ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ. ДЛИНА ВЕКТОРА. УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Вещественное линейное пространство E называется *вещественным евклидовым пространством* (или просто *евклидовым пространством*), если выполнены следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам этого пространства $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ставится в соответствие вещественное число, называемое *скалярным произведением* этих элементов и обозначаемое символом $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:

1°. $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})$ (*переместительное свойство* или *симметрия*).

2°. $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y})$ (*распределительное свойство*).

3°. $(\lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ для любого вещественного λ.

4°. $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) > 0$, если $\boldsymbol{x}$ – ненулевой элемент; $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = 0$, если $\boldsymbol{x}$ – нулевой элемент.

Приведем примеры евклидовых пространств.

Пример 1 Рассмотрим линейное пространство R_3 всех свободных векторов. Скалярное произведение любых двух векторов определим так, как это было сделано в аналитической геометрии (т.е. как произведение длин этих векторов на косинус угла между ними). В курсе аналитической геометрии была доказана справедливость для так определенного скалярного произведения аксиом 1° – 4°). Стало быть, пространство R_3 с так определенным скалярным произведением является евклидовым пространством.

Пример 2 Рассмотрим бесконечномерное линейное пространство $C_{[a,\ b]}$ всех функций $x(t)$, определенных и непрерывных на сегменте $a < t < b$. Скалярное произведение двух таких функций $x(t)$ и $y(t)$ определим как интеграл (в пределах от a до b) от произведения этих функций

$$\int_a^b x(t)y(t)dt.$$

Элементарно проверяется справедливость для так определенного скалярного произведения аксиом 1° – 4°. В самом деле, справедливость аксиомы 1° очевидна; справедливость аксиом 2° и 3° вытекает из линейных свойств определенного интеграла; справедливость аксиомы 4° вытекает из того, что интеграл $\int_a^b x^2(t)dt$ от непрерывной неотрицательной функции $x^2(t)$ неотрицателен и обращается в нуль лишь тогда, когда эта функция тождественно равна нулю на сегменте $a < t < b$ (т.е. является нулевым элементом рассматриваемого пространства). Таким образом, пространство $C_{[a,\ b]}$ с так определенным скалярным произведением представляет собой бесконечномерное евклидово пространство.

Пример 3 Следующий пример евклидова пространства дает n-мерное линейное пространство R_n упорядоченных совокупностей n вещественных чисел, скалярное произведение двух любых элементов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ которого определяется равенством

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n .$$

Справедливость для так определенного скалярного произведения аксиомы 1° очевидна; справедливость аксиом 2° и 3° легко проверяется (достаточно вспомнить определение операций сложения элементов и умножения их на числа; наконец, справедливость аксиомы 4° вытекает из того, что $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ всегда является неотрицательным числом и обращается в нуль лишь при условии $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Рассмотренное в этом примере евклидово пространство часто обозначают символом E_n.

Пример 4 В пространстве $P_n[x]$ всех многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами можно определить скалярное произведение таким образом

$$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = f_0 g_0 + f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n$$

для любых многочленов

$$\boldsymbol{f}(x) = f_0 x^n + f_1 x^{n-1} + \ldots + f_{n-1} x + f_n \text{ и } \boldsymbol{g}(x) = g_0 x^n + g_1 x^{n-1} + \ldots + g_{n-1} x + g_n .$$

Устанавливаемые ниже свойства справедливы для произвольного евклидова пространства как конечной, так и бесконечной размерности.

Теорема 1 Для любых двух элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ произвольного евклидова пространства справедливо неравенство

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \le (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}), \tag{1}$$

называемое *неравенством Коши-Буняковского*.

Доказательство. Для любого вещественного числа λ, в силу аксиомы 4° скалярного произведения, справедливо неравенство $(\lambda\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \lambda\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \ge 0$. В силу аксиом 1° – 3° последнее неравенство можно переписать в виде

$$\lambda^2 (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \ge 0 .$$

Необходимым и достаточным условием неотрицательности последнего квадратного трехчлена является неположительность его дискриминанта, т.е. неравенство

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \le 0 . \tag{2}$$

Из (2) сразу же вытекает неравенство (1). *Теорема доказана*.

Линейное пространство R называется *нормированным*, если выполнены следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого каждому элементу $\boldsymbol{x}$ пространства R ставится в соответствие вещественное число, называемое *нормой* (или *длиной*) указанного элемента и обозначаемое символом $\|\boldsymbol{x}\|$.

II. Указанное правило подчинено следующим трем аксиомам:

1°. $\|\boldsymbol{x}\| > 0$, если $\boldsymbol{x}$ – ненулевой элемент, $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, если $\boldsymbol{x}$ – нулевой элемент.

2°. $\|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda| \, \|\boldsymbol{x}\|$ для любого элемента $\boldsymbol{x}$ и любого вещественного числа λ.

3°. Для любых двух элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ справедливо следующее неравенство:

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|, \tag{3}$$

называемое *неравенством треугольника* (или *неравенством Минковского*).

Теорема 2 Всякое евклидово пространство является нормированным, если в нем норму любого элемента $\boldsymbol{x}$ определить равенством

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}. \tag{4}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для нормы, определенной соотношением (4), справедливы аксиомы 1° – 3° из определения нормированного пространства.

Справедливость для нормы аксиомы 1° сразу вытекает из аксиомы 4° скалярного произведения. Справедливость для нормы аксиомы 2° почти непосредственно вытекает из аксиом 1° и 3° скалярного произведения.

Остается убедиться в справедливости для нормы аксиомы 3°, т.е. неравенства (3). Будем опираться на неравенство Коши-Буняковского (1), которое перепишем в виде

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \le \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}\,\sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}.$$

С помощью последнего неравенства, аксиом 1° – 4° скалярного произведения и определения нормы получим

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})} = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} \le \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}\cdot\sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} + \sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}\right)^2} = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} + \sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$

Теорема доказана.

Следствие. Во всяком евклидовом пространстве с нормой элементов, определяемой соотношением (4), для любых двух элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ справедливо неравенство треугольника (3).

Заметим далее, что в любом вещественном евклидовом пространстве можно ввести понятие угла между двумя произвольными элементами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ этого пространства. В полной аналогии с векторной алгеброй, мы назовем *углом* φ между элементами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ тот (изменяющийся в пределах от 0 до π) угол, косинус которого определяется соотношением

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|} = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}\,\sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}}.$$

Данное нами определение угла корректно, ибо в силу неравенства Коши-Буняковского (1) дробь, стоящая в правой части последнего равенства, по модулю не превосходит единицы.

Пример 5 Пусть E – евклидово пространство, элементами которого являются действительные функции, непрерывные на отрезке $[0,\pi]$. Скалярное произведение двух произвольных элементов $\boldsymbol{f} = f(x)$ и $\boldsymbol{g} = g(x)$ пространства E определим известным способом $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \int\limits_0^\pi f(x)g(x)dx$. Требуется найти угол между элементами $\boldsymbol{a} = \sin x$ и $\boldsymbol{b} = \sin 3x$.

Решение. Согласно определению скалярного произведения

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \int\limits_0^\pi \sin x\cdot\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi(\cos 2x - \cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \cos 4x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi - \frac{1}{8}\sin 4x\Big|_0^\pi = 0, \quad \|\bar{a}\| = \|\bar{b}\| = \sqrt{\pi}.$$

На основании формулы угла $\cos\theta = 0$, следовательно, угол между элементами $\sin x$ и $\sin 3x$ пространства E равен $\dfrac{\pi}{2}$.

Далее договоримся называть два произвольных элемента $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ евклидова пространства E_n *ортогональными,* если скалярное произведение этих элементов $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ равно нулю (в этом случае косинус угла φ между элементами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ будет равен нулю).

Сумму $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ двух ортогональных элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ будем называть *гипотенузой* прямоугольного треугольника с катетами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$.

Теорема 3 (Пифагора) Квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов длин катетов.

Доказательство. Имеем

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}),$$

так как $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Учитывая, что $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{y}\|^2$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы: $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$.

В заключение запишем норму, неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника в каждом из конкретных евклидовых пространств, рассмотренных в предыдущем пункте.

В евклидовом пространстве всех свободных векторов с обычным определением скалярного произведения норма вектора а совпадает с его длиной $|\,\overline{a}\,|$, неравенство Коши-Буняковского приводится к виду $(\overline{a}, \overline{b})^2 \le |\,\overline{a}\,|^2 |\,\overline{b}\,|^2$, а неравенство треугольника – к виду $|\,\overline{a} + \overline{b}\,| \le |\,\overline{a}\,| + |\,\overline{b}\,|$.

В евклидовом пространстве $C_{[a,\,b]}$ всех непрерывных на сегменте $a < t < b$ функций $x = x(t)$ норма элемента $x = x(t)$ равна $\sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)dt}$, а неравенства Коши-Буняковского и треугольника имеют вид

$$\left(\int\limits_a^b x(t)y(t)dt\right)^2 \le \int\limits_a^b x^2(t)dt \int\limits_a^b y^2(t)dt, \qquad \sqrt{\int\limits_a^b (x(t) + y(t))^2 dt} \le \sqrt{\int\limits_a^b x^2(t)dt} + \sqrt{\int\limits_a^b y^2(t)dt}.$$

В евклидовом пространстве E_n упорядоченных совокупностей n вещественных чисел норма любого элемента $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ равна

$$\|\,\boldsymbol{x}\,\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2},$$

а неравенства Коши-Буняковского и треугольника имеют вид

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n)^2 \le \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2\right),$$

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + ... + (x_n + y_n)^2} \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}.$$