ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС

Будем говорить, что n элементов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ n-мерного евклидова пространства E_n образуют *ортонормированный базис* этого пространства, если эти элементы попарно ортогональны и норма каждого из этих элементов равна единице, т.е. если

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = \begin{cases} 1, \text{ при } i = k; \\ 0, \text{ при } i \neq k. \end{cases} \tag{1}$$

Примером ортонормированного базиса может служить декартов прямоугольный базис евклидова пространства всех свободных векторов или совокупность n элементов $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, …, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, ..., 1)$ евклидова пространства всех упорядоченных совокупностей n вещественных чисел.

Докажем теперь следующую основную теорему.

Теорема 1 Во всяком n-мерном евклидовом пространстве E_n существует ортонормированный базис.

Доказательство. Согласно определению размерности в пространстве E_n найдется n линейно независимых элементов $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$.

Докажем, что можно построить n элементов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$, линейно выражающихся через $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$, и, образующих ортонормированный базис (т.е. удовлетворяющих соотношениям (1)).

Проведем доказательство возможности построения таких элементов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ методом математической индукции.

Если имеется только один элемент $\boldsymbol{f}_1$, то для построения элемента $\boldsymbol{e}_1$ с нормой, равной единице, достаточно нормировать элемент $\boldsymbol{f}_1$, т.е. положим

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{f}_1}{\|\boldsymbol{f}_1\|} \qquad (\|\boldsymbol{e}_1\| = 1).$$

Из элементов $\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$ образуем $\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \alpha\,\boldsymbol{g}_1$. Число α возьмем таким, чтобы $(\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_1) = 0$. Имеем

$$0 = (\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_1) = (\boldsymbol{f}_2 - \alpha \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1) = (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_2) - \alpha(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1) = (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_1) - \alpha.$$

Следовательно, $\alpha = \dfrac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_1)}{(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1)}$, а $\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \dfrac{(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_1)}{(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1)} \cdot \boldsymbol{g}_1$. Положим

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|} \qquad (\|\boldsymbol{e}_2\| = 1).$$

Единичный вектор $\boldsymbol{e}_2$ ортогонален вектору $\boldsymbol{e}_1$. Построим теперь вспомогательный вектор $\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \mu \boldsymbol{g}_1 - \lambda \boldsymbol{g}_2$. Подберем числа μ и λ так, чтобы $(\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_1) = 0$, $(\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_2) = 0$. Для определения этих чисел имеем уравнения

$$0 = (\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_1) = (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_1) - \mu(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1), \qquad 0 = (\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_2) = (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_2) - \lambda(\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_2).$$

Следовательно, $\mu = \dfrac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_1)}{(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1)}$, $\lambda = \dfrac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_2)}{(\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_2)}$, а $\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \dfrac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_1)}{(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1)} \cdot \boldsymbol{e}_1 - \dfrac{(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_2)}{(\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_2)} \cdot \boldsymbol{e}_2$.

Единичный вектор

$$e_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|} \qquad\qquad (\|e_3\| = 1).$$

очевидно, ортогонален единичным векторам e_1 и e_2.

Продолжая процесс создания попарно ортогональных единичных векторов e_1, e_2, e_3, …, построим за конечное число шагов ортонормированный базис n – мерного евклидового пространства:

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|},$$

$$e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}, \quad g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1,$$

$$e_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|}, \quad g_3 = f_3 - \frac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1 - \frac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)} \cdot g_2,$$

…………………………………………………..

$$e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|}, \quad g_n = f_n - \frac{(f_n, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1 - \frac{(f_n, g_2)}{(g_2, g_2)} \cdot g_2 - \ldots \frac{(f_n, g_{n-1})}{(g_{n-1}, g_{n-1})} \cdot g_{n-1}. \tag{2}$$

Заметим, что различных ортонормированных базисов евклидового пространства бесконечно много, так как бесконечно много базисов $f_1, f_2, ..., f_n$, из которых процессом ортогонализации можно создавать ортонормированные.

Доказанная теорема приводит к следующему осуществляемому шаг за шагом алгоритму построения по данной системе n линейно независимых элементов $f_1, f_2, ..., f_n$ системы n попарно ортогональных элементов e_1, e_2, …, e_n, норма каждого из которых равна единице:

Указанный алгоритм обычно называют *процессом ортогонализации* линейно независимых элементов $f_1, f_2, ..., f_n \cdot$(процесс ортогонализации Грамма-Шмидта).

Замечание. Конечно, в каждом n-мерном евклидовом пространстве существует много ортонормированных базисов. Действительно, если например, строить ортонормированный базис процессом ортогонализации одних и тех же линейно независимых элементов $f_1, f_2, ..., f_n$, то, начиная процесс ортогонализации с различных элементов f_k, мы придем к различным ортонормированным базисам.

Пример 1 Применить процесс ортогонализации Грамма-Шмидта к системе векторов $f_1 = (1,\ 2,\ 2)$, $f_2 = (1,\ 1,\ -5)$, $f_3 = (3,\ 2,\ 8)$.

Решение. Сначала построим ортогональный базис g_1, g_2, g_3:

$$g_1 = f_1 = (1,\ 2,\ 2),$$

$$g_2 = f_2 - \frac{(f_2, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1 = (1,\ 1,\ -5) - \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-5)}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2} \cdot (1,\ 2,\ 2) = \frac{1}{9}(16,\ 23,\ -31)$$

или $g_2 = (16,\ 23,\ -31)$,

$$g_3 = f_3 - \frac{(f_3, g_1)}{(g_1, g_1)} \cdot g_1 - \frac{(f_3, g_2)}{(g_2, g_2)} \cdot g_2 = (3,\ 2,\ 8) - \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 2}{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2} \cdot (1,\ 2,\ 2) -$$

$$- \frac{3 \cdot 16 + 2 \cdot 23 + 8 \cdot (-31)}{16 \cdot 16 + 23 \cdot 23 + (-31) \cdot (-31)} \cdot (16,\ 23,\ -31) = \frac{270}{1746}(12,\ -7,\ 1)$$

или $g_3 = (12,\ -7,\ 1)$.

Построен ортогональный базис $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$. Получим из него ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{g}_1}{\|\boldsymbol{g}_1\|} = \frac{1}{3}(1,\ 2,\ 2) = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right),$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1746}}(16,\ 23,\ -31),$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{g}_3}{\|\boldsymbol{g}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{194}}(12,\ -7,\ 1).$$

Свойства ортонормированного базиса. Пусть $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n$ – произвольный ортонормированный базис n-мерного евклидова пространства, а $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ – два произвольных элемента этого пространства. Найдем выражение скалярного произведения $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ этих элементов через их координаты относительно базиса $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n$.

Обозначим координаты элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n$ соответственно через $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ и $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$, т.е. предположим, что $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n$. Тогда

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n\ , y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n)$$

или

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i\ , \sum_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n. \tag{3}$$

Таким образом, *в ортонормированном базисе скалярное произведение двух любых элементов равно сумме произведений соответствующих координат этих элементов*.

Рассмотрим теперь в n-мерном евклидовом пространстве совершенно произвольный (вообще говоря, не ортонормированный) базис $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ и найдем выражение скалярного произведения двух произвольных элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ через координаты этих элементов относительно указанного базиса.

Обозначим координаты элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ относительно базиса $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ соответственно через $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ и $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$, т.е. предположим, что

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{f}_n, \qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{f}_n.$$

Пользуясь аксиомами скалярного произведения, получим

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{f}_n\ , y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{f}_n) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{f}_i\ , \sum_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{f}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j).$$

Таким образом, в произвольном базисе $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ скалярное произведение двух любых элементов $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{f}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{f}_n$ определяется равенством

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \boldsymbol{x}G\boldsymbol{y}^t, \tag{4}$$

где матрица $G=(a_{ij})$ – *матрица Грамма*, $(i,j=\overline{1,n})$ имеет элементы $a_{ij}=(\boldsymbol{f}_i,\boldsymbol{f}_j)$; $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$; $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ ...,\ y_n)$ – матрицы-строки координат элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соответственно**.**

Матрице Грамма поставим в соответствие ее определитель: $\det G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ ...,\ \boldsymbol{f}_n)$.

Свойства определителя Грамма:

1. $\det G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ ...,\ \boldsymbol{f}_n)\geq 0$.
2. $\det G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ ...,\ \boldsymbol{f}_n)=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ ...,\ \boldsymbol{f}_n$ – линейно зависимы.
3. Для $k=1$, $\det G(\boldsymbol{f}_1)=(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_1)=|\ \boldsymbol{f}_1\ |^2$ – квадрат длины вектора;

$k=2$, $\det G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2)=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2)\\ (\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_2)\end{vmatrix}$ – квадрат площади;

$k=3$, $\det G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_2)=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2) & (\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_3)\\ (\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_2) & (\boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_3)\\ (\boldsymbol{f}_3,\ \boldsymbol{f}_1) & (\boldsymbol{f}_3,\ \boldsymbol{f}_2) & (\boldsymbol{f}_3,\ \boldsymbol{f}_3)\end{vmatrix}$ – квадрат объема;

$k=s$, $\det G(\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ ...,\ \boldsymbol{f}_s)$ – квадрат объема s-мерного параллелепипеда, со сторонами $\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ ...,\ \boldsymbol{f}_s$.

4. Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта не меняет определитель Грамма.

Пример 2 В пространстве R^3 с матрицей Грамма $G=\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 6 & -10\\ 4 & -10 & 23\end{pmatrix}$ найти угол между векторами $\boldsymbol{x}=(1;\ 2;\ 3)$ и $\boldsymbol{y}=(1;\ 0;\ -5)$.

Решение. Напомним, что косинус угла между ненулевыми векторами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\ \|\boldsymbol{y}\|}.$$

Найдем скалярное произведение $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 6 & -10\\ 4 & -10 & 23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -5\end{pmatrix}=-256.$$

Найдем нормы векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ по формулам $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ и $\|\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 6 & -10\\ 4 & -10 & 23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=128\Rightarrow\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{128}=8\sqrt{2};$$

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=(1\quad 0\quad -5)\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 6 & -10\\ 4 & -10 & 23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -5\end{pmatrix}=536\Rightarrow\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{536}=2\sqrt{134}.$$

Итак, $\cos\varphi=\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\ \|\boldsymbol{y}\|}=\dfrac{-256}{8\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{134}}=-\dfrac{8\sqrt{67}}{67}$.

Ответ: $\varphi \approx \pi - \arccos\frac{8\sqrt{67}}{67}$.

Вернемся к рассмотрению произвольного ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ n-мерного евклидова пространства. Выясним смысл координат произвольного элемента $\boldsymbol{x}$ относительно указанного базиса. Обозначим координаты элемента $\boldsymbol{x}$ относительно базиса $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ через x_1, x_2, …, x_n, т.е. предположим, что

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + ... + x_n\boldsymbol{e}_n. \tag{5}$$

Обозначим далее через k любой из номеров 1, 2, ..., n и умножим обе части (5) скалярно на элемент $\boldsymbol{e}_k$. На основании аксиом скалярного произведения и соотношений (1) получим

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) = x_k.$$

Таким образом, координаты произвольного элемента относительно ортонормированного базиса равны скалярным произведениям этого элемента на соответствующие базисные элементы.

Поскольку скалярное произведение произвольного элемента $\boldsymbol{x}$ на элемент $\boldsymbol{e}$, имеющий норму, равную единице, естественно назвать *проекцией элемента* $\boldsymbol{x}$ *на элемент* $\boldsymbol{e}$, то можно сказать, что координаты произвольного элемента относительно ортонормированного базиса равны проекциям этого элемента на соответствующие базисные элементы.

Таким образом, произвольный ортонормированный базис обладает свойствами, вполне аналогичными свойствам декартова прямоугольного базиса.