ОРТОГОНАЛЬНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Два подпространства L_1 и L_2 евклидова пространства называются *ортогональными* $(L_1 \perp L_2)$, если $\forall\, \boldsymbol{x} \in L_1,\ \forall\, \boldsymbol{y} \in L_2:\ \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ или $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

Лемма 1 Если $L_1 \perp L_2$, то $L_1 \cap L_2 = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{z} \in L_1 \cap L_2$, т.е. $\boldsymbol{z} \in L_1$ и $\boldsymbol{z} \in L_2$. Т.к. $L_1 \perp L_2$, то $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = 0 \Leftrightarrow \|\boldsymbol{z}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{z} = \boldsymbol{\theta}$, т.е. $L_1 \cap L_2 = \varnothing$.

Пусть L – произвольное подпространство n-мерного евклидова пространства *E*.

Совокупность $L^{\perp}$ всех элементов $\boldsymbol{y}$ пространства *E*, ортогональных к каждому элементу $\boldsymbol{x}$ подпространства L, называется *ортогональным дополнением* подпространства L.

Пример 1 V – пространство всех геометрических (свободных) векторов, L – подпространство всех векторов, параллельных некоторой плоскости; $L^{\perp}$ – подпространство всех векторов, перпендикулярных данной плоскости.

Пример 2 Дано подпространство $L = \langle \boldsymbol{a}_1 = (1,\ 2,\ 1,\ -3);\ \boldsymbol{a}_2 = (-1,\ 2,\ 3,\ 4) \rangle$. Определить базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$.

Решение. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ – вектор из ортогонального дополнения $L^{\perp}$. Тогда $\boldsymbol{x} \perp L$, т.е. $\begin{cases} (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}_1) = 0, \\ (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}_2) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$ Найдем ФСР полученной системы:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 3{,}5x_4, \\ x_2 = -x_3 - 0{,}25x_4 \end{cases} \Rightarrow$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\boldsymbol{x}_1$	1	–1	1	0
$\boldsymbol{x}_2$	3,5	–0,25	0	1

Векторы $(1,\ -1,\ 1,\ 0)$ и $(3{,}5,\ -0{,}25,\ 0,\ 1)$ образуют базис ортогонального дополнения $L^{\perp}$.

Пусть $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ – два произвольных элемента множества $L^{\perp}$, а $\boldsymbol{x}$ какой-либо элемент подпространства L. Очевидно, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) = 0$ и $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) = 0$ по свойству векторов множества $L^{\perp}$. Так как

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) = 0,$$

то $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in L^{\perp}$. Для произвольного числа α имеем $(\boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{y}_1) = \lambda (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) = 0$. Следовательно, и элемент $\lambda \boldsymbol{y}_1 \in L^{\perp}$. Таким образом, множество $L^{\perp}$ является подпространством евклидового пространства *E*.

Лемма 2 (критерий) Пусть $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n$ – базис в подпространстве L_1. Вектор $\boldsymbol{y} \in L_1^{\perp} \Leftrightarrow (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{e}_1) = 0,\ (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{e}_2) = 0,\ \ldots,\ (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{e}_n) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\boldsymbol{y} \in L_1^{\perp}$, тогда $\boldsymbol{y} \perp \forall\, \boldsymbol{x} \in L_1$ в том числе $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{e}_n$.

Достаточность. Пусть $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_i) = 0 \quad \forall\, i = \overline{1, n}$, поскольку $\forall\, \boldsymbol{x} \in L_1$: $\boldsymbol{x} = \xi_1 \boldsymbol{e}_1 + \xi_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \xi_n \boldsymbol{e}_n$, то $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \xi_1 (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_1) + \xi_2 (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_2) + \ldots + \xi_n (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{e}_n) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y} \in L_1^{\perp}$.

Теорема 1 Евклидово пространство E есть прямая сумма произвольного подпространства $L \subset E$ и его ортогонального дополнения $L^{\perp}$, т.е. $E = L \oplus L^{\perp}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_n$ – ортонормированный базис в подпространстве L. Возьмем произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in E$ и сопоставим следующий вектор: $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \left[\underbrace{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + \ldots + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n}_{\boldsymbol{y} \in L} \right]$ $\forall\, i = \overline{1, n}$ имеем (скалярное умножение на $\boldsymbol{e}_1$):

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1)\overbrace{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_i)}^{=0} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2)\overbrace{(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_i)}^{=0} - \ldots - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)\overbrace{(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)}^{=1} - \ldots -$$

$$- (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_n)\overbrace{(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_i)}^{=0} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i) = 0.$$

Следовательно по Лемме 2 $\boldsymbol{z} \in L^{\perp}$, т.е. $\forall \boldsymbol{x} \in E$: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{z} \in L^{\perp}$ $\Rightarrow E = L + L^{\perp}$. Но $L \perp L^{\perp}$, следовательно по Лемме 1 $L \cap L^{\perp} = \varnothing$, откуда по определению прямой суммы вытекает, что $E = L \oplus L^{\perp}$.

Следствие 1 $\dim L + \dim L^{\perp} = \dim E$.

Замечание В равенстве $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ теоремы 1 вектор $\boldsymbol{y}$ – ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство, $\boldsymbol{z}$ – ортогональная составляющая вектора $\boldsymbol{x}$ относительно подпространства.

Пример 3 Определить проекцию вектора $\boldsymbol{x} = (-2, 1, 3, 4)$ на подпространство $L = \langle \boldsymbol{f}_1 = (1;\, 2;\, 0;\, 2);\ \boldsymbol{f}_2 = (-1, -3, 4, -2) \rangle$ и ортогональную составляющую вектора $\boldsymbol{x}$ относительно подпространства L.

Решение.

I способ.

1) Построить ортонормированный базис данного подпространства. Координаты векторов $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ не пропорциональны, следовательно, векторы $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ образуют базис подпространства L. Применим к этому базису процесс ортогонализации Грамма-Шмидта.

Сначала по $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ строим ортогональный базис $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$:

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1 = (1, 2, 0, 2); \qquad (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1) = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2 = 9;$$

$$(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_1) = -1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -11;$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_1)}{(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1)} \boldsymbol{g}_1 = (-1, -3, 4, -2) - \frac{-11}{9}(1;\, 2;\, 0;\, 2) =$$

$$=\frac{1}{9}\Big[\ 9(-1;\ -3;\ 4;\ -2)+11(1;\ 2;\ 0;\ 2)\ \Big]=\frac{1}{9}(2;\ -5;\ 36;\ 4)$$

$$\text{или } \boldsymbol{g}_2=(2;\ -5;\ 36;\ 4).$$

Как видно, $\boldsymbol{g}_1 \perp \boldsymbol{g}_2$, т.к. $(\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2)=0$.

Построим теперь ортонормированный базис подпространства L:

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{g}_1}{\|\boldsymbol{g}_1\|}=\frac{\boldsymbol{g}_1}{\sqrt{(\boldsymbol{g}_1;\ \boldsymbol{g}_1)}}=\frac{1}{3}(1;\ 2;\ 0;\ 2)=\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 0;\ \frac{2}{3}\right);$$

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|}=\frac{\boldsymbol{g}_2}{\sqrt{(\boldsymbol{g}_2;\ \boldsymbol{g}_2)}}=\frac{1}{\sqrt{1341}}(2;\ -5;\ 36;\ 4)=\left(\frac{2}{\sqrt{1341}};\ -\frac{5}{\sqrt{1341}};\ \frac{36}{\sqrt{1341}};\ \frac{4}{\sqrt{1341}}\right).$$

2) Найти скалярные произведения данного вектора $\boldsymbol{x}$ и векторов найденного базиса:

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_1)=-2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}+3\cdot 0+4\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3},$$

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_2)=-2\cdot\frac{2}{\sqrt{1341}}+1\cdot\frac{-5}{\sqrt{1341}}+3\cdot\frac{36}{\sqrt{1341}}+4\cdot\frac{4}{\sqrt{1341}}=\frac{115}{\sqrt{1341}}.$$

3) Найти ортогональную проекцию $\boldsymbol{y}$ вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство L и ортогональную составляющую $\boldsymbol{z}$ вектора $\boldsymbol{x}$ относительно подпространства L:

$$\boldsymbol{y}=\text{пр}_L\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2=\frac{8}{3}\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 0;\ \frac{2}{3}\right)+$$

$$+\frac{115}{\sqrt{1341}}\left(\frac{2}{\sqrt{1341}};\ -\frac{5}{\sqrt{1341}};\ \frac{36}{\sqrt{1341}};\ \frac{4}{\sqrt{1341}}\right)=\left(\frac{8}{9};\ \frac{16}{9};\ 0;\ \frac{16}{9}\right)+$$

$$+\left(\frac{230}{1341};\ -\frac{575}{1341};\ \frac{4140}{1341};\ \frac{460}{1341}\right)=\frac{1}{149}(158;\ 201;\ 460;\ 316);$$

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(-2;\ 1;\ 3;\ 4)-\frac{1}{149}(158;\ 201;\ 460;\ 316)=\frac{1}{149}(-456;\ -52;\ -13;\ 280).$$

II способ.

1) Построить базис данного подпространства. Как было указано в первом способе данные векторы $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ являются линейно независимыми, значит образуют базис.

2) Так как по определению $\boldsymbol{y}$, представляющий ортогональную проекцию $\boldsymbol{x}$ на подпространство L, принадлежит L, то его можно выразить через базисные векторы этого подпространства, т.е. $\boldsymbol{y}=\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2$. Таким образом, получим

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{z}.$$

Домножим последнее равенство скалярно на $\boldsymbol{f}_1$:

$$(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f}_1)=(\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{f}_1)=\alpha_1(\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_1)+\alpha_2(\boldsymbol{f}_2;\ \boldsymbol{f}_1)+(\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{f}_1)=\alpha_1(\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_1)+\alpha_2(\boldsymbol{f}_2;\ \boldsymbol{f}_1),$$

$$\text{т.к. } \boldsymbol{z}\in L^{\perp}.$$

Аналогично,

$$(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f}_2)=(\alpha_1\boldsymbol{f}_1+\alpha_2\boldsymbol{f}_2+\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{f}_2)=\alpha_1(\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_2)+\alpha_2(\boldsymbol{f}_2;\ \boldsymbol{f}_2).$$

Вычислив соответствующие скалярные произведения:

$$(\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_1)=9,\ (\boldsymbol{f}_1;\ \boldsymbol{f}_2)=-11,\ (\boldsymbol{f}_2;\ \boldsymbol{f}_2)=30,\ (\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f}_1)=8,\ (\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f}_2)=3,$$

получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 9\alpha_1 - 11\alpha_2 = 8, \\ -11\alpha_1 + 30\alpha_2 = 3. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $\alpha_1 = \dfrac{273}{149}$, $\alpha_2 = \dfrac{115}{149}$, а, значит

$$\boldsymbol{y} = \frac{273}{149}\boldsymbol{f}_1 + \frac{115}{149}\boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{149}\left(158;\ 201;\ 460;\ 316\right).$$

Из равенства $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ будем иметь:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \left(-2;\ 1;\ 3;\ 4\right) - \frac{1}{149}\left(158;\ 201;\ 460;\ 316\right) = \frac{1}{149}\left(-456;\ -52;\ -13;\ 280\right).$$