та фізиці. При цьому треба звернути особливу увагу на відміну значення першого слова у словосполученнях "*обернена* пропорціональність", а також "*обернене* значення змінної", які ми використовували при розгляді попередньої вправи, від значення цього слова у словосполученні "*обернена* функція".

Розглянемо такий приклад. Площа S квадрата зі стороною, довжина якої a, обчислюється за формулою $S = a^2$. Ця формула задає функціональну залежність S від a. У цьому розумінні, функція — це правило, за яким можна зі значень однієї величини (a) дістати значення іншої (S), яка пов'язана з першою. Правило, про яке йдеться у нашому прикладі, можна сформулювати такими словами: піднесіть значення a до квадрата (або, іншими словами, до другого степеня). Як виконати цю дію? Це питання ми вже розглядали в першій вправі.

А як знайти довжину сторони квадрата a, якщо відома його площа S? Тут потрібне своє правило або, іншими словами, своя функція, яку вважають *оберненою* до функції піднесення до квадрата і називають функцією *добування квадратного кореня*. Символічно це записується таким чином: $a = \sqrt{S}$. А як виконати операцію добування квадратного кореня? Фактично нам потрібно *підібрати* таке значення величини a, щоб у квадраті воно давало близьке до заданого значення S. Користуючись тим, що S зростає з ростом a, можна організувати процедуру *послідовних наближень*, яка дозволила б нам отримати значення a за відомими значеннями S з необхідною точністю. Але у наш час подібні процедури запрограмовані навіть у найпростіших калькуляторах, і нам достатньо після набору заданого значення S натиснути відповідну клавішу ($\sqrt{\ }$), щоб отримати значення a.

Іноді на екзаменах дозволяють залишати відповідь із знаком радикала (тобто квадратного кореня), не обчислюючи наближене значення за допомогою калькулятора. Так, у нашій вправі вірною вважалася відповідь "збільшити в $\sqrt{2}$ разів". Щоправда, ми і наближене значення не розглядали як помилку.

Розглядаючи поняття оберненої функції, ми писали рівність $a = \sqrt{S}$, яка є наслідком вихідного рівняння $S = a^2$.

А як у математиці? Там функція $y = \sqrt{x}$ вважається оберненою до $y = x^2$, хоча рівність $y = \sqrt{x}$ не випливає з $y = x^2$. У чому справа?

Коли говорять про функцію, виділяють *аргумент* функції і *значення* функції. Функція задає правило, за яким можна кожному значенню аргументу поставити у відповідність значення функції. Для найпростіших правил (функцій) існують спеціальні символи, які їх скорочено позначають, наприклад: $\sin$, $\ln$, arctg. У математиці склалася традиція для позначення аргументу функції використовувати букву x, а для позначення значення функції — букву y. Тому, коли йдеться про конкретні функції пишуть $\sin x$, $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, а не так як ми писали вище. Іноді навіть більш розгорнуто: $y = \sin x$, $y = \ln x$, $y = \operatorname{arctg} x$. Сенс у цій традиції, безумовно, є. Розглянемо такі функції: $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2^x$. На відміну від попередніх прикладів знак аргументу (x) не займає місця після знаку функції (як у випадку $\sin$, $\ln$, arctg,...), і тому виділити символ самої функції, відірвавши його від позначення аргументу, досить важко. Але все ж таки необхідно пам'ятати, що в математичному записі функції добування квадратного кореня букви y і x фактично тільки фіксують місце, куди треба вписувати відповідні величини конкретної задачі, а сама функція (тобто правило, за яким із аргументу отримуємо значення функції) умовно позначається знаком радикалу (квадратного кореня).

Часто символи конкретних взаємообернених функцій мало чим схожі. Порівняйте: $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$; $y = e^x$ і $y = \ln x$. Щоправда, обернені тригонометричні функції позначаються одноманітно і так, що простежується зв'язок із вихідними тригонометричними функціями: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, ...

А ось коли розглядають загальнотеоретичні питання про функції, то функцію, обернену до $y = f(x)$, позначають як $y = f^{-1}(x)$.

Може, саме тут витоки тих непорозумінь, із якими доводиться зустрічатися на вступних іспитах в університет при розв'язуванні абітурієнтами завдань, подібних до нашої другої вправи?

Верхній індекс "–1", який має буква "f", *не можна* сприймати як показник степеня, тобто $f^{-1}(x)$ *не* означає те саме, що $\dfrac{1}{f(x)}$ (іншими словами, це *не* є $f(x)$ у степені мінус один). Цей індекс — позначка оберненої функції для тієї, яка записується за допомогою букви “f”, але без верхнього індексу “–1”. Звернемо увагу на таке: $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-1} = x$, але для функції $y = \dfrac{1}{x}$ оберненою до неї є вона сама ($y = \dfrac{1}{x}$); так само $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, але для функції $y = x$ оберненою до неї є вона сама ($y = x$). Упевніться в цьому!

У цих прикладах “–1” — показник степеня, а не позначка оберненої функції. А ось коли ми бачимо на клавіші калькулятора напис “$\sin^{-1}$”, то сприймати його повинні як позначку для функції $y = \arcsin x$, а не “$\dfrac{1}{\sin x}$”, бо тут “–1” навпаки, — позначка оберненої функції, а не показник степеня.

Як же розібратися, в яких випадках “–1” — це позначка оберненої функції, а коли — знак степеня? А як, наприклад, у побутовій мові ми дізнаємося, про яку *косу* йдеться: про ту, якою працює косар, чи про ту, що з волосся? Зрозуміло, що з контексту, тобто з того оточення, в якому знаходиться це слово. Приблизно так само можна зрозуміти, який смисл несе верхній індекс “–1”у тому чи іншому випадку.

А про який контекст можна говорити у випадку з позначкою на клавіші калькулятора? Таким контекстом є інші клавіші. Можна зрозуміти, що $\dfrac{1}{\sin x}$ можна обчислити, послідовно використовуючи клавіші “$\sin$” і “$\dfrac{1}{x}$”, а для обчислення $\arcsin x$ подібного шляху немає. Це свідчить на користь того, що клавіша “$\sin^{-1}$” призначається для обчислення функції $y = \arcsin x$. Перевірити гіпотезу щодо призначення клавіші “$\sin^{-1}$”, можна й іншим шляхом: подивитися, як вона діє на аргумент, який дорівнює нулю. Дійсно, $\arcsin 0 = 0$, а ось функція $\frac{1}{\sin x}$ не існує при $x = 0$. Перевірка однозначно відкидає гіпотезу, що клавіша “$\sin^{-1}$” означає “$\frac{1}{\sin x}$”.

Уміння висувати й перевіряти гіпотези дуже важливе для всіх людей, але особливо для тих, хто за характером своєї роботи постійно стикається з новими завданнями, алгоритми виконання яких невідомі. Це вміння корисне і при навчанні фізики та математики. Наприклад, щоб пригадати забуту формулу, іноді достатньо критично розглянути можливі варіанти.

Припустимо Ви забули, як правильно розписати $\cos^2 x$ через подвійний кут: $\frac{1+\cos 2x}{2}$ чи $\frac{1-\cos 2x}{2}$. Якщо Вам відомо, що $\cos 0 = 1$, то другий варіант Ви миттєво відкинете. Словом, не поспішайте у подібних випадках звертатися до довідника, а подумайте, чи не можна використати ті знання й уміння, які є у Вас в наявності.

Спробуйте, не звертаючись до інших посібників, знайти обернені функції до таких: $y = 2x + 1$; $y = \ln(3x - 1)$; $y = (1 + x)^3$. Чи змогли Ви усно це зробити і отримати: $y = \frac{x-1}{2}$; $y = \frac{e^x + 1}{3}$; $y = \sqrt[3]{x} - 1$?

3. Як треба змінити температуру T газу в ізобарному процесі $(p = const)$***, щоб концентрація його молекул n збільшилася у 3 рази? Примітка:*** $p = nkT$.

Після розбору першої вправи повинно бути зрозумілим, що у даному випадку n і T пов’язані обернено пропорційною залежністю. Дійсно, p — стала, бо процес ізобарний (процес, що проходить при незмінному тиску: *ізо* — частина слова, яка підкреслює незмінність, сталість; а друга частина слова має спільне походження зі словом *бар*ометр, яке позначає відомий усім прилад для вимірювання атмосферного тиску), k — стала Больцмана. Таким чином, для того щоб рівність $p = nkT$ виконувалася, потрібно, щоб сталим був добуток величин n і T ($nT = const$). Це і означає, що при ізобарному процесі концентрація молекул n обернено пропорційна абсолютній (або термодинамічній) температурі T. Отже, щоб концентрація молекул при сталому тиску збільшилася у 3 рази, температуру треба зменшити у стільки ж разів (тобто в 3).

Формально розв'язок можна записати так:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} p = n_1kT_1 \\ p = n_2kT_2 \end{array}\right| \Rightarrow \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{n_1}{n_2} \\ n_2 = 3n_1 \quad \Rightarrow \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{T_1}{3}.$$

Це і буде означати, що температуру треба зменшити в 3 рази.

Зазначимо, що "ліричний" відступ стосовно того, як запам'ятати слово *ізобарний*, зроблено принагідно (до речі), а отримати правильну відповідь можна було і без знання про походження (про етимологію) цього слова, бо безпосередньо в умові вказано, що воно означає $(p = const)$. Щоправда, треба було знати, що ховається за позначкою "$const$".

До речі, як пов'язана абсолютна (або термодинамічна) температура з температурою за шкалою Цельсія? Чому ця температура так називається?

4. Тіло, що кинули з початковою швидкістю υ_0 під кутом до горизонту $\alpha_1 = 30^0$, піднялося на висоту $h_1 = 2$м. На яку висоту підніметься це тіло, якщо кут буде дорівнювати $\alpha_2 = 60^0$, а початкова швидкість не зміниться?

Примітка: $h = \dfrac{\upsilon_0{}^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

Деякі абітурієнти починають обчислювати початкову швидкість υ_0, користуючись відомими h_1, α_1 і g. При цьому вони запитують, яке значення брати для g: 9,8 м/с^2 чи 10 м/с^2? Безумовно, можна обчислити початкову швидкість, але чи необхідно це робити? За умовою, $h \sim \sin^2 \alpha$, бо $\frac{\upsilon_0^2}{2g} = const$.

Відповідно, $\frac{h_2}{h_1} = \frac{\sin^2 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_1} \Rightarrow h_2 = h_1 \frac{\sin^2 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_1}$.

При виконанні цієї вправи у помітної частини абітурієнтів виникають проблеми з обчисленням синусів. Що робити, якщо Ви забули числові значення тригонометричних функцій для 30°, 60° або 45°?

Будемо сподіватися, що Ви не забули теорему Піфагора… Якщо взяти рівносторонній трикутник і провести з однієї вершини висоту, то вона буде одночасно і бісектрисою, і медіаною (рис. 8). А значить, розіб'є вихідний рівносторонній трикутник на два однакових прямокутних трикутника з гострими кутами, що дорівнюватимуть 30° і 60°, причому катет, який протилежний до кута в 30°, буде вдвічі менший за гіпотенузу.

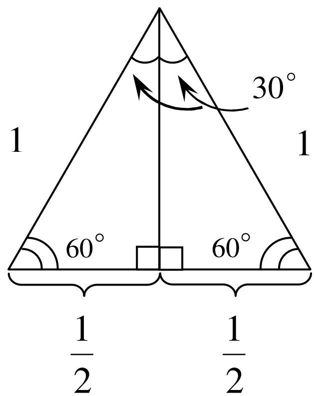


Рис. 8

Нехай сторона рівностороннього трикутника (і, відповідно, гіпотенуза прямокутного трикутника) має одиничну довжину (в умовних одиницях). Тоді катет прямокутного трикутника, протилежний до кута в 30°, матиме довжину $1/2$ (ум. од.). А катет, який співпадає з проведеною нами висотою вихідного рівностороннього трикутника, обчислюватиметься за теоремою

Піфагора: $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Синус* кута дорівнює відношенню *протилежного* катета до гіпотенузи. Отже, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. А *косинус* є відношенням *прилеглого* катета до гіпотенузи. Відповідно, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Що ж до кута в 45°, то його тригонометричні функції легко встановити з рис. 9. Зробіть це самостійно!

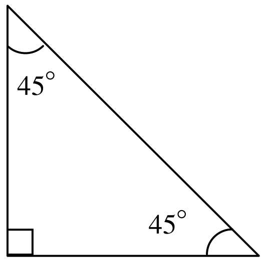


Рис. 9

Повертаючись до нашої вправи, маємо $h_2 = 2 \cdot \frac{3}{1} = 6$ (м).

Наприкінці наведемо мнемонічне правило (тобто правило для запам'ятовування), яке на багатьох справляє враження:

$\alpha =$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha =$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha =$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Але, використовуючи мнемонічні правила, треба усвідомлювати, що вони можуть несподівано підвести, причому помилку буде важко помітити. Були випадки, коли учні та студенти, які покладалися на *механічну* пам'ять і мнемонічні правила, відновлюючи наведену таблицю, замість того, щоб під знаками квадратних коренів писати 0, 1, 2, …, писали 1, 2, 3, …

Чи не краще встановлювати *логічні* зв'язки між окремими фактами і покладатися потім на *логічну* пам'ять, пам'ять дорослої *культурної* людини?

5. Запишіть фізичною формулою фразу: "Енергія електричного поля конденсатора дорівнює половині добутку його ємності та квадрата напруги на ньому". Наведіть список використаних позначень.

Як відомо, формула виражає існуючі зв'язки між величинами, символи яких до неї входять. Так, в першому завданні ми розглядали залежність сил гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок F від їхніх мас m_1, m_2 та відстані R між ними і, відповідно, користувалися формулою $F = G\dfrac{m_1 m_2}{R^2}$. Фізичні символи та математичні знаки у ***формулі*** (від лат. *formula* — образ, вигляд) дозволяють у дуже компактній формі відобразити зв'язки між величинами.

Для того, щоб переписати речення у вигляді фізичної формули, треба виділити в ньому назви фізичних величин та позначити знайдені величини відповідними фізичними символами. Так, у завданні, що розглядається, зустрічаються три фізичні величини: *енергія* електричного поля конденсатора, *ємність* цього конденсатора та *електрична напруга* на ньому. Зазвичай у фізиці їх позначають W, C та U відповідно. Далі треба перекласти математичні операції, які зустрічаються в реченні, на мову математичних знаків. Перша частина речення "енергія електричного поля конденсатора *дорівнює*" у символах буде виглядати так: $W =$. *Квадрат напруги* позначають U^2 (про це ми вже згадували у першому завданні). *Добуток* ємності C та квадрата напруги U^2 скорочено записуємо як CU^2. Фраза "*половина* добутку ємності та квадрата напруги на ньому" означає, що вираз CU^2 треба поділити на два або помножити на одну другу. Отже, половина добутку ємності C та квадрата напруги U^2 позначається як $\frac{CU^2}{2}$, або як $\frac{1}{2}CU^2$. Повернемося до початку фрази та отримаємо шукану фізичну формулу: $W = \frac{1}{2}CU^2$.

У цьому типі завдань може зустрічатися також операція ділення. Тоді буде сказано про відношення однієї величини до іншої. У математиці операцію ділення позначають символами ":" або "—". У фізичних формулах використовується тільки другий символ. Наприклад, *відношення енергії* конденсатора *до напруги* на його обкладинках позначається як $\frac{W}{C}$. Якщо ж буде сказано, що фізична величина подвоєна, то це означає, що її треба помножити на 2. Наприклад, *подвоєна ємність* конденсатора позначається як $2C$.

6. Запишіть фразою (на зразок такої, як у попередньому завданні) фізичну формулу: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, ***де*** T ***— період гармонічних коливань математичного маятника,*** l ***— його довжина,*** g ***— прискорення вільного падіння***.

Для успішного виконання завдання цього типу треба знати математичні символи та вміти їх словесно формулювати. Правильною відповіддю може бути така: „Період коливань математичного маятника під час гармонічних коливань *дорівнює добутку подвоєного* числа π та *кореня квадратного* з *відношення* довжини маятника *до* прискорення вільного падіння".

7. ***Переведіть у СІ, записавши відповідь у стандартному вигляді (як*** $a \cdot 10^n$, ***де*** $1 \le a < 10$, $n \in Z$ ***):*** $0{,}12\,\frac{\text{Н}}{\text{см}^2} =$

Примітка. *Одиниці СІ, в яких потрібно записати відповідь, містяться серед таких:* Вт, А, Па**.**

Досить часто при розв'язуванні розрахункових задач з фізики доводиться числові значення фізичних величин переводити у Міжнародну систему одиниць (СІ). Для правильного виконання цієї дії треба знати позначення одиниць фізичних величин, які прийняті в СІ. Наприклад, знати що Н — позначення для одиниці сили, Дж — енергії або механічної роботи, Па — тиску, Вт — потужності, Кл — електричного заряду тощо.

Необхідно пам'ятати основні фізичні формули і вміти швидко усно виводити з них інші. До формул, які треба пам'ятати, в першу чергу відносяться "формули-означення" фізичних величин, наприклад: $p = \dfrac{F}{S}$ ($\text{тиск} = \dfrac{\text{сила}}{\text{площа}}$, відповідно: $\text{Па} = \dfrac{\text{Н}}{\text{м}^2}$); $A = F \cdot L$ ($\text{робота} = \text{сила} \cdot \text{відстань}$, відповідно: $\text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м}$); $N = \dfrac{A}{t}$ ($\text{потужніть} = \dfrac{\text{робота}}{\text{час}}$, відповідно: $\text{Вт} = \dfrac{\text{Дж}}{\text{с}}$); $I = \dfrac{q}{t}$ ($\text{сила струму} = \dfrac{\text{заряд}}{\text{час}}$, відповідно: $\text{А} = \dfrac{\text{Кл}}{\text{с}}$).

Безумовно, треба знати формулу для другого закону Ньютона, яка дозволяє виразити одиницю вимірювання сили через основні одиниці СІ: $\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$, бо $F = ma$ ($\text{сила} = \text{маса} \cdot \text{прискорення}$). До речі, СІ має сім основних одиниць (кг, м, с, А, моль, К, кд), з яких тільки перші чотири використовувались нами у вправах розглядуваного типу. Зазначимо також, що наведені вище формули записані в такому вигляді, який дозволяє правильно знайти зв'язок між одиницями фізичних величин, але вони не претендують на те, що без змін можуть використовуватися для інших цілей. Наприклад, наведена формула для сили електричного струму може використовуватися тільки у тому випадку, якщо ми маємо справу з постійним струмом; робота навіть *сталої* сили є *скалярним* добутком двох *векторів*: сили і переміщення тощо. Але подібні обмеження на використання формул не впливають на одиниці вимірювання.

Потрібне також знання деяких префіксів, що використовуються для утворення десяткових кратних і дольних одиниць. У наших вправах ми обмежувалися префіксами, що означають такі множники: 10^3 (назва префікса — “кіло-”; позначення — к), 10^{-3} (“мілі-”; м), 10^{-2} (“санти-”; с), 10^6 (“мега-”; М), 10^{-6} (“мікро-”; мк).

Але треба бути уважним при переведенні в СІ одиниць площі та об’єму. Порівняйте: $\text{км} = 10^3\,\text{м}$, але $\text{км}^2 = 10^6\,\text{м}^2$, $\text{км}^3 = 10^9\,\text{м}^3$; $\text{см} = 10^{-2}\,\text{м}$, але $\text{см}^2 = 10^{-4}\,\text{м}^2$, $\text{см}^3 = 10^{-6}\,\text{м}^3$. Справа в тому, що, наприклад, км^2 треба сприймати як $(\text{км})^2$, а не як $\text{к}(\text{м})^2$, тобто префікс “кіло-” відноситься не до *квадратного* метра $(\text{м})^2$, а до звичайного (лінійного) метра (м), який є одиницею вимірювання довжини. А показник степеня “2” використовується замість скорочення “кв.”; тобто іноді пишуть “кв.км”, а іноді — “км^2”, що читається однаково: “квадратний кілометр”. Відповідно, $\text{км}^2 = (10^3 \cdot \text{м})^2 = 10^6\,\text{м}^2$.

При переведенні в СІ одиниць часу також існують певні проблеми. Використовуються префікси “мілі-” та “мікро-” для утворення одиниць мілісекунда (мс) та мікросекунда (мкс), але префікси “санти-”, “кіло-”, “мега-” з секундою не вживаються.

Здавалося б, що складного у розглядуваній вправі? Треба лише виконати ланцюжок примітивних операцій:

$$0{,}12\frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 1{,}2\cdot 10^{-1}\frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 1{,}2\cdot 10^{-1}\frac{\text{Н}}{\left(10^{-2}\text{м}\right)^2} = 1{,}2\cdot 10^{-1}\frac{\text{Н}}{10^{-4}\text{м}^2} = 1{,}2\cdot 10^{3}\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1{,}2\cdot 10^{3}\,\text{Па}.$$

Усього п’ять маленьких кроків до успіху! Але навіть випадкова помилка на одному з цих кроків призведе до невірної відповіді. І якщо виконати відповідні операції механічно, не задумуючись, то таку помилку важко помітити.

Що ж робити? Ми пропонуємо такий план. Спочатку треба з’ясувати, яка одиниця вимірювання буде в остаточній відповіді

(Вт, А, Па). У даному випадку буде паскаль, бо $\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, що відрізняється від $\frac{\text{Н}}{\text{см}^2}$ тільки числовим коефіцієнтом.

Цей коефіцієнт буде більше або менше одиниці? Таке запитання дуже корисно ставити перед собою, бо воно надає можливості підключити уяву. Дійсно, уявіть собі квадрат зі стороною 1 м, який поділений на однакові маленькі квадратики зі сторонами 1 см. Скільки маленьких квадратиків? Зрозуміло, що $100 \cdot 100$, тобто 10^4. А якщо на кожний маленький квадратик (площа якого $1\ \text{см}^2$) припадає сила 1 Н, то скільки буде припадати на великий (площа якого $1\ \text{м}^2$)? Стільки ж ньютонів скільки маленьких квадратиків! Тобто $10^4\,\text{Н}$. Таким чином, $\frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 10^4\,\text{Па}$. Залишилося лише 0,12 помножити на 10^4 і записати так, щоб відповідь мала стандартний вигляд. Зрозуміло, що в нашому випадку $a = 1{,}2$, бо $1 \le a < 10$. Це означає, що множити треба так: $0{,}12 \cdot 10^4 = 0{,}12 \cdot 10 \cdot 10^3 = 1{,}2 \cdot 10^3$. Остаточно будемо мати $0{,}12\frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 1{,}2 \cdot 10^3\,\text{Па}$.

***8. Виберіть до виразу одну з наступних одиниць*:** м, кг, с, Ом, А, Гц, Н, Дж, Па, Гн, Ф, Тл, Вб, Кл, К, В, Вт.

$$\sqrt{\frac{\text{Ом} \cdot \text{А} \cdot \text{Н}}{\text{Па} \cdot \text{В}}} =$$

Включення завдань такого типу до складу вступних іспитів на фізичний факультет пов’язано з тим, що при розв’язуванні задач виникає необхідність перевірки фізичної формули на розмірність. У школі, частіше за все, навчають користуватися певним алгоритмом: розписати всі похідні одиниці через основні, потім спростити отриманий вираз і замінити його однією одиницею СІ. Формально цей шлях правильний, але довгий і такий, що збільшує ймовірність помилки при виконанні математичних операцій. А її потім буває ой як нелегко знайти!

Існує інший спосіб розв'язування таких завдань. Його ідею можна описати наступним чином: певні комбінації одиниць (як основних, так і похідних) замінюються однією за допомогою фізичної формули. Але все-таки зручніше це пояснити на прикладі.

Користуючись знайомою формулою, що виражає закон Ома для ділянки електричного кола ($I = \frac{U}{R}$), отримаємо, що $\text{Ом} \cdot \text{А} = [R] \cdot [I] = [RI] = [U] = \text{В}$ (квадратні дужки означають, що ми маємо справу тільки з одиницями фізичних величин без урахування числових коефіцієнтів). Після цього скорочуємо В в чисельнику і знаменнику, отримуючи вираз $\sqrt{\frac{\text{Н}}{\text{Па}}}$. Далі використовуємо означення тиску як відношення сили до площі ($p = \frac{F}{S}$), і тоді $\text{Н} = [F] = [p \cdot S] = [p] \cdot [S] = \text{Па} \cdot \text{м}^2$. Скорочуючи Па в чисельнику і знаменнику, отримуємо $\sqrt{\text{м}^2} = \text{м}$. Вказана одиниця вимірювання є у наведеному в умові списку.

Отже, для успішного виконання цього завдання необхідно знати основні фізичні формули, одиниці фізичних величин та вміти виконувати прості математичні операції.

9. Виразіть із рівняння $W = \frac{LI^2}{2}$ величину I через інші.

Ця вправа стосується найпримітивніших операцій, які можна виконувати з рівняннями, але навіть з такими вправами не всі абітурієнти можуть упоратися.

Якщо нам потрібно виразити I через інші величини, що входять до формули, то треба послідовно "витягувати" цю величину з того "оточення", в якому вона заходиться:

$$W = \frac{LI^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2W = LI^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2W}{L} = I^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2W}{L}} = I.$$

Тут ми крок за кроком виконали необхідні операції з обома частинами рівняння: помножили на 2, поділили на L, добули квадратний корінь.

Ми вважали I додатною величиною, тому перед радикалом (квадратним коренем) не поставили "$\pm$". Таким чином, $I = \sqrt{\frac{2W}{L}}$.

Але такий ланцюжок умовиводів, як ми навели, необхідно навчитися швидко "прокручувати" в голові, а не тільки на папері. У протилежному випадку Ви не будете на лекціях встигати за ходом думки викладача.

10. Зробіть ескіз графіка залежності від часу координати $x(t) = x_0 + \upsilon_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$ ***(*** $t \geq 0$ ***), якщо*** $a_x > 0$, $\upsilon_{0x} > 0$, $x_0 > 0$.

Перш за все, слід звернути увагу на те, що розглядувана залежність координати від часу може відповідати рівноприскореному рухові тіла вздовж осі Ox з початковою координатою x_0, початковою швидкістю υ_{0x} та прискоренням a_x. Це стане у пригоді під час подальшого дослідження функції.

Якщо $a_x \neq 0$, то графіком поданої залежності буде парабола. Для побудови її ескізу необхідно знати такі характеристики: точку перетину з віссю Ox (у нашому випадку — з вертикальною віссю ординат), "поведінку" параболи у початковий момент часу ($t = 0$) та її орієнтацію на координатній площині.

Положення точки перетину даної параболи з віссю координати визначається значенням функції $x(t)$ при $t = 0$, тобто початковою координатою тіла (дійсно, $x(0) = x_0 + \upsilon_{0x} \cdot 0 + \frac{a_x \cdot 0^2}{2} = x_0$). Отже, якщо $x_0 > 0$, точка перетину знаходиться вище осі часу; якщо $x_0 < 0$ — нижче неї; якщо $x_0 = 0$ — співпадає з початком координат.

Яким чином буде відбуватися згадуваний вище перетин? Зростає чи спадає функція при малому значенні аргументу? З математичної точки зору відповісти на це запитання можна, знаючи рівняння дотичної до даної параболи в початковий момент часу. Але відповідь можна отримати і з фізичних міркувань. Достатньо тільки уявити собі рух тіла, який описується поданою в умові формулою. Таким є, наприклад, рух у вертикальному напрямку під дією сили тяжіння. Очевидно, що в початковий момент часу тіло рухатиметься за напрямком швидкості, тобто, коли початкова швидкість $\upsilon_{0x} > 0$, координата тіла буде збільшуватись (відповідно, функція $x(t)$ зростатиме). І навпаки, у випадку $\upsilon_{0x} < 0$, функція $x(t)$ спадатиме при малих t. Якщо ж $\upsilon_{0x} = 0$, то дотична до графіка буде горизонтальною.

Залишається питання щодо орієнтації гілок параболи. Як визначити, вниз чи вгору вони спрямовані? Знову звернемось до фізичного змісту поданої залежності координати від часу. Якщо прискорення тіла напрямлене у бік збільшення координати (тобто $a_x > 0$), то вона врешті-решт стане додатною. Це означає, що гілки параболи спрямовані вгору. Якщо ж прискорення тіла від'ємне ($a_x < 0$), аналогічні міркування приводять до висновку, що гілки параболи у цьому випадку спрямовані донизу.

Ескіз графіка, що відповідає наведеним у завданні умовам, подано на рис. 10.

Наприкінці звернемо увагу на кілька нескладних, але цікавих питань, які Ви в змозі

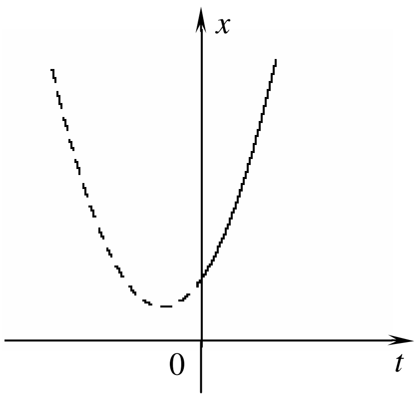


Рис. 10

дослідити самостійно.

По-перше, розгляньте випадок, коли $a_x = 0$ (очевидно, що рух тіла буде рівномірним). Залежність координати тіла від часу буде лінійною $x(t) = x_0 + \upsilon_{0x} \cdot t$, отже її графіком буде пряма. Подальші дослідження та ескіз графіка зробіть самостійно.

По-друге, дослідіть також питання щодо перетину даної параболи з віссю часу (абсцис). Для цього з'ясуйте, чи існують такі значення часу $t_i \geq 0$, що $x(t_i) = 0$, та від яких умов залежить їхня кількість? Зверніть також увагу на фізичний зміст розглядуваних питань.

§2. Завдання вступних іспитів на фізичний факультет ЗДУ

Розглянемо завдання, що були запропоновані у 2003 і 2004 роках абітурієнтам, які планували навчатися за рахунок держзамовлення на денному відділенні фізичного факультету Запорізького державного університету.

1. Відповідаючи на запитання, запишіть кінцеву формулу та назвіть величини, які до неї входять. Якщо вважаєте за потрібне, зробіть додаткові пояснення.

Як знайти діелектричну проникність діелектрика, що заповнює плоский конденсатор, якщо відомі ємність конденсатора, відстань між пластинами і площа пластин?

Завдання такого типу перевіряють усвідомлене знання основних фізичних формул і навички їх перетворення. На жаль, у багатьох абітурієнтів існує установка на “фотографічне” запам’ятовування формул. Це призводить до того, що вони під час виконання вправ, подібних до наведеної, запитують якими буквами позначаються фізичні величини, які містяться в умові. Без цього вони не можуть пригадати потрібні формули.

А для тих вступників, хто за формулами бачить фізичний зміст, такі вправи є усними, і вони одразу можуть записати кінцеву відповідь. Дійсно, якщо знаєш формулу для ємності плоского конденсатора ($C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$), то виразити з неї діелектричну проникність діелектрика (ε) через ємність конденсатора (C), відстань між пластинами (d) і площу кожної з пластин (S) дуже просто: $\varepsilon = \frac{Cd}{\varepsilon_0 S}$. Залишається лише вказати, що ε_0 — електрична стала.

Щоб добре знати фізичні формули, треба не заучувати їх, покладаючись на механічну пам’ять, а більше працювати з ними: виводити їх, розмірковувати над ними. Спеціальні дослідження показали, що ті, хто займається зубрячкою, погано виконують завдання навіть на звичайне відтворення формул, якщо тестування проводиться за весь шкільний курс. Характерним є те, що такі абітурієнти не тільки зовсім не пам'ятають багатьох формул, а й не помічають помилок у тих формулах, які вони, на їхню думку, пригадали. З іншого боку, ті, хто ніколи спеціально не заучував формули, а розмірковував над ними, досить швидко і без помилок виводять їх, якщо навіть не можуть записати відразу.

2. Виберіть правильну відповідь:

Явище огинання світлом перешкод називають…

а) дисперсією; б) дифракцією; в) поляризацією; г) інтерференцією.

За структурою завдання має вигляд тесту, що містить одну правильну відповідь. Завдання такого типу зустрічаються, наприклад, у збірнику різнорівневих завдань для підсумкової атестації з фізики. Вони призначені для перевірки *початкового* рівня навчальних досягнень тих, хто вивчав шкільний курс фізики.

Правильна відповідь у наведеному завданні — **б** (дифракція).

3. Переведіть у СІ, записавши відповідь у стандартному вигляді (як $a \cdot 10^n$***, де*** $1 \le a < 10$***,*** $n \in Z$ ***):*** $0{,}6\dfrac{\text{МДж}}{\text{хв}} =$

Примітка. Одиниці СІ, в яких потрібно записати відповідь, містяться серед таких: Вт, А, Па**.**

Ідею розв'язку завдань цього типу ми вже пояснювали (зверніться до завдання під номером сім у варіанті для заочників). Зауважимо лише, що тут пропонувалися завдання дещо складніші: в них використовувалися як префікси, що утворюють десяткові кратні та дольні одиниці, так і позасистемні одиниці часу (хвилина, година).

Безумовно, треба знати, що у добі 24 години, година містить 60 хвилин, а хвилина складається з 60 секунд. Тоді легко встановити, наприклад, що 1 год $= 3{,}6 \cdot 10^3$ с.

Були у нашій практиці такі випадки, коли російськомовні абітурієнти сприймали позначення *години* (год) як *рік* (який, до речі, триває приблизно $3{,}15 \cdot 10^7$ с, що легко запам'ятати, якщо порівняти 3,15 з числом $\pi \approx 3{,}14$).

Якщо врахувати, що позасистемні одиниці використовувалися нами лише для часу (не було, наприклад, *калорій* для енергії, *міліметрів ртутного стовпчика* для тиску чи *кінських сил* для потужності), то запропоновані вправи мали виконати практично всі абітурієнти. Але досвід не підтвердив такий оптимістичний прогноз.

Перетворення, які потрібно виконати у запропонованій вправі, зводяться до наступних:

$$0{,}6 \frac{\text{МДж}}{\text{хв}} = 6 \cdot 10^{-1} \frac{10^6\,\text{Дж}}{60\,\text{с}} = 1 \cdot 10^4\,\text{Вт}.$$

4. Матеріальна точка рухається так, що координата змінюється за законом $x(t) = 8t^2 - 16t + 1$. Знайдіть мінімальне значення координати, якщо $t \geq 0$.

Порівняємо залежність координати x від часу t, наведену в умові вправи, з формулою для рівноприскореного руху: $x(t) = x_0 + \upsilon_{0x}\, t + \dfrac{a_x\, t^2}{2}$. Тоді отримаємо, що початкова (при $t = 0$) координата матеріальної точки $x_0 = 1\text{м}$, початкова проекція швидкості на вісь x: $\upsilon_{0x} = -16$ м/с, а проекція прискорення на ту саму вісь: $a_x = 16\,\text{м/с}^2$ (бо $8\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2} = \dfrac{a_x}{2}$). Тут ми навмисне написали одиниці вимірювання, щоб підкреслити, що іноді в умовах задач у формулах використовують числові значення фізичних величин, а одиниці вимірювання не пишуть. Слід знати, що у таких випадках мається на увазі, що числові значення подані в певній системі одиниць (у даному випадку — в СІ).

Для *формального* виконання цієї вправи немає необхідності здійснювати таке порівняння, як ми зробили. Але бачити конкретний фізичний процес за математичною формулою буває дуже корисним. Ми можемо легко зрозуміти, що координата спочатку буде зменшуватися, бо початкова проекція швидкості $\upsilon_{0x} < 0$, а через деякий час вона буде збільшуватися, бо на матеріальну точку діє сила, що має додатну проекцію на вісь x (бо $a_x > 0$). Таким чином, координата x буде мати мінімум при деякому додатному значенні t. А ось, якщо б початкова проекція швидкості була додатною ($\upsilon_{0x} > 0$) разом із проекцією прискорення ($a_x > 0$), то під час руху координата x завжди збільшувалася б (нагадуємо, що $t \geq 0$). Це означало б, що значення координати мінімальне на початку руху, тобто $x_{\min} = x_0$. Наприклад, коли $x(t) = 3t^2 + 18t + 2$, можна відразу записати відповідь: $x_{\min} = 2$ м.

Але у розглядуваній вправі для знаходження мінімального значення координати необхідно виконати деякі математичні дії. Які саме — залежить від Ваших особистих уподобань. Хтось, наприклад, пам’ятає з уроків математики формулу для ординати вершини параболи. У цьому випадку треба бути уважним до позначень. Для точок параболи з нашої вправи через x позначаються їхні ординати, а в математичних вправах через x позначали абсциси. Відповідно, треба пригадувати формулу саме для *ординати* вершини параболи $y = ax^2 + bx + c$ (у звичних з уроків математики позначеннях) ($y_в = c - \dfrac{b^2}{4a}$), а не для абсциси ($x_в = -\dfrac{b}{2a}$).

У математичних вправах аргументом був x, а в нашій вправі цю роль виконує t. Зважаючи на це, у задану формулу треба підставляти такі значення: $a = 8$, $b = -16$, $c = 1$. Таким чином, $x_{\min} = 1 - \frac{(-16)^2}{4 \cdot 8} = -7$ (м). Нагадуємо, що $4 = 2 \cdot 2$, а $2 \cdot 8 = 16$, тому не треба 16 підносити до квадрата: $\frac{16^2}{4 \cdot 8} = \frac{16 \cdot 16}{2 \cdot 16} = 8$. Ми робимо це зауваження, бо досвід показує, що абітурієнти надто часто застосовують калькулятор і у тих випадках, коли без нього обчислення можна зробити навіть швидше.

Однак, слід підкреслити, що наведений спосіб ми не вважаємо найкращим. Таке ставлення до нього пов'язане з тим, що в багатьох випадках школярі механічно запам'ятовують математичні та фізичні формули. При такому підході немає можливості перевірити, чи правильно згадана формула. Краще пам'ятати, що координати вершини параболи можна знайти за допомогою виділення повного квадрата, і скористатися цим прийомом у нових умовах. Дійсно, вираз $x(t) = 8t^2 - 16t + 1$ легко переписати у вигляді $8(t - t_{\min})^2 + x_{\min}$. Це можна зробити, наприклад, так: розкрити дужки в останньому виразі, а потім порівняти з попереднім. Тоді отримаємо: $8 \cdot 2t_{\min} = 16$ і $8 \cdot t_{\min}^2 + x_{\min} = 1$. Відповідно, $t_{\min} = 1$ (с) і $x_{\min} = -7$ (м). За своїм фізичним змістом $x_{\min}$ і є мінімальне значення координати, а $t_{\min}$ — значення часу, за якого досягається мінімум координати. Дійсно, якщо $x(t) = 8(t-1)^2 - 7$, то $x \geq -7$, бо $8(t-1)^2 \geq 0$. Причому, коли $t = 1$, $x = -7$.

Можна запропонувати інший шлях. Зрозуміло, що при мінімальному значенні координати, проекція швидкості буде дорівнювати нулю. Дійсно, якщо координата зменшується, то проекція швидкості υ_x від'ємна величина, а якщо збільшується, то додатна. Швидкість руху матеріальної точки дорівнює похідній від $x(t)$ за часом $\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(8t^2 - 16t + 1) = 16t - 16$.

Звернемо увагу на те, що $\frac{d}{dt}$ має сприйматися як символ диференціювання за часом, а не як відношення величини d до добутку величин d і t, тому скорочувати d в чисельнику і знаменнику не можна. Часто символом диференціювання за часом у фізиці виступає крапка над буквою тієї величини, похідну від якої обчислюють. Використовуючи такі позначення, можна було б записати: $\upsilon_x = \dot{x} = 16t - 16$.

З цього легко знайти $t_{\min}$, розв'язуючи отримане рівняння: $16 \cdot t_{\min} - 16 = 0$. Знайдене значення $t_{\min} = 1$ підставимо у вираз для $x(t)$ і одержимо кінцеву відповідь: $x_{\min} = 8 - 16 + 1 = -7$ (м).

5. Виразіть шукану величину через ті, що стоять у дужках, а також фізичні та математичні константи.

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \Rightarrow \quad V_1(V_2, A, m, \mu, T) - ?$$

Наведена формула є виразом для роботи, яку виконує певна кількість ідеального газу при ізотермічному розширенні від об'єму V_1 до V_2. Зрозуміло, що у відповідь буде входити універсальна газова стала R, хоча в дужках вона відсутня.

Оскільки шукана величина зустрічається в формулі тільки один раз, треба послідовно її "витягувати" з того "оточення", в якому вона знаходиться:

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu A}{mRT} = \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = e^{\frac{\mu A}{mRT}} \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2 \cdot e^{-\frac{\mu A}{mRT}}.$$

***6. Розв'яжіть систему рівнянь і виразіть шукану величину через ті, що стоять у дужках, а також математичні та фізичні константи*:**

$$\left.\begin{cases} M\upsilon = mu \\ \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{\upsilon}{u} \\ L = l_1 + l_2 \end{cases}\right| \Rightarrow \quad l_1(L, m, M) - ?$$

Одна з проблем, яка виникає під час виконання завдань такого типу, полягає у тому, що деякі абітурієнти не розуміють умови завдання і тому навіть не намагаються його виконувати або лише бездумно пишуть співвідношення між окремими величинами, що входять до системи. Тому спочатку пояснимо, як потрібно розуміти умову завдання.

У математиці словосполучення "*розв'язати систему рівнянь*" означає, що треба знайти такі числові значення невідомих величин, при підстановці яких до рівнянь системи останні перетворюються у тотожності.

У фізиці системи рівнянь виникають, в основному, під час розв'язування задач. Причому часто трапляється так, що неможливо відразу скласти рівняння, до якого б входили тільки величини, подані в умові задачі, та деякі сталі. Тоді доводиться вводити нові *невідомі* величини (вони не повинні входити до кінцевої відповіді, тому у процесі розв'язування системи рівнянь їх потрібно виключати). Ці величини виконують допоміжну функцію: дозволяють записати декілька співвідношень між величинами, що входять до умови, а також пов'язують шукану в задачі величину з даними в умові.

Отже, словосполучення "*виразіть шукану величину через ті, що стоять у дужках, а також математичні та фізичні константи*" означає, що невідому величину потрібно подати у вигляді комбінації величин, що стоять у дужках (вони вважаються відомими), а також математичних та фізичних констант (якщо є така необхідність). Інші величини не повинні входити до отриманого виразу.

Ми визначили, що у фізиці фраза "*розв'язати систему рівнянь*" означає виразити шукану величину через ті, що вважаються відомими.

Тепер перейдемо до розв'язку конкретної системи рівнянь. Ми вже визначили, що величину l_1, яка є невідомою, необхідно подати у вигляді комбінації величин L, m та M (у цій системі рівнянь фізичні сталі відсутні). Величини υ, u та l_2 є допоміжними, тому їх треба послідовно виключати з рівнянь системи.

У другому рівнянні бачимо комбінацію допоміжних величин $\dfrac{\upsilon}{u}$, яку можна виразити з першого рівняння через відомі величини:

$$M\upsilon = mu \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon}{u} = \frac{m}{M}.$$

Тоді отримаємо систему, що складається з двох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m}{M} \\ L = l_1 + l_2 \end{cases}.$$

Тепер з першого рівняння *отриманої* системи можна виразити допоміжну величину, що залишилася: $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m}{M} \quad \Rightarrow \quad l_2 = l_1 \dfrac{M}{m}$. Маємо рівняння $L = l_1 + l_1 \dfrac{M}{m}$, звідки знайдемо шукану величину:

$$L = l_1\left(1 + \frac{M}{m}\right) = l_1 \frac{m+M}{m} \quad \Rightarrow \quad l_1 = L\frac{m}{m+M}.$$

7. Виберіть до виразу одну з наступних одиниць: м, кг, с, Ом, А, Н, Дж, Па, Гн, Ф, Тл, Вб, Кл, К, В, Вт, Гц.

Примітка: *e — заряд електрона, c — швидкість світла в вакуумі, h — стала Планка, G — гравітаційна стала, ε_0 — електрична стала.*

$$\left[\frac{c^3 \cdot e^4}{{\varepsilon_0}^2 \cdot h^2 \cdot G}\right] =$$

Квадратні дужки означають, що ми маємо справу тільки з одиницями вимірювання фізичних констант, а числові значення не враховуватимуться. Якщо знати, в яких одиницях вимірюється кожна константа, можна спробувати "розписати" їхню комбінацію через основні одиниці СІ. Потім замінити отриману відповідь тільки однією одиницею з наведеного списку. Але цей шлях нераціональний, хоча формально правильний.

Можна спробувати "пробитися" іншим, коротшим шляхом, використовуючи знання фізичних формул. Звернемо увагу на той факт, що всі константи у примітці входять до різноманітних формул для розрахунку енергії: $m_e c^2$ (спокою електрона), $h\nu$ (фотона), $\left(-G\dfrac{mM}{r}\right)$ (гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок), $\left(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q_1 q_2}{r}\right)$ (взаємодії двох нерухомих точкових зарядів). Зрозуміло, що $[mM]=\left[m_e^2\right]$, а $[q_1 q_2]=\left[e^2\right]$. Тому ми можемо записати:

$$\left[m_e c^2\right]=[h\nu]=\left[G\frac{m_e^2}{r}\right]=\left[\frac{e^2}{\varepsilon_0 r}\right]=\text{Дж}.$$

Тож у завданні треба умовно виділити або сформувати "блоки", що за одиницями вимірювання відповідають енергії, і в які входять використані константи. Якщо пощастить знайти такі комбінації і в чисельнику, і в знаменнику, то їх можна буде скоротити, тим самим спростивши вираз. Якщо для утворення якоїсь комбінації знадобиться певна величина, то її можна дописати одночасно в знаменник та чисельник.

Останнє, що може стати у пригоді у конкретній розглядуваній вправі, так це формула зв'язку довжини хвилі та частоти: $c=\lambda\cdot\nu$. Одиниці довжини хвилі такі самі, як і одиниці відстані, отже, маємо: $[c]=[r\cdot\nu]$.

Подивіться уважно на запропоновану комбінацію $\left[\dfrac{c^3 \cdot e^4}{\varepsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot G}\right]$. У чисельнику при наявності ще одного c та m_e^2 утворюється квадрат енергії ($m_e^2 \cdot c^4$), а також якщо в знаменнику стояв би r^2 — ще один квадрат енергії ($\dfrac{e^4}{\varepsilon_0^2 r^2}$). Тому ми можемо записати наступний крок, помноживши чисельник та знаменник на необхідні c, m_e^2 та r^2:

$$\left[\frac{c^3 \cdot e^4}{\varepsilon_0^2 \cdot h^2 \cdot G} \cdot \frac{c \cdot m_e^2 \cdot r^2}{c \cdot m_e^2 \cdot r^2}\right] = \left[\frac{m_e^2 \cdot c^4 \cdot \dfrac{e^4}{\varepsilon_0^2 r^2}}{h^2 \cdot G} \cdot \frac{r^2}{m_e^2 \cdot c}\right] = \left[\frac{E^4 \cdot r^2}{h^2 \cdot G \cdot m_e^2 \cdot c}\right],$$ де

E — енергія. Тепер у знаменнику можна утворити комбінацію, що дає розмірність енергії ($G\dfrac{m_e^2}{r}$), яку потім можна скоротити з енергією у чисельнику. Залишається вираз $\left[\dfrac{E^3 \cdot r}{c \cdot h^2}\right]$. Пригадаємо, що $\left[\dfrac{r}{c}\right] = \left[\dfrac{1}{\nu}\right]$. Тому $\left[\dfrac{E^3 \cdot r}{c \cdot h^2}\right] = \left[\dfrac{E^3}{\nu \cdot h^2}\right]$. Помноживши останній вираз на $\left[\dfrac{\nu}{\nu}\right]$ скорочуємо на E^2, бо $\left[E^2\right] = \left[h^2 \cdot \nu^2\right]$. Залишається $[E \cdot \nu]$. Цей вираз має одиницю вимірювання Дж/с, тобто Вт. Ця одиниця входить до переліку одиниць у примітці. Остаточно маємо: $\left[\dfrac{c^3 \cdot e^4}{\varepsilon_0{}^2 \cdot h^2 \cdot G}\right] = \text{Вт}$.

Треба намагатися якомога більше операцій прокручувати в думці і не розписувати все так докладно. Ми це робили, щоб розкрити ідею розв'язку.

8. Виберіть до виразу одну з наступних одиниць: м, кг, с, Ом, А, Н, Дж, Па, Гн, Ф, Тл, Вб, Кл, К, В, Вт, Гц.

Примітка: G — гравітаційна стала, l — довжина, F — сила.

$$\left[l\sqrt{\frac{F}{G}}\right]=$$

Як бачимо, в умові завдання крім фізичних сталих використовуються фізичні величини (у нашому випадку — довжина та сила), що відрізняє його від попереднього. Для успішного виконання цього завдання необхідне знання формул, до яких входять подані в умові фізичні величини та сталі, і вміння виконувати найпростіші математичні операції.

У нашому прикладі величини F і G входять до формули, яка виражає закон всесвітнього тяжіння ($F=G\frac{mM}{R^2}$), де m та M — маси взаємодіючих точкових тіл, R — відстань між ними. Тоді можна записати, що $[F]=\left[G\frac{m^2}{R^2}\right]$. Користуючись отриманим результатом, перетворимо поданий в умові вираз: $\left[l\sqrt{\frac{F}{G}}\right]=\left[l\sqrt{\frac{G\frac{m^2}{R^2}}{G}}\right]=\left[l\sqrt{\frac{m^2}{R^2}}\right]=\left[l\frac{m}{R}\right]$. Оскільки $[l]=[R]=\text{м}$, маємо $\left[l\frac{m}{R}\right]=[m]=\text{кг}$. Отже, отримали, що $\left[l\sqrt{\frac{F}{G}}\right]=\text{кг}$.

9. Виберіть до виразу одну з наступних одиниць: м, кг, с, Ом, А, Гц, Н, Дж, Па, Гн, Ф, Тл, Вб, Кл, К, В, Вт.

$$\text{В}^2\sqrt{\frac{\text{Ф}}{\text{Н}\cdot\text{м}}}=$$

Ідею розв'язку такого типу завдань докладно описано в завданні номер 8 з першого параграфу. Тут зупинимося лише на розв'язанні окремого прикладу, тому що для засвоєння операцій необхідне їх неодноразове відпрацьовування.

Для зручності внесемо під знак радикалу множник В^2. Тоді отримаємо $\sqrt{\dfrac{\text{Ф} \cdot \text{В}^4}{\text{Н} \cdot \text{м}}}$. Потім, користуючись фізичними формулами, знайдемо в чисельнику і знаменнику комбінації одиниць вимірювання, які можна замінити однією і тією ж одиницею:

$$\text{Ф} \cdot \text{В}^2 = [C] \cdot [U]^2 = [CU^2] = [W] = \text{Дж},$$

$$\text{Н} \cdot \text{м} = [F] \cdot [l] = [Fl] = [A] = \text{Дж}.$$

Після скорочення отримаємо $\sqrt{\text{В}^2} = \text{В}$.

10. Матеріальна точка рухається так, що координата змінюється за законом: $x(t) = 3 + t + 0{,}3e^{-2t}$***. Запишіть вираз для дотичної до графіка цієї залежності в початковий момент*** $(t = 0)$ ***у вигляді*** $\tilde{x} = A + Bt$***. Який фізичний зміст мають константи A і B?***

Останнє запитання допомагає виконати вправу. Дійсно, порівняємо вираз $\tilde{x} = A + Bt$ з таким: $\tilde{x} = x_0 + \upsilon_{0x} t$. З цього порівняння видно, що A — початкова координата $x(0)$, а B — початкова проекція швидкості на вісь x. Щоб знайти A, треба тільки підставити $t = 0$ у вираз для $x(t)$: $x(0) = 3 + 0 + 0{,}3 \cdot e^0 = 3{,}3$ (м).

А для того, щоб знайти B, необхідно спочатку знайти похідну за часом від $x(t)$: $\upsilon_x(t) = \dot{x}(t) = 1 - 0{,}6 \cdot e^{-2t}$ (точка над x означає похідну за часом!). Після цього підставляємо $t = 0$:

$$B = \upsilon_x(0) = \dot{x}(0) = 1 - 0{,}6 \cdot e^0 = 0{,}4 \text{ (м/с)}.$$

Таким чином, дотичною буде пряма $\tilde{x} = 3{,}3 + 0{,}4t$.

Корисно знати, що функція $y(x)$, яка має похідну будь-якого порядку при $x = 0$, може бути наближена поліномом

$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots$ Заміну $y(x)$ таким поліномом називають розкладанням у ряд Маклорена. Порівнюючи значення вихідної функції і полінома при $x = 0$, отримуємо $C_0 = y(0)$. Порівнюючи значення перших похідних при $x = 0$, знайдемо, що $C_1 = y'(0)$. Продовжуючи цю процедуру, маємо $C_2 = \dfrac{y''(0)}{2}$, $C_3 = \dfrac{y'''(0)}{3!} = \dfrac{y'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \dfrac{y'''(0)}{6}, \ldots,$ $C_n = \dfrac{y^n(0)}{n!}, \ldots.$

Оскільки будь-яка похідна від e^x дорівнює e^x, а $e^0 = 1$, то $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots$ Зрозуміло, що для нашої вправи достатньо обмежитися першими двома членами ряду: $e^{-2t} \approx 1 - 2t$. Тоді $\tilde{x} = 3 + t + 0{,}3 \cdot (1 - 2t) = 3{,}3 + 0{,}4t$.

Легко отримати розклад у ряд Маклорена і для інших функцій. Зокрема,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots; \ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Але, якщо нам треба знайти дотичну до графіка в точці з абсцисою $x = 0$, то нам достатньо скористатися такими наближеннями: $\sin x \approx x$; $\cos x \approx 1$.

Наприклад, знайти дотичну до графіка функції $x(t) = 7 - 5t + 3\sin 2t - 4\cos 3t$ у точці з $t = 0$ за допомогою ряду Маклорена дуже просто: $\tilde{x} = 7 - 5t + 3 \cdot 2t - 4 = 3 + t$. Як бачимо, такі вправи можна виконувати усно.

11. Не розв'язуючи повністю задачу, вкажіть відповідь у тому конкретному випадку, який запропонований у дужках після умови.

Паралельно з'єднані конденсатор ємністю C і резистор опором R під'єднані до джерела струму з ЕРС $\mathcal{E}$ і внутрішнім опором r. Визначити заряд на обкладках конденсатора. ($\dfrac{R}{r} \to 0$)

Одним з обов’язкових етапів розв’язування фізичних задач є оцінка вірогідності отриманої відповіді. Але в реальній шкільній практиці про нього часто забувають, бо в більшості випадків є можливість звіритися з відповіддю, яку можна знайти в підручнику чи задачнику.

Майже всіх абітурієнтів учили в школі перевіряти кінцеву формулу на розмірність, а ось перевіряти на окремі та граничні випадки вчили далеко не всіх. Щоб виконати таку перевірку, треба спочатку себе запитати: “Що чекати від відповіді задачі?”. У завданні запропонованого типу розглядається лише один аспект цього питання: “Яку відповідь буде мати спрощена задача?”. Звернемось до наведеної умови конкретної фізичної задачі.

У спрощеному варіанті пропонується розглянути випадок: $\frac{R}{r} \to 0$. Така умова означає, що джерело струму буде фактично накоротко замкненим. При цьому ЕРС джерела струму буде дорівнювати падінню напруги на внутрішньому опорі, а напруга на резисторі буде дорівнювати нулю. Таким чином, конденсатор виявляється фактично не зарядженим. Іншими словами, правильна відповідь для заряду конденсатора у вихідній задачі повинна прямувати до нуля за умови $\frac{R}{r} \to 0$. Ось і вся вправа! Вона, як бачите, виконується усно.

Припустимо, що хтось розв’язав вихідну задачу і отримав таку відповідь: $q = \frac{CEr}{R + r}$. Вона витримує перевірку на розмірність, але $\lim\limits_{R/r \to 0} \frac{C\mathcal{E}}{\frac{R}{r} + 1} = C\mathcal{E}$. Тому цю відповідь треба визнати невірною, бо вона не пройшла перевірку на граничний випадок. Правильна відповідь вихідної задачі така: $q = \dfrac{C\mathcal{E}R}{R+r}$.

Легко бачити, що $\lim\limits_{R/r \to 0} \dfrac{C\mathcal{E}R}{R+r} = 0$, як і повинно бути.

Треба зазначити, що перевірка на граничні та окремі випадки не гарантує правильності знайденої кінцевої формули, але вона допомагає в багатьох випадках помітити її помилковість.

Розглянемо тут ще один варіант цієї ж вправи. Вихідною задачею буде та сама, але пропонується отримати відповідь для випадку $\dfrac{r}{R} \to 0$.

Якщо r набагато менше за R ($r \ll R$), а це те саме, що $\dfrac{r}{R} \to 0$, то падіння напруги на внутрішньому опорі буде значно менше за напругу на резисторі та, відповідно, на конденсаторі. Таким чином, на конденсаторі буде напруга, що дорівнює ЕРС джерела струму, а значить, $q = C\mathcal{E}$.

Легко встановити, що відповідь вихідної задачі, яку ми навели як правильну, витримує перевірку і на цей граничний випадок: $\lim\limits_{r/R \to 0} \dfrac{C\mathcal{E}R}{R+r} = C\mathcal{E}$.

Розгляд граничних і окремих випадків не завжди буває простим, але в білетах для вступників на фізичний факультет ЗДУ не було складних завдань цього типу. Не дивлячись на це, абітурієнти погано впоралися з такими усними вправами.

У декого були проблеми навіть із наступним завданням: "*Стержень довжиною l і масою m підвішений до стелі на двох легких проводах однакової довжини. Проводи закріплені на кінцях стержня і паралельні один до одного. Система розміщена в однорідному вертикальному магнітному полі з індукцією B. Чому дорівнюватиме натяг кожного проводу, якщо по стержню пропустити струм силою I? Не розв'язуючи повністю задачу, вкажіть відповідь у випадку $I \to 0$*".

Для абітурієнта фізичного факультету повинно бути очевидним, що за умови $I \to 0$ магнітне поле не буде діяти на стержень. Відповідно, сила тяжіння буде компенсуватися силами натягу проводів. Отже, натяг кожного з них дорівнюватиме $\frac{mg}{2}$.

Радимо не тільки переглянути всі завдання цього типу, які розміщені у додатках до нашого посібника, а і потренуватися у прогнозуванні властивостей відповідей інших фізичних задач. А після отримання кінцевої відповіді в кожній задачі перевірте, чи має вона прогнозовані властивості, зокрема, чи витримує перевірку на граничні та окремі випадки.

§3. Приклади завдань, які пропонувалися на олімпіадах для абітурієнтів

Наведемо приклади завдань, що використовувалися на олімпіадах для абітурієнтів фізичного факультету Запорізького державного університету.

1. Розв'яжіть систему рівнянь і виразіть шукану величину через ті, що стоять у дужках:

$$\textbf{\textit{а)}}\ \left\{\begin{array}{l} M = \rho V \\ V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \\ I_0 = 4\pi\rho \displaystyle\int_0^R r^4 dr \\ 2I_0 = 3I \end{array}\right. \quad\Bigg|\quad \Rightarrow \quad I(M, R) - ?$$

Таку систему потрібно навчитися розв'язувати усно, без олівця та паперу. Вона дає можливість відновити в пам'яті вираз для моменту інерції I суцільної кулі, маса якої M, а радіус R. Момент інерції тіла — важливе поняття динаміки обертального руху. Наприклад, кінетична енергія тіла, яке обертається навколо осі з кутовою швидкістю ω, обчислюється за формулою $E_к = \dfrac{I\omega^2}{2}$. Зміст перших двох рівнянь очевидний, а останні два можуть вимагати деяких пояснень. Третє рівняння дає можливість обчислити момент інерції суцільної кулі відносно її центру: $I_0 = \int r^2 dm$, де r — відстань від центру кулі до диференціально малої її частинки масою dm, а інтегрування ведеться за всім об'ємом кулі. Сам момент інерції відносно точки не має фізичного змісту. До фізичних формул входить момент інерції тіла відносно осі. Він визначається як $\int r^2 dm$, але під r тут розуміють відстань до осі, а не до точки. Легко довести теорему, що $2I_0 = I_x + I_y + I_z$, де I_x, I_y, I_z — моменти інерції тіла відносно трьох взаємно перпендикулярних осей, котрі проходять через точку, відносно якої момент інерції дорівнює I_0. У нашому випадку $I_x = I_y = I_z = I$, де I — момент інерції відносно будь-якої осі, яка проходить через центр кулі. Звідси і взялося четверте рівняння в розглядуваній системі. Теорема, про яку ми згадали, допомагає у багатьох випадках скоротити обчислення.

Формально для розв'язування запропонованої системи не потрібно знати, звідки взялися рівняння, але ці знання надають осмисленості діяльності з виконання завдання. Крім того, може виникнути бажання самостійно довести згадану нами теорему, або зрозуміти, як інтеграл $\int r^2 dm$ у конкретному випадку перетворився в той, що записаний у третьому рівнянні системи. Сам же процес розв'язування системи дуже простий. Обчислення інтегралу з третього рівняння дає $I_0 = \frac{4\pi}{5}\rho R^5$, а після замін з використанням перших двох рівнянь $I_0 = \frac{3}{5}MR^2$. З урахуванням четвертого рівняння системи остаточно отримуємо вираз для моменту інерції суцільної кулі відносно осі, яка проходить через її центр: $I = \frac{2}{5}MR^2$.

$$\textit{\textbf{б)}}\ \begin{cases} N = N_0\, 2^{-\frac{t}{T}} \\ N = 0{,}125 N_0 \end{cases} \Bigg| \quad \Rightarrow \quad t(T) - ?$$

Якщо звернути увагу на те, що $0{,}125 = 2^{-3}$, то відповідь можна записати відразу: $t = 3T$. На жаль, як показує досвід, далеко не всі абітурієнти звертають увагу на подібні речі. У результаті — вправа залишається не виконаною, або відповідь наводиться у вигляді: $t = -T \cdot \log_2 0{,}125$. Хоча формально така відповідь правильна, але вона свідчить не на користь абітурієнта.

$$\text{в)}\ \left\{\begin{array}{l} x(t)=\dfrac{mV_0}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right) \\ V(t)=\dfrac{dx}{dt} \\ F=m\dfrac{dV}{dt} \end{array}\right. \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \quad F(V,k)-?$$

Легко отримати залежність сили від часу $F(t)$. Для цього треба знайти другу похідну від $x(t)$ за часом, а потім помножити її на m:

$$V(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{mV_0}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)\right]=V_0e^{-\frac{kt}{m}};$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}\left(V_0e^{-\frac{kt}{m}}\right)=-\frac{k}{m}V_0e^{-\frac{kt}{m}};$$

$$F(t)=-kV_0e^{-\frac{kt}{m}}.$$

А ось отримання виразу для сили через швидкість V викликає у помітної частини абітурієнтів не дуже зрозумілі труднощі. Хоча залишається тільки замінити $V_0e^{-\frac{kt}{m}}$ на V. Отже, $F(V)=-kV$.

$$\text{г)}\ \left\{\begin{array}{l} mgh=\dfrac{mV^2}{2} \\ h=l(1-\cos\alpha) \\ \dfrac{mV^2}{l}=T-mg \end{array}\right. \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \quad T(m,g,\alpha)-?$$

Це система рівнянь для знаходження сили натягу T нитки довжиною l, на якій висить маленьке тіло масою m, після надання цьому тілу горизонтальної швидкості. Вважається відомим, що максимальний кут відхилення нитки від вертикального положення становив α. Перше рівняння відбиває закон збереження механічної енергії: початкова кінетична енергія тіла $\frac{mV^2}{2}$ повністю переходить в потенціальну енергію mgh при максимальному куті відхилення нитки. Друге рівняння показує, як геометрично пов'язана висота підйому тіла h з кутом відхилення нитки α через її довжину l. Останнє рівняння — запис другого закону Ньютона для початкового моменту, коли нитка вертикальна, а швидкість тіла V спрямована горизонтально. Доцентрове прискорення $\frac{V^2}{l}$ і сила натягу T спрямовані вгору, а сила тяжіння mg — вниз. Підстановка h з другого рівняння в перше дає змогу отримати вираз для $\frac{mV^2}{l}$, який і треба підставити в останнє рівняння системи. Звідки остаточно маємо: $T = mg(3 - 2\cos\alpha)$.

$$\textbf{\textit{д)}}\ \begin{cases} p = \dfrac{1}{3} n m_0 \upsilon_{кв}^2 \\ \upsilon_{кв} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}} \end{cases} \Bigg| \quad \Rightarrow \quad n(p, T, k) - ?$$

Це дуже проста вправа. Але бувають випадки, коли і з нею не можуть упоратися абітурієнти.

Перше рівняння в системі — це так зване основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії, яке дозволяє виразити макропараметр p (тиск ідеального газу) через мікропараметри: концентрацію молекул n, масу однієї молекули m_0 та середньоквадратичну швидкість молекул $\upsilon_{кв}$. А друге рівняння в системі — це вираз для $\upsilon_{кв}$ через абсолютну (термодинамічну) температуру T і масу молекули. Буквою k позначена стала

Больцмана. Використовуючи вираз для $\upsilon_{кв}$ з другого рівняння, отримаємо $p = nkT$, звідки $n = \frac{p}{kT}$.

2. Координата матеріальної точки масою m змінюється за законом:

$$x(t) = \frac{mg}{k} \cdot \left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

а) Як залежить від часу швидкість $V_x(t)$ матеріальної точки?

б) Як залежить від часу прискорення $a_x(t)$ матеріальної точки?

в) Як залежить від координати сила $F_x(x)$, що діє на матеріальну точку?

г) Яка початкова координата матеріальної точки $x\big|_{t=0}$?

д) Яка початкова швидкість матеріальної точки $V_x\big|_{t=0}$?

а) $V_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{mg}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right] = g\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$.

Іноді абітурієнти запитують: “Тут косинус добутку $\sqrt{\frac{k}{m}}$ і t, чи добуток t і косинуса $\sqrt{\frac{k}{m}}$?” Таке питання свідчить про те, що його автори не розуміють фізичного змісту формули і намагаються формально виконати вправу. Зрозумівши, що k — коефіцієнт жорсткості пружини, m — маса тягарця, а t — час, вже легко встановити (навіть, якщо не пам’ятати, що $\sqrt{\frac{k}{m}}$ — циклічна частота коливань пружинного маятника), що $\sqrt{\frac{k}{m}}$ —

розмірна величина. А ось $\sqrt{\frac{k}{m}}t$ — безрозмірна. Для косинуса аргументом може бути тільки величина, яка не має розмірності.

б) $a_x(t) = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(g\sqrt{\frac{m}{k}} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \right) = g\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$.

в) $F_x(t) = ma_x(t) = mg \cdot \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$.

Але нам потрібно з'ясувати, як F_x залежить від x. Для цього з вихідного виразу для $x(t)$ знайдемо, що $mg \cdot \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t = mg - kx$. Таким чином, $F_x(x) = -kx + mg$.

г) Початкова координата $x\big|_{t=0} = \frac{mg}{k}(1 - \cos 0) = 0$.

д) Початкова швидкість $V_x\big|_{t=0} = g\sqrt{\frac{m}{k}}\sin 0 = 0$.

На запитання цієї вправи можна було відповісти дуже швидко, збагнувши, що вихідна формула описує коливання тягарця на пружині у полі тяжіння, причому в початковий момент пружина була не розтягнутою, а тягарець нерухомим.

3. При яких значеннях аргументу функція набуває максимальної величини? (Вважайте параметри $r, \omega, C, \mathcal{E}, R, I_m, \alpha, V_0, g$ ***додатними).***

а) $P(t) = I_m^2 r \sin^2 \omega t$, $t \geq 0$***;***

б) $q(t) = C\mathcal{E}e^{-\frac{t}{RC}}$, $t \geq 0$***;***

в) $I(t) = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, $t \geq 0$***;***

г) $y(x) = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}$, $x \geq 0$***;***

д) $P(R)=\left(\dfrac{\mathcal{E}}{R+r}\right)^2 R$**,** $R\ge 0$**.**

а) Скориставшись формулою з тригонометрії $\sin^2 \omega t=\dfrac{1-\cos 2\omega t}{2}$, отримуємо $P(t)=\dfrac{I_m^2 r}{2}\left(1-\cos 2\omega t\right)$. Тепер легко уявити собі графік функції (див. рис. 11).

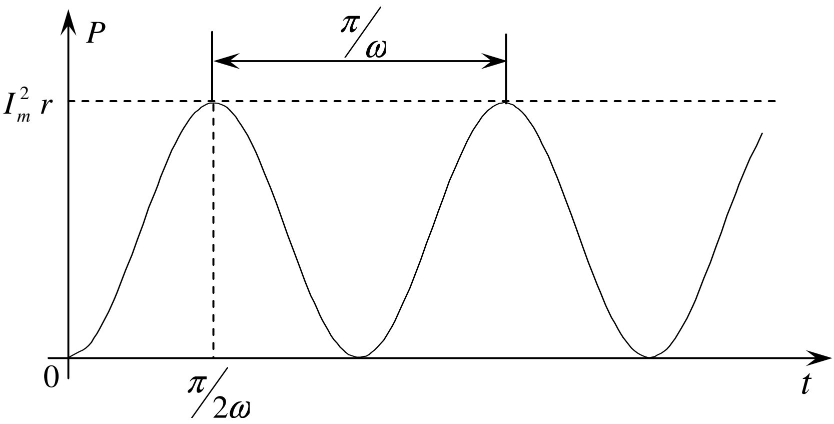


Рис. 11

З урахуванням вимоги $t\ge 0$ для значень t, при яких функція набуває максимальної величини, отримуємо: $t_{\max}=\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{\pi n}{\omega}$, $n=0,1,2,...$ Можна записати і так: $t_{\max}=\dfrac{\pi}{2\omega}+\dfrac{\pi(n-1)}{\omega}$, $n\in N$.

Зрозуміло, що досліджувана функція давала залежність від часу потужності джоулева тепла, що виділяється на резисторі з опором r при проходженні змінного струму, якщо $I(t)=I_m \sin\omega t$.

б) Ця формула ($q(t) = C\mathcal{E}e^{-\frac{t}{RC}}$, $t \geq 0$) показує, як змінюється заряд на конденсаторі ємності C при його розрядженні через резистор з опором R. Тому максимальне значення буде при $t = 0$. Якщо навіть не знати фізичного змісту цієї формули, то легко уявити собі графік функції $q(t)$ (див. рис. 12).

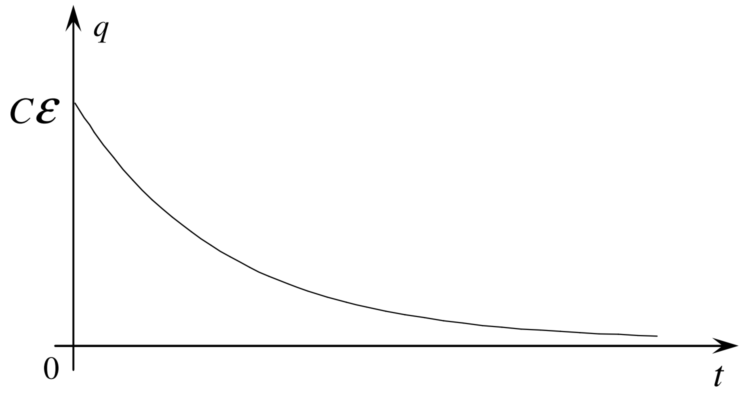


Рис. 12

в) З урахуванням того, що $\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\omega t$, можна уявити собі графік функції $I(t) = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, $t \geq 0$ (див. рис. 13).

Оскільки $t \geq 0$, відповідь може бути записана так: $t_{\max} = \frac{3\pi}{2\omega} + \frac{2\pi(n-1)}{\omega}$, $n \in N$.

г) Ця формула ($y(x) = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}$, $x \geq 0$) описує траєкторію тіла, кинутого з початковою швидкістю V_0 під кутом

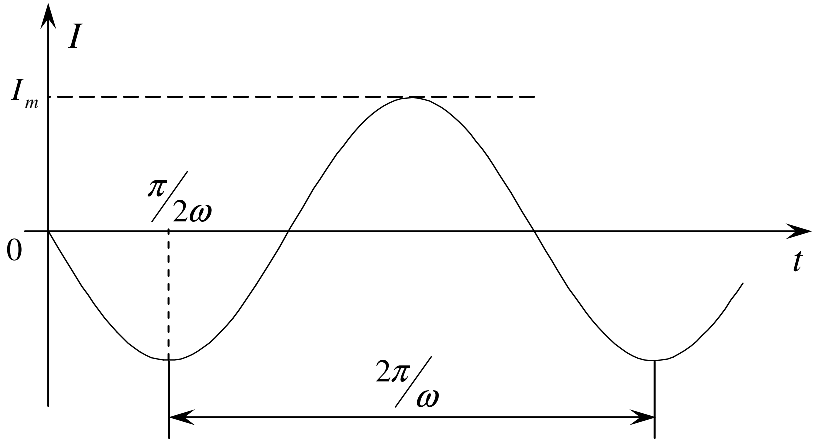


Рис. 13

α до горизонту з точки з координатами $(0;\ 0)$. Її легко отримати з очевидної системи рівнянь: $\begin{cases} y = (V_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}, \\ x = (V_0 \cos\alpha)t. \end{cases}$

Графік $y(x)$ — це квадратична парабола, гілки якої спрямовані вниз (рис. 14).

Можна знайти шукане значення x, при якому y набуває максимальної величини, прирівнюючи до нуля похідну $\dfrac{dy}{dx}$:

$tg\alpha - \dfrac{gx_{\max}}{V_0^2 \cos^2\alpha} = 0 \Rightarrow x_{\max} = \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$. Тут ми скористалися тригонометричною формулою $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Можна було знайти "дальність польоту" L, прирівнюючи до нуля $y(x)$ і відкидаючи корінь $x = 0$. А потім, скориставшись симетрією квадратичної параболи, остаточно отримати $x_{\max} = \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$.

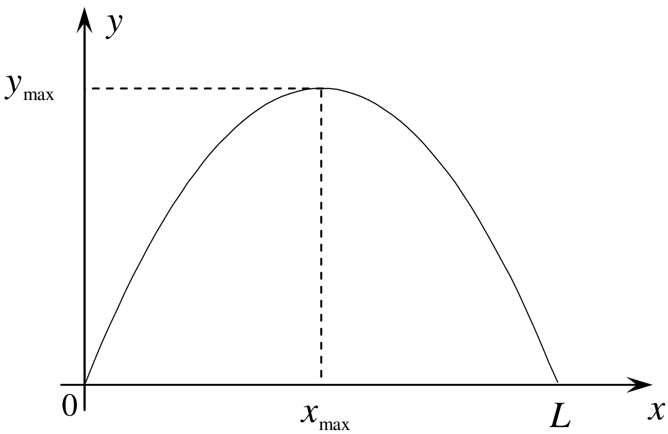


Рис. 14

Наведемо ще один варіант виконання вправи (фізичний!). Час підйому тіла визначається як час, за який вертикальна складова швидкості зменшиться від $V_0 \sin\alpha$ до нуля. Зрозуміло, що такий час дорівнює $\dfrac{V_0 \sin\alpha}{g}$. У горизонтальному напрямку тіло рухається зі сталою швидкістю $V_0 \cos\alpha$. Отже, $x_{\max} = V_0 \cos\alpha \cdot \dfrac{V_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$.

д) Ця формула ($P(R) = \left(\dfrac{\mathcal{E}}{R+r}\right)^2 R$, $R \ge 0$) дає залежність потужності джоулева тепла, що виділяється на резисторі, від його опору R. Джерело електричного струму характеризується значенням електрорушійної сили $\mathcal{E}$ і внутрішнім опором r. Якщо $R << r$, то $P(R) \approx \dfrac{\mathcal{E}}{r} R$. Тобто при малих значеннях R потужність зростає майже пропорційно R. При $R >> r$ апроксимуючою (наближеною) функцією є $\dfrac{\mathcal{E}}{R}$, тобто потужність спадає обернено пропорційно R при великих значеннях R. Таким чином, можна очікувати максимум функції $P(R)$ при деякому додатному значенні R. Графік досліджуваної функції повинен мати вигляд такий, як на рис. 15.

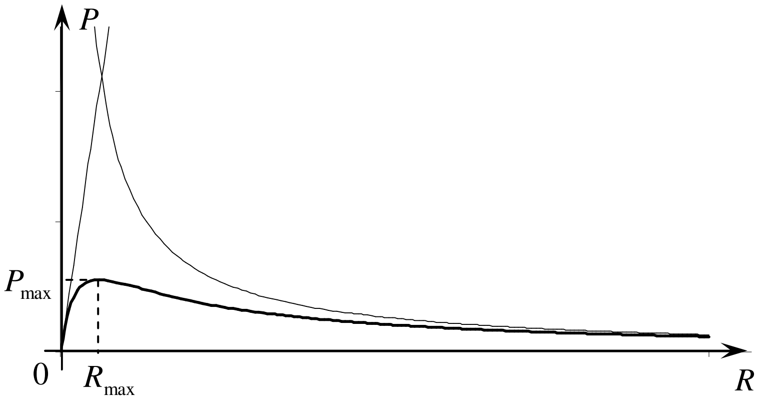


Рис. 15

Звичайно, можна знайти $R_{\max}$, при якому $P(R)$ набуває максимального значення, прирівнявши до нуля похідну $\frac{dP}{dR}$. Але можна піти іншим шляхом. Зрозуміло, що $P(R)$ має максимум при тому самому значенні R, при якому має мінімум функція $f_1(R) = \frac{(R+r)^2}{R} = R + 2r + \frac{r^2}{R} = 2r + r\left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}\right)$. А вона, у свою чергу, має мінімум при тому самому R, що і функція $f_2(R) = \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}\right)$. Тут треба згадати знайому з уроків математики нерівність, яка виконується для додатних значень a: $a + \frac{1}{a} \geq 2$, причому рівність досягається при $a = 1$. Ця нерівність легко доводиться, виходячи з нерівності $(a-1)^2 \geq 0$.

У застосуванні до нашого випадку маємо $\frac{R_{max}}{r}=1$, тобто $R_{max}=r$. Максимальна потужність джоулева тепла буде виділятися на резисторі, якщо його опір буде дорівнювати внутрішньому опору джерела струму.

Існує інший шлях знайдення R_{max}, що не використовує поняття похідної. Для цього спочатку треба знайти силу струму, при якій потужність джоулева тепла, що виділяється у резисторі, буде максимальною. Зрозуміло, що сила струму за законом Ома: $I=\frac{\mathcal{E}}{R+r}$. Переходячи до нової змінної (I замість R), отримуємо: $P(I)=I^2(\frac{\mathcal{E}}{I}-r)=I(\mathcal{E}-Ir)$. Легко бачити, що $P(I)$ – квадратична функція, нулі якої $I_1=0$ і $I_2=\frac{\mathcal{E}}{r}$, а графік – квадратична парабола, гілки якої спрямовані вниз. Максимум буде досягатися при $I=I_{max}=\frac{I_1+I_2}{2}=\frac{\mathcal{E}}{2r}$. А для того, щоб сила струму мала таке значення, опір резистора повинен дорівнювати внутрішньому опору джерела струму.

5. Ідеальний газ розширюється від об'єму $2V_0$ ***до*** $20V_0$ ***так, що тиск змінюється за законом*** $p=24\,p_0\cdot\left(1-\frac{V}{24V_0}\right)$.

Знайдіть:

1) Значення величини $\frac{V}{V_0}$, при якому температура максимальна; 2) значення $\frac{\nu RT_{max}}{p_0V_0}$; 3) роботу, що виконав газ у відносних одиницях ($\frac{A}{p_0V_0}$).

Побудуйте графіки процесу у координатах:

4) $\left(\frac{V}{V_0};\ \frac{P}{P_0}\right)$ *; 5)* $\left(\frac{V}{V_0};\ \frac{\nu RT}{P_0 V_0}\right)$.

Коментар. 1) За умовою газ є ідеальним, тоді для нього виконується закон Клапейрона-Менделєєва: $pV = \nu RT$. Враховуючи даний в умові закон зміни тиску $p = 24\,p_0 \cdot \left(1 - \frac{V}{24V_0}\right)$, отримаємо, що $\frac{\nu RT}{V} = 24\,p_0 \cdot \left(1 - \frac{V}{24V_0}\right)$.

Звідси маємо залежність $T(V) = \frac{24\,p_0}{\nu R} \cdot \left(V - \frac{V^2}{24V_0}\right)$, яка є квадратичною функцією. Одним із способів знаходження максимуму даної функції є прирівнювання похідної до нуля. Маємо: $\frac{dT}{dV} = \frac{24\,p_0}{\nu R} \cdot \left(1 - \frac{2V}{24V_0}\right) = 0 \;\Rightarrow\; 1 - \frac{V}{12V_0} = 0$. Отже, максимальне значення температура набуває, коли $V = 12V_0$, або

$$\left.\frac{V}{V_0}\right|_{T=T_{\max}} = 12.$$

А можна скористатися тим, що нулі отриманої квадратичної функції – $V_1 = 0$ і $V_2 = 24V_0$. Відповідно, максимальне значення функція набуватиме при $V_{\max} = \frac{V_1 + V_2}{2}$, тобто $\left.\frac{V}{V_0}\right|_{T=T_{\max}} = 12\cdot$

2) Використовуючи результат, отриманий у попередньому пункті, отримаємо значення $T_{\max}$:

$$T_{\max} = \frac{24\,p_0}{\nu R} \cdot \left(12\,V_0 - \frac{(12\,V_0)^2}{24\,V_0}\right) = \frac{24\,p_0 \cdot 12\,V_0}{\nu R} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 144\,\frac{p_0\,V_0}{\nu R}$$

.

Тоді шукана величина $\frac{\nu RT_{\max}}{p_0 V_0} = 144$.

3) Робота, яку виконав газ в описаному процесі, визначається формулою $A = \int\limits_{2V_0}^{20V_0} p\,dV = \int\limits_{2V_0}^{20V_0} 24 p_0 \cdot \left(1 - \frac{V}{24V_0}\right) dV$. Розкриваючи дужки і розбиваючи отриманий інтеграл на два, отримаємо: $A = 24\,p_0 \cdot \left(\int\limits_{2V_0}^{20V_0} dV - \frac{1}{24V_0} \cdot \int\limits_{2V_0}^{20V_0} V\,dV \right)$. Перший інтеграл обчислюється дуже просто: $\int\limits_{2V_0}^{20V_0} dV = V\Big|_{2V_0}^{20V_0} = 20V_0 - 2V_0 = 18V_0$. Другий інтеграл теж відноситься до розряду табличних: $\int\limits_{2V_0}^{20V_0} V\,dV = \frac{V^2}{2}\Bigg|_{2V_0}^{20V_0} = \frac{(20V_0)^2}{2} - \frac{(2V_0)^2}{2} = 198\,V_0^2$. Підставляючи отримані значення у вихідну формулу, отримаємо наступний результат: $A = 24\,p_0 \cdot \left(18V_0 - \frac{198V_0^2}{24V_0}\right) = 234\,p_0\,V_0$. Тоді робота, що виконав газ (у відносних одиницях), дорівнює $\frac{A}{p_0 V_0} = 234$.

Враховуючи, що $p(V)$ – лінійна функція, можна було обійтися без інтегралів. За геометричним змістом робота A – площа під графіком $p(V)$, тобто площа трапеції з висотою $20V_0 - V_0 = 18V_0$ і середньою лінією:

$$P\left(\frac{2V_0 + 20V_0}{2}\right) = P(11V_0) = 13P_0.$$

Отже, $\frac{A}{p_0 V_0} = 18 \cdot 13 = 234.$

4) Залежність $p(V)$ є лінійною, отже графіком залежності $\frac{p}{p_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)$ буде пряма, рівняння якої $\frac{p}{p_0} = 24\cdot\left(1 - \frac{1}{24}\cdot\frac{V}{V_0}\right)$. Знайдемо дві точки, що належать даній прямій. За умови $V = 2V_0$ або $\frac{V}{V_0} = 2$ (початкове значення об'єму) маємо $\frac{p}{p_0} = 22$. За умови $V = 20V_0$ або $\frac{V}{V_0} = 20$ (кінцеве значення об'єму) маємо $\frac{p}{p_0} = 4$. Пряма, що з'єднує ці дві точки і є графіком процесу в координатах $\left(\frac{V}{V_0};\frac{p}{p_0}\right)$ (див. рис. 16).

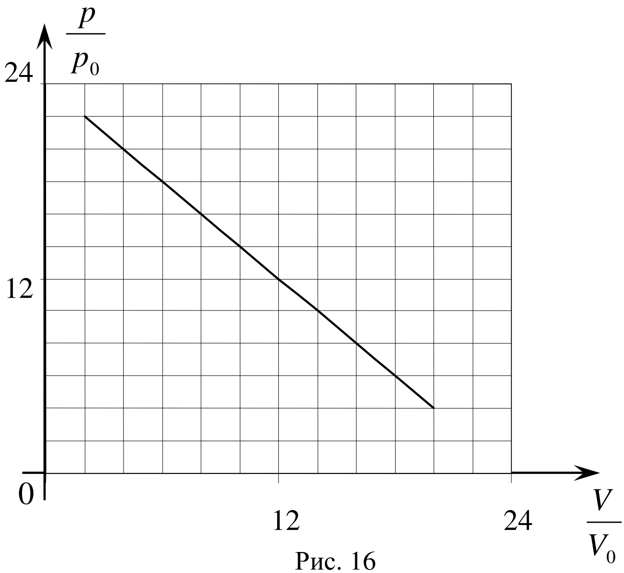


Рис. 16

5) З першого пункту даного завдання отримаємо, що $\dfrac{\nu RT}{V} = 24 p_0 \cdot \left(1 - \dfrac{V}{24V_0}\right)$. Тоді $\dfrac{\nu RT}{p_0 V_0} = 24 \dfrac{V}{V_0} \cdot \left(1 - \dfrac{V}{24V_0}\right)$.

Залежність $\dfrac{\nu RT}{p_0 V_0}\left(\dfrac{V}{V_0}\right)$ є квадратичною, отже її графіком буде парабола (див. рис. 17).

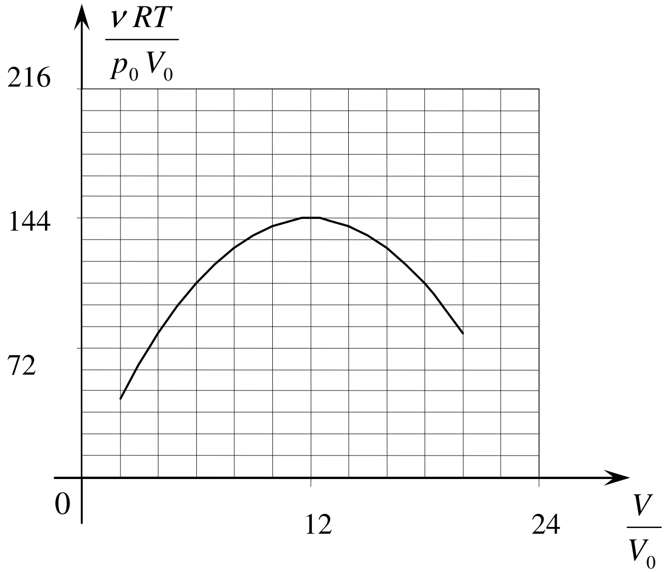
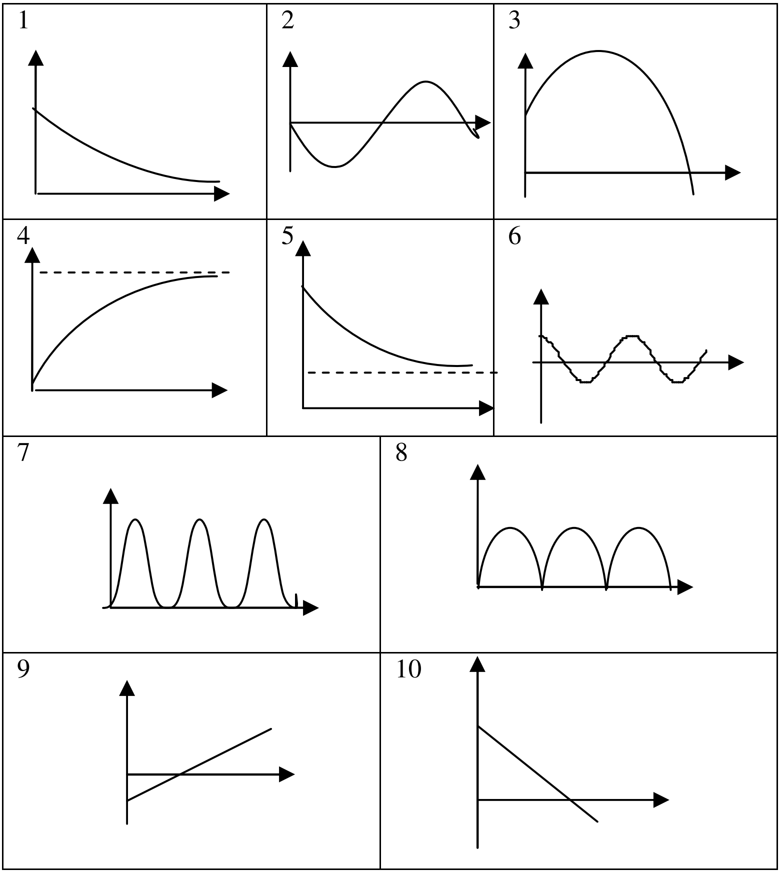


Рис. 17

Максимальне значення (як ми вже визначили у другому пункті) досягається при $\dfrac{V}{V_0} = 12$ і дорівнює $\left(\dfrac{\nu RT}{p_0 V_0}\right)_{\max} = 144$. За умови $V = 2V_0$ маємо: $\dfrac{\nu RT}{p_0 V_0} = 44$; при $V = 20V_0$ маємо:

$\dfrac{\nu RT}{p_0 V_0} = 80$. Парабола, яка зображена на рисунку, і є графіком процесу в координатах $\left(\dfrac{V}{V_0}; \dfrac{\nu RT}{p_0 V_0}\right)$.

6. Заповніть пропуски у твердженнях, що наведені після рисунків:



1) Залежність $x(t) = x_0 + \upsilon_{x0}t + \dfrac{a_x t^2}{2}$ при деяких ненульових значеннях параметрів графічно подана на рис. ____.

2) Початкова координата x_0 ___0. 3) Початкова швидкість υ_{x0} ___0. 4) Прискорення a_x ___0. 5) Враховуючи, що $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$, маємо $\upsilon_x(t) =$_________. 6) Графік $\upsilon_x(t)$ поданий на рис. ____.

7) Максимальне значення $x(t)$ досягається при $t_m =$______.

8) Максимальне значення $x(t_m) =$_____________. 9) При $t_0 =$____________________, координата $x(t_0) = 0$. 10) Дотична до графіка $x(t)$ в точці (0; x_0) задається формулою $\tilde{x}(t) =$_________.

Коментар. 1. Залежність $x(t) = x_0 + \upsilon_{0x}\,t + \dfrac{a_x t^2}{2}$ є квадратичною, тому її графіком є квадратична парабола, яка при деяких ненульових значеннях параметрів представлена на <u>рис. 3</u>.

2. Початкова координата $\underline{x(0) = x_0 > 0}$, як видно з рис. 3.

3. На початку руху координата $x(t)$ зростає (див. рис. 3). Це означає, що проекція початкової швидкості на вісь x додатна ($\underline{\upsilon_{0x} > 0}$).

4. Гілки квадратичної параболи спрямовані вниз. Це означає, що коефіцієнт перед t^2 від’ємний, тобто $\underline{a_x < 0}$.

5. Проекція швидкості на вісь x дорівнює похідній координати $x(t)$ за часом: $\underline{\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt} = \upsilon_{0x} + a_x t}$.

6. Функція $\upsilon_x(t)$ є лінійною. Отже, її графіком буде пряма. Враховуючи, що $a_x < 0$, обираємо <u>рис. 10</u>.

7. Максимальне значення $x(t)$ досягається тоді, коли $\upsilon_x = 0$. Дійсно, при $\upsilon_x > 0$ координата x буде зростати, а при

$\upsilon_x < 0$ буде спадати. Таким чином, t_m знаходиться з рівняння $\upsilon_{0x} + a_x t_m = 0$. Звідки $t_m = -\dfrac{\upsilon_{0x}}{a_x}$.

8. Максимальне значення координати можна знайти, підставивши вираз для t_m у вихідну формулу для $x(t)$. Але існують й інші можливості. Наприклад, оскільки координата зростала у той час, коли проекція швидкості зменшувалася за *лінійним* законом від υ_{0x} до нуля, $x(t_m) - x(0) = \dfrac{\upsilon_{0x}}{2} \cdot t_m$.

Враховуючи значення $x(0)$ і t_m, отримуємо: $x(t_m) = x_0 - \dfrac{\upsilon_{0x}^2}{2a_x}$.

Нагадаємо, що $a_x < 0$, тому, як і треба було очікувати, $x(t_m) > x_0$.

9. Щоб знайти t_0, треба розв'язати квадратичне рівняння і з отриманих коренів взяти додатний.

$$a_x t_0^2 + 2\upsilon_{0x} t_0 + 2x_0 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{-\upsilon_{0x} - \sqrt{\upsilon_{0x}^2 - 2a_x x_0}}{a_x}.$$

Знак перед радикалом (позначкою квадратного кореня) обраний з урахуванням того, що $a_x < 0$.

10. Дотична до графіка $x(t)$ в точці $(0;\ x_0)$ є графіком *рівномірного* руху з початковою координатою x_0 та швидкістю, що співпадає з початковою швидкістю розглядуваного рівноприскореного руху. Нагадаємо, що фізичний зміст похідної від функції полягає у тому, що вона є швидкістю зростання функції, а її геометричний зміст — у тому, що вона є кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка функції. Таким чином, $\tilde{x}(t) = x_0 + \upsilon_{0x} t$.

7. Впишіть термін за аналогією:

1) сила — потенціальна енергія

напруженість електричного поля — ____________
2) потужність — робота
сила струму — ______________
3) координата — заряд
швидкість — ______________
4) маса — індуктивність
імпульс — ________________
5) напруга — вольтметр
тиск — _________________

Коментар. 1) Потенціал $\varphi(\vec{r})$ електричного поля так само пов'язаний з напруженістю електричного поля $\vec{E}(\vec{r})$, як потенціальна енергія $U(\vec{r})$ — з силою $\vec{F}(\vec{r})$. Ці характеристики електричного поля вводяться таким чином, щоб для пробного точкового заряду його потенціальна енергія в електричному полі й сила, що на нього діє, обчислювалися за формулами: $U = q\varphi$ і $\vec{F} = q\vec{E}$. Звернемо увагу на те, що для знаходження вірної відповіді ми не встановлювали, як саме пов'язані $\vec{E}$ і φ, або $\vec{F}$ і U відповідно. Щоб у загальному випадку записати зв'язок між напруженістю електричного поля $\vec{E}$ і потенціалом φ, треба використати математичні поняття, які виходять за рамки шкільної програми. Отже, і в університеті буде чим зайнятися!

2) Потужність (мається на увазі механічна) — це швидкість виконання роботи, а сила струму (мається на увазі електричного) – це швидкість протікання електричного заряду через переріз провідника. Зверніть увагу на одиниці вимірювання: Вт=Дж/с, А=Кл/с.

3) Якщо координаті ставиться у відповідність заряд, то швидкості (у кінематичному розумінні) доречно поставити у відповідність силу струму. А на якій же підставі координаті ставиться у відповідність заряд? Тут треба згадати про аналогію, яку вивчали за шкільною програмою, між коливаннями координати x тягарця масою m на пружині з коефіцієнтом жорсткості k і коливаннями величини заряду q на конденсаторі

ємністю C в електричному контурі, до якого крім конденсатора входить соленоїд з індуктивністю L. У першому випадку відповідне диференціальне рівняння, що описує процес, має вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0.$$

А у випадку $LC-$контуру рівняння, з математичної точки зору, таке саме:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C}=0.$$

Як бачимо, у другому рівнянні $q(t)$ відіграє таку ж роль, що і $x(t)$ в першому. Якщо ж взяти від цих функцій похідні за часом, то отримаємо відповідно силу струму і швидкість (у кінематичному розумінні).

4) Після того, як ми згадали аналогію між диференціальними рівняннями, що описують коливання координати $x(t)$ і заряду $q(t)$, то зв'язок між масою m та індуктивністю L стає очевидним. До речі, аналогом коефіцієнта жорсткості k буде величина обернена до ємності, тобто $\frac{1}{C}$. Тепер згадаємо, що імпульс (або кількість руху) $p=mV$ (позначки векторів писати не будемо). Якщо m замінити на L, а V на I, то отримуємо LI, а це — магнітний потік Φ (мова йде про власне магнітне поле соленоїда).

5) Вольтметром вимірюють електричну напругу, а тиск вимірюють, наприклад, манометром. Назви інших приладів для вимірювання тиску також приймалися як правильні відповіді.

Додаток А. База завдань для абітурієнтів, які вступали на заочне відділення фізичного факультету ЗДУ

1. Як зміниться сила гравітаційної взаємодії F двох матеріальних точок, якщо відстань R між ними:

а) зменшиться у 2 рази? б) зменшиться у 3 рази? в) зменшиться у 4 рази? г) зменшиться у 5 разів? д) зменшиться у 6 разів? е) збільшиться у 2 рази? є) збільшиться у 3 рази? ж) збільшиться у 4 рази? з) збільшиться у 5 разів? и) збільшиться у 6 разів?

Примітка: $F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$.

2. Як треба змінити відстань від точкового заряду r, щоб напруженість електричного поля E:

а) зменшилася у 2 рази? б) зменшилася у 3 рази? в) зменшилася у 4 рази? г) зменшилася у 5 разів? д) зменшилася у 6 разів? е) збільшилася у 2 рази? є) збільшилася у 3 рази? ж) збільшилася у 4 рази? з) збільшилася у 5 разів? и) збільшилася у 6 разів?

Примітка: $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$.

3. Як треба змінити температуру T ***газу в ізобаричному процесі*** $(p = const)$***, щоб концентрація його молекул*** n***:***

а) збільшилася у 2 рази? б) збільшилася у 3 рази? в) збільшилася у 4 рази? г) збільшилася у 5 разів? д) збільшилася у 6 разів? е) зменшилася у 2 рази? є) зменшилася у 3 рази? ж) зменшилася у 4 рази? з) зменшилася у 5 разів? и) зменшилася у 6 разів?

Примітка: $p = nkT$.

4. Тіло, що кинули з початковою швидкістю υ_0 ***під кутом до горизонту*** α_1***, піднялося на висоту*** h_1***. На яку висоту підніметься це тіло, якщо кут буде дорівнювати*** α_2***, а початкова швидкість не зміниться?***

а) $\alpha_1 = 30^0$, $h_1 = 2\text{м}$, $\alpha_2 = 60^0$; б) $\alpha_1 = 30^0$, $h_1 = 2\text{м}$, $\alpha_2 = 45^0$; в) $\alpha_1 = 45^0$, $h_1 = 2\text{м}$, $\alpha_2 = 60^0$; г) $\alpha_1 = 60^0$, $h_1 = 2\text{м}$, $\alpha_2 = 30^0$; д) $\alpha_1 = 60^0$, $h_1 = 2\text{м}$, $\alpha_2 = 45^0$; е) $\alpha_1 = 45^0$, $h_1 = 2\text{м}$, $\alpha_2 = 30^0$; є) $\alpha_1 = 30^0$, $h_1 = 4\text{м}$, $\alpha_2 = 60^0$; ж) $\alpha_1 = 30^0$, $h_1 = 4\text{м}$, $\alpha_2 = 45^0$; з) $\alpha_1 = 45^0$, $h_1 = 4\text{м}$, $\alpha_2 = 60^0$; и) $\alpha_1 = 60^0$, $h_1 = 4\text{м}$, $\alpha_2 = 30^0$.

Примітка: $h = \dfrac{\upsilon_0^{\,2} \sin^2 \alpha}{2g}$.

5. Запишіть фізичною формулою фразу:

а) “Енергія електричного поля конденсатора дорівнює половині добутку його ємності та квадрата напруги на ньому”.

б) “Енергія електричного поля конденсатора дорівнює відношенню квадрата заряду до подвоєної електроємності”.

в) “Енергія розтягненої пружини дорівнює половині добутку її коефіцієнта жорсткості та квадрата її видовження”.

г) “Енергія розтягненої пружини дорівнює відношенню квадрата сили, що розтягує пружину, до подвоєного коефіцієнта жорсткості”.

д) “Кінетична енергія тіла дорівнює половині добутку його маси та квадрата його швидкості”.

е) “Кінетична енергія тіла дорівнює відношенню квадрата його імпульсу до подвоєної маси тіла”.

є) “Енергія магнітного поля соленоїда дорівнює половині добутку його індуктивності та квадрата сили струму, що проходить через нього”.

ж) “Енергія магнітного поля соленоїда дорівнює відношенню квадрата власного магнітного потоку до подвоєної його індуктивності”.

з) “Енергія обертального руху тіла дорівнює половині добутку його моменту інерції та квадрата його кутової швидкості”.

и) “Енергія обертального руху тіла дорівнює відношенню квадрата моменту кількості руху до подвоєного його моменту інерції”.

Наведіть список використаних позначень.

6. Запишіть фразою (на зразок такої, як у попередньому завданні) фізичну формулу:

а) $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де T — період математичного маятника під час гармонічних коливань, l — його довжина, g — прискорення вільного падіння; б) $E=mc^2$, де E — енергія спокою частинки, m — маса, c — швидкість світла у вакуумі; в) $W=\frac{kx^2}{2}$, де W — потенціальна енергія розтягнутої пружини, x — її видовження, k — жорсткість пружини; г) $W=\frac{\Phi^2}{2L}$, де W — енергія магнітного поля соленоїда, L — його індуктивність, Φ — магнітний потік; д) $a=\frac{\upsilon^2}{R}$, де a — доцентрове прискорення тіла, що рухається по колу, υ — його швидкість, а R — радіус кола.

7. Переведіть у СІ, записавши відповідь у стандартному вигляді (як $a\cdot 10^n$, де $1\le a<10$, $n\in Z$):

а) $0{,}12\,\frac{\text{Н}}{\text{см}^2}=$; б) $0{,}03\,\frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}=$; в) $1{,}4\,\frac{\text{Н}}{\text{дм}^2}=$; г) $0{,}11\,\frac{\text{Н}}{\text{км}^2}=$;

д) $0{,}72\,\frac{\text{Кл}}{\text{год}}=$; е) $1{,}2\,\frac{\text{Кл}}{\text{хв}}=$; є) $7{,}2\,\frac{\text{Дж}}{\text{год}}=$; ж) $0{,}12\,\frac{\text{Дж}}{\text{хв}}=$;

з) $1{,}1\,\frac{\text{Дж}}{\text{мс}}=$; и) $0{,}9\,\frac{\text{Дж}}{\text{мкс}}=$.

Примітка. *Одиниці СІ, в яких потрібно записати відповідь, містяться серед таких:* Вт, А, Па.

***8. Виберіть до виразу одну з таких одиниць*:** м, кг, с, Ом, А, Гц, Н, Дж, Па, Гн, Ф, Тл, Вб, Кл, К, В, Вт.

а) $\sqrt{\dfrac{\text{Ом}\cdot\text{А}\cdot\text{Н}}{\text{Па}\cdot\text{В}}}=$; б) $\sqrt{\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{Ом}\cdot\text{Н}}}=$; в) $\sqrt{\dfrac{\text{А}^3\cdot\text{Гн}}{\text{Вб}}}=$; г) $\sqrt{\dfrac{\text{Кл}\cdot\text{А}^3}{\text{Ф}\cdot\text{Вт}}}=$;

д) $\sqrt{\dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Тл}\cdot\text{А}}}=$; е) $\sqrt{\dfrac{\text{Гн}\cdot\text{А}^3}{\text{Вб}}}=$; є) $\sqrt{\dfrac{\text{А}\cdot\text{Гн}^3}{\text{Вб}}}=$; ж) $\sqrt{\dfrac{\text{Дж}\cdot\text{А}}{\text{Вб}}}=$;

з) $\text{м}^2\sqrt{\dfrac{\text{Тл}}{\text{Вб}}}=$; и) $\text{А}\sqrt{\dfrac{\text{Гн}\cdot\text{м}}{\text{Н}}}=$.

9. Виразіть із рівняння вказану величину через інші.

а) $W=\dfrac{LI^2}{2} \quad\Rightarrow\quad I-?$; б) $W=\dfrac{kx^2}{2} \quad\Rightarrow\quad x-?$;

в) $W=\dfrac{CU^2}{2} \quad\Rightarrow\quad U-?$; г) $W=\dfrac{I\omega^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \omega-?$;

д) $W=\dfrac{m\upsilon^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \upsilon-?$; е) $W=\dfrac{\Phi^2}{2L} \quad\Rightarrow\quad \Phi-?$;

є) $W=\dfrac{F^2}{2k} \quad\Rightarrow\quad F-?$; ж) $W=\dfrac{q^2}{2C} \quad\Rightarrow\quad q-?$;

з) $W=\dfrac{p^2}{2m} \quad\Rightarrow\quad p-?$; и) $W=\dfrac{L^2}{2I} \quad\Rightarrow\quad L-?$.

10. Зробіть ескіз графіка залежності від часу координати $x(t)=x_0+\upsilon_{0x}t+\dfrac{a_xt^2}{2}$ ($t\geq 0$)***, якщо:***

а) $a_x>0$, $\upsilon_{0x}>0$, $x_0>0$; б) $a_x>0$, $\upsilon_{0x}>0$, $x_0<0$; в) $a_x>0$, $\upsilon_{0x}<0$, $x_0>0$; г) $a_x>0$, $\upsilon_{0x}<0$, $x_0<0$; д) $a_x<0$, $\upsilon_{0x}>0$, $x_0>0$; е) $a_x<0$, $\upsilon_{0x}>0$, $x_0<0$; є) $a_x<0$, $\upsilon_{0x}<0$, $x_0>0$; ж) $a_x<0$, $\upsilon_{0x}<0$, $x_0<0$; з) $a_x>0$, $\upsilon_{0x}=0$, $x_0>0$; и) $a_x<0$, $\upsilon_{0x}>0$, $x_0=0$.

Б. База завдань для абітурієнтів, які вступали на денне відділення фізичного факультету ЗДУ

1. Відповідаючи на запитання, запишіть кінцеву формулу та назвіть величини, які до неї входять. Якщо вважаєте за потрібне, зробіть додаткові пояснення.

а) Як знайти температуру ідеального газу, якщо відомі тиск і концентрація молекул?

б) Як знайти відстань між двома маленькими зарядженими тілами, якщо відомі добуток модулів зарядів, значення сили взаємодії, а також, що тіла розташовані у вакуумі?

в) Як знайти заряд конденсатора, якщо відомі його ємність і накопичена в ньому енергія?

г) Як знайти силу струму в провіднику, якщо відомі напруга на ньому і потужність тепла, що в ньому виділяється?

д) Як знайти силу струму в соленоїді, якщо відомі його індуктивність і енергія магнітного поля в ньому?

е) Як знайти кількість теплоти, що отримує робоче тіло теплової машини від нагрівача за певний час, якщо відомі кількість теплоти, що передається за той же час холодильнику, і коефіцієнт корисної дії циклу?

є) Як знайти діелектричну проникність діелектрика, що заповнює плоский конденсатор, якщо відомі ємність конденсатора, відстань між пластинами і площа пластин?

ж) Як знайти значення швидкості зарядженої частинки, що рухається в магнітному полі, якщо відомі індукція магнітного поля, сила, що діє на частинку з боку поля, заряд частинки та кут між напрямком швидкості і вектором індукції?

з) Як знайти ємність одного з конденсаторів, які з’єднані послідовно, якщо відомі ємність другого конденсатора і їхня загальна ємність як системи?

и) Як знайти напруженість однорідного електричного поля конденсатора, якщо відомі напруга на обкладинках та відстань між ними?

2. Виберіть правильну відповідь:

1) Явище огинання світлом перешкод називають…
а) дисперсією; б) дифракцією; в) поляризацією; г) інтерференцією.

2) Відсутність дисперсії світла у міжзоряному просторі свідчить про те, що цей простір можна вважати…
а) вакуумом; б) абсолютно чорним тілом; в) ідеальним газом; г) плазмою.

3) Ізотопами називають різновиди одного і того ж хімічного елемента, в яких ядра атомів мають…
а) однакову кількість нейтронів, але різну кількість протонів;
б) однакову кількість протонів, але різну кількість нейтронів;
в) однакову кількість протонів та нейтронів;
г) однакову кількість нуклонів, але різну протонів.

4) Прилад для вимірювання сили струму — …
а) динамометр ; б) амперметр; в) манометр; г) вольтметр.

5) Прикладом автоколивальної системи є …
а) конденсатор; б) діод; в) транзистор; г) механічний годинник.

6) Джерелом магнітного поля може бути…
а) нерухома заряджена частинка; б) електричний струм;
в) гравітаційне поле; г) потік швидких нейтронів.

7) Явище виникнення ЕРС індукції в соленоїді внаслідок зміни власного магнітного потоку називається…
а) самоіндукцією; б) поляризацією; в) електричним струмом; г) електролізом.

8) Коефіцієнт пропорційності в законі всесвітнього тяжіння називається…
а) модулем Юнга; б) універсальною газовою сталою;
в) прискоренням вільного падіння; г) гравітаційною сталою.

9) Механічна робота не виконується, якщо вектори сили та переміщення…
а) співпадають за напрямком; б) перпендикулярні;
в) протилежні за напрямком; г) утворюють кут 45°.

10) Броунівський рух — це…
а) хаотичний рух молекул;

б) хаотичний рух малих частинок, які зависли в рідині, під дією теплового руху молекул середовища;
в) рух швидких електронів;
г) рух елементарних частинок.

3. Переведіть у СІ, записавши відповідь у стандартному вигляді (як $a \cdot 10^n$, де $1 \le a < 10$, $n \in Z$):

а) $0{,}6\,\frac{\text{МДж}}{\text{хв}} =$; б) $0{,}02\,\frac{\text{кН}}{\text{дм}^2} =$; в) $0{,}4\,\frac{\text{кН}}{\text{см}^2} =$; г) $3{,}6\,\frac{\text{мКл}}{\text{год}} =$;

д) $70\,\frac{\text{кН}}{\text{мм}^2} =$; е) $0{,}07\,\frac{\text{Кл}}{\text{мс}} =$; є) $2{,}4\,\frac{\text{кДж}}{\text{хв}} =$; ж) $2{,}4\,\frac{\text{кКл}}{\text{хв}} =$;

з) $0{,}36\,\frac{\text{кДж}}{\text{год}} =$; и) $0{,}72\,\frac{\text{МДж}}{\text{год}} =$; к) $1{,}7\,\frac{\text{кВб}}{\text{мм}^2} =$; л) $5{,}5\,\frac{\text{кВб}}{\text{см}^2} =$;

м) $3{,}8\,\frac{\text{МВб}}{\text{мм}^2} =$; н) $5{,}7\,\frac{\text{кДж}}{\text{м}} =$; с) $23{,}4\,\frac{\text{мДж}}{\text{м}} =$.

Примітка. Одиниці СІ, в яких потрібно записати відповідь, містяться серед таких: Вт, А, Па, Н, Тл.

4. Матеріальна точка рухається так, що координата змінюється за вказаним законом. Знайдіть мінімальне значення координати, якщо $t \ge 0$.

а) $x(t) = 8t^2 - 16t + 1$; б) $x(t) = 2t^2 - 12t + 23$;
в) $x(t) = 3t^2 - 6t + 5$; г) $x(t) = 2t^2 - 4t - 2$;
д) $x(t) = 4t^2 - 16t + 25$; е) $x(t) = 3t^2 - 12t - 1$;
є) $x(t) = 5t^2 - 10t - 2$; ж) $x(t) = 4t^2 - 24t + 1$;
з) $x(t) = 3t^2 + 12t - 3$; и) $x(t) = 2t^2 + 8t - 1$.

5. Виразіть шукану величину через ті, що стоять у дужках, а також фізичні та математичні константи.

а) $0{,}125N_0 = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} \quad \Rightarrow \quad t\,(T) - ?$

б) $\frac{m\upsilon^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon\,(M, r) - ?$

в) $\dfrac{\upsilon}{\lambda} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad C(\upsilon, \lambda, L) - ?$

г) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad l(T) - ?$

д) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R_2\,(R, R_1) - ?$

е) $I = I_0 e^{-\alpha x} \quad \Rightarrow \quad x(I, I_0, \alpha) - ?$

є) $W = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} Sd \quad \Rightarrow \quad E(W, \varepsilon, S, d) - ?$

ж) $\dfrac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho gh + p = p_0 \quad \Rightarrow \quad \upsilon(p_0, p, \rho, h) - ?$

з) $l = l_0\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad u(l, l_0) - ?$

и) $\dfrac{m\upsilon_0{}^2}{2} = \dfrac{m\upsilon^2}{2} - G\dfrac{mM}{r} \quad \Rightarrow \quad \upsilon(M, \upsilon_0, r) - ?$

***6. Розв'яжіть систему рівнянь і виразіть шукану величину через ті, що стоять у дужках, а також математичні та фізичні константи*:**

а) $\left.\begin{aligned} mg &= \rho_b gV \\ V &= V_n + V_c \\ V_n &= \frac{\pi d^2}{4} l \\ V_c &= \frac{m}{\rho_c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d(m, l, \rho_c, \rho_b)\,?$

б) $\left.\begin{aligned} &mg\,\frac{a}{2} = Fa\cos\alpha \\ &F\cos\alpha - F_{тер} = 0 \\ &-F\sin\alpha - mg + N = 0 \\ &F_{тер} = \mu N \end{aligned}\right\} \Rightarrow tg\,\alpha(\mu)\,?$

в) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a_1 t_1^{\ 2}}{2} = \dfrac{a_2 t_2^2}{2} \\ t_2 = n t_1 \\ a_1 = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \\ a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(n, tg\alpha)?$$

г) $$\left.\begin{array}{l} m = \rho \upsilon \Delta t \dfrac{\pi d^2}{4} \\ m\lambda = \eta N \Delta t \\ \rho = \dfrac{P\mu}{RT} \end{array}\right\} \Rightarrow \upsilon(\eta, N, T, d, \lambda, P, \mu)?$$

д) $$\left.\begin{array}{l} m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon_2 \\ \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = E \end{array}\right\} \Rightarrow \upsilon_1(m_1, m_2, E)?$$

е) $$\left.\begin{array}{l} mg = m\omega^2 R \\ mg = G\dfrac{Mm}{R^2} \\ M = \rho\dfrac{4}{3}\pi R^3 \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(T)?$$

є) $$\left.\begin{array}{l} G\dfrac{mM}{x^2} = m\omega^2 x \\ G\dfrac{mM}{R^2} = mg \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow x(T, R)?$$

ж) $\left.\begin{aligned} &mg = \frac{m\upsilon_1^2}{L} \\ &\frac{m\upsilon^2}{2} = 2mgL + \frac{m\upsilon_1^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \upsilon(L)?$

з) $\left.\begin{aligned} &G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \\ &g = G\frac{M}{r^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(R, r, T)?$

и) $\left.\begin{aligned} &Ma = F\cos\alpha \\ &mb = mg - 2F\sin\alpha \\ &a = b\cdot tg\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow a(m, M, \alpha)?$

7. Виберіть до виразу одну з таких одиниць: м, кг, с, Ом, А, Н, Дж, Па, Гн, Ф, Тл, Вб, Кл, К, В, Вт, Гц.

Вказівка: m_e — маса електрона, e — заряд електрона, c — швидкість світла в вакуумі, h — стала Планка, G — гравітаційна стала, ε_0 — електрична стала.

а) $\left[\frac{m_e^2\cdot c^3}{h}\right] =$; б) $\left[\frac{G\cdot m_e}{c^3}\right] =$; в) $\left[\frac{h^2}{G\ \cdot m_e^3}\right] =$; г) $\left[\frac{h\cdot c^5}{G^2\cdot m_e^2}\right] =$;

д) $\left[\frac{G\cdot m_e{}^3}{h\cdot c}\right] =$; е) $\left[\frac{G\cdot m_e}{c^2}\right] =$; є) $\left[\frac{h\cdot c^3}{G\cdot m_e}\right] =$; ж) $\left[\frac{h\cdot c^6}{G^2\cdot m_e^2}\right] =$;

з) $\left[\frac{c^4}{G}\right] =$; и) $\left[\frac{G^2\cdot m_e{}^3}{h\cdot c^4}\right] =$.

8. Виберіть до виразу одну з таких одиниць: м, кг, с, Ом, А, Н, Дж, Па, Гн, Ф, Тл, Вб, Кл, К, В, Вт, Гц.

а) $\left[\frac{C}{\varepsilon_0}\right] =$. ***Примітка***: ε_0 — електрична стала, C — ємність конденсатора.

б) $[\varepsilon_0 l]=$. ***Примітка***: ε_0 — електрична стала, l — довжина.

в) $[\varepsilon_0 ES]=$. ***Примітка***: ε_0 — електрична стала, E — напруженість електричного поля, S — площа.

г) $\left[\sqrt{\dfrac{e}{\varepsilon_0 E}}\right]=$. ***Примітка***: e — заряд електрона, ε_0 — електрична стала, E — напруженість електричного поля.

д) $\left[G\dfrac{m^2}{l}\right]=$. ***Примітка***: m — маса, G — гравітаційна стала; l — довжина.

е) $\left[m\sqrt{\dfrac{G}{F}}\right]=$. ***Примітка***: m — маса, F — сила, G — гравітаційна стала.

є) $\left[\dfrac{h}{R^2C^2}\right]=$. ***Примітка***: h — стала Планка, C — ємність конденсатора, R — опір резистора.

ж) $\left[\dfrac{h}{\sqrt{LC}}\right]=$. ***Примітка***: h — стала Планка, C — ємність конденсатора, L — індуктивність соленоїда.

з) $\left[\dfrac{W}{h}\right]=$. ***Примітка***: h — стала Планка, W — енергія.

и) $[\varepsilon_0 E^2 V]=$. ***Примітка***: ε_0 — електрична стала, E — напруженість електричного поля, V — об’єм.

9. Виберіть до виразу одну з таких одиниць: м, кг, с, Ом, А, Гц, Н, Дж, Па, Гн, Ф, Тл, Вб, Кл, К, В, Вт.

а) $\text{В}^2\sqrt{\dfrac{\text{Ф}}{\text{Н}\cdot\text{м}}}=$; б) $\text{Вб}\sqrt{\dfrac{\text{м}}{\text{Гн}\cdot\text{Н}}}=$; в) $\text{Кл}\sqrt{\dfrac{\text{с}}{\text{Ф}\cdot\text{Вт}}}=$;

г) $\dfrac{\text{Кл}}{\text{Ф}}\sqrt{\dfrac{\text{Гн}\cdot\text{А}}{\text{Вб}}}=$; д) $\dfrac{1}{\text{м}}\sqrt{\dfrac{\text{Вб}\cdot\text{А}}{\text{кг}}}=$; е) $\text{Дж}\sqrt{\dfrac{\text{с}}{\text{Ом}\cdot\text{Дж}}}=$;

є) $\text{с}\sqrt{\dfrac{\text{Вб}\cdot\text{А}}{\text{кг}}}=$; ж) $\text{В}\sqrt{\dfrac{\text{А}\cdot\text{Н}}{\text{Вт}\cdot\text{В}\cdot\text{Па}}}=$; з) $\text{Вт}\sqrt{\dfrac{\text{Ф}}{\text{Н}\cdot\text{м}}}=$;

и) $\text{В}\sqrt{\dfrac{\text{с}}{\text{Ф}\cdot\text{Вт}}}=$.

10. Матеріальна точка рухається так, що координата змінюється за вказаним законом. Запишіть вираз для дотичної до графіка цієї залежності в початковий момент $(t=0)$ ***у вигляді*** $\tilde{x}=A+Bt$. ***Який фізичний зміст мають константи A і B?***

а) $x(t)=3+t+0{,}3e^{-2t}$; б) $x(t)=2+3t-\sin 2t$;

в) $x(t)=2+4\cos 5t+3\sin 5t$; г) $x(t)=5-3e^{-0{,}1t}$;

д) $x(t)=3\cos 2t-4\sin 2t$; е) $x(t0=4+5t+e^{-3t}$;

є) $x(t)=-5+4t-2\sin t$; ж) $x(t)=4+3\cos 6t+4\sin 6t$;

з) $x(t)=7-6e^{-0{,}9t}$; и) $x(t)=\cos 4t-\sqrt{3}\sin 4t$.

11. Не розв'язуючи повністю задачу, вкажіть відповідь у тому конкретному випадку, який запропонований у дужках після умови.

а) Стержень довжиною l і масою m підвішено до стелі на двох легких проводах однакової довжини. Проводи закріплено на кінцях стержня і паралельні один до одного. Система розміщена в однорідному вертикальному магнітному полі з індукцією B. Чому дорівнюватиме натяг кожного провода, якщо по стержню пропустити струм силою I ? ($I\to 0$)

б) Маленька кулька з масою m і зарядом q підвішена на діелектричній нитці. На який кут від вертикалі відхилиться нитка, якщо кульку помістити в однорідне електричне поле з напруженістю E, вектор якої напрямлений горизонтально? ($\frac{mg}{qE} \to 0$)

в) У плоский конденсатор, обкладинками якого є квадратні пластини зі стороною a, вводять зі сталою швидкістю діелектричну пластину з діелектричною проникністю ε і товщиною d, яка щільно прилягає до обкладинок. Конденсатор під'єднано до батареї з ЕРС E. З якою швидкістю треба всовувати пластину, щоб у колі проходив струм силою I? ($\varepsilon \to 1$)

г) Три повітряні конденсатори ємністю C_0 кожний з'єднані послідовно. Конденсатори зарядили і від'єднали від джерела. Заряд цієї батареї Q_0. Потім простір між обкладинками одного з конденсаторів повністю заповнюють діелектриком з діелектричною проникністю ε. Визначити енергію, накопичену в електричному полі цих конденсаторів. ($\varepsilon \to 1$)

д) Два конденсатори розраховані на максимальну напругу U кожний, мають різні ємності C_1 та C_2 і з'єднані послідовно. Яку найбільшу напругу можна прикласти до такої системи? ($\frac{C_1}{C_2} \to 1$)

е) Межа вимірювання міліамперметра з внутрішнім опором R дорівнює I. Якої довжини треба взяти манганінову дротину діаметром d як додатковий опір, щоб використати амперметр як вольтметр з межею вимірювань U? ($\frac{IR}{U} \to 1$)

є) При силі струму I_1 в зовнішній частині кола виділяється потужність P_1, а при силі струму I_2 — потужність P_2. Визначити внутрішній опір джерела струму. ($\frac{P_1 I_2}{I_1 P_2} \to 1$)

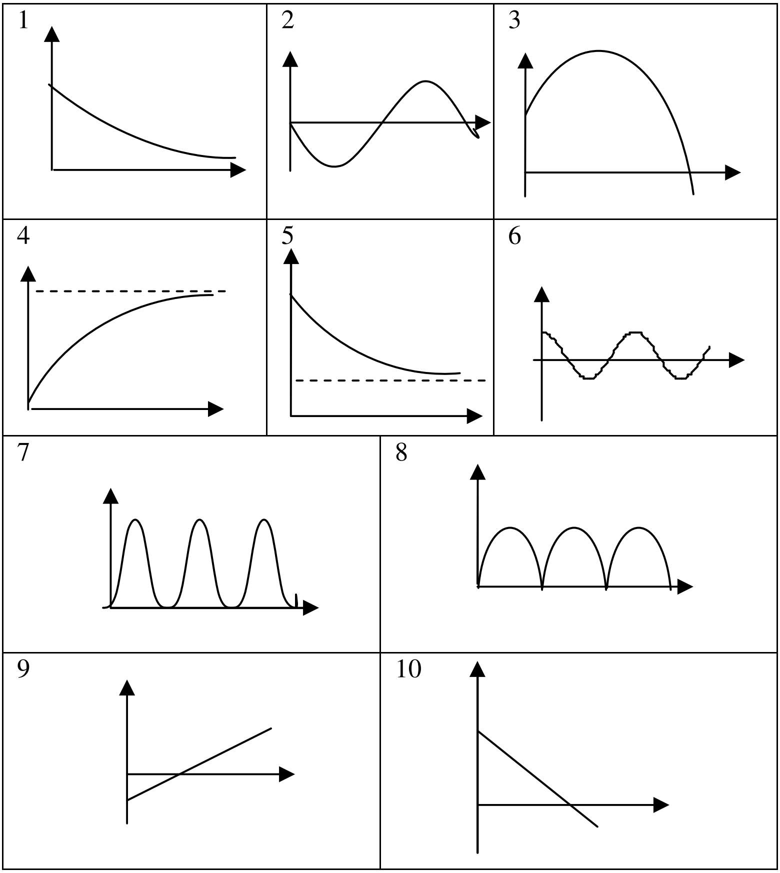
ж) Паралельно з'єднані конденсатор ємністю C і резистор опором R під'єднані до джерела струму з ЕРС E і внутрішнім опором r. Визначити заряд на обкладинках конденсатора. ($\frac{r}{R} \to 0$)

з) Плоский повітряний конденсатор з квадратними пластинами (сторона пластини дорівнює a) рівномірно занурюється в рідкий діелектрик з діелектричною проникністю ε так, що пластини перпендикулярні до рівня рідини. Відстань між пластинами d. До конденсатора під'єднано джерело постійної напруги U. Якої сили струм проходить через джерело при швидкості занурення υ? ($\varepsilon \to 1$)

и) Прямий провідник масою m і довжиною l підвішений горизонтально на двох невагомих нитках, прив'язаних до його кінців. Провідник розміщений в однорідному вертикальному магнітному полі, індукція якого B. Якої сили струм треба пропустити через провідник, щоб він відхилився від положення рівноваги і нитки утворили з вертикаллю кут α кожна? ($\alpha \to 0$).

В. База завдань відкритих олімпіад з фізики для абітурієнтів ЗДУ

1. Заповніть пропуски у твердженнях, що наведені після рисунків:



1) Залежність $I(t) = I_m \sin(\frac{t}{\sqrt{LC}} + \pi)$ графічно представлена на рис._____. 2) При цьому вважається, що I_m ____0. 3) Враховуючи, що $I(t) = \frac{dq}{dt}$, а також, що $\frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0$, для

заряду на конденсаторі маємо $q(t) =$ ______________. 4) Графік $q(t)$ поданий на рис. ______. 5) Максимальне значення заряду на конденсаторі $q_m =$ _______. 6) Період коливань заряду $T_q =$ _________. 7) Враховуючи, що енергія магнітного поля котушки індуктивності $W_L = \dfrac{LI^2}{2}$, можна сказати, що залежність $W_L(t)$ подана на рис.______. 8) Період функції $W_L(t)$ становить $T_W =$ ________. 9) Середнє за період значення енергії магнітного поля котушки індуктивності становить $\langle W_L \rangle =$ _________. 10) Враховуючи, що сумарна енергія електричного поля конденсатора і магнітного поля котушки індуктивності зберігається, можна стверджувати, що максимальна енергія електричного поля конденсатора дорівнює $W_{C\max} =$ ____________.

2. Підберіть пару наступним термінам із запропонованих у рамці:

1) Дифракція —___________
2) інтерференція —_________
3) когерентність —_________
4) дисперсія —____________
5) індукція —_____________

накладання, розсіювання, розкладання, узгодження, заломлення, огинання, взаємодія, додавання, наведення, порівняння

3. 1) Із термінів ***конвекція, теплопровідність, теплопередача, випромінювання*** зайвим є______________________, бо _______________________________.

2) Із термінів ***потужність, сила струму, напруга, швидкість*** зайвим є______________________, бо ____.

3) Із термінів ***ньютон, ампер, джоуль, кулон*** зайвим є______________________, бо ________________________.

4) Із термінів ***дифузія, діоптрія, деформація, дифракція*** зайвим є__________________________, бо _________________________.

5) Із термінів ***прискорення, імпульс, потужність, переміщення*** зайвим є_________________________, бо ____.

4. Розгляньте шість варіантів залежності координати від часу для матеріальної точки масою m. Заповніть таблицю, зрозумівши відповідність між наведеними виразами для сил F і залежностями x(t). Числові значення величин вважатимемо заданими в СІ, а $t \geq 0$.

F	$\frac{F_0}{m}$	$\frac{k}{m}$	$\frac{\alpha}{m}$	*x(t) змінюється у межах:*	*На початку руху x(t) можна наблизити формулою* $\tilde{x} = x_0 + V_0 t$ *:*
F_0		–	–		
$-k\,x$	–		–		
$-k\,x + F_0$			–		
$-\alpha V$	–	–			
$-\alpha V + F_0$		–			
$F_0 \sin \omega t$		–	–		

А.

1) $x(t) = 6 + 9t + 4e^{-2t}$; 2) $x(t) = 3 + 7t - 2\sin 2t$;

3) $x(t) = 2 + \sqrt{3}\cos 8t + \sin 8t$; 4) $x(t) = 1 - 2e^{-0,5t}$;

5) $x(t) = \sqrt{7}\cos 5t - 3\sin 5t$; 6) $x(t) = 9 - 14t + 4t^2$.

Б.

1) $x(t) = -6 + 5t + 0{,}5e^{-7t}$; 2) $x(t) = -3 + 6t - 3\sin t$;

3) $x(t) = 3 + \sqrt{6}\cos 5t + \sqrt{10}\sin 5t$; 4) $x(t) = 4 - 5e^{-1,5t}$;

5) $x(t) = 4\cos 9t - 3\sin 9t$; 6) $x(t) = 8 - 12t + 8t^2$.

В.

1) $x(t) = 8 + 4t + 0{,}5e^{-6t}$; 2) $x(t) = 7 + 9t - 3\sin 2t$;

3) $x(t) = 5 + \sqrt{10}\cos 2t + \sqrt{6}\sin 2t$; 4) $x(t) = 9 - 7e^{-0,3t}$;

5) $x(t) = \sqrt{5}\cos 7t - 2\sin 7t$; 6) $x(t) = 2 - 4t + 5t^2$.

Г.

1) $x(t) = -2 + 4t + e^{-3t}$; 2) $x(t) = 4 + 5t - \sin 4t$;

3) $x(t) = 9 + 2\cos 7t + \sqrt{5}\sin 7t$; 4) $x(t) = 2 - 3e^{-0,8t}$;

5) $x(t) = \sqrt{10}\cos 3t - \sqrt{6}\sin 3t$; 6) $x(t) = 7 - 4t + 9t^2$.

Д.

1) $x(t) = -3 + 2t + 0{,}25e^{-5t}$; 2) $x(t) = 2 + 7t - 2\sin 3t$;

3) $x(t) = 8 + \sqrt{5}\cos t + 2\sin t$; 4) $x(t) = 7 - 6e^{-0,9t}$;

5) $x(t) = 3\cos 2t - 4\sin 2t$; 6) $x(t) = 1 - 10t + 7t^2$.

5. Не розв’язуючи повністю задач, вкажіть відповіді у тих конкретних випадках, які запропоновані у дужках після їхніх умов.

1) На гладенькій підлозі стоїть візок масою M та довжиною L. На скільки зміститься візок, якщо людина масою m перейде з одного кінця візка на протилежний? [а) $m << M$; б) $m >> M$]

2) З нерухомим тілом абсолютно пружно взаємодіє друге тіло, маса якого в n разів більша за масу нерухомого. Визначте,

у скільки разів зменшиться після удару швидкість другого тіла, якщо удар був центральним. [а) $n \to \infty$; б) $n \to 1$]

3) Ескалатор метро спускає людину, що йде по ньому вниз, за час τ_1. Якщо людина буде йти в n разів швидше, то ескалатор її спустить за час τ_2. За який час спуститься людина, якщо вона стоятиме на ескалаторі? [а) $\tau_1 = n \cdot \tau_2$; б) $\tau_1 = \tau_2 = \tau$]

4) Тіло масою m рухається по горизонтальній площині з прискоренням a під дією двох послідовно з'єднаних пружин з коефіцієнтами жорсткості k_1 та k_2. Визначте сумарне видовження пружин, якщо коефіцієнт тертя дорівнює μ. [а) $k_1 >> k_2$; б) $\mu = 0$; в) $a = 0$; г) $k_1 = k_2 = k$]

6. Як з математичної точки зору називається лінія, яка є ...

1) ...траєкторією руху електрона між пластинами плоского зарядженого конденсатора, якщо він влітав паралельно до них? 2) ... траєкторією руху електрона, що влетів в однорідне магнітне поле паралельно до ліній магнітної індукції? 3) ...траєкторією штучного супутника Землі, який рухається зі швидкістю $10\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$? 4) ...траєкторією матеріальної точки, для якої $\begin{cases} x(t) = a\cos\omega t \\ y(t) = b\sin\omega t \end{cases}$? 5) ...графіком залежності $x(t)$ для матеріальної точки, яка рухається вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$ зі сталою за модулем швидкістю? 6) ...графіком ізотермічного процесу для сталої кількості ідеального газу в $PV-$ координатах? 7) ...графіком залежності потенціальної енергії взаємодії двох точкових зарядів від відстані між ними? 8) ...графіком залежності напруженості гравітаційного поля всередині однорідної кулі від відстані до її центра? 9) ...графіком залежності від часу координати тіла, що здійснює гармонічні коливання? 10) ...графіком залежності від часу горизонтальної

координати матеріальної точки, якій надали швидкість під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту?

7. П'ять питань про тіло, кинуте під кутом до горизонту:

1) Максимальна висота, на яку піднялося тіло, що було кинуто під кутом 30° до горизонту, дорівнює $2\,\text{м}$. Яке прискорення мало тіло на висоті 1м? 2) Тіло кинули під кутом 20° до горизонту. Як зміниться дальність польоту тіла, якщо кут збільшити у 3,5 рази? 3) Тіло кинули з висоти h з початковою швидкістю υ_0 під кутом α до горизонту. З якою швидкістю воно впаде на землю? 4) Тіло зі швидкістю υ_0 кинули під кутом α до горизонту. Який радіус кривизни траєкторії у верхній точці? 5) Під яким кутом кинули тіло, якщо при збільшенні цього кута у 2 рази висота підйому тіла збільшилась у 3 рази?

Г. База екзаменаційних різнорівневих завдань з курсу "Математичний апарат фізики"

І РІВЕНЬ

1. Числове значення запишіть у стандартному вигляді** ($a \cdot 10^n$**, де** $1 \le a < 10$, $n \in Z$**), а одиниці вимірювання виберіть зі списку: кг, м, с, $м \cdot с^{-1}$, $м \cdot с^{-2}$, Н, Дж, Вт, А, В, Ом, Ф, Гн, Тл, Вб.

а) $\dfrac{12г \cdot (50\,см/с)^2}{25мм}$; б) $15Н \cdot 20\,см/с \cdot 5хв$; в) $(2мА)^2 \cdot 30МОм$;

г) $15А \cdot 0{,}2мТл \cdot 15см$; д) $\sqrt{2 \cdot 30мкГн \cdot 2{,}4Дж}$; е) $30мкФ \cdot (2кВ)^2$

є) $\dfrac{250г \cdot 10\,м/с^2 \cdot 80см}{4с}$; ж) $20мкГн \cdot 30А$; з) $\sqrt{2 \cdot 50\,мН/кг \cdot 0{,}4м}$;

и) $30мкФ \cdot 5кВ$.

2. Знайдіть для наступних функцій: а) область визначення; б) область значень; в) нулі; г) інтервали зростання; д) значення функції для** $x = 0$**.

а) $y = 2x^2 - 4x + 5$; б) $y = \dfrac{2x+3}{x+2}$; в) $y = 2\sin(3x + \pi)$;

г) $y = -\dfrac{\pi}{2} + arcctg\,\dfrac{x}{3}$; д) $y = \ln|x-1|$; е) $y = |2^x - 1|$;

є) $y = -x^2 - 6x + 1$; ж) $y = \dfrac{4x-3}{x+2}$; з) $y = 4\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$;

и) $y = \dfrac{1}{\pi} arctg(\pi x)$.

3. За відомою залежністю проекції швидкості від часу** $\upsilon_x(t)$ **і початковою координатою** $x(0) = 0$ **знайдіть залежності від часу: а) проекції прискорення** $a_x(t)$**; б) координати** $x(t)$ **(коефіцієнти вважати заданими в СІ).

а) $\upsilon_x(t) = 5 - 2t$ б) $\upsilon_x(t) = 2\sin 3t$; в) $\upsilon_x(t) = 2e^{-3t}$;

г) $\upsilon_x(t) = -3\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$; д) $\upsilon_x(t) = 3 + e^{-2t}$; е) $\upsilon_x(t) = 7 - t$;

є) $\upsilon_x(t) = -3\sin 2t$; ж) $\upsilon_x(t) = 3e^{-2t}$; з) $\upsilon_x(t) = 2\cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$;

и) $\upsilon_x(t) = 1 + e^{-3t}$.

ІІ РІВЕНЬ

1. Розкладіть у ряд Маклорена до перших двох ненульових доданків:

а) $(2-x)^3$; б) $\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$; в) $(1+x)\cdot e^{-x^2}$; г) $\sin 2x$; д) $tg\, x$;

е) $\arccos\frac{x}{2}$; є) 2^x; ж) $\sin^2 x$; з) $x\cos x$; и) e^{x^2}.

2. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = \left|\frac{2x-3}{x-2}\right|$; б) $y = -3\sin^2\left(\frac{x}{2}+\pi\right)$; в) $y = \log_{\frac{1}{2}}(|x|+1)$;

г) $y = 3^{|x+1|} - 1$; д) $y = 2ctg(2x - \pi)$; е) $y = \frac{|x|+2}{2|x|-2}$;

є) $y = 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; ж) $y = \log_2|x-1|$; з) $y = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - 1\right|$;

и) $y = tg\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{2}\right)$.

3. Розв'яжіть диференціальні рівняння з початковими умовами. Запишіть кінцеві формули для $x(t)$ і $\dot{x}(t)$ та побудуйте ескізи відповідних графіків:

а) $\ddot{x} + 9x - 3 = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$;

б) $\ddot{x} + 2\dot{x} - 4 = 0$ $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$;

в) $\ddot{x} + 16x - 2 = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$;

г) $\ddot{x}+3\dot{x}-5=0$, $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$.

4. Для кожної з поданих залежностей координати від часу матеріальної точки масою $m=2\,\text{кг}$***: а) Представте силу, що діє на тіло, в одному з наведених у дужках виглядів (*** $F=-kx+F_0$, $F=-\alpha V+F_0$, $F=F_0\sin\omega t$ ***); б) Знайдіть, у яких межах змінюється*** $x(t)$***, якщо*** $t\ge 0$***; в) Наблизьте*** $x(t)$ ***на початку руху формулою типу*** $\tilde{x}=x_0+V_0t$.

а) $x(t)=-5+7t+e^{-t}$; б) $x(t)=-5+4\cos\sqrt{3}t+3\sin\sqrt{3}t$;

в) $x(t)=2+6t-3\sin 2t$; г) $x(t)=2-3e^{-2t}$;

д) $x(t)=\sqrt{3}\cos t-\sin t$; е) $x(t)=2+3t+e^{-2t}$;

є) $x(t)=7+2\cos t+\sqrt{5}\sin t$; ж) $x(t)=-1+4t-\sin 3t$;

з) $x(t)=5-e^{-4t}$; и) $x(t)=3\cos 2t+4\sin 2t$.

5. Напівкільце радіуса R ***з тонкого дроту має масу*** m ***і лежить на площині*** XY ***так, що: а)*** $y=\sqrt{R^2-x^2}$***; б)*** $y=-\sqrt{R^2-x^2}$***. Знайдіть координати його центра мас і момент інерції відносно осі ординат.***

6. Знайдіть: $\mathrm{Im}(z_1+z_2)$, $\mathrm{Re}(z_1+z_2)$, $|z_1\cdot z_2|$, $\arg(z_1^*\cdot z_2)$, $|z_1|+|z_2|$, ***якщо:*** а) $z_1=1-\sqrt{3}i$, $z_2=4e^{i\frac{\pi}{6}}$; б) $z_1=2+2i$, $z_2=3e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

III РІВЕНЬ

1. $$\begin{cases} m\dot{\upsilon}+u_0\,\dot{m}=0 \\ m\big|_{t=0}=m_0 \\ \upsilon\big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

а) $\upsilon(m)-?$, б) $m(\upsilon)-?$

2. $$\begin{cases} \varphi(x,y) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{x^2 + (y - y_A)^2}} + \dfrac{\beta}{\sqrt{(x - x_B)^2 + y^2}} \\ \vec{E}(x,y) = -grad\ \varphi(x,y) \end{cases}$$

$a)\ \left|\vec{E}(0;0)\right| - ?,\quad б)\ \dfrac{E_x(0;0)}{E_y(0;0)} - ?$

3. $$\begin{cases} \vec{E} = -grad\,\varphi \\ \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \alpha\vec{r}, & r < R \\ \dfrac{\alpha R^3 \vec{r}}{r^3}, & r \ge R \end{cases} \\ \varphi(\infty) = 0 \end{cases}$$

а) $\varphi(r) - ?$, б) Графік $\varphi(r) - ?$

4. $$\begin{cases} \dot{r} = \upsilon = const \\ \dot{\varphi} = \omega = const \\ x = r\cos\varphi \\ y - r\sin\varphi \\ a_r = \ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi \\ a_\varphi = -\ddot{x}\sin\varphi + \ddot{y}\cos s\,\varphi \end{cases}$$

а) $a_r\,(r,\omega) - ?$, б) $a_\varphi\,(\upsilon,\omega) - ?$

5. Знайдіть момент інерції однорідної півкулі відносно її осі симетрії. Маса півкулі m, а радіус R. Де знаходиться центр мас такої півкулі?

6. $\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$.

а) При якому співвідношенні між β і ω_0 загальний розв’язок буде мати вигляд $x(t) = a_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$?

б) Наблизьте такий розв’язок при малих t виразом $\tilde{x} = x_0 + V_0 t$, вважаючи $a_0, \beta, \omega, \alpha$ відомими.

7. Функція $x(t) = a\cos(\omega t - \varphi)$ є частинним розв'язком диференціального рівняння $\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$. Виразіть через ω_0, ω, β і f_0:

а) $\mathrm{tg}\,\varphi$; б) a.

8.

$$\begin{cases} \vec{F}(x;y) = \dfrac{\alpha\left[(x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j}\right]}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right]^{3/2}} \\ A = \displaystyle\int_{P_1}^{P_2} \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) \\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ P_1 \text{ і } P_2 - \text{точки, які мають абсциси } x_1 \text{ і } x_2 \text{ відповідно} \\ \text{і належать кривим, за якими ведеться інтегрування:} \\ а)\ y = kx^2, \quad б)\ y = pe^{qx} \end{cases}$$

$A - ?$

Примітка: точка $(x_0; y_0)$ вказаним кривим не належить

Список рекомендованої літератури:

1. Андрєєв А.М., Марченко О.А. Застосування математичних знань для розв'язування фізичних задач // Фізика та астрономія в школі. – 2004. – №5. – С. 12-15.

2. Афанасьєва (Тихонська) Н.І., Кенєва І.П., Мінаєв Ю.П. Психологічний аналіз стратегій засвоєння навчального матеріалу з фізики // Теорія та методика вивчення природничо-математичних дисциплін: Зб. наук.-метод. пр. Наукові записки Рівненського державного гуманітарного університету. – Рівне: РДГУ.– 2002. – Вип. 5. – С. 98-102.

3. Афанасьєва Н.І., Кенєва І.П., Мінаєв Ю.П. Залежність якості засвоєння школярами і студентами навчального матеріалу з фізики від рівня розвитку їхнього формального мислення // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т.Г. Шевченка. – Вип. 13. Серія: педагогічні науки: Зб. у 2-х т. – Чернігів: ЧДПУ. – 2002. – №13. – Т 2. – С. 167-172.

4. Виленкин Н.Я., Шварцбурд С.И. Математический анализ. Учеб. пособие для IX-X кл. сред. школ с матем. специализацией.— М.: Просвещение, 1973. – 512 с.

5. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. – М., 1968. – 576 с.

6. Зубов В.Г. Механика. – М., 1978. – 352 с.

7. Марченко О.А., Мінаєв Ю.П., Циганок М.М. Вплив системи оцінювання навчальних досягнень на вибір методів навчання // Зб. наук. пр. Педагогічні науки. – Херсон: Айлант. – 2001. – Вип. 24. – С. 37-44.

8. Мінаєв Ю.П., Кенєва І.П., Андрєєв А.М. Проблема навчального посібника для математичної підтримки поглибленого курсу фізики // Наукові записки Тернопільського державного педагогічного університету. Серія: Педагогіка. – 2002. – №6. – С. 102-107.

9. Минаев Ю.П., Тихонская Н.И. Проблема разработки таксономии требований к абитуриенту физического факультета университета // Зб. наук. пр. Кам'янець-Подільського державного університету: Серія педагогічна: Методологічні

принципи формування фізичних знань учнів і професійних якостей майбутніх учителів фізики та астрономії. – КДПУ. – 2003. – Вип. 9. – С. 108-110.

10. Орир Дж. Физика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – Т.1. – 336 с.

11. Понтрягин Л.С. Математический анализ для школьников. – М.: Наука, 1983. – 96 с.

12. Швець О., Бойко Л. Міжпредметні зв’язки математики і фізики: стан, проблеми, перспективи // Фізика та астрономія в школі. – 2002. – №6. – С. 21-25.

Навчальне видання

Кенєва Ірина Петрівна

Мінаєв Юрій Павлович

Тихонська Наталія Іванівна

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ВПРАВИ НА ВСТУПНИХ ІСПИТАХ ДО УНІВЕРСИТЕТУ ТА ОЛІМПІАДАХ ДЛЯ АБІТУРІЄНТІВ

Навчальний посібник

Рецензент О.Ю. Осипов
Відповідальний за випуск Н.І. Тихонська
Коректор Ю.П. Мінаєв