КОРНЕВЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА. ЖОРДАНОВА ФОРМА ОПЕРАТОРА

Корневые подпространства

Пусть λ_i – собственное значение оператора A алгебраической кратности k_i. Тогда *корневое подпространство*, соответствующее этому собственному значению, есть ядро линейного оператора $(A-\lambda_i I)^{k_i}$: $\mathrm{K}_i := \ker(A-\lambda_i I)^{k_i}$.

Корневое подпространство является *инвариантным* подпространством линейного оператора *A*. Если характеристический многочлен имеет каноническое разложение над данным полем

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{k_1}(\lambda_2-\lambda)^{k_2}...(\lambda_m-\lambda)^{k_m},$$

то пространство V раскладывается в прямую сумму корневых подпространств:

$$V = \mathrm{K}_1 \oplus \mathrm{K}_2 \oplus ... \oplus \mathrm{K}_m.$$

В этом случае объединение базисов всех корневых подпространств даст базис всего пространства V. В этом базисе матрица линейного оператора A является клеточно-диагональной. Для размерности корневого подпространства имеет место следующее часто применяемое свойство

$$\dim \mathrm{K}_i = k_i.$$

Заметим, что для любого $0 < l_i \le k_i$ имеет место вложение подпространств $\ker(A-\lambda_i I)^{l_i} \subset \ker(A-\lambda_i I)^{k_i} = \mathrm{K}_i$. При этом, если для некоторого l_i, размерности равны $\dim\ker(A-\lambda_i I)^{l_i} = k_i$, то равны и подпространства $\ker(A-\lambda_i I)^{l_i} = \mathrm{K}_i$, и, следовательно, для нахождения K_i, в этом случае достаточно линейный оператор $A-\lambda_i I$ возвести лишь в l_i степень.

Жорданова нормальная форма

Пусть V – конечномерное линейное пространство над полем комплексных чисел. Квадратная матрица k-го порядка

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda \end{pmatrix}$$

называется ***жордановой клеткой***, соответствующей комплексному числу λ.

Жорданова матрица – это матрица $J = diag\left(J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2),.., J_{k_m}(\lambda_m)\right)$ с жордановыми клетками $J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2),.., J_{k_m}(\lambda_m)$ на диагонали.

Корневым подпространством матрицы A, соответствующим собственному числу λ, называется множество всех тех векторов $\boldsymbol{x}$, для которых $(A-\lambda E)^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Цепным базисом корневого подпространства матрицы A (*жордановым базисом*), соответствующим собственному числу λ, называется такой его базис $\boldsymbol{x}_{ij}$, $1 \le i \le p$,

$1 \le j \le p_i$, для которого $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_{ij} = \boldsymbol{x}_{ij-1}$ и $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}_{i1} = \boldsymbol{0}$.

Свойства корневых подпространств и цепных базисов:

Теорема 1

1. Размерность корневого подпространства матрицы A, соответствующего собственному числу λ, совпадает с кратностью λ.
2. В каждом корневом подпространстве существует цепной базис.
3. Количество цепей фиксированной длины в произвольных двух цепных базисах одного и того же корневого подпространства одинаково.
4. Количество цепей в произвольном цепном базисе корневого подпространства матрицы A, соответствующего собственному числу λ, равно размерности соответствующего собственного подпространства.
5. Количество цепей длины не меньше чем в произвольном цепном базисе корневого подпространства матрицы A, соответствующего собственному числу λ, равно разности дефектов матриц $(A-\lambda E)^i$ и $(A-\lambda E)^{i-1}$.

Теорема 2 Для матрицы $\widetilde{A}$ линейного оператора существует *жорданов базис*, в котором матрица линейного оператора является жордановой матрицей: $J = T^{-1}\widetilde{A}T$, где T – матрица перехода. В этом случае матрица J называется *жордановой нормальной формой* матрицы $\widetilde{A}$. Жорданова нормальная форма матрицы определена однозначно с точностью до порядка жордановых клеток на диагонали.

Алгоритм нахождения жордановой нормальной формы квадратной матрицы порядка n:

1. Найти собственные значения матрицы $\widetilde{A}$ и их кратности**.**
2. Вычислить число всех жордановых клеток, соответствующих собственному значению λ по формуле

$$N(\lambda) = rang(\widetilde{A} - \lambda E).$$

3. Для каждого собственного значения λ матрицы A и для каждого $k \in N$ найти количество $N_k(\lambda)$ жордановых клеток k-го порядка, соответствующих собственному значению λ. Для этого вычислить числа $r_0(\lambda) = n$, $r_1(\lambda) = rang(A-\lambda E)$, $r_2(\lambda) = rang(A-\lambda E)^2$ и так далее до тех пор, пока для некоторого k не будет выполнено равенство равно $r_k(\lambda) = r_{k+1}(\lambda)$. После этого воспользоваться формулой

$$N_k(\lambda) = r_{k-1}(\lambda) - 2r_k(\lambda) + r_{k+1}(\lambda).$$

4. Построить жорданову нормальную форму матрицы A как блочно-диагональную матрицу, диагонали которой составляют найденные жордановы клетки. Следует обратить внимание, что в полученной матрице собственное значение должно встречаться на диагонали столько раз, какова его кратность.
5. Для нахождения жорданова базиса, в котором матрица линейного оператора является жордановой матрицей, нужно

I способ: найти матрицу перехода T, решив относительно T матричное уравнение: $J = T^{-1}\widetilde{A}T$**,** то есть $TJ - AT = \theta$.

II способ: в пункте 3 зафиксировать то наименьшее k^*, для которого $r_{k^*}(\lambda) = r_{k^*+1}(\lambda)$, и найти базис ядра матрицы $(A-\lambda E)^{k^*}$, решив однородную СЛАУ с матрицей $(A-\lambda E)^{k^*}$. Для каждого полученного базисного вектора $\boldsymbol{x}$ построить цепь $\boldsymbol{x}_k = (A-\lambda E)^k \boldsymbol{x}$. Выбрать $N_{k^*}(\lambda)$ цепей наибольшей длины, состоящих из линейно независимых элементов, – это часть искомого базиса. Проделать аналогичные действия для следующего (по убыванию) k, для которого $N_k(\lambda)\neq 0$, следя за линейной независимостью выбираемых векторов и выбранными раньше. Продолжать до тех пор, пока не будут выбраны все цепи. Составляем матрицу перехода T соответственно жордановой форме следующим образом: слева направо в матрице T по столбцам выписать координаты соответствующих базисных векторов в такой последовательности: сначала – собственный вектор, потом – следующий за ним вектор цепи и так далее. Тоже проделать для второй жордановой клетки, третей и так далее.

Пример 1 Найти жорданову нормальную форму матрицы:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -7\\ 9 & -3 & -7 & -1\\ 0 & 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни, т.е. собственные значения:

$$\det\left(\widetilde{A}-\lambda E\right)=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1 & 1 & -7\\ 9 & -3-\lambda & -7 & -1\\ 0 & 0 & 4-\lambda & -8\\ 0 & 0 & 2 & -4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^4=0\Rightarrow\lambda=0.$$

Число всех жордановых клеток, соответствующих собственному значению $\lambda=0$, равно:

$$N(0)=rang\left(\widetilde{A}-0E\right)=rang\widetilde{A}=2.$$

Число жордановых клеток 1-го порядка, соответствующих собственному значению $\lambda=0$, равно

$$N_1(0)=r_0(0)-2r_1(0)+r_2(0)=4-2\cdot 2+rang\left(\widetilde{A}-0E\right)^2=rang\widetilde{A}^2=rang\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0,$$

т.е. жорданова нормальная форма не содержит клеток 1-го порядка, соответствующих собственному значению $\lambda=0$.

Порядок матрицы $\widetilde{A}$ равен 4, всего 2 жордановых клетки и нет клеток 1-го порядка. Поэтому жорданова нормальная форма матрицы содержит только две жордановых клетки 2-го порядка (4=2+2):

$$J=diag\left(J_2(0),J_2(0)\right)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Пример 2 Определить жорданову нормальную форму $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 6 & -6 & 5\end{pmatrix}$ и жорданов базис.

Решение. Характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$, т.е.

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 6 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1.$$

Так как порядок матрицы равен 3, а число собственных значений также равно 3, то жорданова нормальная форма $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем жорданов базис. Так как собственные значения все разные и их количество равно рангу матрицы, то за базис можно взять собственное подпространство (систему собственных векторов): $\boldsymbol{x}_1(-1) = (1,\ 0,\ -1)$, $\boldsymbol{x}_2(2) = (0,\ 1,\ 2)$, $\boldsymbol{x}_3(1) = (1,\ 1,\ 0)$. Тогда

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$