УНИТАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Линейное пространство над полем комплексных чисел называется *комплексным евклидовым пространством* или *унитарным*, если в нём определена операция скалярного произведения двух любых векторов, т.е. указано правило, по которому каждой паре векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ пространства ставится в соответствие комплексное число $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$, при этом выполняются следующие условия (аксиомы скалярного произведения):

1. $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})}$
2. $(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{y})$.
3. $(\alpha\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.
4. $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) \geq 0$ и $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}) = 0$ лишь при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Здесь α – произвольное комплексное число; $\overline{(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})}$ – число, сопряженное числу $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$; $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})$ – действительное число.

Установим необходимые для дальнейшего свойства скалярного произведения.

Свойство 1 $(\boldsymbol{x},\ \alpha\boldsymbol{y}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$.

Доказательство. Согласно аксиомам 1 и 3 скалярного произведения имеем

$$(\boldsymbol{x},\ \alpha\boldsymbol{y}) = \overline{(\alpha\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})} = \overline{\alpha(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})} = \overline{\alpha}\,\overline{(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})} = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}).$$

Свойство 2 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_2)$.

Доказательство. Согласно аксиомам 1 и 2 скалярного произведения имеем

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \overline{(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{x})} = \overline{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{x})} = \overline{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{x})} + \overline{(\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{x})} = (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}_2).$$

Комплексное евклидово пространство можно сделать нормированным, если каждому вектору $\boldsymbol{x}$ поставить в соответствие действительное число $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})}$. Проверка аксиом нормы осуществляется также, как в вещественном евклидовом пространстве. Она основана на использовании неравенства Коши-Буняковского для унитарного пространства

$$(\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}))^2 \leq (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}).$$

Доказательство этого неравенства аналогично доказательству неравенства Коши-Буняковского для вещественного евклидова пространства.

В унитарном пространстве понятие угла между двумя векторами не определяется, однако два вектора $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ таких, что $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = 0$, называются *ортогональными*.

В комплексном евклидовом пространстве существуют ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации произвольного базиса унитарного пространства в точности совпадает с описанным выше процессом ортогонализации базиса вещественного евклидова пространства.

Пусть $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n$ – ортонормированный базис комплексного евклидова пространства, а $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n$ – два произвольно взятых вектора этого пространства. Тогда на основании аксиом и свойств скалярного произведения

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) = (x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n,\ y_1\boldsymbol{e}_1 + y_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + y_n\boldsymbol{e}_n) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\overline{y_j},$$

где $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$, …, $\overline{y_n}$ – числа, сопряженные комплексным числам y_1, y_2, …, y_n. Таким образом, *скалярное произведение двух векторов унитарного пространства, в котором выбран ортонормированный базис, равно сумме произведений координат первого вектора на соответствующие сопряженные значения координат второго вектора*.